

# Meccanica

M. Fanti <sup>1</sup>

*Università degli Studi and INFN, Milano, Italy*

ultimo aggiornamento: 8 settembre 2020

<sup>1</sup>Marcello.Fanti@mi.infn.it



# Prefazione

Ho preparato questo testo come supporto per il corso di Meccanica Newtoniana, che tengo all'Università per studenti del 1° anno della Laurea in Fisica. Il contenuto dovrebbe essere sufficiente per lo studio del relativo esame. Alcune sezioni del testo sono indicate con un asterisco (\*): contengono sviluppi matematici più approfonditi e possono essere omessi ad una prima lettura.

Questo testo non pretende di essere esaustivo: è una dispensa, pertanto è in evoluzione. Può contenere elementi più moderni rispetto ad un libro stampato, ma potrebbero anche esserci omissioni. Qualora un lettore ne rilevasse di importanti, sarei lieto di saperlo, e valuterei se fare delle aggiunte. In ogni caso, si consiglia l'approfondimento della materia e soprattutto lo svolgimento di esercizi anche su altri libri di testo.

L'accesso a questo documento è libero e gratuito, il materiale è scaricabile da internet, stampabile e/o fotocopiabile, *ad esclusivo uso personale*. Diffido chiunque, persone fisiche o associazioni, dall'intraprendere qualunque forma di redistribuzione, informatica o cartacea, di questo testo.

Marcello Fanti  
professore associato  
Università degli Studi di Milano

`marcello.fanti@mi.infn.it`



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1	La materia e la sua struttura . . . . .	1
1.1.1	Materia e massa . . . . .	1
1.1.2	Gli stati di aggregazione della materia . . . . .	2
1.1.3	La struttura degli atomi . . . . .	3
1.2	Materia in continuo movimento . . . . .	4
1.3	Le interazioni fondamentali . . . . .	5
1.3.1	Forze e campi di forza . . . . .	6
1.3.2	La gravità . . . . .	6
1.3.3	Interazioni fra cariche elettriche . . . . .	7
1.3.4	Interazioni elettriche e gravitazionali . . . . .	8
1.3.5	Campo elettrico e magnetico, onde elettromagnetiche . . . . .	8
1.3.6	Interazioni nucleari: forte e debole . . . . .	9
1.3.7	La fusione nucleare nelle stelle . . . . .	11
1.4	L'energia . . . . .	12
1.5	Le leggi della Fisica e il metodo sperimentale . . . . .	16
1.6	Ambiti di validità della Meccanica Newtoniana . . . . .	19
1.7	Misure in Fisica . . . . .	23
1.7.1	Unità di misura . . . . .	23
1.8	Le costanti fondamentali della Fisica . . . . .	26
1.9	Simboli usati per le grandezze fisiche . . . . .	28
<b>2</b>	<b>Cinematica unidimensionale</b>	<b>31</b>
2.1	Posizione e spostamenti su una linea . . . . .	32
2.2	Legge oraria del moto . . . . .	34
2.3	Velocità media . . . . .	34
2.4	Velocità istantanea . . . . .	36
2.4.1	Spostamento come integrale della velocità istantanea . . . . .	38
2.5	Accelerazione . . . . .	38
2.6	Unità di misura . . . . .	39
2.7	Moto uniforme . . . . .	41

2.8	Moto uniformemente accelerato . . . . .	41
2.9	Esercizi di cinematica unidimensionale . . . . .	43
2.10	Riassunto dei concetti sul moto lungo una linea . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Derivazione e integrazione</b>	<b>53</b>
3.1	Definizione di derivata . . . . .	53
3.1.1	Nota sulla simbologia delle derivate . . . . .	54
3.2	Definizione di integrale . . . . .	55
3.2.1	Nota sulla variabile di integrazione . . . . .	56
3.2.2	Funzione primitiva . . . . .	57
3.2.3	Teorema fondamentale del calcolo infinitesimale . . . . .	57
3.3	Principali regole di derivazione e integrazione . . . . .	58
3.4	Variazione di una funzione di una variabile . . . . .	59
3.5	Variazione di una funzione composta . . . . .	60
3.6	L'esponenziale complesso (*) . . . . .	61
3.6.1	Alcune identità . . . . .	61
3.6.2	Rappresentazioni cartesiana e esponenziale . . . . .	62
3.6.3	Regole di somma in trigonometria . . . . .	62
3.6.4	Derivata di un esponenziale complesso . . . . .	62
3.6.5	Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Posizioni nello spazio</b>	<b>67</b>
4.1	Posizione nello spazio . . . . .	67
4.2	Raggio vettore (o vettore-posizione) . . . . .	69
4.3	Vettore spostamento . . . . .	69
4.3.1	Prodotto di un vettore-spostamento per un numero . . . . .	69
4.3.2	Somma di vettori-spostamento . . . . .	70
4.3.3	Differenza di vettori-spostamento . . . . .	74
4.3.4	Vettore-spostamento e versori . . . . .	74
4.4	Misure angolari . . . . .	75
4.4.1	Definizione di radianti . . . . .	76
4.4.2	Ripasso delle funzioni trigonometriche . . . . .	78
4.5	Coordinate polari . . . . .	78
4.5.1	Coordinate polari in 2 dimensioni . . . . .	79
4.5.2	Coordinate cilindriche e sferiche in 3D . . . . .	79
4.6	Angoli solidi . . . . .	81
4.7	Digressione: misure di distanze astronomiche (*) . . . . .	82
4.7.1	Misura del raggio della Terra . . . . .	83
4.7.2	Distanze fra Terra, Luna e Sole . . . . .	84
4.7.3	Distanze planetarie . . . . .	85
4.7.4	Distanze stellari . . . . .	89

<b>5</b>	<b>Derivazione e integrazione in più dimensioni (*)</b>	<b>95</b>
5.1	Derivate parziali . . . . .	95
5.2	Variazione di una funzione di più variabili . . . . .	96
5.2.1	Gradiente e matrice Hessiana . . . . .	97
5.3	Variazione di una funzione composta . . . . .	97
5.4	Integrali in 2 o 3 dimensioni . . . . .	98
5.4.1	Coordinate cartesiane e angolari . . . . .	100
5.5	Esempi di calcoli di integrali . . . . .	102
5.5.1	Integrale della Gaussiana . . . . .	102
5.5.2	Volume e superficie di una sfera . . . . .	103
5.5.3	Superficie e volume del segmento sferico . . . . .	104
5.5.4	Funzione $\Gamma$ (*) . . . . .	105
5.5.5	Volumi e superfici di ipersfere in $N$ dimensioni (*) . . . . .	106
<b>6</b>	<b>Vettori</b>	<b>109</b>
6.1	Vettori in fisica . . . . .	110
6.2	Operazioni elementari con vettori . . . . .	111
6.3	Prodotto scalare di due vettori . . . . .	112
6.3.1	Proiezione di un vettore lungo una direzione . . . . .	113
6.4	Prodotto vettoriale di due vettori . . . . .	114
6.5	Identità vettoriali . . . . .	115
6.6	Trasformazioni di vettori . . . . .	116
6.6.1	Invarianza del prodotto scalare (*) . . . . .	118
6.6.2	Trasformazione vettoriale del gradiente (*) . . . . .	119
6.7	Rotazioni e inversioni spaziali (*) . . . . .	120
6.7.1	Combinazioni di rotazioni . . . . .	121
6.7.2	Rotazioni infinitesime . . . . .	121
6.7.3	Inversioni spaziali . . . . .	122
6.8	Vettori e pseudo-vettori (*) . . . . .	123
6.9	Calcolo tensoriale (*) . . . . .	124
6.9.1	Il tensore di Levi-Civita (*) . . . . .	125
6.10	Digressione: a che ora sorge e tramonta il Sole? (*) . . . . .	126
<b>7</b>	<b>Cinematica</b>	<b>131</b>
7.1	Traiettoria e legge oraria . . . . .	131
7.1.1	Spostamenti lungo la traiettoria . . . . .	132
7.1.2	Successione di spostamenti infinitesimi . . . . .	133
7.2	Velocità . . . . .	134
7.2.1	Spostamento come integrale della velocità . . . . .	135
7.2.2	Velocità scalare . . . . .	135
7.3	Accelerazione . . . . .	136

7.3.1	Variazione di velocità come integrale dell'accelerazione	136
7.4	Moto rettilineo uniforme	137
7.5	Moto uniformemente accelerato	139
7.5.1	Integrazione del moto	139
7.5.2	Traiettoria	141
7.5.3	Esercizi sul moto rettilineo uniformemente accelerato	142
7.5.4	Esercizi sui moti di caduta	143
7.6	Moti circolari	147
7.6.1	Raggio di curvatura, velocità angolare	148
7.6.2	Accelerazione tangenziale e centripeta	149
7.6.3	Moto circolare uniforme	151
7.6.4	Velocità angolare come vettore	152
7.6.5	Derivata di vettore che ruota intorno a un asse	153
7.7	Traiettorie curve	154
7.8	Esercizi	156
7.9	Riassunto	159
<b>8</b>	<b>Dinamica del punto materiale</b>	<b>163</b>
8.1	Le leggi della dinamica	163
8.1.1	Unità di misura	165
8.2	Natura delle forze	167
8.3	Commenti sulla legge di inerzia	168
8.3.1	Come verificare la legge di inerzia?	168
8.3.2	Un ragionamento più articolato	170
8.4	Commenti sulla legge di Newton	172
8.4.1	Commenti su forza e accelerazione	174
8.4.2	Integrazione del moto	174
8.4.3	Condizione di equilibrio statico	175
8.4.4	Forza tangenziale e centripeta	176
8.5	Commenti sulla legge di azione-reazione	176
8.6	Quantità di moto	179
8.6.1	Forze impulsive, impulso di una forza	179
8.6.2	Conservazione della quantità di moto	180
8.6.3	Misure di massa	181
8.6.4	Esercizi sulla quantità di moto	182
<b>9</b>	<b>Forze “macroscopiche”</b>	<b>185</b>
9.1	La “forza-peso”	186
9.1.1	Proporzionalità fra forza-peso e massa	186
9.2	Reazioni vincolari	187
9.2.1	Esercizi sulle reazioni vincolari	188



9.3	Tensioni su fili inestensibili . . . . .	191
9.3.1	Propagazione della tensione lungo un filo “ideale” . . .	192
9.3.2	Carrucola ideale e filo ideale . . . . .	193
9.3.3	Esercizi sulle tensioni . . . . .	196
9.4	Moti su un piano inclinato . . . . .	199
9.5	Forze elastiche . . . . .	201
9.5.1	Forza elastica di una molla . . . . .	201
9.5.2	Misure statiche di forze . . . . .	202
9.5.3	Misure di massa con una molla . . . . .	203
9.5.4	Esercizi sulle forze elastiche . . . . .	204
9.5.5	Modello elastico delle forze vincolari . . . . .	206
9.6	Forze di attrito . . . . .	207
9.6.1	Attrito statico . . . . .	208
9.6.2	Attrito radente (o dinamico) . . . . .	210
9.6.3	Attrito viscoso . . . . .	212
9.6.4	Attriti in ambiente non statico . . . . .	216
9.6.5	Esercizi sugli attriti . . . . .	217
9.7	Esercizi sulle forze macroscopiche . . . . .	221
<b>10</b>	<b>Moti oscillatori</b>	<b>233</b>
10.1	Oscillazioni di una molla . . . . .	233
10.1.1	Moto oscillatorio armonico . . . . .	236
10.2	Moto di un pendolo ideale . . . . .	239
10.3	Oscillazioni forzate . . . . .	242
10.3.1	Soluzione generale del moto . . . . .	243
10.3.2	Condizioni iniziali . . . . .	244
10.3.3	Battimenti e risonanza . . . . .	246
10.4	Oscillatore armonico smorzato (*) . . . . .	247
10.4.1	Oscillatore armonico smorzato libero . . . . .	247
10.4.2	Oscillatore armonico smorzato con forzante . . . . .	250
<b>11</b>	<b>Interazioni a distanza, campi di forza</b>	<b>255</b>
11.1	Campi di forza . . . . .	255
11.2	Forze gravitazionali . . . . .	256
11.2.1	Legge della gravitazione universale . . . . .	257
11.2.2	Il campo gravitazionale . . . . .	258
11.2.3	Gravità, massa e accelerazione . . . . .	259
11.3	Forze elettromagnetiche (cenni) . . . . .	259
11.3.1	Unità di misura elettromagnetiche . . . . .	260
11.3.2	Campo elettrico generato da cariche ferme . . . . .	260
11.3.3	Confronto fra forza di Coulomb e forza gravitazionale	262

11.3.4	Sorgenti di campi elettromagnetici (cenni) (*) . . . . .	263
11.4	Campi di forza centrali . . . . .	266
11.4.1	Il “problema dei due corpi” . . . . .	266
11.4.2	Caso-limite: $m_1 \gg m_2$ . . . . .	267
11.4.3	Caso generale . . . . .	268
11.5	Sull’integrazione del moto . . . . .	269
11.5.1	Integrazione con il metodo iterativo (*) . . . . .	270
<b>12</b>	<b>Lavoro ed energia cinetica</b>	<b>273</b>
12.1	Lavoro di una forza . . . . .	273
12.1.1	Alcune riflessioni sul lavoro elementare . . . . .	275
12.1.2	Lavoro di un sistema di forze . . . . .	278
12.2	Energia cinetica . . . . .	278
12.2.1	Derivazione alternativa . . . . .	280
12.3	Potenza di una forza . . . . .	280
12.4	Unità di misura . . . . .	280
12.5	Problemi su lavoro, energia, potenza . . . . .	281
12.6	Lavoro di forze macroscopiche . . . . .	285
12.6.1	Lavoro della forza-peso . . . . .	285
12.6.2	Lavoro delle forze vincolari — vincolo in quiete . . . . .	286
12.6.3	Lavoro delle forze di attrito — ambiente statico . . . . .	287
12.6.4	Lavoro delle forze di attrito — ambiente in movimento . . . . .	287
12.6.5	Esercizi . . . . .	290
<b>13</b>	<b>Forze conservative, energia potenziale</b>	<b>293</b>
13.1	Forze conservative . . . . .	295
13.2	Definizione dell’energia potenziale . . . . .	296
13.2.1	Riferimento — o “zero” — dell’energia potenziale . . . . .	298
13.3	Energia meccanica . . . . .	298
13.4	Regione cinematicamente accessibile . . . . .	299
13.5	Lavoro di forze “esterne” . . . . .	299
13.6	Energia potenziale di un campo di forza uniforme . . . . .	301
13.6.1	Energia potenziale della forza-peso . . . . .	302
13.7	Campi di forza centrali . . . . .	302
13.7.1	Campi centrali $\propto \frac{1}{r^2}$ . . . . .	303
13.8	Combinazione di campi di forze conservative . . . . .	304
13.8.1	Energia potenziale gravitazionale . . . . .	305
13.8.2	Energia potenziale elettrostatica . . . . .	306
13.9	Forza come “meno” gradiente dell’energia potenziale . . . . .	307
13.10	Superfici equipotenziali . . . . .	310

13.10.1	Un criterio per stabilire se una forza è conservativa (*)	311
13.11	Esercizi sull'energia meccanica	315
<b>14</b>	<b>Energia nelle forze elastiche</b>	<b>319</b>
14.1	Energia elastica	319
14.1.1	Energia meccanica nel moto armonico	320
14.2	Esercizi sulle forze elastiche	321
14.3	Oscillazioni intorno ad un punto di equilibrio	323
14.4	Forze elastiche nei materiali	327
14.4.1	Modello delle reazioni vincolari (*)	328
14.5	Moto oscillatorio smorzato, considerazioni energetiche (*)	331
14.5.1	Attrito $\propto v^2$	333
<b>15</b>	<b>Momento angolare</b>	<b>335</b>
15.1	Momento angolare, momento torcente	335
15.1.1	Alcune proprietà	336
15.2	Alcuni casi notevoli	337
15.2.1	Moto libero	337
15.2.2	Moto su un piano	337
15.2.3	Forza radiale	338
15.2.4	Moti in un campo di forza centrale	340
15.2.5	Orbite circolari in un campo di forza centrale	340
15.3	Forza impulsiva	343
15.4	Lavoro del momento torcente	343
15.5	Leve meccaniche	344
15.6	Principio di azione-reazione e conservazione del momento angolare	346
<b>16</b>	<b>Sistemi di riferimento, forze fittizie</b>	<b>347</b>
16.1	Alcune considerazioni preliminari	347
16.2	Sistemi di riferimento in moto traslatorio relativo	350
16.2.1	Una riflessione sulle trasformazioni di velocità (*)	353
16.2.2	Esercizi sulla trasformazione delle velocità	354
16.2.3	L'aberrazione stellare	357
16.3	SR in moto traslatorio rettilineo uniforme	359
16.3.1	Trasformazioni di Galileo	359
16.3.2	Dinamica in SR in moto relativo rettilineo uniforme	359
16.3.3	Principio di relatività	360
16.4	Dinamica in SR in moto traslatorio accelerato	361
16.4.1	Esercizi sulle forze fittizie	362
16.5	Dinamica in sistemi di riferimento rotanti	365

16.5.1	Derivata di un vettore in un SR rotante . . . . .	365
16.5.2	Trasformazione delle velocità . . . . .	367
16.5.3	Trasformazione delle accelerazioni . . . . .	368
16.5.4	Forze fittizie in sistemi rotanti . . . . .	369
16.5.5	Le centrifughe . . . . .	370
16.6	Forze fittizie e sistemi inerziali . . . . .	371
16.7	Gravità e forze fittizie . . . . .	372
16.7.1	Caduta libera . . . . .	374
16.7.2	Gravità artificiale . . . . .	375
16.8	Moti sulla superficie della Terra . . . . .	377
16.8.1	Forze centrifughe, ridefinizione della verticale, campo gravitazionale efficace . . . . .	378
16.8.2	Forze di Coriolis . . . . .	380
16.8.3	Il pendolo di Foucault . . . . .	382
16.8.4	Caduta di un grave da una torre . . . . .	386
<b>17</b>	<b>Dinamica dei sistemi di punti materiali</b>	<b>391</b>
17.1	Notazione . . . . .	392
17.2	Quantità di moto e momento angolare . . . . .	393
17.2.1	Sistema isolato, quantità conservate . . . . .	397
17.3	Lavoro ed energia . . . . .	398
17.3.1	Lavoro delle forze interne . . . . .	398
17.3.2	Forze interne centrali, energia potenziale . . . . .	399
17.3.3	Riassumendo: lavoro ed energia . . . . .	402
17.4	Centro di massa . . . . .	402
17.5	Variabili dinamiche nel SR del centro di massa . . . . .	404
17.5.1	Momento angolare nel SRCM . . . . .	405
17.5.2	Energia nel SRCM . . . . .	407
17.5.3	Ricapitolando... . . . . .	410
17.5.4	Un caso particolare: forza-peso come forza esterna . . . . .	412
17.6	Conservazione della massa . . . . .	413
17.7	Problemi con “massa variabile” . . . . .	415
17.7.1	Il razzo a combustibile . . . . .	415
17.7.2	Il satellite in un ambiente “polveroso” . . . . .	417
17.8	Sistemi legati, andamenti medi, teorema del viriale . . . . .	418
<b>18</b>	<b>Urti</b>	<b>423</b>
18.1	Generalità . . . . .	423
18.2	Conservazione della quantità di moto . . . . .	423
18.3	Energia negli urti . . . . .	425
18.3.1	Invarianza di $\Delta\mathcal{E}_{tot}$ (*) . . . . .	425

18.3.2	Urti dissipativi, coefficiente di restituzione (*) . . . . .	426
18.4	Urto totalmente inelastico . . . . .	428
18.5	Urto elastico . . . . .	429
18.5.1	Urto elastico: caso unidimensionale . . . . .	430
18.6	Urti elastici in due dimensioni . . . . .	431
18.6.1	Discussione dei 3 casi . . . . .	434
18.6.2	Energia trasferita . . . . .	435
18.7	Urti elastici nel sistema di riferimento del centro di massa . . . . .	435
18.8	Trasferimento di energia negli urti elastici . . . . .	436
<b>19</b>	<b>Dinamica del corpo rigido</b>	<b>439</b>
19.1	Definizione di corpo rigido . . . . .	439
19.1.1	Gradi di libertà di un corpo rigido . . . . .	439
19.1.2	Movimenti di un corpo rigido . . . . .	441
19.1.3	Scelta del polo . . . . .	443
19.1.4	Sistema di riferimento “solidale” . . . . .	444
19.2	Dinamica del corpo rigido . . . . .	446
19.2.1	Quantità dinamiche, equazioni cardinali . . . . .	446
19.2.2	Forza equivalente . . . . .	446
19.2.3	Condizioni di equilibrio statico . . . . .	447
19.2.4	Quantità dinamiche nel SRCM . . . . .	448
19.2.5	Energia cinetica . . . . .	448
19.2.6	Effetti della forza-peso . . . . .	450
19.3	Rotazione e momento angolare . . . . .	452
19.3.1	I momenti di inerzia . . . . .	452
19.3.2	Momenti di inerzia nel SRCM . . . . .	455
19.3.3	Equazioni del moto nel SRLAB e nel SRSOL . . . . .	457
19.3.4	Lavoro dei momenti torcenti . . . . .	459
19.4	Approssimazione continua e densità . . . . .	460
19.5	Calcolo del centro di massa . . . . .	464
19.5.1	Oggetti con simmetrie . . . . .	464
19.5.2	Oggetti composti . . . . .	467
19.6	Calcolo dei momenti di inerzia . . . . .	469
19.6.1	Momenti di inerzia notevoli . . . . .	470
19.6.2	Momenti di inerzia di corpi composti . . . . .	473
19.6.3	Momenti di inerzia notevoli — dimostrazioni . . . . .	475
19.7	Introduzione alle prossime sezioni . . . . .	479
19.8	Rotazione intorno a un asse fisso . . . . .	481
19.8.1	Dinamica della rotazione intorno a un asse fisso . . . . .	484
19.8.2	Teorema di Huygens-Steiner per rotazioni intorno a un asse fisso . . . . .	485

19.8.3	Moto del “pendolo fisico” . . . . .	485
19.9	Rotolamento su una superficie . . . . .	488
19.9.1	Rotolamento su un piano inclinato con forza-peso . . .	491
19.9.2	Rotolamento ed energia meccanica . . . . .	493
19.9.3	Alcuni esempi . . . . .	494
19.10	Rotazioni in assenza di momento torcente . . . . .	495
19.10.1	Rotazione intorno a un asse principale . . . . .	497
19.10.2	Precessione intorno a un asse principale . . . . .	497
19.10.3	Precessione, come appare nel SRCM (*) . . . . .	500
19.11	La trottola simmetrica . . . . .	503
19.11.1	Trattazione semplice . . . . .	503
19.11.2	Trattazione generale del problema (*) . . . . .	505
<b>20</b>	<b>Matematica dei campi vettoriali (*)</b>	<b>517</b>
20.1	Generalità . . . . .	517
20.2	Campi vettoriali . . . . .	518
20.3	Integrali di linea e circuitazione di un campo vettoriale . . . .	519
20.4	Superfici orientate, definizione di flusso . . . . .	519
20.5	Campi solenoidali, flusso concatenato . . . . .	521
20.6	Operatori differenziali vettoriali (*) . . . . .	522
20.6.1	Alcune proprietà degli operatori differenziali (*) . . . .	523
20.7	Teoremi della divergenza e del rotore (*) . . . . .	523
20.7.1	Altre relazioni integrali (*) . . . . .	524
20.7.2	Dimostrazione dei teoremi (*) . . . . .	525
<b>21</b>	<b>Nozioni di fluidodinamica</b>	<b>527</b>
21.1	I fluidi . . . . .	527
21.1.1	Velocità di deriva e densità di un fluido . . . . .	527
21.1.2	Unità di misura della densità . . . . .	529
21.2	Forze di volume e di superficie . . . . .	530
21.2.1	Pressione in un fluido . . . . .	531
21.2.2	Unità di misura della pressione . . . . .	532
21.2.3	Equazione della dinamica del fluido . . . . .	533
21.2.4	Forze viscosi (*) . . . . .	534
21.3	Pressione fluidostatica . . . . .	536
21.3.1	Liquidi statici, legge di Stevin . . . . .	537
21.3.2	Il barometro a mercurio di Torricelli . . . . .	538
21.3.3	Propagazione della pressione: legge di Pascal . . . . .	539
21.3.4	Galleggiamento: la legge di Archimede . . . . .	540
21.4	Altimetro a pressione . . . . .	545
21.5	Moto stazionario di un liquido non viscoso . . . . .	548

21.5.1	Portata . . . . .	548
21.5.2	Teorema di Bernoulli . . . . .	549
21.5.3	Considerazioni energetiche . . . . .	552
21.5.4	Esercizi su liquidi in moto stazionario . . . . .	553
21.6	Dinamica dei fluidi: equazioni di Eulero (*) . . . . .	555
<b>22</b>	<b>Moti in campi gravitazionali</b>	<b>559</b>
22.1	Gravitazione universale . . . . .	559
22.1.1	Massa sferica non puntiforme . . . . .	560
22.2	Il campo gravitazionale . . . . .	561
22.2.1	Massa inerziale e gravitazionale, principio di equivalenza	562
22.3	Energia gravitazionale . . . . .	563
22.3.1	Campo centrale . . . . .	563
22.3.2	Generalizzazione . . . . .	564
22.3.3	Energia potenziale vicino alla superficie terrestre . . .	565
22.4	Potenziale gravitazionale . . . . .	567
22.5	Il Sistema Solare . . . . .	568
22.6	Campo gravitazionale di un oggetto esteso (*) . . . . .	572
22.7	Teorema di Gauss per il campo gravitazionale . . . . .	574
22.8	Campo gravitazionale generato da un oggetto sferico . . . . .	576
22.8.1	Dimostrazione, con il teorema di Gauss . . . . .	578
22.8.2	Dimostrazione, usando il potenziale gravitazionale (*)	579
22.8.3	Potenziale gravitazionale generato da un guscio sferico — dimostrazione (*) . . . . .	581
22.9	Orbite circolari in un campo centrale . . . . .	583
22.10	Esercizi sulle orbite circolari . . . . .	583
22.11	Orbite ellittiche: le Leggi di Keplero . . . . .	586
22.11.1	Proprietà geometriche dell'ellisse . . . . .	588
22.12	Come è stata scoperta la gravitazione universale? . . . . .	589
22.12.1	Misura della costante $G$ . . . . .	592
22.13	Moti in un campo gravitazionale centrale . . . . .	593
22.13.1	Costanti del moto . . . . .	594
22.13.2	Regione cinematicamente accessibile . . . . .	595
22.13.3	Parametri dell'orbita ellittica . . . . .	597
22.14	Soluzione generale del moto in un campo centrale . . . . .	598
22.14.1	Equazione radiale . . . . .	598
22.14.2	Traiettoria . . . . .	599
22.14.3	La 3 <sup>a</sup> legge di Keplero . . . . .	602
22.15	Problemi di voli spaziali . . . . .	603
22.16	Maree . . . . .	608
22.17	Punti Lagrangiani . . . . .	616

22.17.1	Calcolo dei punti $L_1$ e $L_2$ . . . . .	618
<b>23</b>	<b>Relatività speciale</b>	<b>621</b>
23.1	Esperimento di Michelson-Morley . . . . .	622
23.1.1	L'apparato . . . . .	623
23.1.2	La misura . . . . .	625
23.1.3	Conclusioni . . . . .	626
23.2	Critica alle trasformazioni di Galileo . . . . .	627
23.3	Trasformazioni del tempo e dello spazio . . . . .	628
23.3.1	Simultaneità . . . . .	630
23.3.2	Trasformazioni delle lunghezze ortogonali al moto . . . . .	632
23.3.3	Trasformazioni del tempo . . . . .	633
23.3.4	Trasformazioni delle lunghezze parallele al moto . . . . .	635
23.3.5	Riassunto . . . . .	637
23.4	Le trasformazioni di Lorentz . . . . .	637
23.4.1	Lorentz vs Galileo . . . . .	639
23.4.2	Dilatazione dei tempi (di nuovo) . . . . .	639
23.4.3	Contrazione delle lunghezze (di nuovo) . . . . .	640
23.5	Lo spazio-tempo e i quadrivettori . . . . .	643
23.5.1	Quadrivettori . . . . .	644
23.5.2	Distanza fra eventi . . . . .	645
23.5.3	Causalità . . . . .	645
23.5.4	Grafici spaziotemporali . . . . .	648
23.5.5	Grafici delle trasformazioni di Lorentz . . . . .	649
23.6	Il tempo proprio . . . . .	651
23.7	Trasformazioni delle velocità . . . . .	653
23.7.1	Quadrivelocità . . . . .	655
23.8	Viaggi a velocità relativistiche . . . . .	656
23.8.1	Viaggio verso una stella . . . . .	656
23.8.2	Viaggio verso una stella e ritorno . . . . .	657
23.8.3	Il “paradosso” dei gemelli . . . . .	659
23.9	Effetto Doppler . . . . .	661
23.9.1	L'effetto Doppler in astrofisica . . . . .	663
23.10	Dinamica relativistica . . . . .	664
23.10.1	Quantità di moto ed energia relativistiche . . . . .	664
23.10.2	Conservazione dell'energia relativistica . . . . .	666
23.10.3	Quadriimpulso, massa, velocità . . . . .	668
23.10.4	Conversioni massa $\leftrightarrow$ energia . . . . .	669
23.10.5	Annichilazione materia-antimateria . . . . .	673
23.10.6	Decadimenti di particelle . . . . .	674
23.10.7	Nota sulla “massa relativistica” . . . . .	677



# Capitolo 1

## Introduzione

La Fisica è una *scienza sperimentale quantitativa*. Lo scopo della Fisica è di trovare le *leggi fondamentali* che regolano tutti i *fenomeni osservabili* nel nostro Universo.

Allo scopo di contestualizzare i contenuti di questo testo, conviene iniziare con un riassunto della nostra conoscenza attuale dell'Universo. Si tratterà necessariamente di una esposizione qualitativa, utile ad introdurre una serie di concetti fondamentali (materia, massa, particelle, interazioni, forze, energia, ...). La trattazione scientifica di questi concetti sarà il contenuto dei capitoli successivi.

### 1.1 La materia e la sua struttura

Qualunque struttura presente nel nostro Universo — che sia un atomo, un materiale solido, liquido, gassoso, che sia più piccolo di un batterio, o grande come un pianeta o una stella — è formato di *materia*.

#### 1.1.1 Materia e massa

Uno dei concetti fondamentali della fisica è quello di *massa*. Rimandando ai capitoli successivi una definizione precisa, in questa fase introduttiva associamo il concetto di “massa di un oggetto” a quello di “quantità di materia che costituisce un oggetto”. Più è grande la massa di un oggetto, più è difficile metterlo in moto se è fermo, oppure frenarlo o fargli cambiare direzione se è già in movimento.

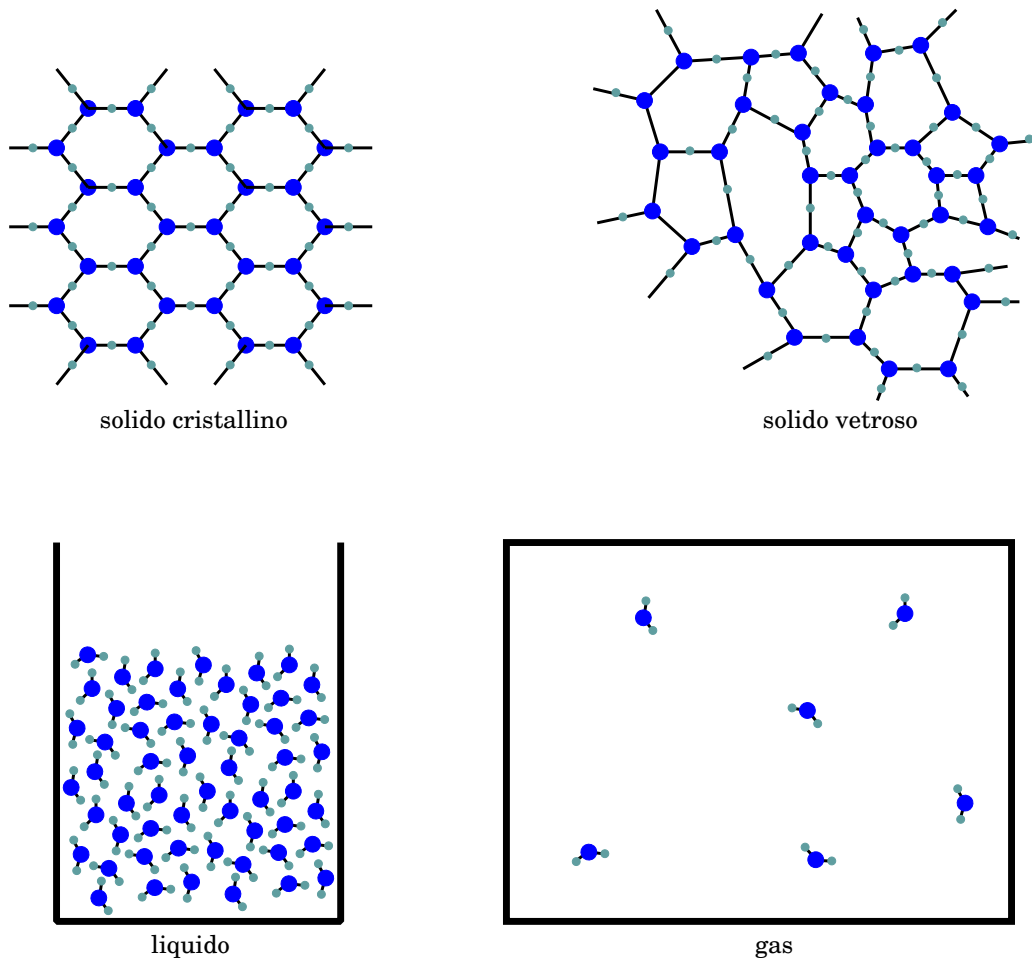


Figura 1.1: *Stati di aggregazione della materia: solido cristallino (ordinato) e vetroso (disordinato); liquido; gas.*

### 1.1.2 Gli stati di aggregazione della materia

La materia a noi nota — solida, liquida, o gassosa — è formata di *atomi*. Questi, nell’ambiente in cui viviamo, sono solitamente aggregati a formare *molecole*, o in alcuni casi *cristalli*.

Le possibili aggregazioni della materia sono schematicamente rappresentate in Fig. 1.1.

- Lo stato solido ha forma e volume propri. La sua rigidità è dovuta al fatto che le distanze interatomiche sono fisse. La geometria può essere ordinata (cristalli) o disordinata (solidi “vetrosi”).
- Lo stato liquido ha volume definito ma non ha forma propria. Le

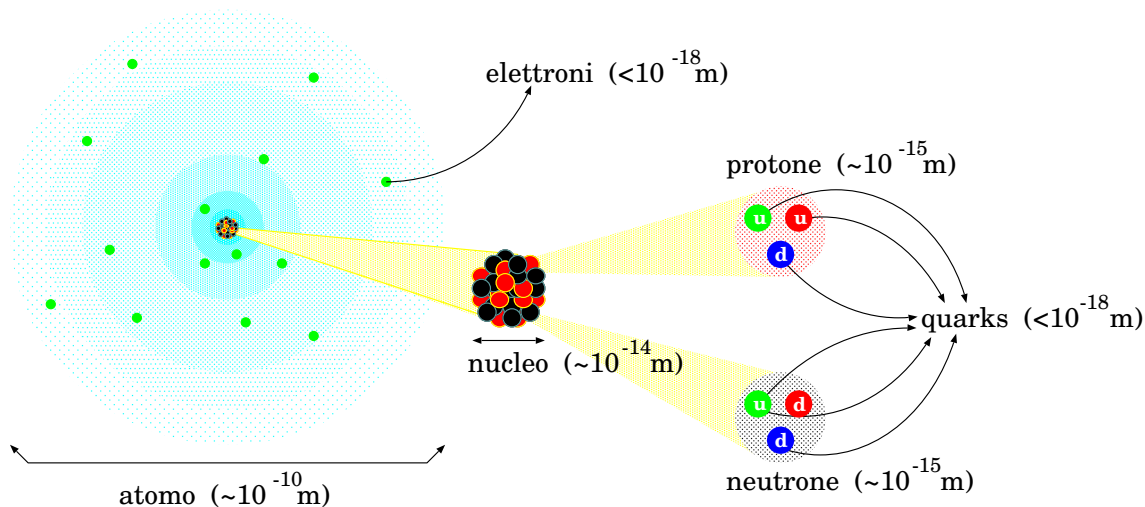


Figura 1.2: *Struttura dell'atomo, con le dimensioni approssimate. La zona sfumata intorno al nucleo centrale rappresenta la nube elettronica: essa non ha confini precisi, è una distribuzione di probabilità che decresce con la distanza dal nucleo, azzerandosi asintoticamente. NOTA: Elettroni e quarks non sono "statici": al contrario si muovono invece molto rapidamente — anche se il concetto di "movimento" in sistemi così piccoli non va inteso nel senso comune,*

molecole sono vicine fra loro ma non sono rigidamente legate, quindi possono spostarsi, purché non si allontanino l'una dall'altra, e purché ciascuna non invada il volume occupato da un'altra.

- Lo stato gassoso non ha volume proprio né forma propria: il gas può espandersi indefinitamente, occupando tutto il volume che ha a disposizione. Un gas è formato da atomi o molecole rarefatti, che si muovono in maniera relativamente libera nel volume disponibile — anche se gli urti sono possibili.

I cristalli e le molecole sono aggregati di atomi, tenuti insieme dai "legami chimici".

### 1.1.3 La struttura degli atomi

Gli atomi non sono costituenti fondamentali: in effetti sono strutture composte, come schematizzato in Fig. 1.2.

Un atomo ha una parte centrale, il *nucleo*, che porta sostanzialmente tutta la massa dell'atomo. Intorno al nucleo si muovono gli *elettroni*. Dal

numero di elettroni  $Z$  (o “numero atomico”) dipendono tutte le proprietà chimiche di un elemento. È proprio la struttura degli elettroni di un atomo che consente di formare legami chimici con altri atomi, formando le molecole.

Il nucleo è costituito di *protoni* e *neutroni*. Protone e neutrone hanno masse molto simili, e circa 2000 volte maggiori della massa dell’elettrone:  $m_p \simeq m_n \simeq 2000 m_e$ . Il numero dei protoni è sempre uguale al numero degli elettroni,  $Z$ . Il numero dei neutroni è variabile: per nuclei leggeri protoni e neutroni sono in uguale quantità, mentre per nuclei pesanti i neutroni sono più numerosi, approssimativamente 1.5 volte più numerosi dei protoni. Il numero totale di protoni e neutroni si chiama “numero di massa”  $A$ . In natura esistono molti elementi chimici che, a parità di numero atomico  $Z$ , hanno diversi numeri di massa  $A$ : si chiamano *isotopi*, e differiscono per il numero di neutroni contenuti nel nucleo.

Protoni e neutroni sono a loro volta formati da tre particelle più piccole, chiamate *quarks*. Secondo lo stato attuale della nostra conoscenza, gli elettroni e i quarks sono *particelle elementari*, ovvero non sono costituite da componenti più piccoli. Per quel che ne sappiamo essi sono *puntiformi*. . . in ogni caso, se possiedono un’estensione spaziale, essa deve essere inferiore a  $10^{-18}$  m (un miliardesimo di miliardesimo di metro!)

La materia ordinaria che ci circonda, è per lo più “vuota”: le dimensioni tipiche di un atomo (cioè il diametro della sua “nuvola di elettroni”) sono circa di  $10^{-10}$  m (un decimo di nanometro); tuttavia, quasi tutta la materia dell’atomo è concentrata nel nucleo, che è 10 000 volte più piccolo ( $10^{-14}$  m). Quindi, la materia di un atomo occupa solo  $\frac{1}{(10\,000)^3} = 10^{-12}$  del volume dell’atomo: un millesimo di miliardesimo <sup>[1]</sup>!

## 1.2 Materia in continuo movimento

La natura non è statica. Ogni cosa che ci circonda è caratterizzata da un continuo movimento. Molti esempi cadono direttamente sotto la nostra esperienza comune: la caduta di un oggetto, lo scorrere dell’acqua in un fiume o il soffiare del vento. . . Ma anche il moto della Luna intorno alla Terra, dei pianeti intorno al Sole, delle stelle in una galassia.

Vi sono poi molti altri fenomeni caratterizzati da movimenti, ma troppo piccoli per cadere direttamente sotto i nostri sensi. Vediamo alcuni esempi.

---

<sup>1</sup> Se un atomo fosse grande come il Duomo di Milano, il nucleo in proporzione sarebbe grande come un moscone. . .

In un liquido o in un gas apparentemente fermo, le molecole sono in continuo movimento disordinato. Persino nei solidi, gli atomi non sono fermi, ma vibrano, ciascuno intorno alla propria posizione di equilibrio. La percezione macroscopica che abbiamo di questi movimenti microscopici è la *temperatura*: più un oggetto è “caldo”, più rapido è il moto delle molecole o degli atomi che lo costituiscono.

I suoni che udiamo, sono in realtà *onde acustiche*, ovvero rapide compressioni e rarefazioni del mezzo (aria), prodotte dalla vibrazione di una sorgente sonora (uno strofinio, un motore, uno strumento musicale, . . .), che possono propagarsi nello spazio, fino a raggiungere le nostre orecchie.

Gli elettroni si muovono molto rapidamente all'interno dell'atomo, tipicamente restando confinati intorno al nucleo. Tuttavia, in alcune configurazioni della materia (per esempio nei metalli), esistono elettroni meno legati all'atomo: essi possono quindi trasferirsi ad atomi vicini, e sotto opportune condizioni possono acquisire un moto collettivo “medio” (o “di deriva”), al netto dei singoli spostamenti caotici. L'effetto macroscopico è la *corrente elettrica*.

## 1.3 Le interazioni fondamentali

Dunque l'Universo è in continuo movimento. I corpi celesti si muovono nello Spazio. Le molecole e gli atomi di un qualunque materiale non sono mai fermi. Anche le stesse particelle elementari non sono da pensare come “mattoni” attaccati gli uni agli altri. Al contrario, esse sono in continua agitazione: gli elettroni si muovono intorno ai nuclei atomici, i quarks si muovono all'interno dei protoni e dei neutroni.

Che cosa aggrega le stelle in galassie, tiene i pianeti in orbita intorno al Sole, tiene uniti nuclei, atomi e molecole? Che cosa impedisce loro di “scappare via”?

*La materia resta “legata” a causa delle “interazioni”.*

In generale, possiamo definire le “interazioni” come qualunque cosa che modifichi il moto di oggetti.

### 1.3.1 Forze e campi di forza

In Fisica classica, la grandezza associata alle interazioni è la *forza* <sup>[2]</sup>. Un oggetto che può produrre interazione, crea nello spazio circostante un *campo di forza*: qualunque altro oggetto che possa subire quell'interazione “sente” la presenza del campo di forza.

### 1.3.2 La gravità

Grandi quantità di materia (pianeti, stelle, galassie, etc etc) sono tenute insieme dalla *interazione gravitazionale*: essa è sempre attrattiva, e tanto più intensa quanto più grandi sono le quantità di materia coinvolte.

I pianeti orbitano intorno al Sole (e non intorno alla Terra!) perché esso è l'oggetto più massiccio del Sistema Solare: contiene da solo il 99.9% della materia del Sistema Solare.

La forza gravitazionale è un'*interazione a distanza*, che si indebolisce all'aumentare della distanza  $r$  fra oggetti, con una legge quadratica inversa:  
 $\propto \frac{1}{r^2}$ .

La nostra Galassia, la Via Lattea, contiene circa 400 miliardi di stelle, si estende per circa 100 000 anni-luce, ovvero circa  $10^{18}$  km (un miliardo di miliardi di chilometri!), ed ha una massa stimata pari a  $10^{12}$  volte (1000 miliardi di volte) la massa del Sole. La Via Lattea fa parte di un gruppo locale di galassie. Anche questi sistemi, ben più estesi di un sistema planetario, sono tenuti insieme dalla attrazione gravitazionale.

La gravità governa il moto delle grandi strutture nell'Universo (sistemi planetari, galassie, ammassi di galassie, ...), ma è del tutto ininfluenza nella descrizione di sistemi più piccoli, in cui dominano le interazioni fra molecole, atomi e loro costituenti (elettroni, protoni, neutroni, ...)

---

<sup>2</sup> Come vedremo meglio, per descrivere correttamente le forze, occorre poter definire la *posizione* e la *velocità* di un oggetto. In Fisica classica, ciò è sempre possibile. Viceversa, quando si deve trattare la fisica di sistemi molto piccoli — atomici o sub-atomici — occorre utilizzare la *meccanica quantistica*. Una delle peculiarità più notevoli di questa branca della Fisica è che non è più possibile definire simultaneamente la posizione e il moto di una particella: è il cosiddetto *principio di indeterminazione di Heisenberg*. In questa situazione, anche il concetto di forza deve essere abbandonato, mentre si mantiene il più generale concetto di interazione.

### 1.3.3 Interazioni fra cariche elettriche

Molte particelle fondamentali sono dotate di una proprietà intrinseca chiamata *carica elettrica*. Si tratta di una quantità dotata di *segno*, ovvero può essere *positiva* o *negativa*. Due oggetti dotati di carica elettrica possono interagire fra loro: se le due cariche elettriche hanno lo stesso segno, si respingono; viceversa, se hanno segno opposto, si attraggono.

Anche l'interazione fra cariche elettriche è un'*interazione a distanza*. Anch'essa, come la gravità, si indebolisce all'aumentare della distanza  $r$  fra oggetti, con una legge quadratica inversa:  $\propto \frac{1}{r^2}$ .

Ciascun elettrone porta una carica elettrica negativa, che si indica con  $-e$ , mentre ciascun protone ha carica elettrica positiva  $+e$ . Ogni atomo contiene lo stesso numero ( $Z$ ) di elettroni e protoni: di conseguenza è *eletticamente neutro*.

Durante processi chimici, o a causa di urti con altre particelle, può accadere che un atomo perda (o acquisti) uno o più elettroni: in tal caso forma uno *ione*, dotato di carica elettrica positiva o negativa, a seconda che abbia perso o acquistato elettroni. Alcuni esempi di legami chimici sono proprio formati in questo modo: se un atomo ha tendenza ad acquistare elettroni ed un altro a cederli, formano rispettivamente uno ione negativo ed uno positivo, che tendono poi ad attrarsi in quanto dotati di cariche di segno opposto. L'esempio familiare a noi tutti è il *cloruro di sodio*, NaCl (è il normalissimo sale da cucina). In effetti l'atomo di sodio tende a cedere un suo elettrone, diventando uno ione  $\text{Na}^+$ , e l'atomo di cloro tende ad acquisirlo, diventando uno ione  $\text{Cl}^-$ .

Anche per gli atomi che non subiscono ionizzazione, la distribuzione di carica al loro interno non è sempre simmetrica, anzi viene alterata dalla vicinanza di altri atomi. Il risultato è che essi producono interazioni residue con gli atomi vicini: esse sono responsabili della formazione delle molecole, attraverso il "*legame covalente*".

Le stesse molecole hanno interazioni mutue: esse non possono essere spinte troppo vicine le une alle altre (interazione repulsiva), e nel caso dei solidi non possono essere allontanate (interazione attrattiva). Questo è il motivo per cui i solidi non possono essere deformati, e i liquidi non possono essere compressi. Lo stesso "principio di non compenetrabilità della materia solida", che esprime che due corpi solidi non possono occupare una porzione di spazio comune, è conseguenza delle interazioni elettriche degli atomi o delle molecole costituenti, che costituiscono la loro

rigidità. In ultima analisi, quindi, anche le interazioni “di contatto” sono una manifestazione macroscopica dell’interazione elettromagnetica, che è un’interazione a distanza!

Nei gas, le molecole sono molto rarefatte, pertanto le loro interazioni sono più sporadiche: solo quando due molecole si avvicinano, nel loro moto caotico, allora si urtano e rimbalzano via. Tuttavia, comprimendo molto un gas, le distanze intermolecolari si riducono sempre più, rendendo più probabile l’interazione: con una compressione sufficiente il gas può liquefarsi.

### 1.3.4 Interazioni elettriche e gravitazionali

Le interazioni elettriche fra oggetti carichi decrescono con la distanza, secondo una legge quadratica inversa,  $\propto \frac{1}{r^2}$ . Lo stesso vale per la gravitazione. A parità di distanza, l’interazione elettrica è molto più forte di quella gravitazionale: l’attrazione elettrica fra protone ed elettrone in un atomo di idrogeno è  $10^{39}$  volte (mille miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di volte!) più forte di quella gravitazionale.

D’altra parte, le interazioni elettriche residue fra aggregati elettricamente neutri, come atomi e molecole, seguono una legge (almeno) cubica inversa,  $\propto \frac{1}{r^3}$ , quindi si attenuano con la distanza molto più rapidamente della interazione gravitazionale. Questo ha una conseguenza fondamentale: su scale di distanza atomiche e molecolari l’interazione dominante è quella elettrica, ma su scale più grandi ( $\gtrsim 10^3$  km, pianeti, stelle, sistemi planetari, galassie, ammassi di galassie) l’interazione dominante è gravitazionale. Non esistendo masse negative, un corpo non può mai essere “gravitazionalmente neutro”: la gravità diminuisce sempre con una legge quadratica inversa della distanza, e da certe scale di distanza in poi prevale sull’interazione elettromagnetica.

### 1.3.5 Campo elettrico e magnetico, onde elettromagnetiche

Una carica elettrica produce nello spazio circostante un *campo elettrico*. Se la carica elettrica è dotata di movimento, produce anche un *campo magnetico*. Inoltre, ogni carica elettrica sente l’azione dei campi elettrici prodotti dalle altre cariche circostanti. Se una carica è in movimento, sente anche l’azione dei campi magnetici prodotti dalle altre cariche in movimento.



Questo vale anche per le correnti elettriche, che come abbiamo detto sono dovute al movimento di elettroni. Esse producono campi magnetici, e sono anche sensibili alla presenza di campi magnetici.

Esistono materiali dotati di magnetismo naturale: tipicamente si tratta di minerali ferrosi. In essi, il moto degli elettroni intorno ai nuclei atomici presenta un certo ordine, cosicché il loro effetto collettivo è quello di produrre un campo magnetico, anche in assenza di correnti elettriche macroscopiche.

Se una carica elettrica si muove di moto oscillante, genera nello spazio circostante un campo elettrico e un campo magnetico oscillanti. Questi hanno una proprietà fondamentale: un campo elettrico variabile è sorgente di campo magnetico; viceversa, un campo magnetico variabile è sorgente di campo elettrico. Pertanto i due fenomeni si sostengono a vicenda, e il campo elettromagnetico risultante può propagarsi anche lontano dalla sorgente (la carica oscillante): la sua legge di attenuazione sarà  $\propto \frac{1}{r}$ . Questo tipo di campo si chiama *onda elettromagnetica*.

Le onde elettromagnetiche costituiscono la luce visibile, ma anche le onde radio, le microonde, i raggi infrarossi e ultravioletti, e i raggi X. Nonostante la diversità delle loro applicazioni pratiche, sono tutti descritti dalle stesse leggi fisiche.

### 1.3.6 Interazioni nucleari: forte e debole

Le interazioni gravitazionali ed elettromagnetiche non sono le due sole forze fondamentali della natura. In particolare, le interazioni elettromagnetiche non sono assolutamente in grado di descrivere le proprietà dei nuclei atomici e le reazioni che questi possono produrre.

Esistono in natura altre due interazioni fondamentali: l'interazione forte e l'interazione debole. Queste due interazioni giocano il loro ruolo solo a livello sub-atomico, quindi su distanze molto piccole ( $\lesssim 10^{-14}$  m), in un regime fisico che è non descrivibile in termini di dinamica classica (cioè usando i concetti di forza e accelerazione), ma solo mediante la *meccanica quantistica*.

Tuttavia esse sono comunque fondamentali in alcuni ambiti del nostro Universo. Pertanto ne diamo qui una breve descrizione, sebbene molto parziale e qualitativa.

I protoni hanno carica positiva, quindi tenderebbero a respingersi l'un l'altro con forze elettriche, e il nucleo atomico si disgregherebbe. Dunque, deve necessariamente esistere un'altra interazione, attrattiva e più forte della

repulsione elettrica. Inoltre, si osserva che nuclei atomici con molti protoni per essere stabili necessitano di un numero sempre maggiore di neutroni. La notazione con cui si indicano i costituenti di un nucleo è  ${}^A_Z X$ , essendo  $X$  il simbolo chimico, e  $Z, A$  rispettivamente il numero atomico e di massa. Mentre elementi relativamente leggeri, come l'elio ( ${}^3_2 He$ ,  ${}^4_2 He$ ), il carbonio ( ${}^{12}_6 C$ ), l'azoto, ( ${}^{14}_7 N$ ), l'ossigeno ( ${}^{16}_8 O$ ) hanno  $A \simeq 2Z$  (cioè un ugual numero di protoni e neutroni), elementi più pesanti tendono a  $A \simeq 2.5Z$ . Un piccolo difetto di neutroni rende il nucleo instabile. Un esempio noto è costituito dall'uranio: l'isotopo  ${}^{238}_{92} U$  è stabile, mentre l'isotopo  ${}^{235}_{92} U$  tende a disgregarsi — è “fissile”, infatti viene usato nelle centrali nucleari. In sintesi, il numero dei neutroni è fondamentale per garantire la stabilità del nucleo.

Tutto ciò è oggi spiegato dall'*interazione forte*: essa agisce fra i quarks, tenendoli uniti a formare i protoni e i neutroni, e a loro volta tiene questi ultimi uniti all'interno dei nuclei. Dal punto di vista dell'interazione forte, protoni e neutroni si comportano alla stessa maniera: l'interazione forte non è sensibile alla carica elettrica.

Vi è poi una quarta interazione fondamentale, l'*interazione debole* che è responsabile di reazioni nucleari in cui si ha la trasmutazione di protoni in neutroni, o viceversa. Se in una reazione nucleare si produce un nucleo con un rapporto troppo “sbilanciato” fra protoni e neutroni, esso può “riassestarsi”, attraverso una o più trasformazioni del tipo:

$$n \rightarrow p e^- \nu \quad \text{oppure} \quad p \rightarrow n e^+ \nu$$

Le trasmutazioni  $p \leftrightarrow n$  sono sempre accompagnate dalla produzione di altre particelle, che vengono “generate” a spese dell'energia del nucleo: fra queste, oltre al familiare elettrone ( $e^-$ ), possiamo trovare la sua anti-particella, il *positrone* ( $e^+$ ), che ha le stesse proprietà dell'elettrone, a parte la carica elettrica che è positiva! Il positrone non può esistere a lungo nella materia ordinaria: appena viene prodotto può incontrare un elettrone di un atomo, e nell'interazione che ne risulta entrambi si disgregano (si “annichilano”) trasformandosi in energia elettromagnetica. Nelle interazioni deboli appare sempre un'altra particella, il *neutrino*  $\nu$ , che non possiede carica elettrica.

Nei casi di nuclei con un eccesso di neutroni, il processo più frequente è la trasmutazione di un neutrone in protone:

$$n \rightarrow p e^- \bar{\nu} \quad (\text{decadimento-}\beta, \text{ o } \beta^-)$$

oppure, in alcuni casi, l'espulsione diretta di un neutrone. Quando invece c'è un difetto di neutroni, rispetto alla configurazione più stabile, il processo più

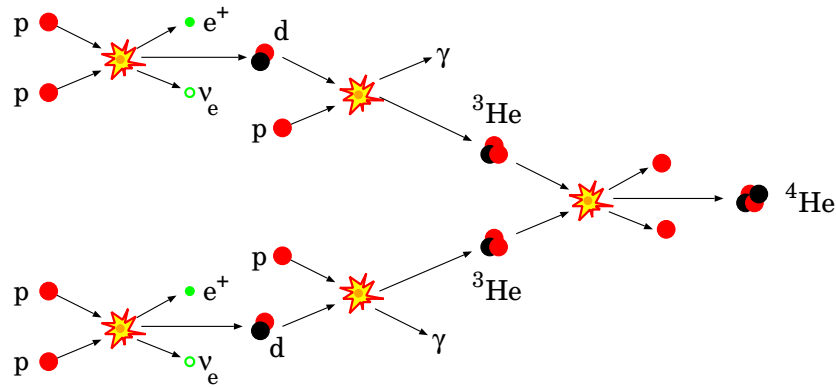


Figura 1.3: La “fusione dell’idrogeno”, che alimenta le stelle.

frequente è la trasmutazione di un protone in neutrone:



oppure, in alcuni casi, l’espulsione diretta di un protone. Infine, alcuni nuclei pesanti tendono a disgregarsi spontaneamente in nuclei più leggeri, mediante il fenomeno della *fissione*.

I processi  $\beta^+$  e  $\beta^-$  sono governati dall’interazione debole, mentre tutti gli altri avvengono per interazione forte.

### 1.3.7 La fusione nucleare nelle stelle

I processi nucleari che alimentano le stelle sono un esempio notevole di come le quattro interazioni fondamentali (gravitazionale, elettromagnetica, forte e debole) giochino ciascuna il suo ruolo.

Abbiamo già detto che le stelle contengono molta più materia dei pianeti. In effetti, la forza di gravità che la massa di una stella applica a sè stessa, sottopone il nucleo stellare a pressioni altissime. La materia nel nucleo di una stella è estremamente compressa. Come conseguenza, la struttura atomica ordinaria (in cui ogni atomo ha i suoi elettroni) collassa, e si trasforma in un *plasma*: una sorta di “gas” in cui i nuclei atomici e gli elettroni si comportano come oggetti distinti. In particolare, i nuclei atomici possono muoversi e interagire liberamente, senza essere protetti dai rispettivi gusci di elettroni.

Una stella trae la sua energia da reazioni di *fusione nucleare*, in cui nuclei leggeri si “uniscono” per formare nuclei più pesanti. In queste reazioni viene liberata una grande quantità di energia, grazie all’*interazione forte*, che favorisce l’aggregazione dei nuclei leggeri. La reazione dominante è la *fusione dell’idrogeno*, in cui 4 protoni (cioè nuclei di idrogeno), attraverso

una catena di processi, arrivano a produrre un nucleo di  ${}^4\text{He}$  (due protoni e due neutroni). La reazione è schematizzata in Fig. 1.3. Si può notare che il primo processo è la fusione di due protoni che formano un nucleo di deuterio (un protone e un neutrone).

La fusione di due protoni sarebbe estremamente sfavorita dalla repulsione *elettromagnetica*, in quanto entrambi hanno carica elettrica positiva. Tuttavia, grazie all'*interazione debole*, uno dei due protoni si trasmuta in neutrone, la repulsione elettrica fra i due protoni viene meno, e la fusione diventa possibile.

---

### Riflessione: “universalità” delle leggi fisiche

---

*Tutte le leggi fisiche conosciute derivano da osservazioni compiute qui, sul pianeta Terra. Possiamo supporre che le stesse leggi valgano anche altrove? (su altri pianeti? su altre stelle? in altre galassie?)*

*Siamo confidenti che la risposta sia SÌ. Effettivamente non siamo in grado di andare a compiere esperimenti su altre stelle. Tuttavia le stelle — anche di altre galassie — sono gli oggetti che meglio possiamo osservare, nonostante la loro lontananza. Abbiamo visto che il funzionamento di una stella dipende dalle 4 interazioni fondamentali: gravitazionale, elettromagnetica, forte, debole. Le stelle osservate nella nostra galassia appartengono in gran parte alla cosiddetta “sequenza principale”, che è caratterizzata da relazioni precise fra la massa di una stella, la sua luminosità, la sua temperatura di superficie (quest’ultima a sua volta collegata alla “classe spettrale” — o più approssimativamente al suo colore). Queste relazioni valgono per stelle vicine, stelle lontane, stelle appartenenti ad altre galassie. Questo fatto ci porta a concludere che le 4 interazioni fondamentali valgono allo stesso modo (anche quantitativamente!) in diverse regioni dell’Universo — e quindi siano, appunto, “universali”.*

## 1.4 L’energia

In generale, al movimento e alle interazioni è associato il concetto di *energia*. L’energia può assumere molte forme, per cui non è facile darne una definizione generale. Procediamo quindi caso per caso.

Un oggetto in movimento è dotato di *energia cinetica*: più l’oggetto è veloce, maggiore è la sua energia cinetica.

Abbiamo già detto che la temperatura di un materiale, a livello microscopico, è dovuta all’agitazione degli atomi o molecole che lo compongono: dunque anche la temperatura è associata a una forma di energia, che si chiama *energia termica*.

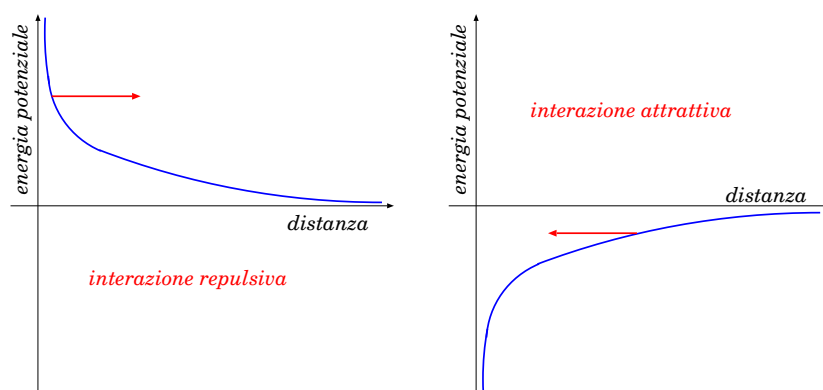


Figura 1.4: *Andamento qualitativo dell'energia potenziale in funzione della distanza, per interazioni repulsive e attrattive. La freccia mostra la direzione in cui agisce la forza: in entrambi i casi, tende ad accelerare, dunque ad aumentare l'energia cinetica: di conseguenza è orientata verso un'energia potenziale decrescente.*

Le interazioni hanno la capacità di modificare il moto di particelle elementari o di oggetti macroscopici. Pertanto le interazioni possono modificare (aumentando o diminuendo) l'energia cinetica. Per alcune interazioni, è possibile introdurre una forma di energia, detta *energia potenziale*, o anche *energia di interazione* <sup>[3]</sup>. L'idea è che a tali interazioni è associato un “magazzino di energia” (per così dire), per cui quando un'interazione, modificando il moto di un oggetto, aumenta o diminuisce la sua energia cinetica, lo fa rispettivamente cedendo parte della sua energia potenziale, oppure incamerandone altra.

Un'interazione può essere *attrattiva* (come quella gravitazionale, o quella elettrica fra cariche di segno opposto) oppure *repulsiva* (come quella elettrica fra cariche di uguale segno). Un oggetto che subisce un'interazione attrattiva, tende ad aumentare la propria velocità man mano che si avvicina, aumentando la propria energia cinetica: ciò avviene a spese dell'energia potenziale, che quindi diminuisce durante l'avvicinamento. Viceversa, in caso di interazione repulsiva, l'oggetto aumenterà la sua energia cinetica allontanandosi, quindi l'energia potenziale deve diminuire con l'allontanamento. A distanze infinite, l'interazione tende ad annullarsi, pertanto anche l'energia potenziale si annulla. La situazione è schematizzata in Fig. 1.4:

<sup>3</sup> Il secondo nome sembrerebbe più logico, ma il primo (“energia potenziale”) è in realtà quello più usato in Fisica classica, perché esprime l'idea di un'energia che non è ancora manifesta in un moto, è un'energia “in potenza”.

- per interazioni *repulsive* l'energia potenziale è *positiva* e decrescente con la distanza;
- per interazioni *attrattive* l'energia potenziale è *negativa* e crescente con la distanza.

Ripensando alle interazioni fondamentali, possiamo dunque parlare, in particolare, di *energia gravitazionale*, *energia elettromagnetica*, *energia nucleare* (quest'ultima associata all'interazione forte).

Anche i legami chimici, essendo dovuti all'interazione elettromagnetica, costituiscono una forma di energia potenziale: tipicamente viene riferita come *energia chimica*, o *energia di legame*.

In alcuni casi, l'energia potenziale non è definita. Per esempio, se un oggetto scivola su una superficie ruvida, viene frenato per *attrito*, pertanto perde energia cinetica, ma non vi è un'energia potenziale che aumenta. Tuttavia, l'oggetto e la superficie si scaldano, dunque la loro energia termica aumenta. Quel che succede è che l'energia cinetica di un moto macroscopico (quello dell'oggetto) si trasferisce al moto degli atomi/molecole che costituiscono l'oggetto e il piano.

I campi elettromagnetici possono propagarsi nello spazio, costituendo la *radiazione elettromagnetica*. Anche ad essa è associata un'energia, detta *energia radiante*. Un sistema di cariche elettriche interagenti in generale sarà dotato di una energia cinetica totale e di un'energia elettromagnetica: la somma di queste due energie può variare nel tempo, per esempio diminuendo o aumentando, se il sistema emette o assorbe radiazione. La radiazione che riceviamo dal Sole è un noto esempio di energia radiante: essa scalda gli oggetti che colpisce — anzi, cede continuamente energia a tutto il nostro pianeta — e con apparati fotovoltaici può essere parzialmente convertita in altre forme di energia.

L'energia dunque può assumere diverse forme. Si tratta di una quantità estremamente versatile, che può cambiare di forma, trasformandosi fra potenziale, cinetica, termica, radiante, etc. Tuttavia, in tutte queste trasformazioni, presenta una proprietà estremamente notevole:

*l'energia totale di un sistema fisico si conserva*

ovvero, se chiamiamo

$$E_{tot} = [E_{cinetica} + E_{potenziale} + E_{termica} + E_{radiante} + E_{chimica} + \dots]$$

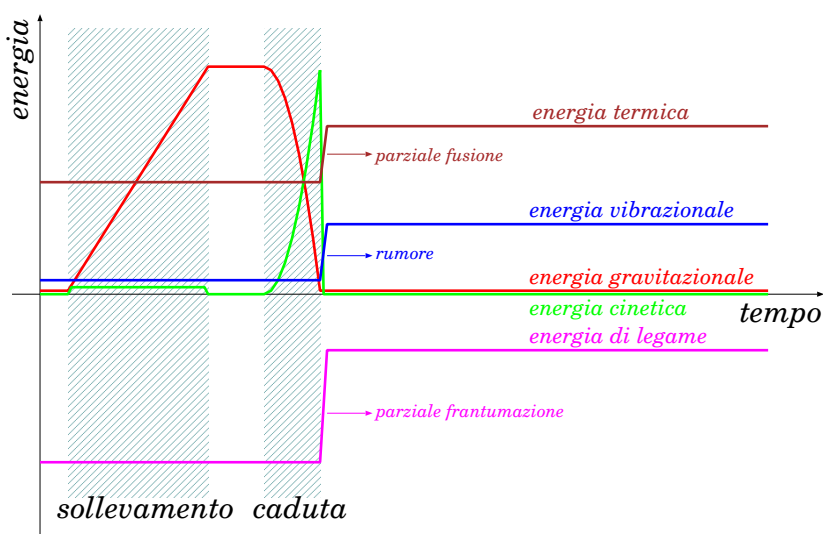


Figura 1.5: Esempio di possibili trasformazioni dell'energia.

l'energia totale di un sistema, durante un qualunque processo fisico, o chimico, possiamo scrivere qualcosa come:

$$E_{tot}^{iniziale} = E_{tot}^{finale}$$

Facciamo un esempio semplice, sulla trasformazione e conservazione dell'energia. Supponiamo di sollevare un pesante blocco di ghiaccio da terra e di appoggiarlo su una mensola (Fig. 1.5). Con la fatica fatta, abbiamo ceduto energia gravitazionale all'oggetto. Poi il blocco scivola dalla mensola e cade verso il basso, sempre più velocemente: la sua energia gravitazionale diminuisce, convertendosi in energia cinetica. Quando arriva per terra si rompe in pezzi, sparge gocce d'acqua e produce rumore. La sua energia cinetica si è azzerata (alla fine è fermo), ma non è semplicemente scomparsa: si è trasformata. Infatti:

- ha rotto i legami chimici che tenevano unite le sue molecole (ha aumentato l'energia di legame, che è diventata quindi “meno negativa”);
- ha aumentato la temperatura (energia termica) producendo una parziale fusione;
- ha prodotto onde sonore (vibrazioni dell'aria).

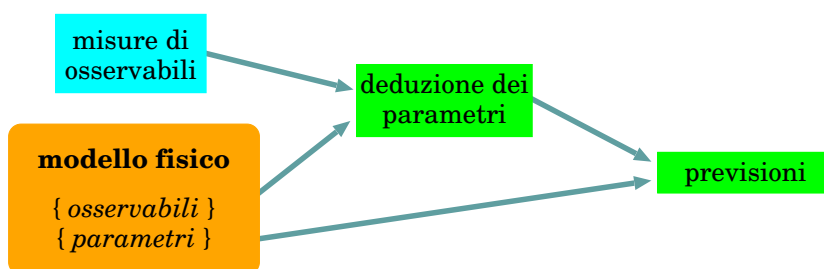


Figura 1.6: Schema di utilizzo di un modello fisico

## 1.5 Le leggi della Fisica e il metodo sperimentale

Le osservazioni in Fisica devono essere oggettive e ripetibili. Pertanto devono essere sempre *quantitative*. Un esperimento non può dare come risultato che “un oggetto è pesante o leggero”, o che “è veloce o lento”, oppure che è “caldo o freddo”: non sarebbe un risultato oggettivo (pesante rispetto a cosa? etc...). Piuttosto, il risultato deve essere formulato in termini di “quanto pesa”, “quanto vale la sua velocità”, “quanto è la sua temperatura”, e così via. In altre parole il risultato di un esperimento deve essere espresso da quantità numeriche. Questo è necessario per verificare se, eseguendo nuovamente l’esperimento, il risultato viene ripetibile o meno.

Una legge fisica è espressa come un modello matematico, ovvero una o più equazioni che mettono in relazione delle *quantità osservabili* — cioè misurabili. Il modello può contenere altre quantità che sono *parametri intrinseci* del sistema fisico, e che sono collegate alle quantità osservabili da relazioni matematiche.

In generale, il modello fisico permette di ricavare i *parametri* da una serie di misure degli *osservabili*; oppure, noti i parametri, permette di effettuare previsioni sul comportamento del sistema fisico: vedi lo schema in Fig. 1.6.

Un esempio concreto, per quanto semplice, può aiutare la comprensione. Consideriamo una molla agganciata ad un estremo, disposta verticalmente; all’altro estremo vengono appesi diversi oggetti, uno alla volta, e si osserva che la molla subisce allungamenti maggiori se l’oggetto appeso è più pesante — il peso  $P$  dell’oggetto è determinato con una bilancia. L’apparato è illustrato in Fig. 1.7.

In questo esempio, gli *osservabili* sono i pesi  $P$  e le lunghezze  $\ell$ . Eseguendo misure ripetute degli osservabili (cioè appendendo diversi pesi  $P_i$  e rilevando



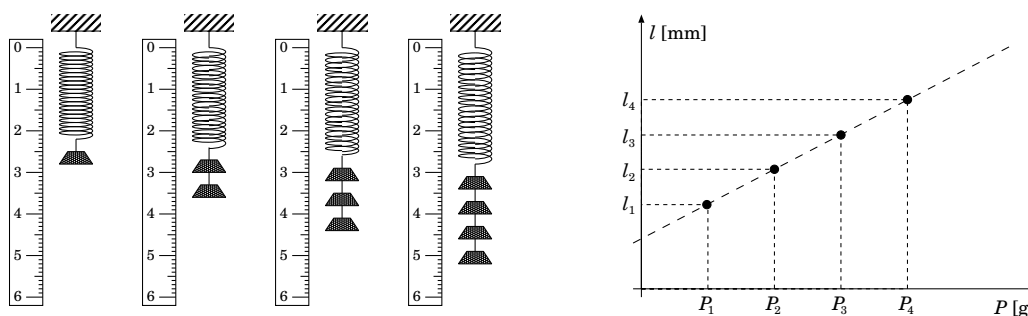


Figura 1.7: Esempio di sistema fisico: una molla cui si possono appendere diversi pesetti.

diverse lunghezze  $l_i$ ) e disponendole su un piano cartesiano si osserva una dipendenza lineare, che consente di estrarre una legge fisica — ovvero un modello:  $l = l_0 + \alpha \cdot P$ . I parametri del modello sono la costante  $\alpha$  e la “lunghezza a riposo”  $l_0$ . Essi possono essere ricavati dalle misure effettuate. Inoltre, una volta noti i parametri, possiamo effettuare previsioni, per esempio predire quale lunghezza la molla raggiungerebbe se appendessimo un certo peso, mai provato, o viceversa, quale peso sarebbe necessario per raggiungere un dato allungamento.

In seguito ad una serie di osservazioni di un fenomeno naturale, si formula un’ipotesi che spieghi in maniera coerente tutte le osservazioni. Si ottiene così una *legge fisica*.

La legge fisica deve essere predittiva, ovvero deve permettere di prevedere l’esito di ulteriori osservazioni, prima che queste vengano effettuate. Questo aspetto è fondamentale: grazie ad esso è possibile mettere la legge alla prova, ovvero progettare esperimenti in condizioni particolari, per vedere se il risultato che si ottiene è quello previsto. In caso affermativo, la legge *viene confermata*, e noi acquisiamo più confidenza che essa sia “giusta”.

Viceversa, può accadere che una legge fisica sia confutata da uno o più esperimenti, che forniscono risultati in disaccordo con le previsioni. In tal caso bisogna analizzare la situazione da due punti di vista.

- Occorre stabilire i *limiti di validità* della legge in esame. L’esperimento che l’ha invalidata, ha messo in evidenza una sua inconsistenza interna a livello generale? Ci sono ambiti in cui la legge può ancora essere considerata valida, anche se come conveniente approssimazione di una qualche legge più fondamentale?
- Se possibile, *la legge va riformulata*, per estendere i suoi limiti di

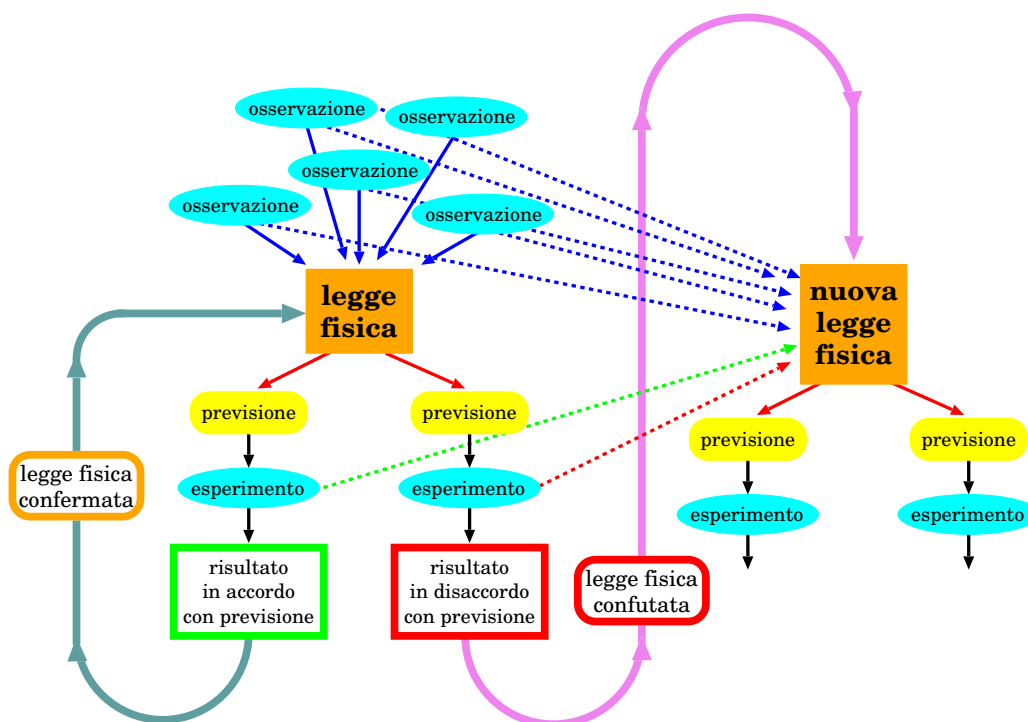


Figura 1.8: *Diagramma che schematizza il metodo scientifico: formulazione di una legge che compendia una serie di osservazioni, esperimenti per verificare le previsioni della legge, eventuale riformulazione della legge se una previsione è disattesa da risultati sperimentali.*

validità, cioè includere nelle sue previsioni sia le osservazioni che hanno portato alla sua prima formulazione, sia quelle che l’hanno confutata.

Questo processo si chiama “metodo scientifico sperimentale”, ed è schematizzato in Fig. 1.8.

Vale la pena ricordare che il potere predittivo delle leggi fisiche ha anche un’importante conseguenza di carattere applicativo, poiché consente lo sviluppo tecnologico. Nel progetto di un qualunque apparato ci si basa infatti su modelli fisici (o più in generale anche chimici, biologici, ...) che dovrebbero descrivere il suo comportamento nelle condizioni di utilizzo previste. Un apparato non viene mai “costruito alla cieca, e poi vediamo che cosa fa”. Naturalmente, una volta realizzato, va poi sottoposto a scrupolosi test, per vedere se funziona come previsto. Anche questi test hanno valenza di esperimento scientifico che validi i modelli su cui ci si è basati.

Per una legge fisica occorre sempre stabilire l'ambito di validità.

Per esempio, abbiamo a disposizione modelli che descrivono in modo più che ragionevole le “interazioni di contatto”: il loro ambito di validità è quello in cui gli oggetti sono formati da molti atomi, cosicché anziché osservare le singole interazioni fondamentali fra gli atomi, si osserva il loro effetto collettivo. Oppure, un gas o un liquido, oppure un oggetto rigido, possono essere caratterizzati da alcune grandezze macroscopiche (temperatura, pressione, densità, ...), senza esplorare la loro struttura microscopica. Questi sono esempi di “modelli efficaci”, che funzionano bene quando il sistema è formato da molti ( $\approx 10^{20}$  o più) atomi o molecole. Per sistemi più semplici, con un piccolo numero di costituenti, questi modelli efficaci sono inadeguati: siamo usciti dall'ambito di validità.

## 1.6 Ambiti di validità della Meccanica Newtoniana

Fino alla fine del 19° secolo, tutti i fenomeni fisici osservati erano ben descritti da quella che oggi (più di un secolo dopo) chiamiamo “Fisica Classica”: un insieme di leggi coerenti basati sulla Meccanica di Newton e sulla Teoria dell'Elettromagnetismo di Maxwell.

La teoria di Maxwell (1864), tra le altre cose, prevedeva l'esistenza delle *onde elettromagnetiche*, osservate pochi anni dopo da Hertz. Secondo Maxwell, le onde elettromagnetiche nel vuoto viaggiano sempre alla stessa velocità — la *velocità della luce*,  $c = 300\,000$  km/s — *a prescindere dalla velocità con cui si muove la sorgente che le emette*. Il risultato aveva un che di sorprendente: in meccanica newtoniana tutte le velocità sono *relative* al sistema di riferimento in cui si osservano! Il paradosso veniva “accettato” ipotizzando che le onde elettromagnetiche si propagassero attraverso un qualche mezzo materiale, l'*etere luminifero*, e che la velocità della luce fosse riferita all'etere stesso. Va notato che  $c$  è così sproporzionatamente grande rispetto alle velocità accessibili all'epoca, che non era banale immaginare esperimenti in cui ci si muovesse rispetto all'etere con una velocità non trascurabile rispetto a  $c$ . L'esperimento è arrivato, con Michelson e Morley (1881-87), che pensarono di sfruttare il moto orbitale della Terra intorno al Sole (a circa 30 km/s). Il risultato fu che non si osservò nessuna variazione della velocità della luce: dunque questa è “assoluta”, e l'etere luminifero non esiste! La meccanica newtoniana, pur perfettamente funzionante in tanti ambiti, era quindi inadeguata a trattare fenomeni a velocità luminale. La

sua rivisitazione portò alla formulazione della *Teoria della Relatività Speciale* (A.Einstein, 1905).

Lo stesso Einstein si rese conto che la teoria della gravità di Newton non era compatibile con la Relatività Ristretta: secondo Newton, gli effetti della gravità si propagano istantaneamente nello spazio a qualunque distanza, mentre Einstein aveva mostrato che propagazioni a velocità superluminale avrebbero creato inconsistenze nella *causalità* degli eventi. Inoltre erano state osservate anomalie nell'orbita di Mercurio che non erano spiegabili con la meccanica newtoniana. Dieci anni più tardi della Relatività Speciale, nel 1915, Einstein formulò la *Teoria della Relatività Generale*, necessaria per ristabilire la coerenza fra gravità e relatività: la nuova descrizione forniva previsioni diverse da quelle newtoniane, soprattutto per campi gravitazionali intensi e/o moti a velocità elevate in campi gravitazionali <sup>[4]</sup>.

Negli anni 1920–1930, in ambiti completamente diversi, furono osservati fenomeni che coinvolgono particelle elementari e loro interazioni a distanze molto piccole, interatomiche o subatomiche: onde elettromagnetiche che manifestavano comportamenti corpuscolari (effetto fotoelettrico e Compton), particelle che producevano fenomeni ondulatori (diffrazione di fasci di elettroni), o che esibivano proprietà apparentemente “casuali”, cioè non ripetibili in esperimenti identici. . . Questi fenomeni risultavano assolutamente inspiegabili con la Fisica Classica, ed anche in questo caso fu stato necessario formulare una nuova teoria, la *Meccanica Quantistica* <sup>[5]</sup>.

---

<sup>4</sup> In questa formulazione, ciò che genera e subisce la gravità non sono più solo le masse, ma anche qualunque cosa dotata di energia. Per esempio, la luce può essere deflessa da un campo gravitazionale intenso (“lente gravitazionale”). Inoltre la gravità di oggetti molto massivi e compatti può diventare così intensa da non lasciare sfuggire niente, compresa la luce (“buchi neri”). Tutte le previsioni della Relatività Generale si sono poi rivelate valide. La prima osservazione di “lente gravitazionale” è stata fatta da Eddington nel 1919: durante un’eclisse di Sole (quindi con la luce solare schermata dal disco lunare) è stato possibile osservare un apparente spostamento della luce di stelle vicine alla posizione del Sole, dovuto in realtà al fatto che la gravità prodotta dalla massa solare imprimeva una traiettoria incurvata alla luce stellare. Ad oggi, il fenomeno di lente gravitazionale è spesso osservato, per esempio quando la luce di una galassia lontana è deviata dalla gravità di galassie più vicine. Anche l’esistenza dei buchi neri è ormai accettata: anche se non si vedono direttamente, si vede il loro effetto gravitazionale su oggetti celesti vicini (per esempio, sistemi binari stella-buco nero). Al centro della Via Lattea c’è un buco nero supermassiccio: la sua presenza è rivelata dalle orbite delle stelle intorno al centro galattico. La più recente conferma della Relatività Generale viene dall’osservazione delle *onde gravitazionali*, avvenuta per la prima volta nell’autunno 2015 grazie all’esperimento LIGO negli Stati Uniti e pubblicata nella primavera 2016. Inoltre, nella primavera del 2019, è stata effettuata la prima “fotografia” di un buco nero galattico, situato al centro della galassia ellittica M87.

<sup>5</sup> Vale la pena notare che tutta la tecnologia elettronica, basata sui materiali semiconduttori, è comprensibile solo mediante la meccanica quantistica: una branca della

Attualmente, per descrivere le interazioni fondamentali fra particelle elementari si usa una teoria che unisce le caratteristiche di relatività speciale e meccanica quantistica, e va sotto il nome di *Teoria dei Campi Quantistici*. È una teoria che trova ottimi riscontri sperimentali agli attuali esperimenti sugli acceleratori di particelle. Anche questa tuttavia non può essere una teoria “finale”, perché non descrive la gravità. Viceversa, ad oggi non è stata formulata una teoria quantistica che includa la gravità, né si hanno osservazioni sperimentali che suggeriscano, o escludano, la presenza di fenomeni quantistici nella gravità.

La “mappa” delle teorie fisiche, con i loro ambiti di validità, è schematizzata in Fig. 1.9. Come si può vedere, i confini di validità delle diverse teorie non sono netti: tutto dipende da qual è la precisione che si vuole ottenere nella descrizione. La fisica newtoniana funziona per:

- velocità molto minori della velocità della luce:  $v \ll c$ ;  
[quanto minori? gli effetti relativistici si misurano in generale con la quantità  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$ , quindi per esempio se  $\frac{v}{c} < 0.01$  abbiamo approssimazioni dell'ordine  $10^{-4}$  — una parte su 10 000]
- distanze molto maggiori delle dimensioni molecolari:  $\Delta\ell \gg 10^{-9}$  m  
[quanto maggiori? per fissare le idee diciamo per  $\Delta\ell \gtrsim 10^{-8}$  m, cioè dai centesimi di micro-metro ( $0.01 \mu\text{m}$ ) in su. . . però esistono fenomeni che manifestano la loro natura quantistica anche su scale più grandi]
- . . . ma anche distanze inferiori ai miliardi di anni-luce  
[la dilatazione dell'universo su scale così grandi è governata dalla “costante cosmologica”, un parametro della Relatività Generale]
- campi gravitazionali deboli;  
[quanto deboli? qui è più difficile rispondere: dipende sia dall'intensità del campo gravitazionale, sia dalle velocità degli oggetti che vi si muovono]

Siccome le due teorie più generali che abbiamo sono la Teoria dei Campi Quantistici e la Relatività Generale, perché non iniziare lo studio

---

fisica, apparentemente così lontana dal senso comune, eppure che ci circonda in ogni aspetto della nostra vita. Quelli che affermano che la ricerca scientifica serve solo se ha scopi pratici ben definiti, dovrebbero pensare a questo esempio: nel 1920 i fisici potevano prevedere lo sviluppo tecnologico che è derivato dalla meccanica quantistica? Chi sostiene che la ricerca di base sia inutile, è disposto a vivere senza computer e smartphone? La storia della scienza ci insegna sicuramente una cosa: una nuova scoperta, prima o poi, avrà applicazioni pratiche, non importa se passeranno mesi, anni, o decenni.

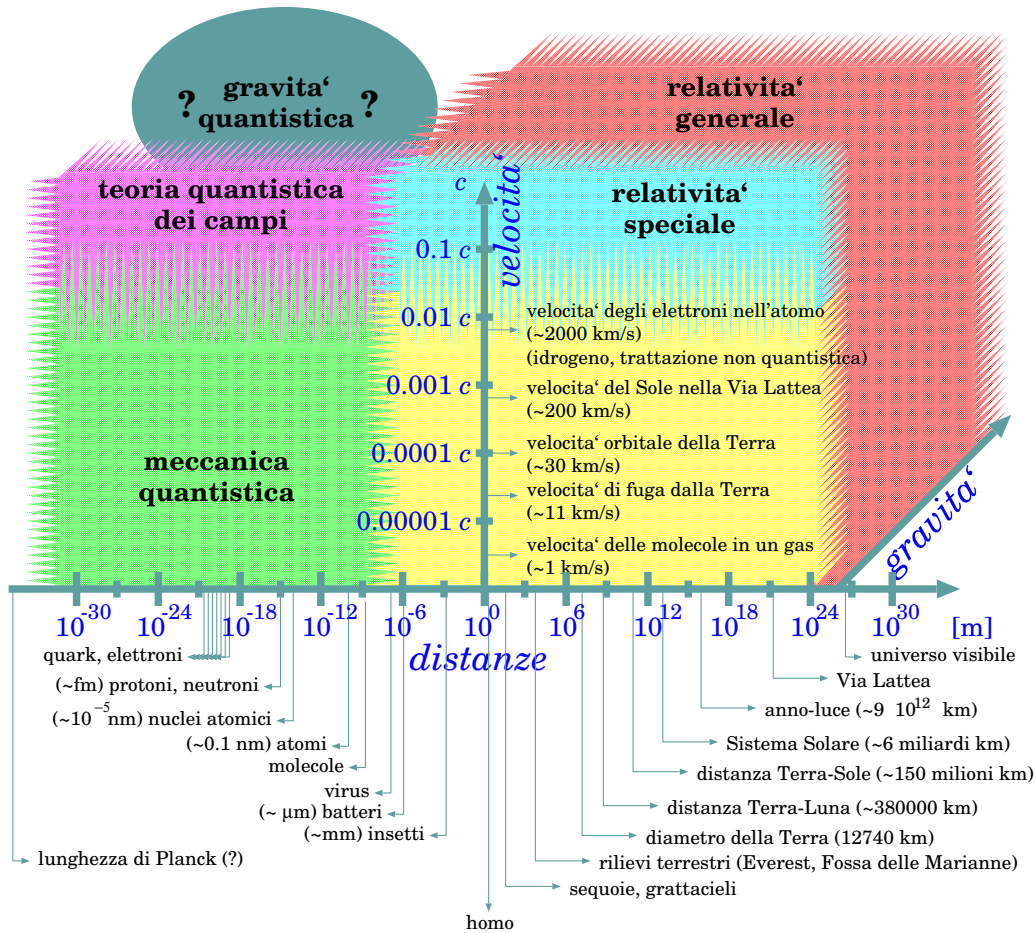


Figura 1.9: *Regioni di validità della Fisica Classica Newtoniana (in giallo) e delle più moderne teorie: Meccanica Quantistica, Relatività Ristretta, Teoria dei Campi Quantistici, e Relatività Generale.*

della fisica partendo da esse, e ricavare la Meccanica Newtoniana come un limite matematico, simultaneamente per (i) campi gravitazionali deboli; (ii) velocità piccole rispetto a  $c$ ; (iii) distanze grandi rispetto a quelle molecolari?

Per rispondere, bisogna considerare che queste teorie generali richiedono una matematica molto avanzata, e fanno uso di concetti per niente intuitivi. La qual cosa non deve stupirci: sono state formulate apposta per descrivere situazioni estreme, rispetto all'esperienza comune. Viceversa, la meccanica newtoniana può essere formulata in maniera autoconsistente, e consente di descrivere la vastità dei fenomeni che cadono direttamente sotto i nostri sensi con un'ottima (OTTIMA!!) approssimazione: pertanto entro questi *limiti di validità* è di per sé una teoria corretta.

## 1.7 Misure in Fisica

Abbiamo già detto che le grandezze fisiche devono essere quantitative. D'altra parte esprimerle tramite numeri e nient'altro non è sufficiente. Una frase del tipo “la distanza Milano-Roma è 580” non ha senso: 580 *cosa???* Chilometri? Centimetri? Miglia nautiche? Litri?? Chili?? Alcune di queste “proposte” sono palesemente assurde (litri, chili, . . .). Altre sarebbero accettabili (centimetri, miglia nautiche), perché fanno riferimento a quantità che descrivono distanze, ma non sono quelle giuste. La formulazione giusta è “580 chilometri”.

In ogni caso è necessaria una specificazione.

In generale, quando si deve descrivere quantitativamente una grandezza fisica  $X$ , si fornisce una *misura*. Per fare ciò, la si confronta con un'altra grandezza  $\bar{X}$ , ad essa omogenea, che si assume come *campione*, o *unità di misura*, e si calcola quante volte  $\bar{X}$  è contenuto in  $X$ . Se chiamiamo  $x$  il risultato di questo calcolo, allora scriviamo la *misura di  $X$*  come:

$$\underbrace{X}_{\text{(grandezza fisica)}} = \underbrace{x}_{\text{(misura)}} \underbrace{\bar{X}}_{\text{(unità di misura)}} \quad (1.1)$$

### 1.7.1 Unità di misura

Per ogni grandezza fisica abbiamo a disposizione diverse unità di misura. In Fisica è stato adottato il *Sistema Internazionale di unità di misura* (SI), in cui le distanze si misurano in metri (m), i tempi in secondi (s), le masse in kilogrammi (kg) <sup>[6]</sup>. Le unità di misura del SI sono elencate nella seguente tabella. Alcune grandezze hanno unità di misura fondamentali, e sono scritte in **grassetto**, tutte le altre sono derivate, nel senso che l'unità di misura si deduce dalla definizione della grandezza.

---

<sup>6</sup> Molti Paesi del mondo hanno aderito al SI anche nella vita quotidiana — un'importante eccezione è costituita dai Paesi anglosassoni, che usano ancora le yarde, le miglia, le pinte, i galloni e i cucchiari da tè: so much for them!

grandezza fisica	unità di misura	
	simbolo	nome
grandezze cinematiche		
distanza, spostamento	m	<b>metro</b>
tempo	s	<b>secondo</b>
velocità	m/s	metri al secondo
accelerazione	m/s <sup>2</sup>	metri al secondo quadrato
frequenza	Hz = s <sup>-1</sup>	Hertz
velocità angolare, pulsazione	rad/s	radianti al secondo
grandezze dinamiche		
massa	kg	<b>chilogrammo</b>
forza	N = kg · m/s <sup>2</sup>	Newton
quantità di moto	kg · m/s	
momento angolare	kg · m <sup>2</sup> /s	
momento meccanico	N · m	Newton per metri
energia, lavoro	J = N · m	Joule
potenza	W = J/s	Watt
grandezze elettromagnetiche		
carica elettrica	C	<b>Coulomb</b>
campo elettrico	V/m	Volt su metro
potenziale elettrico	V = J/C	Volt
corrente elettrica	A = C/s	Ampere
campo magnetico	T = NC <sup>-1</sup> m <sup>-1</sup> s	Tesla

Spesso, per fini pratici, queste unità di misura sono affiancate da altre, che sono multipli o sottomultipli. Per esempio, la lunghezza di un mobile si misura più spesso in centimetri (cm), e una distanza stradale in chilometri (km), le distanze interatomiche in nanometri (nm, miliardesimi di metro), le distanze astrofisiche in anni-luce (“ly”, ovvero “light-years”). Analogamente, la durata delle lezioni si misura in minuti (min) o in ore (h), i tempi nell’agricoltura si misurano in giorni o mesi, la durata della vita umana in anni, i periodi storici in secoli. . . Anche le masse possono essere misurate in grammi (g) o quintali, o tonnellate. . . Riportiamo una tabella di conversione dalle unità di misura “pratiche” a quelle del SI.



simbolo	unità di misura nome	conversione a SI
nm	nanometro	$10^{-9}$ m
$\mu\text{m}$	micrometro (o micron)	$10^{-6}$ m
mm	millimetro	$10^{-3}$ m
cm	centimetro	$10^{-2}$ m
km	chilometro	$10^3$ m
A.U.	unità astronomica	$149\,597\,870.7$ km = $1.495\,978\,707 \cdot 10^{11}$ m
ly	anno luce (“light year”)	$9.460\,730\,472\,580\,800 \cdot 10^{15}$ m
ps	picosecondo	$10^{-12}$ s
ns	nanosecondo	$10^{-9}$ s
$\mu\text{s}$	microsecondo	$10^{-6}$ s
ms	millisecondo	$10^{-3}$ s
min	minuto	60 s
h	ora (“hour”)	3600 s
d	giorno (“day”)	86 400 s
yr	anno (“year”)	$3.155\,760\,0 \cdot 10^7$ s (365.25 d)
$\mu\text{g}$	microgrammo	$10^{-9}$ kg
mg	milligrammo	$10^{-6}$ kg
g	grammo	$10^{-3}$ kg
q	quintale	100 kg
ton	tonnellata	1000 kg
eV	elettron-Volt	$1.602\,176\,6 \cdot 10^{-19}$ J
keV	chilo-elettron-Volt	$1.602\,176\,6 \cdot 10^{-16}$ J
MeV	mega-elettron-Volt	$1.602\,176\,6 \cdot 10^{-13}$ J
GeV	giga-elettron-Volt	$1.602\,176\,6 \cdot 10^{-10}$ J

Come si vede, per molte grandezze si fa uso di prefissi come “nano-”, “micro-”, “mega-”, “giga-”, etc, per riscaldare l’unità di misura SI ad un livello comparabile alla quantità che si vuole misurare. Riassumiamo qui i prefissi più usati:

f	femto-	$10^{-15}$
p	pico-	$10^{-12}$
n	nano-	$10^{-9}$
$\mu$	micro-	$10^{-6}$
m	milli-	$10^{-3}$
k	chilo-	$10^3$
M	mega-	$10^6$
G	giga-	$10^9$
T	tera-	$10^{12}$

## 1.8 Le costanti fondamentali della Fisica

Abbiamo visto che qualunque modello fisico contiene dei parametri, che possono essere determinati con una o più misure delle grandezze osservabili.

Esistono in natura alcuni parametri che sono *universali*, nel senso che — a quanto ne sappiamo — assumono gli stessi valori in qualunque parte dell'Universo, e in qualunque condizione dinamica. Questi sono le *costanti fondamentali della Fisica*. Le elenchiamo qui, per referenza a qualunque problema incontreremo. Per ciascuna di esse, sono riportate tutte le cifre non affette da incertezza: con questo intendiamo che un valore indicato per esempio con  $x.xxxx \cdot 10^{yy}$  UdM è affetto da un'incertezza minore di  $0.000001 \cdot 10^{yy}$  UdM.

simbolo	valore	nome
$G$	$6.674 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$	costante della gravitazione universale
$g$	$9.806 \text{ m/s}^2$	accelerazione gravitazionale (valore medio alla superficie terrestre)
$N_A$	$6.022\,141 \cdot 10^{23}$	numero di Avogadro (particelle per mole)
$k_B$	$1.380\,65 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$	costante di Boltzmann
$R$	$8.314\,47 \text{ J K}^{-1}$	costante dei gas perfetti ( $R \equiv k_B N_A$ )
$m_e$	$9.109\,383 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$	massa dell'elettrone
$m_p$	$1.672\,621\,8 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	massa del protone
$m_n$	$1.674\,927\,4 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	massa del neutrone
u.m.a	$1.660\,538\,9 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	unità di massa atomica ( $\frac{m[^{12}\text{C}]}{12}$ ) (1/12 della massa dell'atomo $^{12}\text{C}$ )
$e$	$1.602\,176\,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	carica elettrica del protone ( $-e$ carica elettrica dell'elettrone)
$c$	$299\,792\,458 \text{ m/s}$	velocità della luce nel vuoto
$\epsilon_0$	$8.854\,187\,817 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$	costante dielettrica del vuoto
$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$8.987\,551\,788 \cdot 10^9 \text{ N C}^{-2} \text{ m}^2$	
$\mu_0$	$12.566\,370\,614 \cdot 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$	permeabilità magnetica del vuoto ( $\mu_0 \equiv \frac{1}{c^2\epsilon_0}$ )
$h$	$6.626\,070 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$	costante di Planck
$\hbar$	$1.054\,571\,7 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$	costante di Planck ridotta ( $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$ )

## 1.9 Simboli usati per le grandezze fisiche

Riassumiamo qui i simboli che useremo per indicare le grandezze fisiche.

Tutte le grandezze che si caratterizzano completamente con un valore numerico sono dette *scalari*, e si indicano genericamente con una lettera  $X$  (latina, greca, ...) — per esempio, massa  $m$ , pressione  $P$ , temperatura  $T$ , energia  $\mathcal{E}$ , ....

Le grandezze che necessitano anche una specifica di orientamento si chiamano *grandezze vettoriali* e si indicano in neretto e con una freccia sopra:  $\vec{X}$ . Esempi sono gli spostamenti  $\Delta\vec{r}$ , le velocità  $\vec{v}$ , le accelerazioni  $\vec{a}$ , le forze  $\vec{F}$ , .... Per ogni grandezza vettoriale si può definire il *modulo* (o intensità, o lunghezza...) e si indica con  $|\vec{X}|$  o più semplicemente anche con  $X$ .

È spesso utile introdurre *vettori unitari* — o *versori* — caratterizzati da modulo = 1 (senza unità di misura). Questi non definiscono delle quantità, ma solo degli orientamenti: si indicano in neretto con un accento circonflesso:  $\hat{X}$ . Esempi di versori sono i 3 assi cartesiani  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$  che useremo per identificare una posizione nello spazio, oppure un asse di rotazione, oppure ancora una direzione tangente alla traiettoria di un moto, o ortogonale ad essa (rispettivamente  $\hat{t}$ ,  $\hat{n}$ ).

Quindi, in sintesi:

$X$	quantità scalare
$\vec{X}$	quantità vettoriale
$ \vec{X}  \equiv X$	modulo di una quantità vettoriale
$\hat{X}$	versore

Una grandezza generalmente subisce variazioni nel tempo, che si indicano con  $\Delta$ : considerando una situazione “prima” e una “dopo”, scriviamo:

$$\begin{aligned} \Delta X &= X^{(dopo)} - X^{(prima)} && \text{(variazione di una grandezza scalare)} \\ \Delta\vec{X} &= \vec{X}^{(dopo)} - \vec{X}^{(prima)} && \text{(variazione di una grandezza vettoriale)} \end{aligned}$$

Si noti che la differenza è sempre definita come (dopo)–(prima).

Variazioni infinitesime (che tipicamente avvengono in intervalli di tempo infinitesimi) si indicano con  $d$ :

$$dX \quad ; \quad d\vec{X} \quad \text{(variazioni infinitesime)}$$

Può accadere di dover introdurre grandezze infinitesime che *non sono variazioni di qualcosa*: in tal caso usiamo il simbolo  $\delta$ , per non confonderci con le variazioni infinitesime:

$$\delta X \quad ; \quad \delta\vec{X} \quad \text{(grandezze infinitesime che non sono variazioni)}$$

Ora introduciamo la simbologia che si userà nel testo, per diverse grandezze specifiche

grandezza fisica	simbolo
raggio vettore, vettore spostamento (finito/infinitesimo)	$\vec{r}, \Delta\vec{r}, d\vec{r}$
coordinata, spostamento (finito/infinitesimo) lungo una curva	$s, \Delta s, ds$
tempo, intervallo (finito/infinitesimo) di tempo	$t, \Delta t, dt$
raggio di curvatura	$\rho$ (oppure $r, R$ )
volume, superficie	$V, \Sigma$
velocità (scalare, vettoriale)	$v, \vec{v}$
velocità angolare	$\vec{\omega}$
accelerazione (totale, tangenziale, centripeta)	$\vec{a}, \vec{a}_t, \vec{a}_n$
frequenza angolare (o pulsazione), frequenza, periodo	$\Omega, \nu, T$
massa	$m$ (oppure $M$ )
forza	$\vec{F}$
quantità di moto	$\vec{p}$
lavoro	$\mathcal{W}$
energia cinetica	$\mathcal{E}$
energia potenziale	$\mathcal{U}$
potenziale	$\Phi$
energia meccanica	$E$
potenza	$\mathcal{P}$
momento angolare	$\vec{L}$
momento torcente (o meccanico)	$\vec{M}$
tensore di inerzia	$\mathbb{I}$
momento di inerzia	$I$
campo gravitazionale	$\vec{g}$
densità (di massa in volume)	$\rho$
pressione	$P$

Per completezza, elenchiamo altre grandezze, presenti in termodinamica, elettromagnetismo, ottica.

grandezza fisica	simbolo
temperatura assoluta	$T$
calore	$Q$
capacità termica, calore specifico	$C, c$
calore latente di fusione/vaporizzazione	$\lambda_F, \lambda_V$
campo elettrico	$\vec{E}$
campo magnetico	$\vec{B}$
carica elettrica	$q, Q$
densità (di carica in volume)	$\rho$
corrente elettrica	$I$
densità di corrente	$\vec{J}$
resistenza elettrica	$R$
lunghezza d'onda, frequenza	$\lambda, \nu$
costante dielettrica relativa, indice di rifrazione	$\epsilon_r, n$

## Capitolo 2

# Cinematica unidimensionale

In questo capitolo ci concentreremo sui moti *unidimensionali*, ovvero che avvengono lungo una linea predefinita. Questo approccio è utile per introdurre i concetti di *posizione rispetto a un riferimento*, di *velocità* e di *accelerazione* istantanee, e la matematica necessaria a discuterli — nella fattispecie, il concetto di intervalli di tempo “infinitamente brevi” e le operazioni di derivata e di integrale. Nei capitoli successivi affronteremo i concetti, più utili in Fisica, di posizione e moto nello spazio tridimensionale.

Il moto di qualunque cosa (oggetto o particella elementare) è caratterizzato da uno *spostamento*, ovvero da un *cambiamento di posizione*. Tutte le posizioni sono riferibili come spostamenti rispetto ad una *posizione di riferimento*. Nel descrivere un moto, però, solitamente si vuole anche dire quanto rapidamente esso avviene. Più precisamente si vuole mettere in relazione *lo spostamento* (proprietà geometrica) con un'altra quantità: *il tempo*. Si parla perciò di *velocità* e di *accelerazione*. La cinematica è la branca della fisica che definisce quantitativamente queste proprietà del moto e le loro relazioni.

Inoltre, considereremo sempre il moto di oggetti che siano *molto più piccoli rispetto alle distanze che percorrono*, in modo da poterli considerare “puntiformi” — per esempio, biglie che rotolano lungo una pista, o automobili che viaggiano sull'autostrada <sup>[1]</sup>, o treni su una rotaia. L'idea generale dell'approssimazione puntiforme è che *la posizione dell'oggetto sia definita solo dalla sua collocazione, e non per esempio dal suo orientamento*, e quindi che il suo movimento sia solo di natura traslatoria, e si possa trascurare qualunque rotazione.

---

<sup>1</sup> Un'automobile può essere considerata “puntiforme” mentre viaggia sull'autostrada da Milano a Roma — la stessa automobile è tutt'altro che “puntiforme” quando cercate di parcheggiarla a Milano o a Roma.

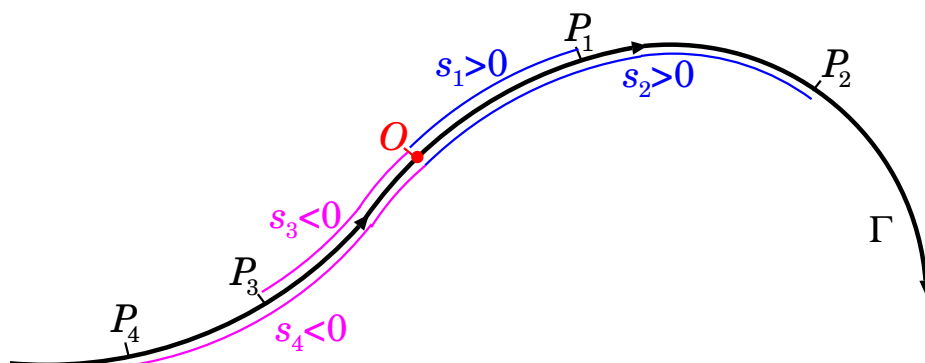


Figura 2.1: Esempi di posizione lungo una linea.  $O$  è l'origine, che ha per definizione coordinata = 0. Dato l'orientamento della linea, le posizioni  $P_1, P_2$  hanno coordinate positive,  $s_1 > 0$  e  $s_2 > 0$ , mentre  $P_3, P_4$  hanno coordinate negative,  $s_3 < 0$  e  $s_4 < 0$ . Le coordinate dei 4 punti presi ad esempio sono tali che  $s_4 < s_3 < 0 < s_1 < s_2$ .

## 2.1 Posizione e spostamenti su una linea

Per definire la posizione di un oggetto puntiforme su una linea  $\Gamma$ , è necessario anzitutto scegliere un punto  $O$  di riferimento, che viene chiamato *origine*, e un *orientamento* convenzionale. Ogni altro punto  $P$  può essere identificato in modo univoco specificando la *distanza*  $s$  misurata lungo la linea  $\Gamma$  da  $O$  a  $P$ : a questa si attribuisce segno  $+$  se per andare da  $O$  a  $P$  si segue l'orientamento di  $\Gamma$ , segno  $-$  se si segue l'orientamento opposto. La grandezza  $s$  così definita si chiama *coordinata* del punto  $P$  lungo la linea orientata  $\Gamma$ .

Per esempio, in Fig. 2.1, è data la curva  $\Gamma$  con il suo orientamento e l'origine  $O$ . I 4 punti indicati  $P_1, P_2, P_3, P_4$  hanno rispettivamente coordinate  $s_1, s_2, s_3, s_4$ . Poiché i punti  $P_1, P_2$  si raggiungono da  $O$  seguendo l'orientamento di  $\Gamma$ , la loro coordinata è positiva. Viceversa, i punti  $P_3, P_4$  hanno coordinata negativa, perché si raggiungono da  $O$  seguendo l'orientamento opposto a quello di  $\Gamma$ .

Se un oggetto puntiforme si sposta dalla posizione  $P_1$ , di coordinata  $s_1$ , alla posizione  $P_2$ , di coordinata  $s_2$ , si definisce lo *spostamento* come la differenza fra la coordinata di arrivo e quella di partenza:

$$\Delta s = s_2 - s_1 \quad (2.1)$$

Anche lo spostamento è dotato di segno: se avviene lungo l'orientamento di  $\Gamma$ , allora  $s_2 > s_1$ , cioè  $\Delta s > 0$ . Viceversa, se avviene con orientamento opposto a quello di  $\Gamma$ , allora  $s_2 < s_1$  e  $\Delta s < 0$ . Vedi Fig. 2.2.



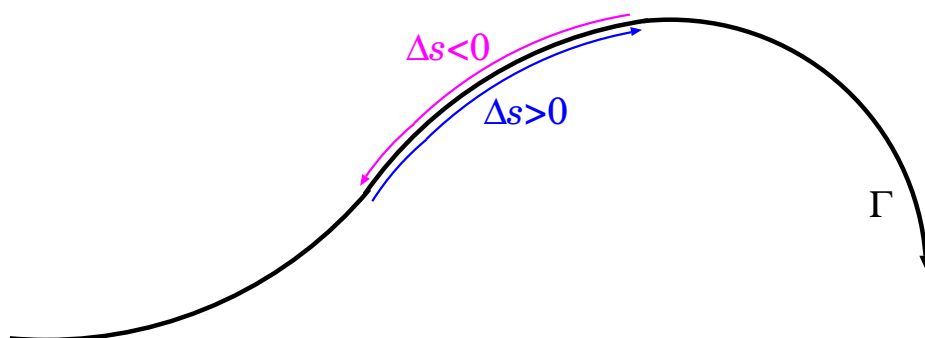


Figura 2.2: Esempi di spostamenti  $\Delta s$  lungo una linea orientata  $\Gamma$ : si ha  $\Delta s > 0$  oppure  $\Delta s < 0$ , a seconda che lo spostamento sia concorde o discorde rispetto all'orientamento della linea.

### Un esempio

Consideriamo un'automobile che viaggia lungo un'autostrada (senza svincoli o raccordi nel tratto che ci interessa): per quanto l'autostrada possa fare delle curve, o avere salite o discese, la posizione dell'automobile può essere definita univocamente da una sola coordinata  $s$ , definita come la distanza, misurata lungo l'autostrada, da un luogo preciso di riferimento. Così, per esempio, se l'autostrada è la A1 ("AutoSole" Milano-Napoli) possiamo prendere come riferimento il casello di Roma Est e da lì misurare tutte le distanze. Inoltre l'autostrada può essere percorsa in due direzioni, verso Milano o verso Napoli. Per specificare la direzione, scegliamo un orientamento convenzionale dell'autostrada, per esempio da Sud verso Nord, e attribuiamo un segno alle distanze: positivo se sono percorse nella direzione convenzionale, negativo altrimenti. Così per esempio la coordinata di Firenze è positiva perché si trova a Nord di Roma, mentre la coordinata di Napoli è negativa perché si trova a Sud di Roma. Assumendo che un solo percorso sia possibile, senza varianti, le coordinate di qualunque luogo lungo l'autostrada sono espresse come distanze dal casello di Roma Est: le coordinate di alcune città saranno quelle espresse nella seguente tabella:

luogo	coordinata $s$
Milano	579 km
Parma	452 km
Bologna	363 km
Firenze	273 km
Arezzo	195 km
Roma	0 km
Frosinone	-62 km
Napoli	-197 km

Si noti che le città a Sud di Roma hanno coordinata negativa, per la convenzione di orientamento Sud-Nord che abbiamo scelto.

Calcolare i seguenti spostamenti (con il loro segno): Roma-Firenze; Roma-Napoli; Milano-Bologna; Arezzo-Parma, Napoli-Frosinone.

**Risposta:**

Roma-Firenze	$\Delta s = 273 \text{ km} - 0 \text{ km}$	$= +273 \text{ km}$
Roma-Napoli	$\Delta s = -197 \text{ km} - 0 \text{ km}$	$= -197 \text{ km}$
Milano-Bologna	$\Delta s = 363 \text{ km} - 579 \text{ km}$	$= -216 \text{ km}$
Arezzo-Parma	$\Delta s = 452 \text{ km} - 195 \text{ km}$	$= +257 \text{ km}$
Napoli-Frosinone	$\Delta s = (-62) \text{ km} - (-197) \text{ km}$	$= +135 \text{ km}$

Anche qui, a causa dell'orientamento convenzionale, gli spostamenti verso Nord sono positivi, quelli verso Sud sono negativi... Attenzione: niente di ideologico, è solo che siamo abituati alle carte geografiche con il Nord in alto. Se volete potete cambiare l'orientamento dell'autostrada — e se non vi piace mettere l'origine a Roma mettetela dove meglio credete — ridefinitevi tutte le coordinate con il nuovo sistema di riferimento e ripetete l'esercizio.

## 2.2 Legge oraria del moto

Un oggetto che si sposta lungo una linea, modifica la sua coordinata  $s$  al passare del tempo  $t$ , pertanto possiamo pensare a “mappare” la sua posizione a diversi istanti di tempo  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ , chiamando  $s_i$  la sua coordinata all'istante  $t_i$ : si ottiene una tabella del tipo:

$t_0$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$\dots$	$t_N$
$s_0$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$\dots$	$s_N$

che può anche essere rappresentata come un grafico, in Fig. 2.3. Immaginando di infittire sempre più gli istanti  $t_i$  a cui si rileva la coordinata  $s_i$  si ottiene una successione continua di punti  $(t; s)$ , che può essere rappresentata come una funzione della coordinata  $s$  rispetto al tempo  $t$ :

$$s = s(t) \tag{2.2}$$

Questa funzione si chiama *legge oraria del moto*.

## 2.3 Velocità media

Quanto rapidamente si muove l'oggetto? Ovvero: qual è la distanza che percorre in un certo intervallo di tempo? La quantità che risponde a questa domanda è la *velocità media*. Se un oggetto si trovava nella posizione (1)

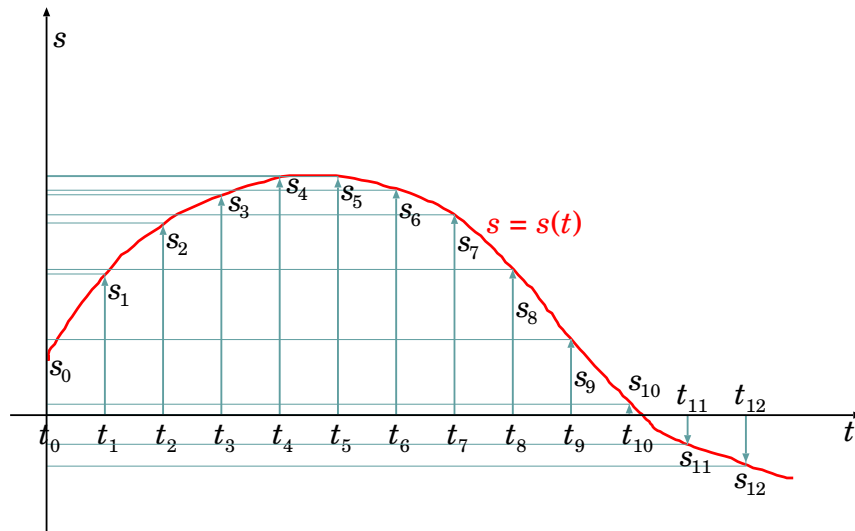


Figura 2.3: Moto di un oggetto in funzione del tempo, rappresentato in un grafico (tempo;spazio),  $(t; s)$ . La coordinata  $s_i$  corrisponde all'istante  $t_i$ , la curva continua rappresenta la legge oraria  $s = s(t)$ . In questo esempio, per semplicità, gli istanti  $t_i$  sono presi ad intervalli di tempo regolare, cioè sono equispaziati.

all'istante  $t_1$  e poi si è spostato raggiungendo la posizione (2) all'istante  $t_2$ , ha percorso una distanza  $\Delta s = s_2 - s_1$  in un intervallo di tempo  $\Delta t = t_2 - t_1$ . La sua velocità media è definita come:

$$\bar{v} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (\text{velocità media}) \quad (2.3)$$

### Esempio sulle velocità medie

Un'automobile percorre una distanza  $\Delta s_1 = 35$  km alla velocità media  $\bar{v}_1 = 100$  km/h, poi rallenta rapidamente a  $\bar{v}_2 = 80$  km/h e percorre altri  $\Delta s_2 = 40$  km. Quanto tempo ha impiegato lungo il suo tragitto? Qual è la velocità media su tutto il tragitto?

**Risposta.** Il tratto  $\Delta s_1$  è stato percorso in un tempo  $\Delta t_1 = \Delta s_1 / \bar{v}_1 = 0.35$  h, mentre il tratto  $\Delta s_2$  è stato percorso in un tempo  $\Delta t_2 = \Delta s_2 / \bar{v}_2 = 0.5$  h. Dunque il tempo totale è  $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 0.85$  h. La lunghezza di tutto il tragitto è  $\Delta s = \Delta s_1 + \Delta s_2 = 75$  km, quindi la velocità media lungo tutto il tragitto è  $\bar{v} = \Delta s / \Delta t = (75 \text{ km}) / (0.85 \text{ h}) \simeq 88.2$  km/h.

Come si vede nell'esempio, la velocità media su un tragitto non è uguale alle velocità medie calcolate su tratti più brevi del tragitto stesso. In effetti la ragione è che il moto dell'oggetto è cambiato lungo il tragitto. Nell'esempio,

l'automobile ha rallentato. I dati del problema consentono solo di dire che l'automobile era più veloce sul tratto  $\Delta s_1$  e più lenta sul tratto  $\Delta s_2$ , ma non sappiamo se su ciascuno dei due tratti abbia tenuto un'andatura regolare o abbia fatto accelerate o frenate. Per avere dettagli più precisi in merito occorrerebbe suddividere a loro volta i tratti  $\Delta s_1$  e  $\Delta s_2$  in tratti più brevi. . .

Riconsideriamo la Fig. 2.3: la velocità media dal punto (0) al punto (7) è ovviamente  $\bar{v}_{0,7} = (s_7 - s_0)/(t_7 - t_0)$ . D'altra parte, segmentando l'intervallo (0)–(7) in sottointervalli, cioè andando a considerare anche le posizioni intermedie (1),(2), . . . ,(6), possiamo definire velocità medie “più localizzate”, per esempio  $\bar{v}_{0,1} = (s_1 - s_0)/(t_1 - t_0)$ ,  $\bar{v}_{1,2} = (s_2 - s_1)/(t_2 - t_1)$ ,  $\bar{v}_{2,3} = (s_3 - s_2)/(t_3 - t_2)$ , etc. Ovviamente queste sono diverse fra loro. Nell'esempio in esame, gli intervalli di tempo sono tutti uguali:  $(t_1 - t_0) = (t_2 - t_1) = (t_3 - t_2) = (t_4 - t_3) = \dots$ : per questa scelta, a velocità medie maggiori corrispondono spostamenti maggiori, e viceversa. Quindi per esempio  $\bar{v}_{0,1} > \bar{v}_{1,2} > \bar{v}_{2,3} > \bar{v}_{3,4}$ : queste velocità medie sono tutte positive, ma decrescono. Fra  $t_4$  e  $t_5$  l'oggetto praticamente non si è mosso,  $s_4 = s_5$ , quindi in questo caso la velocità media è nulla:  $\bar{v}_{4,5} = 0$ . Poi la coordinata prende a decrescere, sempre più rapidamente, quindi da  $t_5$  in poi la velocità media diventa negativa, e sempre più piccola:  $0 > \bar{v}_{5,6} > \bar{v}_{6,7} > \bar{v}_{7,8} > \bar{v}_{8,9}$ . L'oggetto sta tornando indietro.

Che cosa succede in particolare fra  $t_4$  e  $t_5$ ? Dalle misure di posizione abbiamo  $s_4 = s_5$ , ma nei tempi intermedi? Se il nostro campionamento temporale fosse più fitto, forse potremmo vedere che dopo  $t_4$  l'oggetto avanza ancora un po', poi si arresta un istante e poi comincia a indietreggiare prima di  $t_5$ ?

## 2.4 Velocità istantanea

Volendo avere una descrizione ancora più dettagliata occorrerebbe suddividere il percorso in intervalli temporali ancora più piccoli: idealmente vorremmo che essi diventassero *infinitamente piccoli*! Questo è ciò che in analisi matematica si chiama *passaggio al limite*: nel nostro caso il limite è per  $\Delta t \rightarrow 0$ . La velocità *media* è una proprietà dell'intervallo di tempo  $\Delta t$  in cui la si misura, ma se  $\Delta t \rightarrow 0$  gli estremi dell'intervallo tendono a coincidere, e l'intervallo si riduce di fatto ad un istante. Pertanto, in questo limite, la velocità si chiama *velocità istantanea*:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad (2.4)$$

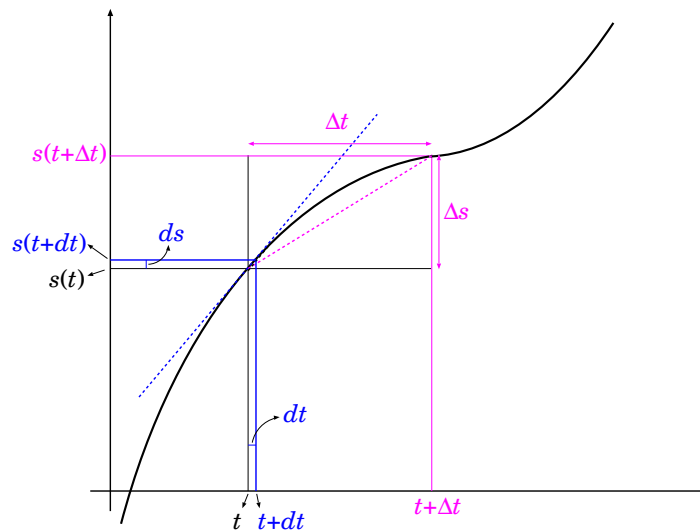


Figura 2.4: Calcolo della velocità media  $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$  e della velocità istantanea  $v = \frac{ds}{dt}$  di un oggetto che si muove con una legge oraria  $s(t)$ . La velocità media può essere visualizzata come il coefficiente angolare della corda che collega i punti  $(t; s(t))$  e  $(t + \Delta t; s(t + \Delta t))$ , e pertanto vale  $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ . La velocità istantanea invece è il coefficiente angolare della tangente alla curva nel punto  $(t; s(t))$ , e vale  $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ .

Le quantità  $ds$ ,  $dt$  indicano variazioni infinitesime di posizione e di tempo, rispettivamente: è consuetudine, nella condizione di limite, sostituire la notazione  $\Delta$  con la  $d$ . In analisi matematica,  $\Delta s/\Delta t$  si chiama *rapporto incrementale*. Il suo limite per  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $ds/dt$ , si chiama *derivata* della funzione  $s(t)$  rispetto alla variabile  $t$ .

Il passaggio al limite si può rappresentare graficamente come nella Fig. 2.4: data la legge oraria  $s(t)$ , la velocità istantanea può essere visualizzata come il coefficiente angolare della retta tangente alla curva del moto. A meno che il grafico di  $s(t)$  non sia una linea retta, la tangente modifica la sua pendenza da un punto all'altro, perciò la velocità in generale cambia: essa stessa è funzione del tempo. Quindi l'Eq. (2.4) va riscritta più precisamente come:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{ds(t)}{dt} \quad (2.5)$$

D'ora in poi, ogni volta che si parlerà di velocità si intenderà quella

istantanea, a meno che non sia altrimenti specificato.

### 2.4.1 Spostamento come integrale della velocità istantanea

Le Eq. (2.3) e Eq. (2.5) consentono di calcolare la velocità — rispettivamente media e istantanea — di un oggetto quando sia nota la sua legge oraria  $s = s(t)$ . Il procedimento si può anche invertire, ovvero si può ricavare uno spostamento  $\Delta s$  che avviene in un intervallo di tempo  $[t; t + \Delta t]$  se è nota la velocità in funzione del tempo,  $v(t)$ .

Con riferimento alla Fig. 2.3, consideriamo dapprima le velocità medie  $\bar{v}_{0,1}, \bar{v}_{1,2}, \bar{v}_{2,3}, \dots, \bar{v}_{n-1,n}$ . Ovviamente

$$\begin{aligned} \Delta s = s_n - s_0 &= (\bar{v}_{0,1} \cdot \Delta t_{0,1}) + (\bar{v}_{1,2} \cdot \Delta t_{1,2}) + \dots + (\bar{v}_{n-1,n} \cdot \Delta t_{n-1,n}) \\ &= \sum_{i=1}^n \bar{v}_{i-1,i} \cdot \Delta t_{i-1,i} \end{aligned}$$

Anche qui possiamo immaginare di dividere l'intervallo di tempo  $[t; t + \Delta t]$  in un numero sempre maggiore di intervallini sempre più piccoli. Occorre dunque considerare il passaggio al limite, per  $\Delta t \rightarrow 0$ : le quantità  $\bar{v} \cdot \Delta t$  diventano infinitesime, e il numero di addendi nella somma  $\sum_{i=1}^n$  tende all'infinito. Questa operazione, in analisi matematica, si chiama *integrale*, e si scrive in questa forma:

$$\Delta s = s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt \quad (2.6)$$

e si legge “lo spostamento  $\Delta s$  è pari all'integrale nel tempo della velocità istantanea”.

Si può rappresentare graficamente questo concetto come in Fig. 2.5.

## 2.5 Accelerazione

Come si è visto, in generale la velocità cambia durante il moto, quindi può essere espressa come funzione del tempo:  $v = v(t)$ . Pertanto è utile definire una quantità che esprime quanto rapidamente cambia la velocità: essa è l'accelerazione:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv(t)}{dt} \quad (2.7)$$

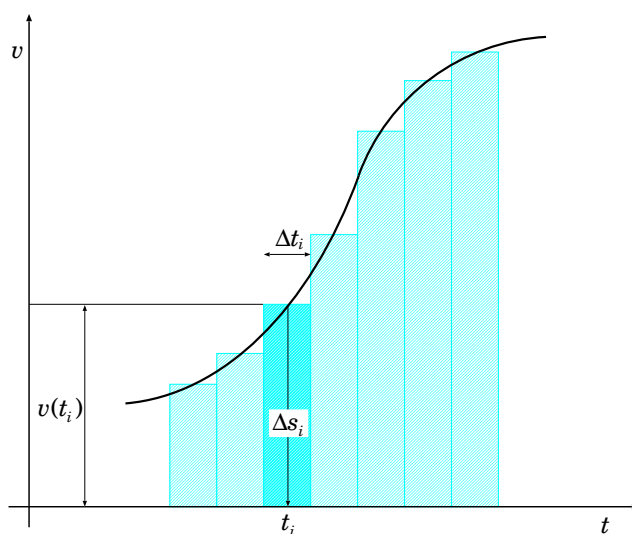


Figura 2.5: *Calcolo dello spostamento come integrale della velocità. Si considerano molti piccoli intervallini  $\Delta t_i$ , in ciascuno dei quali si assume che la velocità istantanea  $v_i$  sia praticamente uguale alla velocità media  $\bar{v}_i$ . Questa approssimazione permette di scrivere lo spostamento nel tempo  $\Delta t_i$  come  $\Delta s_i = \bar{v}_i \cdot \Delta t_i \simeq v_i \cdot \Delta t_i$ .*

L'accelerazione è dunque il rapporto fra la variazione di velocità  $\Delta v$  ed il tempo  $\Delta t$  in cui essa ha luogo, nel limite di  $\Delta t \rightarrow 0$ . In altre parole, *l'accelerazione è la derivata della velocità rispetto al tempo.*

Il formalismo è del tutto analogo a quello introdotto per definire la velocità. Pertanto, senza ulteriori discussioni, possiamo affermare che la variazione di velocità da un istante  $t_1$  ad un istante  $t_2$  può essere calcolata se si conosce l'accelerazione in funzione del tempo,  $a = a(t)$ :

$$\Delta v = v(t_2) - v(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt \quad (2.8)$$

Poiché la velocità, a sua volta, è derivata della posizione rispetto al tempo, possiamo anche scrivere:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{ds(t)}{dt} \right] = \frac{d^2 s(t)}{dt^2}$$

L'accelerazione è la derivata della derivata della posizione rispetto al tempo: *l'accelerazione è la derivata seconda della posizione rispetto al tempo.*

## 2.6 Unità di misura

Le distanze e gli spostamenti si misurano in metri (m). A seconda del contesto si fa uso di multipli o sottomultipli del metro (1 cm=0.01 m ; 1 mm=0.001 m ; 1 km=1000 m ; etc...). Analogamente, il tempo si misura in secondi (s), oppure in altre unità più comode a seconda delle situazioni (1 min=60 s ; 1 h=60 min=3600 s).

In fisica si fa uso specialmente del *Sistema Internazionale* (SI) di unità di misura, cui molti Paesi del mondo hanno aderito — un'importante eccezione è costituita dai Paesi anglosassoni: too bad for them! Nel SI le unità di misura per le grandezze cinematiche finora introdotte sono riassunte nella seguente tabella:

grandezza fisica	unità di misura	
	simbolo	nome
distanza, spostamento	m	metro
tempo	s	secondo
velocità	m/s	metri al secondo
accelerazione	m/s <sup>2</sup>	metri al secondo quadrato

Nella vita quotidiana, spesso le velocità sono espresse in *chilometri all'ora*, km/h. Pertanto ricaviamo una volta per tutte la conversione fra *metri al secondo* e *chilometri all'ora*. Poiché 1 h = 3600 s e 1 km = 1000 m, otteniamo che  $1 \text{ km/h} = \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{1}{3.6} \text{ m/s}$ , ovvero:

$$1 \text{ m/s} = 3.6 \text{ km/h} \quad (2.9)$$

## 2.7 Moto uniforme

Un caso molto particolare, e facile da trattare, è il moto uniforme, definito come moto a velocità costante

$$v \text{ costante} \quad (\text{moto uniforme}) \quad (2.10)$$

Essendo  $a = \frac{dv}{dt}$ , segue ovviamente che

$$a = 0 \quad (\text{moto uniforme}) \quad (2.11)$$

Il calcolo dello spostamento, Eq. (2.6), diventa ora ovvio:

$$\Delta s = \int_{t_1}^{t_2} v dt = v, \int_{t_1}^{t_2} dt = v(t_2 - t_1), \text{ ovvero}$$

$$\Delta s = v \Delta t \quad (\text{moto uniforme}) \quad (2.12)$$



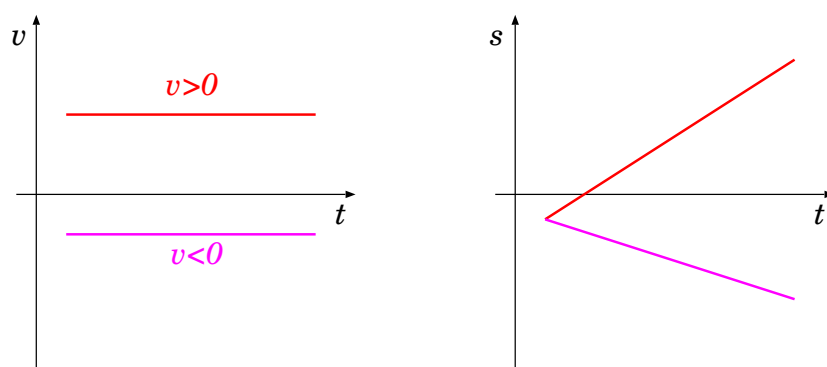


Figura 2.6: Grafici temporali del moto uniforme: a sinistra, la velocità (due casi: in rosso  $v > 0$ , in violetto  $v < 0$ ); a destra, l'andamento di  $s(t)$ , per i casi  $v > 0$  e  $v < 0$ , assumendo la stessa condizione iniziale  $s(t_0)$ .

Graficamente, velocità e posizione evolvono nel tempo come indicato in Fig. 2.6.

Incidentalmente, come conseguenza la velocità media coincide con quella istantanea:

$$\bar{v} = v \quad (\text{moto uniforme}) \quad (2.13)$$

## 2.8 Moto uniformemente accelerato

Un altro caso notevole è il moto uniformemente accelerato, definito come moto con accelerazione costante

$$a \text{ costante} \quad (2.14)$$

(moto uniformemente accelerato)

Il calcolo della velocità si esegue facilmente partendo dall'Eq. (2.8):

$$v(t_2) = v(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} a \, dt = v(t_1) + a \Delta t$$

che può essere scritto, per  $t$  generico, come:

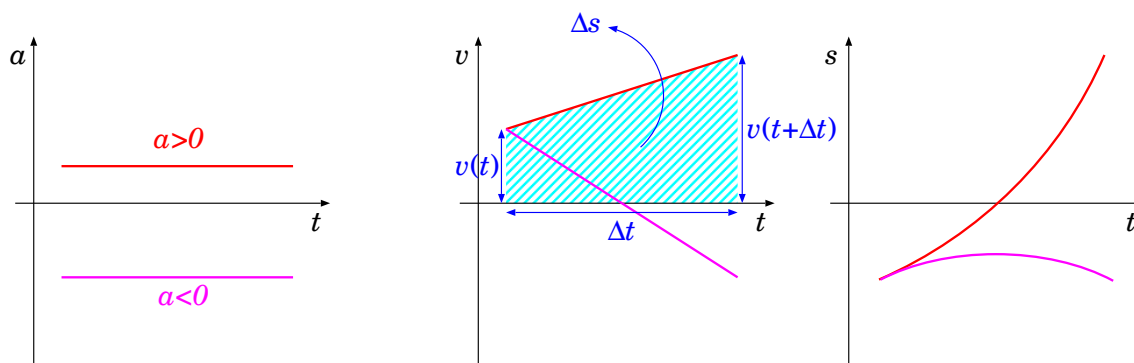


Figura 2.7: Grafici temporali del moto uniformemente accelerato: a sinistra, l'accelerazione (due casi: in rosso  $a > 0$ , in violetto  $a < 0$ ); al centro, andamento di  $v(t)$ , per i due casi  $a > 0$  e  $a < 0$ , assumendo la stessa velocità iniziale  $v(t_0)$ ; a destra,  $s(t)$ , sempre nei due casi, assumendo le stesse condizioni iniziali  $s(t_0)$ ,  $v(t_0)$ . L'area tratteggiata nella figura centrale è la rappresentazione grafica dell'integrale  $\int_t^{t+\Delta t} v(t) dt$ , usata per calcolare lo spostamento  $\Delta s$ .

$$v(t + \Delta t) = v(t) + a \Delta t \quad (2.15)$$

(moto uniformemente accelerato)

Il grafico di  $a$  e  $v(t)$  in funzione del tempo  $t$  sono mostrati in Fig. 2.7 (sinistra e centro).

Il calcolo dello spostamento — Eq. (2.6) — può essere eseguito servendosi della rappresentazione grafica dell'integrale, Fig. 2.5. In particolare, l'area sottesa dalla curva  $v(t)$  è un trapezio rettangolo, come evidenziato in Fig. 2.7 (centro), la cui area è

$$\Delta s = \frac{v(t_0) + v(t_0 + \Delta t)}{2} \Delta t = \frac{v(t_0) + [v(t_0) + a\Delta t]}{2} \Delta t$$

ovvero:

$$\Delta s = v(t_0) \Delta t + \frac{a}{2} (\Delta t)^2 \quad (2.16)$$

(moto uniformemente accelerato)

La dipendenza di  $\Delta s$  da  $(\Delta t)^2$  significa che il grafico di  $s(t)$  è parabolico:

$$s(t) = s_0 + v(t_0)(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2 \quad (2.17)$$

(moto uniformemente accelerato)

come mostrato in Fig. 2.7 (destra)

## 2.9 Esercizi di cinematica unidimensionale

Negli esercizi che seguono si farà abbondante uso di derivate e integrali. Può essere utile consultare le regole di derivazione e integrazione e i casi notevoli che sono riassunti in Sezione 3.3.

**Esercizio 2.1.** *Un'automobile viaggia alla velocità di 130 km/h. Calcolare la sua velocità in unità di misura SI.*

**Risposta :**  $v = 130 \text{ km/h} = 130 \cdot \frac{1}{3.6} \text{ m/s} = 36.11 \text{ m/s}$

**Esercizio 2.2.** *Un oggetto, lanciato su un tavolo orizzontale con velocità iniziale  $v_0 = 2 \text{ m/s}$ , rallenta fino a fermarsi dopo 3 secondi; durante il moto ha seguito una legge oraria*

$$s(t) = v_0 t - \alpha t^2$$

*Scrivere l'evoluzione temporale della velocità e dell'accelerazione. Calcolare  $\alpha$ . Quanto spazio è stato percorso in tutto?*

**Risposta.** *La velocità si ottiene derivando la posizione rispetto al tempo:*

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(v_0 t - \alpha t^2) = v_0 - 2\alpha t$$

*Derivando la velocità rispetto al tempo si ottiene l'accelerazione:*

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(v_0 - 2\alpha t) = -2\alpha$$

*Sappiamo che a  $t_1 = 3 \text{ s}$  l'oggetto si è arrestato: quindi  $0 = v(t = 3 \text{ s}) = v_0 - 2\alpha t_1$ , ovvero  $\alpha = \frac{v_0}{2t_1} = 0.3333 \text{ m/s}^2$ . L'accelerazione è costante e negativa (cioè è una decelerazione):  $a = -2\alpha = -0.6667 \text{ m/s}^2$ . Lo spazio totale percorso è*

$$\Delta s = s(t_1) - s(0) = v_0 t_1 - \alpha t_1^2 = (2 \text{ m/s})(3 \text{ s}) - (0.3333 \text{ m/s}^2)(3 \text{ s})^2 = 3 \text{ m}$$

**Esercizio 2.3.** Un'automobile che viaggia sull'autostrada, all'istante  $t = 0$  si trova al chilometro 286 con velocità  $v_0 = 60$  km/h, quando comincia ad accelerare, con un'accelerazione  $a(t) = \alpha \left(1 - \frac{t}{\Delta t}\right)$ , per  $\Delta t = 5$  s, fino a raggiungere una nuova velocità  $v_1 = 80$  km/h. Ricavare come la velocità  $v(t)$  e la posizione  $s(t)$  evolvono nel tempo. Calcolare  $\alpha$  e la nuova posizione  $s_1$  raggiunta nel tempo  $\Delta t$ .

**Risposta.** Anzitutto convertiamo tutti i dati in unità S.I.:  $s_0 = 286\,000$  m;  $v_0 = 16.67$  m/s;  $v_1 = 22.22$  m/s.

La velocità si ottiene integrando l'accelerazione nel tempo, e tenendo conto della condizione iniziale  $v_0$ :

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + \int_0^t dt' a(t') = v_0 + \int_0^t dt' \alpha \left(1 - \frac{t'}{\Delta t}\right) = v_0 + \alpha t - \frac{\alpha}{\Delta t} \left[\frac{(t')^2}{2}\right]_0^t \\ &= v_0 + \alpha \left(t - \frac{t^2}{2\Delta t}\right) \end{aligned}$$

Dopo un tempo  $\Delta t$ ,  $t = t_1 = \Delta t = 5$  s. Per avere  $v(t_1) = v_1$  deve essere  $v_1 - v_0 = \alpha \frac{\Delta t}{2}$ , quindi  $\alpha = 2 \frac{v_1 - v_0}{\Delta t} = 2.222$  m/s<sup>2</sup>.

La posizione si ottiene integrando la velocità nel tempo, e tenendo conto della condizione iniziale  $s_0$ :

$$\begin{aligned} s(t) &= s_0 + \int_0^t dt' v(t') = s_0 + \int_0^t dt' \left(v_0 + \alpha \left(t' - \frac{t'^2}{2\Delta t}\right)\right) \\ &= s_0 + \left[v_0 t' + \alpha \left(\frac{(t')^2}{2} - \frac{(t')^3}{6\Delta t}\right)\right]_0^t \\ &= s_0 + v_0 t + \alpha \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6\Delta t}\right) \end{aligned}$$

Per calcolare  $s_1 = s(t_1)$ , o introduciamo "brute force" tutti i dati nell'equazione per  $s(t)$ , oppure — visto che in questo caso possiamo — cerchiamo di semplificare un po' la formula, tenendo presente che  $t_1 = \Delta t$  e  $\alpha = 2 \frac{v_1 - v_0}{\Delta t}$ . Quindi

$$\begin{aligned} s_1 - s_0 &= v_0 \Delta t + \frac{2}{3} (v_1 - v_0) \Delta t = (5 \text{ s}) \left(16.67 \text{ m/s} + \frac{2}{3} (22.22 - 16.67) \text{ m/s}\right) = 101.9 \text{ m}; \\ s_1 &= 286\,102 \text{ m}. \end{aligned}$$

**Esercizio 2.4.** Un oggetto cade verso terra con una velocità che varia nel tempo, secondo la legge:

$$v(t) = \frac{g}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})$$

essendo  $g = 9.806$  m/s<sup>2</sup> l'accelerazione che la gravità imprime a qualunque oggetto che cade, e  $\alpha$  un parametro che descrive il frenamento dovuto all'aria.

Si determini  $\alpha$  sapendo che la velocità massima raggiunta dall'oggetto è  $v_{max} = 10$  m/s. Si scriva la legge oraria del moto  $s = s(t)$ , supponendo che a  $t = 0$

sia  $s = 0$ , e l'andamento dell'accelerazione nel tempo,  $a = a(t)$ . Si calcolino l'accelerazione, la velocità istantanea e la distanza percorsa dopo 2 s.

**Risposta.** Dall'equazione per  $v(t)$  si nota che per  $t \rightarrow +\infty$   $e^{-\alpha t} \rightarrow 0$ , quindi  $v(t) \rightarrow \frac{g}{\alpha} \equiv v_{max}$ . Si deduce che  $\alpha = \frac{g}{v_{max}} = 0.9806 \text{ s}^{-1}$ .

La legge oraria si ottiene integrando la velocità nel tempo. Definiamo l'origine della coordinata nel luogo dove l'oggetto si trova a  $t = 0$ . Allora

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t dt' v(t') = \frac{g}{\alpha} \left( \int_0^t dt' - \int_0^t dt' e^{-\alpha t'} \right) \\ &= \frac{g}{\alpha} \left( t - \left[ -\frac{e^{-\alpha t'}}{\alpha} \right]_0^t \right) = \frac{g}{\alpha} \left( t + \frac{e^{-\alpha t} - 1}{\alpha} \right) \\ &= v_{max} \left( t + \frac{e^{-\alpha t} - 1}{\alpha} \right) \end{aligned}$$

Invece, l'accelerazione si ottiene derivando la velocità rispetto al tempo:

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{g}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) \right] \\ &= \frac{g}{\alpha} \frac{d}{dt} [-e^{-\alpha t}] = \frac{g}{\alpha} \cdot \alpha e^{-\alpha t} \\ &= g e^{-\alpha t} \end{aligned}$$

Per  $t = 2$  s si trova  $e^{-\alpha t} = e^{-1.9612} = 0.1407$ , quindi:

$$\begin{aligned} a(t = 2 \text{ s}) &= g e^{-\alpha t} = (9.806 \text{ m/s}^2) \cdot 0.1407 = 1.380 \text{ m/s}^2 \\ v(t = 2 \text{ s}) &= v_{max}(1 - e^{-\alpha t}) = (10 \text{ m/s})(1 - 0.1407) = 8.593 \text{ m/s} \\ s(t = 2 \text{ s}) &= v_{max} \left( t + \frac{e^{-\alpha t} - 1}{\alpha} \right) = (10 \text{ m/s}) \left( 2 \text{ s} + \frac{0.1407 - 1}{0.9806 \text{ s}^{-1}} \right) = 12.24 \text{ m} \end{aligned}$$

**Esercizio 2.5.** Un'automobile che viaggia alla velocità di 100 km/h inizia a frenare gradualmente, fino a fermarsi. La frenata dura per 10 secondi, durante i quali la velocità segnata dal tachimetro cala in modo regolare, indicando una decelerazione costante. Quanto vale l'accelerazione? Quanto spazio percorre l'auto durante la frenata? Qual è la velocità media dell'auto durante tutta la frenata?

**Risposta.** Anzitutto convertiamo la velocità iniziale in unità SI:  $v_0 = 100 \text{ km/h} = \frac{100}{3.6} \text{ m/s} = 27.78 \text{ m/s}$ .

Il moto è caratterizzato da un'accelerazione costante  $a$  — che dovrà risultare negativa, trattandosi di una decelerazione.

La legge oraria della velocità deve essere tale che  $\frac{dv}{dt} \equiv a$  sia costante, quindi deve essere della forma  $v(t) = v_0 + at$ . A  $t_1 = 10$  s l'auto si ferma, quindi deve essere  $v(t_1) = v_0 + at_1 = 0$ , da cui  $a = -\frac{v_0}{t_1} = -2.778 \text{ m/s}^2$  — negativa, come aspettato.

Lo spazio percorso si ottiene integrando la velocità nel tempo:

$$\Delta s = \int_0^{t_1} v(t) dt = \int_0^{t_1} (v_0 + at) dt = \left[ v_0 t + \frac{at^2}{2} \right]_{t=0}^{t=t_1} = v_0 t_1 + \frac{a}{2} t_1^2$$

Inserendo i dati numerici,  $\Delta s = (27.78 \text{ m/s})(10 \text{ s}) + \frac{-2.778 \text{ m/s}^2}{2} (10 \text{ s})^2 = 139 \text{ m}$ .

La velocità media durante la frenata è  $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{t_1 - 0} = 13.9 \text{ m/s}$ .

## 2.10 Riassunto dei concetti sul moto lungo una linea

In sintesi, la posizione di un oggetto lungo una linea orientata può essere descritta con una singola *coordinata*  $s$  rispetto ad un punto di riferimento, che avrà per definizione  $s = 0$ . La coordinata è positiva se per raggiungere il punto dall'origine si deve seguire l'orientamento della linea; in caso contrario la coordinata è negativa.

La distanza fra due posizioni (1) e (2), definite dalle coordinate  $s_1$  e  $s_2$ , è definita come  $\Delta s = s_2 - s_1$ . Si noti che in generale la linea è orientata, vale a dire che ha senso scrivere  $s_1 < s_2$  o viceversa. Pertanto  $\Delta s$  può essere positivo o negativo.

Il moto di un oggetto lungo la linea è completamente descritto dalla *legge oraria*, espressa come funzione  $s(t)$ . Essa, una volta nota, consente di calcolare la posizione  $s$  dell'oggetto ad un qualunque istante  $t$ .

La *velocità* di moto dell'oggetto è definita come il rapporto fra uno spostamento  $\Delta s$  ed il tempo  $\Delta t$  impiegato ad effettuarlo, nel limite  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

La *accelerazione* dell'oggetto è definita come il rapporto fra la variazione di velocità  $\Delta v$  ed il tempo  $\Delta t$  impiegato ad effettuarlo, nel limite  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

Lo spostamento  $\Delta s$  a sua volta è ottenibile come integrale della velocità:

$$\Delta s = s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

e la variazione di velocità è calcolabile come integrale dell'accelerazione:

$$\Delta v = v(t_2) - v(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt$$

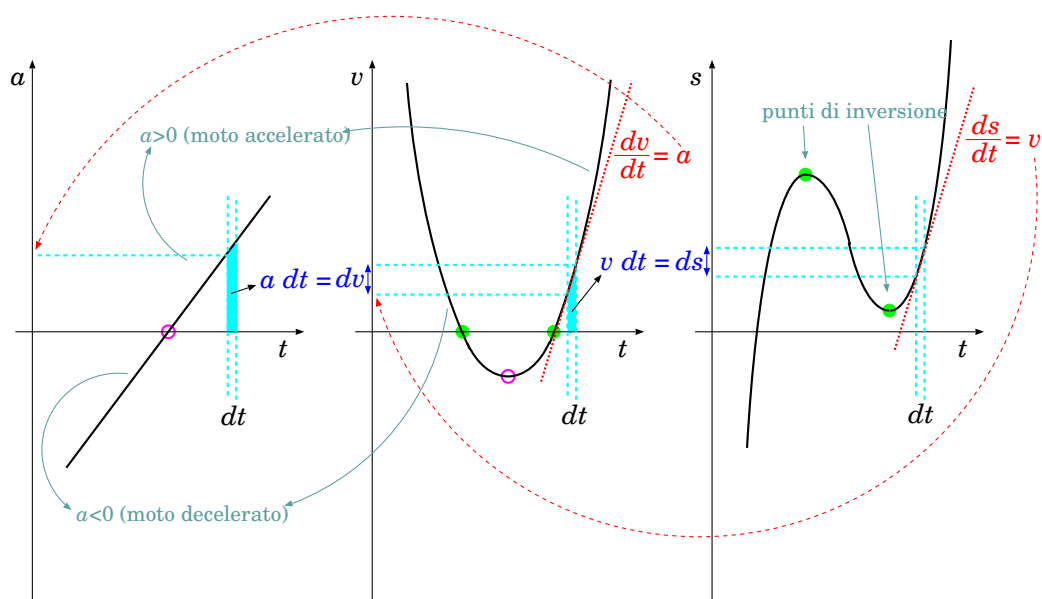


Figura 2.8: Rappresentazione grafica dell'evoluzione nel tempo di una accelerazione  $a$ , una velocità  $v$  e una posizione  $s$ . In un tempo brevissimo  $dt$ , la velocità varia di  $dv = a dt$  e la posizione di  $ds = v dt$ .

Come si vede sin da qui, le operazioni di derivazione e integrazione di una funzione ricoprono un ruolo imprescindibile nella fisica. Per questo motivo le principali regole vengono riportate nel Capitolo 3.

Per offrire un punto di vista diverso, possiamo rivedere queste definizioni da un punto di vista grafico. La situazione è illustrata in Fig. 2.8.

In un tempo infinitesimo  $dt$  la variazione di velocità è  $dv = a dt$ ; nello stesso tempo la variazione di posizione è  $ds = v dt$ . Entrambe queste espressioni sono rappresentate dall'area del trapezoide di larghezza  $dt$  e altezza rispettivamente  $a$  e  $v$ .

Viceversa, la velocità si può ricavare come  $v = \frac{ds}{dt}$  e l'accelerazione come  $a = \frac{dv}{dt}$ . La rappresentazione grafica di queste espressioni corrisponde alle pendenze ( $\equiv$  coefficienti angolari) delle rette tangenti rispettivamente al grafico  $(t; s)$  e  $(t; v)$ .

In figura sono anche indicati i “punti di inversione” (in verde), in cui si inverte il moto: inizialmente  $s$  cresce col tempo, poi inizia a diminuire, poi torna a crescere. A queste tre fasi corrispondono diversi segni della velocità: prima positiva, poi negativa, poi di nuovo positiva. Nei punti di inversione la velocità è istantaneamente nulla.

Infine è anche indicato (in fucsia) un istante in cui l'accelerazione è nulla: questo corrisponde ad un punto di stazionarietà nel grafico  $(t; v)$ , come se la velocità fosse “temporaneamente costante”.

### Un esempio semplice

Consideriamo un'auto che parte da ferma, accelera uniformemente fino a 108 km/h per 20 s, quindi prosegue a velocità costante per 2 min, infine decelera uniformemente fino a fermarsi in 10 s. Chiamando (1), (2), (3) i 3 tratti di percorso, vogliamo determinare i valori delle accelerazioni  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  e gli spostamenti percorsi  $\Delta s_1$ ,  $\Delta s_2$ ,  $\Delta s_3$  in ciascuno dei tratti, per via analitica e per via grafica.

#### Approccio analitico

Occorre prima di tutto scrivere la legge oraria della velocità. Introduciamo i 3 intervalli di tempo corrispondenti ai 3 tratti, e i rispettivi istanti iniziale e finale di ciascun tratto:

$$\begin{array}{l|l} \Delta t_1 = 20 \text{ s} & t_0 = 0 \quad \text{(per convenzione)} \\ \Delta t_2 = 120 \text{ s} & t_1 = t_0 + \Delta t_1 = 20 \text{ s} \\ \Delta t_3 = 10 \text{ s} & t_2 = t_1 + \Delta t_2 = 140 \text{ s} \\ & t_3 = t_2 + \Delta t_3 = 150 \text{ s} \end{array}$$

Nel 1° e nel 3° tratto, l'accelerazione è costante, pertanto la velocità deve avere una dipendenza lineare dal tempo, qualcosa del tipo  $v(t) = v_{in} + a(t - t_{in})$ , essendo  $t_{in}$ ,  $v_{in}$  relativi all'istante iniziale dell'intervallo considerato. Nel 1° tratto l'accelerazione sarà positiva, nel 3° sarà negativa. Nel 2° tratto l'accelerazione sarà nulla e la velocità costante, pari a  $v_{max} = 108 \text{ km/h} = 30 \text{ m/s}$ . La legge oraria sarà dunque:

$$v(t) = \begin{cases} a_1 t & \text{(per } 0 \leq t \leq t_1) \\ v_{max} & \text{(per } t_1 \leq t \leq t_2) \\ v_{max} + a_3(t - t_2) & \text{(per } t_2 \leq t \leq t_3) \end{cases}$$

L'accelerazione  $a_1$  si può ricavare imponendo che  $v(t)$  sia continua in  $t = t_1$ :  $a_1 t_1 = v_{max}$ , ovvero  $a_1 = \frac{v_{max}}{t_1} = 1.5 \text{ m/s}^2$ . Analogamente,  $a_3$  si ricava imponendo che  $v(t_3) = 0$ , quindi  $v_{max} + a_3(t_3 - t_2) = 0$ , cioè  $a_3 = -\frac{v_{max}}{t_3 - t_2} = -3 \text{ m/s}^2$  — negativa, come aspettato.

Per la distanza percorsa in ciascun intervallo si usa la formula del moto uniformemente accelerato:  $\Delta s = v_{in} \Delta t + \frac{a}{2} (\Delta t)^2$ . Quindi:

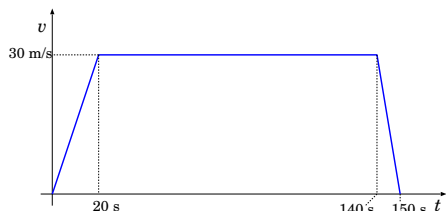
$$\begin{aligned} \Delta s_1 &= \frac{a_1}{2} (\Delta t_1)^2 &= 300 \text{ m} & \text{(moto uniformemente accelerato)} \\ \Delta s_2 &= v_{max} \Delta t_2 &= 3600 \text{ m} & \text{(moto uniforme)} \\ \Delta s_3 &= v_{max} \Delta t_3 + \frac{a_3}{2} (\Delta t_3)^2 &= 150 \text{ m} & \text{(moto uniformemente accelerato)} \end{aligned}$$



## 2.10. RIASSUNTO DEI CONCETTI SUL MOTO LUNGO UNA LINEA 49

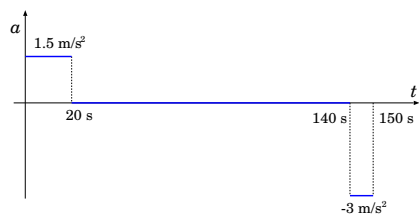
### Approccio grafico

Cominciamo a disegnare quello che sappiamo dalla formulazione del problema:



la velocità cresce linearmente nel 1° tratto, è costante nel 2° tratto, e decresce linearmente fino ad annullarsi nel 3° tratto.

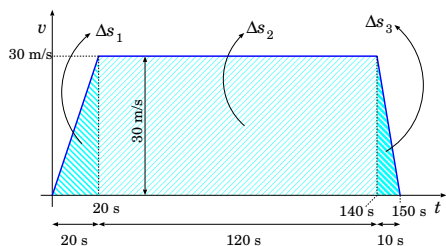
L'accelerazione è pari al coefficiente angolare della retta che rappresenta la velocità nel grafico precedente:



$$a_1 = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{30 \text{ m/s}}{20 \text{ s}} = 1.5 \text{ m/s}^2$$

$$a_3 = \frac{v_3 - v_2}{t_3 - t_2} = \frac{-30 \text{ m/s}}{10 \text{ s}} = -3 \text{ m/s}^2$$

La distanza percorsa in ciascun tratto è data dall'area sottesa dal grafico della velocità. Trattandosi di 2 triangoli e 1 rettangolo il risultato è semplice:

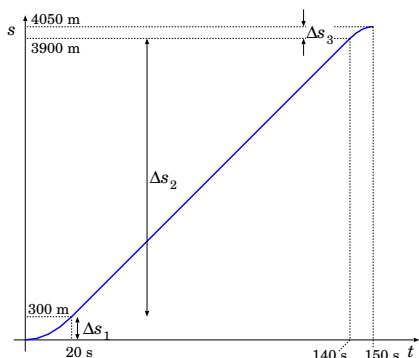


$$\Delta s_1 = \frac{v_{max} \Delta t_1}{2} = \frac{(30 \text{ m/s})(20 \text{ s})}{2} = 300 \text{ m}$$

$$\Delta s_2 = v_{max} \Delta t_2 = (30 \text{ m/s})(120 \text{ s}) = 3600 \text{ m}$$

$$\Delta s_3 = \frac{v_{max} \Delta t_3}{2} = \frac{(30 \text{ m/s})(10 \text{ s})}{2} = 150 \text{ m}$$

Il grafico della legge oraria si ottiene considerando che:



1° tratto: parabola con concavità verso l'alto con tangente orizzontale in  $t = 0$

2° tratto: retta che si raccorda con la parabola

3° tratto: parabola con concavità verso il basso che si raccorda con la retta e con tangente orizzontale in  $t = t_3$

### Achille e la tartaruga

Achille "pié veloce" era un ottimo corridore, mentre la tartaruga è proverbiale per la sua progressione lenta e inarrestabile... Un famoso paradosso (di Zenone da Elea, V sec a.C.) sosteneva che Achille non sarebbe mai stato in grado

di raggiungere in gara una tartaruga, che partisse con un piccolo vantaggio. Ovviamente il suo ragionamento era sbagliato (Zenone, ma se eri inseguito da un leone affamato ti salvavi??), però prendiamo a pretesto questo esempio per vedere come va trattato, e poi “debunkiamo” il ragionamento di Zenone.

Impostiamo il problema in maniera quantitativa. Achille corre a una velocità  $v_A = 10$  m/s, la tartaruga cammina a velocità  $v_T = 15$  cm/s. All’istante  $t = 0$ , Achille parte dalla linea di partenza,  $s_A(0) = 0$ , mentre la tartaruga ha un vantaggio, per esempio  $s_T(0) = 50$  m. Vediamo (se) quando e dove Achille raggiunge la tartaruga.

**Soluzione.** Entrambi si muovono di moto uniforme, quindi le loro leggi orarie sono:

$$s_A(t) = v_A t \quad ; \quad s_T(t) = s_T(0) + v_T t$$

Se esiste un istante  $t$  in cui Achille raggiunge la tartaruga, deve essere  $s_A(t) = s_T(t)$ . Quindi deve essere  $v_A t = s_T(0) + v_T t$ , ovvero  $(v_A - v_T)t = s_T(0)$ . La cui soluzione esiste, ed è

$$t = \frac{s_T(0)}{v_A - v_T}$$

Numericamente ( $v_T = 0.15$  m/s) si trova  $t = 5.076$  s. In questo tempo Achille ha percorso  $s_A(t) = 50.76$  m e la tartaruga  $s_T(t) - s_T(0) = 0.76$  m = 76 cm.

**Ragionamento di Zenone, e critica ad esso.** Il ragionamento di Zenone — con linguaggio moderno — si formula così:

- Achille, appena partito, impiegherà un certo tempo  $\Delta t_1$  a raggiungere la posizione  $s_T(0)$ , dove la tartaruga si trovava, ma in questo stesso tempo essa è avanzata in  $s_T(t_1)$ , con  $t_1 = 0 + \Delta t_1$ .
- Allora Achille deve impiegare un tempo ulteriore  $\Delta t_2$  per percorrere l’ulteriore distanza  $s_T(t_1) - s_T(0)$  — ma intanto la tartaruga è avanzata in  $s_T(t_2)$ , con  $t_2 = t_1 + \Delta t_2$ .
- ... e così via... Quindi il tempo passa,  $t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + \Delta t_4 + \dots = \sum_{k=1}^{+\infty} \Delta t_k$ , e Achille non raggiunge mai la tartaruga

DOVE sbaglia Zenone? L’approccio di per sé è giusto. La conclusione quantitativa invece è sbagliata. Vediamo perché.

- Anzitutto  $\Delta t_1 = \frac{s_T(0)}{v_A}$ ;
- poi  $s_T(t_1) - s_T(0) = v_T \Delta t_1$  e quindi  $\Delta t_2 = \frac{s_T(t_1) - s_T(0)}{v_A} = \frac{v_T}{v_A} \Delta t_1$ ;
- poi  $s_T(t_2) - s_T(t_1) = v_T \Delta t_2$  e quindi  $\Delta t_3 = \frac{s_T(t_2) - s_T(t_1)}{v_A} = \frac{v_T}{v_A} \Delta t_2 \dots$

2.10. RIASSUNTO DEI CONCETTI SUL MOTO LUNGO UNA LINEA 51

- Generalizzando, se in un certo tempo  $\Delta t_k$  la tartaruga percorre una distanza  $s_T(t_k) - s_T(t_{k-1}) = v_T \Delta t_k$ , Achille dovrà recuperarla in un tempo

$$\Delta t_{k+1} = \frac{s_T(t_k) - s_T(t_{k-1})}{v_A} = \frac{v_T}{v_A} \Delta t_k$$

- A questo punto è facile vedere quanto vale ciascun  $\Delta t_k$ :

$$\Delta t_k = \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^{k-1} \cdot \Delta t_1 = \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^{k-1} \cdot \frac{s_T(0)}{v_A}$$

- Il tempo totale impiegato da Achille è quindi

$$t = \sum_{k=1}^{+\infty} \Delta t_k = \left[ \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^{k-1} \right] \cdot \frac{s_T(0)}{v_A} = \left[ \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^k \right] \cdot \frac{s_T(0)}{v_A}$$

Ora, la sommatoria infinita trovata ha un risultato che NON È INFINITO (e questo Zenone non lo sapeva... come nessuno, a quell'epoca).

In dettaglio: se chiamiamo  $\xi = \frac{v_T}{v_A}$ , ovviamente  $0 < \xi < 1$  e risulta

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \xi^k = \frac{1}{1-\xi} \quad [2]. \quad \text{Quindi si trova}$$

$$t = \frac{1}{1 - \frac{v_T}{v_A}} \cdot \frac{s_T(0)}{v_A} = \frac{s_T(0)}{v_A - v_T}$$

(come trovato precedentemente).

<sup>2</sup> Dimostrazione: se  $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \xi^k$ , ovviamente

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^n \xi^k = \xi \left( \sum_{k=0}^{n-1} \xi^k \right) + 1 = \xi S_n + 1, \text{ poi:}$$

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \xi + \xi^2 + \dots + \xi^{n-1} \\ S_{n+1} - 1 &= \xi + \xi^2 + \dots + \xi^{n-1} + \xi^n \end{aligned}$$

Sottraendo,  $S_n - (S_{n+1} - 1) = 1 - \xi^n$ , e siccome  $S_{n+1} - 1 = \xi S_n$ , si ricava  $S_n = \frac{1 - \xi^n}{1 - \xi}$ .

Se  $|\xi| < 1$  esiste il limite  $n \rightarrow +\infty$  e vale

$$S_\infty = \sum_{k=0}^{+\infty} \xi^k = \frac{1}{1 - \xi}$$



# Capitolo 3

## Derivazione e integrazione

Abbiamo visto nel Capitolo 2 che in fisica le derivate e gli integrali sono strumenti matematici fondamentali. Per esempio, la velocità è la derivata della posizione rispetto al tempo, e l'accelerazione è la derivata della velocità. Viceversa, lo spostamento si può scrivere come integrale della velocità nel tempo, e la variazione di velocità come integrale dell'accelerazione.

Vedremo molti altri casi in cui derivate e integrali saranno necessari.

Pertanto, riassumiamo qui le definizioni e le regole più utili — per una trattazione più completa si rimanda ai corsi e ai testi di analisi differenziale. È importante notare anche che in Fisica si usa una notazione spesso diversa da quella introdotta in analisi, come riprenderemo in questo capitolo.

### 3.1 Definizione di derivata

Anzitutto ricordiamo che, data una funzione  $f \equiv f(t)$ , si definisce la variazione:

$$\Delta f = f(t + \Delta t) - f(t)$$

e il *rapporto incrementale*

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Si definisce la *derivata* di  $f$  nel punto  $t$  il limite del rapporto incrementale  $\frac{\Delta f}{\Delta t}$  per  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\frac{df(t)}{dt} \equiv \frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \quad (3.1)$$

Anche  $\frac{df(t)}{dt}$  è una funzione di  $t$ , pertanto anche per essa si può definire una derivata. La *derivata seconda* è la derivata della funzione derivata:

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \equiv \frac{d^2 f}{dt^2} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \left( \frac{df}{dt} \right)}{\Delta t} \quad (3.2)$$

In fisica, talvolta si usa una notazione compatta, con un punto sopra la funzione da derivare, specialmente quando la variabile  $t$  indica il *tempo*:

$$\dot{f}(t) \equiv \frac{df(t)}{dt} \quad ; \quad \ddot{f}(t) \equiv \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \quad (3.3)$$

### 3.1.1 Nota sulla simbologia delle derivate

Nei corsi di analisi matematica si suole indicare una funzione come  $f \equiv f(x)$  e le sue derivate come  $f'(x)$ ,  $f''(x)$ ,  $f'''(x)$ , ... La notazione usata in Fisica è spesso differente, e non per questioni ideologiche, ma pratiche.

Anzitutto, molti problemi fisici hanno a che fare con quantità che cambiano nel tempo, quindi la variabile indipendente non è più  $x$ , ma  $t$ . Potremmo chiamare le funzioni  $f(t)$  e le loro derivate  $f'(t)$ ,  $f''(t)$ , ... quando questo non costituisca ambiguità. Tuttavia, tenderemo a privilegiare la scrittura

$$\frac{df}{dt} \quad , \quad \frac{d^2 f}{dt^2} \quad , \quad \frac{d^3 f}{dt^3} \quad , \quad \dots$$

con molti vantaggi.

Intanto, ci ricorda che la derivata è (il limite di) un rapporto incrementale, per cui un passaggio del tipo

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \Rightarrow \quad ds = v dt$$

è manifesto.

Inoltre, se  $f$  è una grandezza funzione di un'altra grandezza  $u$ , e quest'ultima dipende da  $t$ :

$$f \equiv f(u) \quad ; \quad u \equiv u(t)$$

la variazione di  $f$  in funzione di  $t$  avviene a causa della variazione di  $u$ ; volendo calcolarla:

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dt} \quad (3.4)$$

Questa “regola della catena” è esattamente la regola della funzione composta, che in matematica si scriverebbe  $[f(u)]'(t) = f'(u(t)) \cdot u'(t)$ .

In Fisica si ha spesso a che fare con molte variabili concomitanti, che possono influire sulla variazione di una grandezza. Provate a pensare alla pressione atmosferica,  $P$ . È noto che essa dipende dall'altitudine (che chiamiamo  $z$ ), quindi potremmo scrivere  $P(z)$ . D'altra parte essa dipende anche dalla posizione geografica — abbiamo regioni di bassa e alta pressione — quindi dovremmo scrivere  $P(x, y, z)$ , intendendo che  $x, y$  sono le coordinate geografiche (per esempio longitudine e latitudine). Infine, tutto questo cambia nel tempo, quindi la nostra funzione pressione sarà  $P(x, y, z, t)$ . Volendo studiare le variazioni di pressione, usiamo la sua derivata. Ma se scriviamo  $P'(x, y, z, t)$ , come facciamo a capire se ne stiamo studiando la variazione con il tempo in un luogo e a una quota precisi, oppure la sua variazione con la quota in un luogo preciso, oppure ancora la sua variazione da un luogo all'altro?

L'unico modo è introdurre un simbolo di derivata che espliciti la variabile rispetto a cui si deriva.

## 3.2 Definizione di integrale

Si definisce *integrale* fra  $t_1$  e  $t_2$  di una funzione  $f(t)$  il seguente limite <sup>[1]</sup>:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} f(t^{(k)}) \cdot \Delta t \quad (3.5)$$

dove  $\begin{cases} \Delta t \equiv \frac{t_2 - t_1}{N} \\ t^{(k)} \equiv t_1 + (k + \frac{1}{2}) \Delta t \end{cases}$

L'idea geometrica di integrale è illustrata in Fig. 3.1. L'intervallo  $[t_1; t_2]$  è suddiviso in  $N$  intervallini contigui, ciascuno di lunghezza  $\Delta t$ . In ciascuno di questi si calcola  $f$  nel punto medio, ovvero in  $t^{(k)}$ , e si considera l'area del rettangolino  $f(t^{(k)}) \cdot \Delta t$ . Quindi si sommano tutte le aree. L'integrale è il risultato che si ottiene facendo tendere  $N \rightarrow \infty$  — e contemporaneamente

---

<sup>1</sup> In questa definizione, per semplicità, si è scelto di dividere l'intervallo  $[t_1; t_2]$  in  $N$  intervallini tutti uguali, di lunghezza  $\Delta t$ ; si può dare anche una definizione più generale, in cui gli intervallini hanno lunghezze  $\Delta t^{(i)}$  diverse fra loro, purché tutte tendano a zero nel limite  $N \rightarrow \infty$ .

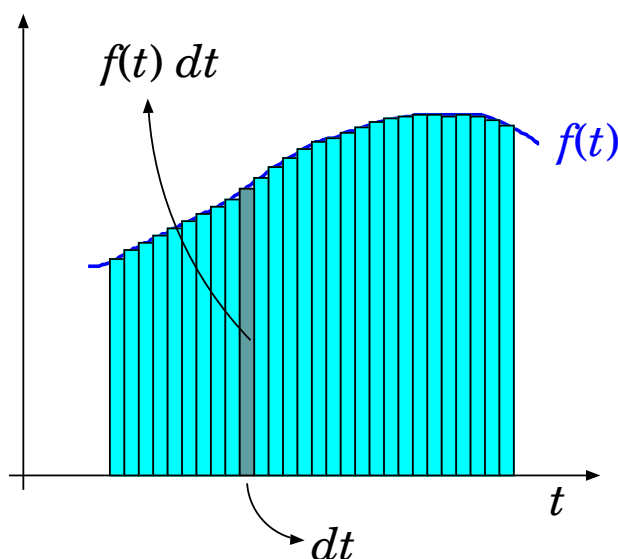


Figura 3.1: Visualizzazione geometrica di  $\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$ : l'integrale è l'area colorata sotto il grafico di  $f(t)$ , l'elemento  $f(t)dt$  è il rettangolino di base  $dt$  e altezza  $f(t)$ .

$\Delta t \rightarrow 0$  (semplicisticamente, diremmo che l'integrale è una somma di infinite quantità infinitesime).

Assumendo  $t_1 < t_2 < t_3$ , è evidente che

$$\int_{t_1}^{t_3} f(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt + \int_{t_2}^{t_3} f(t)dt \quad (3.6)$$

Ovviamente, se  $t_1 < t_2$ , in Eq. (3.5)  $\Delta t > 0$ ; viceversa se  $t_1 > t_2$ ,  $\Delta t < 0$ . Pertanto, per convenzione

$$\int_{t_2}^{t_1} f(t)dt = - \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt \quad (3.7)$$

Con questa convenzione, l'Eq. (3.6) diventa valida anche nei casi in cui non è vero che  $t_1 < t_2 < t_3$ .

### 3.2.1 Nota sulla variabile di integrazione

Una scrittura del tipo  $\int_{t_1}^{t_2} dt f(t)$  non presenta nessuna ambiguità: l'intervallo di integrazione è definito dagli estremi  $t_1, t_2$ , e la “variabile di



integrazione"  $t$  scorre su tutto l'intervallo:  $t \in [t_1; t_2]$ .

Spesso in Fisica l'estremo superiore di integrazione è visto come una variabile: si pensi allo spazio come integrazione della velocità, o a quest'ultima come integrazione dell'accelerazione. In tal caso,  $t$  è l'estremo superiore di integrazione, e bisogna chiamare la variabile di integrazione in modo diverso, per evitare confusioni: di solito la si indica con  $t'$  <sup>[2]</sup>:

$$s(t) = s(t_0) + \int_{t_0}^t dt' v(t') \quad ; \quad v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t dt' a(t')$$

Scritture come

$$\begin{aligned} s(t) &= s(t_0) + \int_{t_0}^t dt v(t) \\ v(t) &= v(t_0) + \int_{t_0}^t dt a(t) \end{aligned} \quad \text{SBAGLIATE!}$$

sarebbero fuorvianti: che cosa vorrebbe dire  $t \in [t_0; t]$ ??? Che la variabile di integrazione  $t$  va da  $t_0$  a  $t$  medesimo??? Ovviamente non avrebbe senso!

### 3.2.2 Funzione primitiva

Si chiama *funzione primitiva* di  $f(t)$  una funzione  $F(t)$  tale che la sua derivata sia  $f(t)$ , vale a dire:

$$F(t) \text{ è primitiva di } f(t) \iff f(t) = \frac{dF(t)}{dt} \quad (3.8)$$

Se  $F(t)$  è una primitiva di  $f(t)$ , anche qualunque funzione  $F_k(t) = F(t) + k$ , con  $k$  costante indipendente da  $t$ , è primitiva di  $f(t)$ . Per verificarlo basta applicare la definizione di derivata, Eq. (3.1): infatti nel rapporto incrementale  $\Delta F_k = F_k(t + \Delta t) - F_k(t) = [F(t + \Delta t) + k] - [F(t) + k] = \Delta F$ .

### 3.2.3 Teorema fondamentale del calcolo infinitesimale

Il *teorema fondamentale del calcolo infinitesimale* garantisce che se è nota la funzione primitiva  $F(t)$  di una data funzione continua  $f(t)$ , allora è possibile calcolare qualunque integrale di  $f(t)$  mediante la formula:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = F(t_2) - F(t_1) \quad (3.9)$$

---

<sup>2</sup> L'apicetto (') NON VUOL DIRE DERIVATA, *ça va sans dire*...

In altre parole, “l’integrale è l’operazione inversa della derivata”. Questo concetto l’abbiamo già toccato quando abbiamo parlato della relazione fra spostamento e velocità: ebbene, è del tutto generale.

Per compattezza di scrittura, l’Eq. (3.9) viene spesso scritta nella forma:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = \left[ F(t) \right]_{t_1}^{t_2} \quad (3.10)$$

dove appunto si intende che  $\left[ F(t) \right]_{t_1}^{t_2} \equiv F(t_2) - F(t_1)$ .

### (quasi una) dimostrazione

Scegliamo  $t_0$  arbitrariamente e *definiamo*  $F(t)$  in modo che

$$F(t) = \int_{t_0}^t f(t') dt'$$

Allora

$$\begin{aligned} F(t + dt) &= \int_{t_0}^{t+dt} f(t') dt' = \left( \int_{t_0}^t f(t') dt' \right) + f(t) dt \\ &= F(t) + f(t) dt \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{F(t + dt) - F(t)}{dt} = f(t)$$

cioè  $F(t)$  è effettivamente una primitiva di  $f(t)$ .

Usando Eq. (3.6) e Eq. (3.7),

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} f(t') dt' &= \int_{t_1}^{t_0} f(t') dt' + \int_{t_0}^{t_2} f(t') dt' \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} f(t') dt' + \int_{t_0}^{t_2} f(t') dt' \\ &= F(t_2) - F(t_1) \end{aligned}$$

## 3.3 Principali regole di derivazione e integrazione

Riassumiamo qui le principali regole di derivazione e di integrazione (qui per compattezza di scrittura, chiamiamo  $\dot{f}(t)$  la derivata di  $f(t)$ ).

funzione	derivata	primitiva
$f(t)$	$\dot{f}(t) \equiv \frac{df}{dt}$	$F(t)$ — talvolta indicata con $\int dt f(t)$
$f(t) + g(t)$	$\dot{f}(t) + \dot{g}(t)$	$F(t) + G(t)$
$\alpha f(t)$	$\alpha \dot{f}(t)$	$\alpha F(t)$
$f(\alpha t)$	$\alpha \dot{f}(\alpha t)$	$\frac{1}{\alpha} \cdot F(\alpha t)$
$f(t)g(t)$	$\dot{f}(t)g(t) + f(t)\dot{g}(t)$	$F(t)g(t) - \int dt F(t)\dot{g}(t)$
$g[f(t)]$	$\dot{g}[f(t)]\dot{f}(t)$	$\int du \frac{g(u)}{\dot{f}[f^{-1}(u)]}$ ( $u \equiv f(t)$ )

Elenchiamo anche la funzione derivata e la funzione primitiva di alcune funzioni notevoli.

funzione	derivata	primitiva
$t^\alpha$	$\alpha t^{\alpha-1}$	$\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ (se $\alpha \neq -1$ )
$\frac{1}{t}$	$-\frac{1}{t^2}$	$\ln\left(\frac{t}{t_0}\right)$ ( $t_0$ arbitrario)
$\ln(\alpha t)$	$\frac{1}{t}$	$t \ln(\alpha t) - t$
$e^{\alpha t}$	$\alpha \cdot e^{\alpha t}$	$\frac{1}{\alpha} e^{\alpha t}$
$\sin(\Omega t + \phi)$	$\Omega \cdot \cos(\Omega t + \phi)$	$-\frac{1}{\Omega} \cos(\Omega t + \phi)$
$\cos(\Omega t + \phi)$	$-\Omega \cdot \sin(\Omega t + \phi)$	$\frac{1}{\Omega} \sin(\Omega t + \phi)$

### 3.4 Variazione di una funzione di una variabile

Quanto varia una funzione  $f(t)$  se la variabile  $t$  è soggetta ad una variazione  $\Delta t$ ? In generale, per funzioni sufficientemente “regolari” (o “lisce”) — e

in Fisica siamo quasi sempre in questa situazione — la risposta viene dallo *sviluppo in serie di Taylor*:

$$\begin{aligned} f(t + \Delta t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left( \frac{d^k f(t)}{dt^k} \right) (\Delta t)^k \\ &= f(t) + \dot{f}(t) \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{f}(t) \cdot (\Delta t)^2 + \frac{1}{6} \overset{\cdot\cdot\cdot}{f}(t) \cdot (\Delta t)^3 + \dots \end{aligned} \quad (3.11)$$

I termini in  $(\Delta t)^k$ , al crescere dell'esponente  $k$ , diventano via via più piccoli se  $\Delta t$  è piccolo. Inoltre, il fattoriale  $k!$  al denominatore cresce rapidamente, rendendo ulteriormente più piccoli i termini al crescere di  $k$ .

Nel limite  $\Delta t \rightarrow 0$  si considera di solito il termine  $\propto (\Delta t)$ :

$$f(t + dt) \simeq f(t) + \dot{f}(t) \cdot dt + \mathcal{O}((dt)^2) \quad (3.12)$$

dove  $\simeq$  ci ricorda che il risultato non è esatto, ma contiene un'approssimazione, e  $\mathcal{O}((dt)^2)$  indica che l'“errore” commesso in questa approssimazione è  $\propto (dt)^2$ .

In alcuni casi è utile estendere lo sviluppo in serie al termine  $\propto (\Delta t)^2$  — per esempio quando  $t$  è un “punto stazionario” di  $f(t)$ , cioè  $\dot{f}(t) = 0$  — ottenendo:

$$f(t + dt) \simeq f(t) + \dot{f}(t) \cdot dt + \frac{1}{2} \ddot{f}(t) \cdot (dt)^2 + \mathcal{O}((dt)^3) \quad (3.13)$$

Le Eq. (3.12) e Eq. (3.13) si scrivono spesso esprimendo direttamente la variazione della funzione

$$df \equiv f(t + dt) - f(t) = \dot{f}(t) \cdot dt + \mathcal{O}((dt)^2) \quad (3.14)$$

oppure

$$df \equiv f(t + dt) - f(t) = \dot{f}(t) \cdot dt + \frac{1}{2} \ddot{f}(t) \cdot (dt)^2 + \mathcal{O}((dt)^3) \quad (3.15)$$

### 3.5 Variazione di una funzione composta

Consideriamo una “funzione composta”  $f(u)$ , in cui  $u = u(t)$ . I valori di  $f$  dipendono da  $t$  attraverso  $u$ :  $f \equiv f(u(t))$ . Abbiamo già visto nella Sezione 3.3 come trattare la derivata di una funzione composta:

$$\frac{df(u(t))}{dt} = \dot{f}(u(t)) \cdot \dot{u}(t)$$

da cui si deduce che la variazione di  $f$ , al primo ordine dello sviluppo in serie di Taylor, è

$$\begin{aligned} df &\equiv f(u(t+dt)) - f(u(t)) = f'(u(t)) \cdot \dot{u}(t) \cdot dt \\ &= \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dt} \cdot dt \end{aligned} \quad (3.16)$$

L'ultima scrittura è senz'altro suggestiva e facile da ricordare, dà l'illusione che i  $dt$  e i  $du$  che compaiono ai numeratori e ai denominatori si possano cancellare a due a due, lasciando la variazione  $df$  della funzione.

### 3.6 L'esponenziale complesso (\*)

La funzione esponenziale,  $x \rightarrow e^x$ , definita in campo reale, può essere estesa ai numeri complessi. Dato un numero complesso  $\zeta = \eta + i\phi$ , si *definisce*

$$e^\zeta \equiv e^\eta (\cos \phi + i \sin \phi) \quad (3.17)$$

La definizione è consistente, poiché per  $\phi = 0$  si riduce alla definizione in campo reale. Inoltre, la fondamentale proprietà dell'esponenziale

$$e^{\zeta_1 + \zeta_2} = e^{\zeta_1} e^{\zeta_2} \quad (3.18)$$

è mantenuta anche in campo complesso:

$$\begin{aligned} e^{\zeta_1} e^{\zeta_2} &\stackrel{\text{def}}{=} e^{\eta_1} (\cos \phi_1 + i \sin \phi_1) e^{\eta_2} (\cos \phi_2 + i \sin \phi_2) \\ &= e^{\eta_1} e^{\eta_2} (\cos \phi_1 + i \sin \phi_1) (\cos \phi_2 + i \sin \phi_2) \\ &= e^{\eta_1 + \eta_2} [(\cos \phi_1 \cos \phi_2 - \sin \phi_1 \sin \phi_2) + i(\cos \phi_1 \sin \phi_2 + \sin \phi_1 \cos \phi_2)] \\ &= e^{\eta_1 + \eta_2} [\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2)] \\ &\stackrel{\text{def}}{=} e^{(\eta_1 + \eta_2) + i(\phi_1 + \phi_2)} \\ &= e^{(\eta_1 + i\phi_1) + (\eta_2 + i\phi_2)} \\ &= e^{\zeta_1 + \zeta_2} \end{aligned}$$

#### 3.6.1 Alcune identità

$$e^{\pm i\frac{\pi}{2}} = \pm i \quad ; \quad e^{\pm i\pi} = -1 \quad ; \quad |e^{i\phi}| = 1$$

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \mathbf{Re} (e^{i\phi}) = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} \\ \sin \phi &= \mathbf{Im} (e^{i\phi}) = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i} \end{aligned} \quad (3.19)$$

### 3.6.2 Rappresentazioni cartesiana e esponenziale

Lo stesso numero complesso  $z$  si può scrivere in forma “cartesiana” o “esponenziale”:

$$z = x + iy = \rho e^{i\phi} \qquad \begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \sin \phi \end{aligned}$$

### 3.6.3 Regole di somma in trigonometria

L'esponenziale complesso consente di ricavare rapidamente le varie regole di somma citate in Sezione 4.4.2. Un esempio: proviamo a ricavare

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right):$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta &= \operatorname{Re} [e^{i\alpha} + e^{i\beta}] = \operatorname{Re} [e^{i(\alpha+\beta)/2} (e^{i(\alpha-\beta)/2} + e^{i(\beta-\alpha)/2})] \\ &= \operatorname{Re} \left[ e^{i(\alpha+\beta)/2} \cdot 2 \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right] = \operatorname{Re} [e^{i(\alpha+\beta)/2}] \cdot 2 \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ &= 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \end{aligned}$$

(analogamente, provate a dimostrare  
 $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \dots)$

### 3.6.4 Derivata di un esponenziale complesso

L'esponenziale complesso ha le stesse proprietà di derivazione dell'esponenziale reale, ovvero

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z \qquad (3.20)$$

Infatti, se  $h = \xi + i\eta$ , nel limite  $h \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dz} e^z &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{z+h} - e^z}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^z \frac{e^h - 1}{h} \\
 &= e^z \lim_{\xi \rightarrow 0; \eta \rightarrow 0} \frac{e^\xi (\cos \eta + i \sin \eta) - 1}{\xi + i\eta} \\
 &\quad \left( \text{approssimando : } \left\{ \begin{array}{l} e^\xi \simeq 1 + \xi + \mathcal{O}(\xi^2) \\ \cos \eta \simeq 1 + \mathcal{O}(\eta^2) \\ \sin \eta \simeq \eta + \mathcal{O}(\eta^3) \end{array} \right\} \right) \\
 &\simeq e^z \frac{(1 + \xi)(1 + i\eta) - 1 + \mathcal{O}(\xi^2, \eta^2)}{\xi + i\eta} \\
 &\simeq e^z \frac{1 + \xi + i\eta - 1 + \mathcal{O}(\xi^2, \eta^2, \xi\eta)}{\xi + i\eta} \\
 &\simeq e^z \left( 1 + \frac{\mathcal{O}(h^2)}{h} \right) \\
 &\rightarrow e^z
 \end{aligned}$$

### 3.6.5 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

Un'utilissima applicazione dell'esponenziale complesso è nella soluzione delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, del tipo:

$$\begin{aligned}
 a_0 x(t) + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \cdots + a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} &= 0 \\
 \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

In queste equazioni, l'incognita è una funzione,  $t \rightarrow x(t)$ , e l'equazione descrive una relazione fra le derivate di vari ordini della funzione, cioè  $\frac{d^k x(t)}{dt^k}$  è la derivata di ordine  $k$  della funzione  $x(t)$ .

In fisica classica si incontrano spesso equazioni del tipo Eq. (3.21), in cui i coefficienti  $a_0, \dots, a_n$  sono *reali*, e la funzione  $x(t)$  è anch'essa a valori reali. Nondimeno, può essere utile introdurre una funzione a valori *complessi*  $z(t)$ , tale che

$$x(t) = \mathbf{Re}[z(t)]$$

Ora,  $\frac{d^k}{dt^k}x(t) = \mathbf{Re} \left[ \frac{d^k}{dt^k}z(t) \right]$ , quindi l'Eq. (3.21) può essere scritta

$$\mathbf{Re} \left[ \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k z(t)}{dt^k} \right] = 0$$

Se troviamo soluzioni  $z(t)$  dell'equazione:

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k z(t)}{dt^k} = 0 \quad (3.22)$$

sicuramente  $x(t) = \mathbf{Re} [z(t)]$  sarà soluzione dell'Eq. (3.21).

Per risolvere l'Eq. (3.22) proviamo a porre

$$z(t) = A e^{st} \quad (A, s \in \mathbb{C}) \quad (3.23)$$

Allora, grazie alla proprietà Eq. (3.20),

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dt^k}(z(t)) &= A \frac{d^k}{dt^k}(e^{st}) = A s^k e^{st} \\ &= s^k z(t) \end{aligned}$$

e l'Eq. (3.22) diventa:

$$\left( \sum_{k=0}^n a_k s^k \right) z(t) = 0$$

Per la scelta Eq. (3.23),  $z(t) \neq 0$  sempre, per cui ci ritroviamo con

$$\sum_{k=0}^n a_k s^k = 0$$

che è ora una equazione algebrica, di grado  $n$ , nell'incognita complessa  $s$ . Il teorema fondamentale dell'algebra dice che essa ha  $n$  soluzioni complesse  $s_1, \dots, s_n$ . Quindi qualunque funzione

$$z_i(t) = c_i e^{s_i t} \quad (c_i \in \mathbb{C})$$

è soluzione dell'Eq. (3.22). La soluzione generale è quindi una combinazione lineare:

$$z(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{s_i t} \quad (c_i \in \mathbb{C})$$



Ora torniamo a  $x(t)$ : dovrà essere

$$x(t) = \mathbf{Re} [c_i e^{s_i t}] \quad (c_i \in \mathbb{C})$$

Possiamo scrivere  $c_i = \rho_i e^{\phi_i}$  e  $s_i = \gamma_i + i\Omega_i$ , cosicché

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathbf{Re} \left[ \sum_{i=1}^n \rho_i e^{\gamma_i t} e^{i(\Omega_i t + \phi_i)} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \rho_i e^{\gamma_i t} \cos(\Omega_i t + \phi_i) \end{aligned}$$

Quindi la soluzione è una combinazione lineare di funzioni esponenziali ( $e^{\gamma_i t}$ ) moltiplicate per sinusoidi ( $\cos(\Omega_i t + \phi_i)$ ).

I valori di  $\Omega_i$ ,  $\gamma_i$  dipendono dai rispettivi  $s_i$ , che sono le soluzioni dell'equazione algebrica, quindi in ultima analisi dipendono dai coefficienti  $a_0, \dots, a_n$  del problema.

Invece le costanti  $\rho_i$ ,  $\phi_i$  dipendono dalle *condizioni iniziali*, ovvero dai valori di  $x$  e delle sue derivate  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{d^2x}{dt^2}$ ,  $\dots$ ,  $\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}$  all'istante iniziale  $t_0$ .



# Capitolo 4

## Posizioni nello spazio

Lo spazio fisico è tridimensionale. Per descrivere il moto nello spazio occorre anzitutto definire la *posizione*.

Dalla geometria analitica sappiamo che è utile introdurre un *sistema di coordinate cartesiane*, caratterizzato da un'origine  $O$  e tre assi ortogonali  $x, y, z$ , rispetto al quale definire qualunque posizione. In alcuni casi il moto avviene su un piano, pertanto il problema si riduce a bidimensionale e si può fare uso di un sistema di coordinate cartesiane con un'origine  $O$  e due soli assi  $x, y$ .

Sia nel caso tridimensionale che in quello bidimensionale, può presentarsi utile l'uso di sistemi di coordinate alternative — non cartesiane, ma altrettanto valide nel definire in modo univoco la posizione di un punto. Esempi notevoli sono dati dalle *coordinate polari*, in cui la posizione di un punto viene definita dalla *distanza dall'origine* e da una *direzione*, specificata mediante angoli rispetto ad assi di riferimento.

In questo capitolo introdurremo le coordinate cartesiane in 3 dimensioni, i concetti di vettore-posizione, vettore-spostamento, e loro composizioni. Quindi riassumeremo le proprietà delle misure angolari e delle funzioni trigonometriche, e mostreremo l'uso delle coordinate polari.

### 4.1 Posizione nello spazio

La posizione nello spazio tridimensionale si descrive introducendo un *sistema di riferimento cartesiano* dotato di un'origine  $O$  e tre assi ortogonali  $x, y, z$ : indicheremo tale riferimento con  $(O; x, y, z)$ . Gli orientamenti dei tre assi possono essere rappresentati da tre segmenti orientati di lunghezza unitaria, ortogonali fra loro, detti *versori*:  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  — vd Fig. 4.1. Una volta scelti

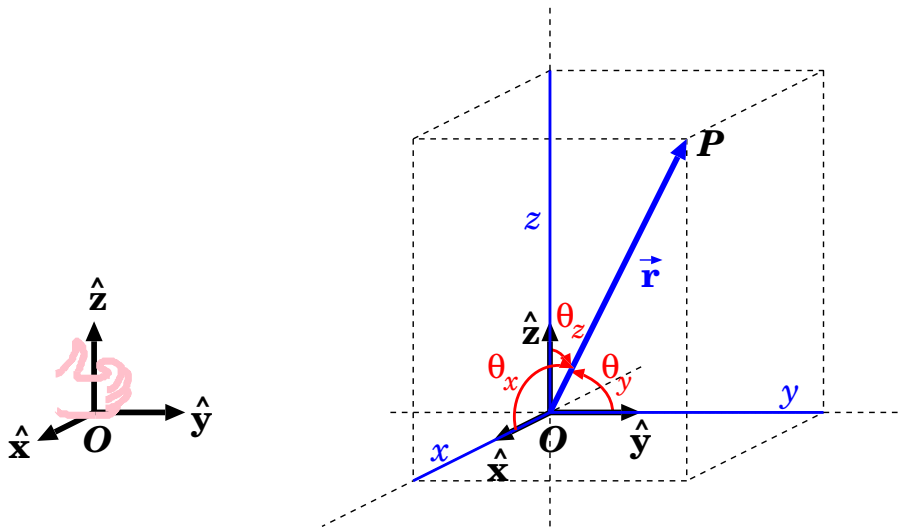


Figura 4.1: *Figura a sinistra: la “regola della mano destra” per definire l’orientamento di  $\hat{z}$  una volta definiti quelli di  $\hat{x}, \hat{y}$ . Figura a destra: rappresentazione grafica del raggio vettore, che individua la posizione  $P$  rispetto ad un’origine  $O$  e ad una terna di direzioni  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ .*

gli orientamenti dei versori  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ , l’orientamento del versore  $\hat{z}$  si sceglie convenzionalmente con la “regola della mano destra”: disponendo la mano destra come in Fig. 4.1, con le dita ricurve che vanno da  $\hat{x}$  a  $\hat{y}$ , il pollice definisce l’orientamento di  $\hat{z}$ .

Un qualunque punto  $P$  può essere individuato dalle 3 coordinate cartesiane  $(x, y, z)$  rispetto al sistema di riferimento — vd Fig. 4.1. In particolare:

- la coordinata  $x$  è la distanza del punto  $P$  dal piano  $yz$ ; il segno di  $x$  è definito positivo se  $P$  sta dalla parte del piano  $yz$  indicata dal versore  $\hat{x}$ , negativo altrimenti;
- la coordinata  $y$  è la distanza del punto  $P$  dal piano  $zx$ ; il segno di  $y$  è definito positivo se  $P$  sta dalla parte del piano  $zx$  indicata dal versore  $\hat{y}$ , negativo altrimenti;
- la coordinata  $z$  è la distanza del punto  $P$  dal piano  $xy$ ; il segno di  $z$  è definito positivo se  $P$  sta dalla parte del piano  $xy$  indicata dal versore  $\hat{z}$ , negativo altrimenti;

La *distanza* di  $P$  dall’origine  $O$  è data dal teorema di Pitagora:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (4.1)$$

## 4.2 Raggio vettore (o vettore-posizione)

La posizione del punto  $P$  rispetto all'origine  $O$  è indicata da un *raggio vettore*  $\vec{r}$ , o *vettore-posizione*. Una volta fissato il riferimento cartesiano, il raggio vettore è univocamente identificato dalla terna cartesiana  $(x, y, z)$ , quindi possiamo scrivere:

$$\vec{r} \equiv (x, y, z) \quad (4.2)$$

Il raggio vettore deve descrivere sia la *distanza* di  $P$  da  $O$ , sia la *direzione* lungo la quale  $P$  viene visto da  $O$ . Si definisce *modulo* del raggio vettore la distanza di  $P$  da  $O$ :

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (4.3)$$

La direzione può essere individuata dagli angoli  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$  che  $\vec{r}$  forma con i tre versori  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$ . Tali angoli vengono espressi attraverso i loro coseni, detti *coseni direttori*,

$$\cos \theta_x = \frac{x}{r} \quad ; \quad \cos \theta_y = \frac{y}{r} \quad ; \quad \cos \theta_z = \frac{z}{r} \quad (4.4)$$

Da notare che queste quantità non sono tutte indipendenti, poiché soddisfano l'identità:

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1 \quad (4.5)$$

## 4.3 Vettore spostamento

Il vettore  $\vec{r}$  in Fig. 4.1 può essere inteso sia come posizione di  $P$  rispetto a  $O$ , sia come *spostamento* che è necessario compiere per muoversi da  $O$  a  $P$ .

Uno spostamento può sempre essere pensato come composizione di altri spostamenti: questo ci consente di definire alcune operazioni elementari con i vettori-spostamento.

### 4.3.1 Prodotto di un vettore-spostamento per un numero

Dato un vettore-spostamento  $\vec{r} \equiv (x, y, z)$ , si definisce la moltiplicazione per una quantità numerica  $\alpha$  la seguente:

$$\alpha \vec{r} \equiv (\alpha x ; \alpha y ; \alpha z) \quad (4.6)$$

L'operazione è raffigurata in Fig. 4.2, per varie situazioni ( $\alpha > 1$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $\alpha < 0$ ). I vettori-spostamento  $\vec{r}$  e  $\alpha \vec{r}$  hanno lo stesso orientamento se  $\alpha > 0$ ,

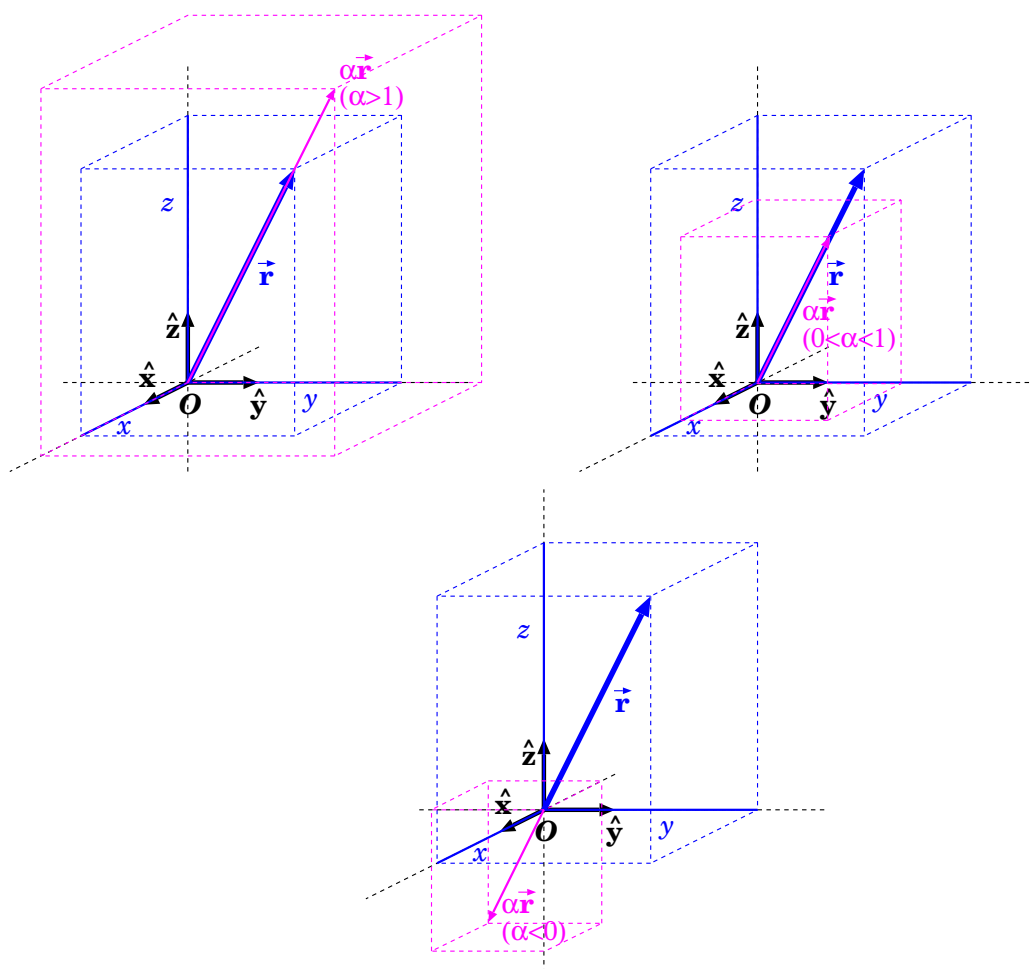


Figura 4.2: Moltiplicazione di un vettore-spostamento  $\vec{r}$  per un numero  $\alpha$ .

o orientamenti opposti se  $\alpha < 0$  — come si può vedere calcolandone i coseni direttori. Inoltre i loro moduli sono tali che

$$|\alpha\vec{r}| = |\alpha| \cdot |\vec{r}| \quad (4.7)$$

### 4.3.2 Somma di vettori-spostamento

Con riferimento alla Fig. 4.3 (a),  $\vec{r}_1$  è lo spostamento da  $O$  a  $P_1$ , mentre  $\vec{r}_2$  è lo spostamento da  $P_1$  a  $P_2$ . È quindi naturale definire come *somma* di due vettori spostamento il vettore spostamento che produce l'effetto finale: nella fattispecie lo spostamento da  $O$  a  $P_2$  (ovvero la posizione di  $P_2$ ) è definita da

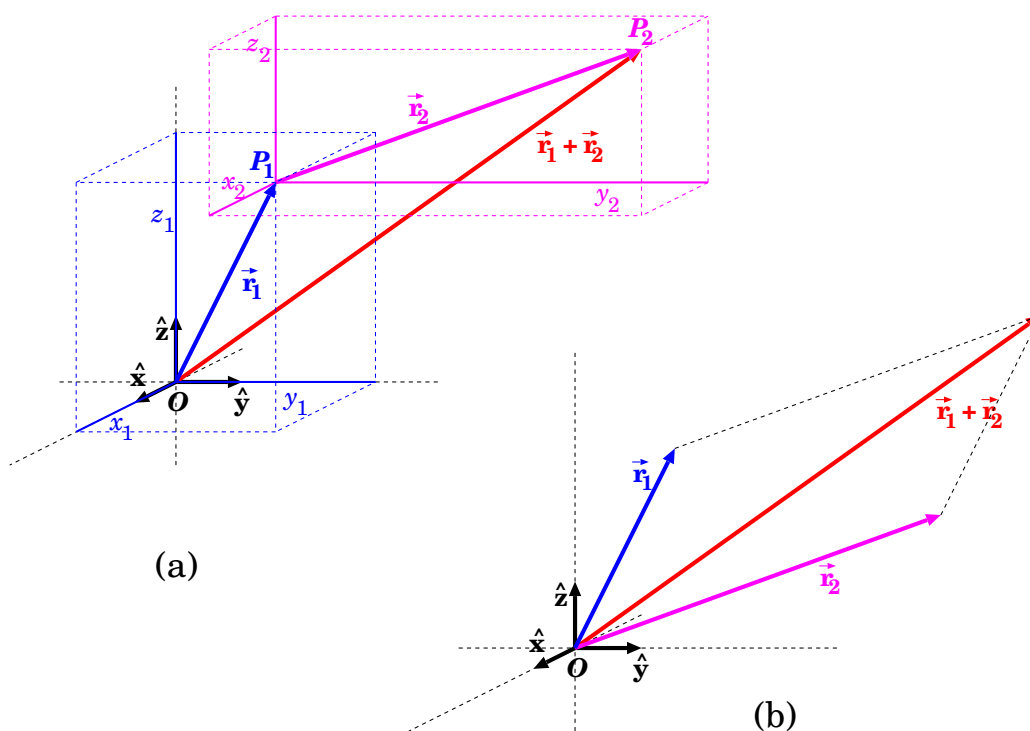


Figura 4.3: *Rappresentazione grafica della somma di due vettori-spostamento,  $\vec{r}_1 + \vec{r}_2$ : (a) la “coda” del secondo vettore viene posta dove si trova la “freccia” del primo vettore (o viceversa); (b) le due “code” vengono unite, si costruisce un parallelogramma la cui diagonale uscente dalle code dà il vettore-somma.*

$\vec{r}_1 + \vec{r}_2$ :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{r}_1 \equiv \text{spostamento da } O \text{ a } P_1 \\ \vec{r}_2 \equiv \text{spostamento da } P_1 \text{ a } P_2 \end{array} \right\} \implies \vec{r}_1 + \vec{r}_2 \equiv \text{spostamento da } O \text{ a } P_2$$

La somma di due vettori spostamento, in coordinate cartesiane, appare particolarmente semplice: sempre guardando la Fig. 4.3 (a), per spostarsi da  $O$  a  $P_2$  occorre spostarsi prima da  $O$  a  $P_1$  seguendo il vettore  $\vec{r}_1$ , poi da  $P_1$  a  $P_2$  seguendo il vettore  $\vec{r}_2$ . Pertanto le coordinate cartesiane di  $P_2$  sono

$$(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

Queste sono precisamente le componenti cartesiane del vettore  $\vec{r}_1 + \vec{r}_2$ .

Quindi, *i vettori si sommano per componenti cartesiane*:

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 \equiv (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \quad (4.8)$$

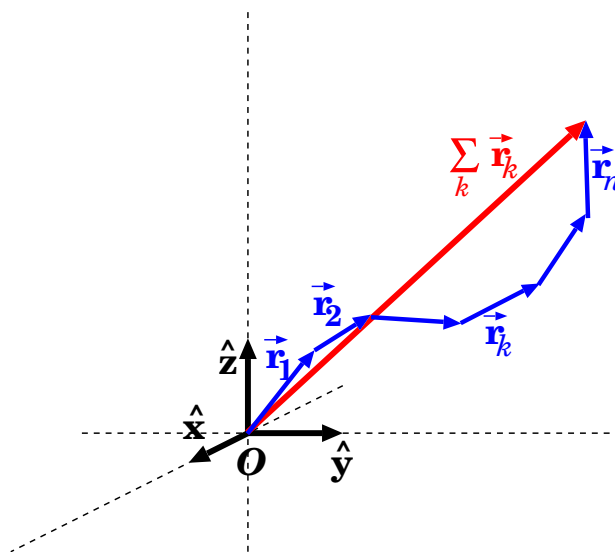


Figura 4.4: *Rappresentazione grafica della sommatoria di  $n$  vettori-spostamento:  $\sum_k \vec{r}_k$ .*

La somma di due vettori può essere rappresentata graficamente in due modi:

- Fig. 4.3 (a): la “coda” del secondo vettore viene unita alla “freccia” del primo vettore: in questo modo il vettore-somma va dalla “coda” del primo vettore alla “freccia” del secondo;
- Fig. 4.3 (b): le “code” dei due vettori vengono unite e si traccia un parallelogramma: la diagonale del parallelogramma che esce dalle “code” definisce il vettore-somma.

Le due rappresentazioni sono ovviamente equivalenti: si sceglie quella più conveniente caso per caso — ricordandosi in ogni caso che, per fare i calcoli, si lavora sempre con le coordinate cartesiane!

La prima rappresentazione grafica può facilmente essere generalizzata alla somma di  $n$  vettori-spostamento:

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \cdots + \vec{r}_n = \sum_k \vec{r}_k$$

come illustrato in Fig. 4.4: il vettore-somma va dalla “coda” del primo vettore alla “freccia” dell’ $n$ -esimo. Ricordiamo che il *calcolo* si effettua comunque per



coordinate cartesiane:

$$\sum_k \vec{r}_k \equiv \left( \sum_k x_k ; \sum_k y_k ; \sum_k z_k \right)$$

---

**Un esempio**

---

*Un esploratore, nella foresta equatoriale, si sta muovendo a piedi su un terreno molto accidentato, che non gli permette di spostarsi in linea retta. Per tenere traccia della propria posizione, suddivide il proprio percorso in tratti, tali che ciascuno di essi abbia agli estremi punti di riferimento ben identificabili (per esempio, un grosso albero, o una roccia, o una cascatella, ...). Prima di intraprendere un nuovo tratto, l'escursionista individua un punto di arrivo, con la bussola misura la direzione in linea d'aria dalla sua posizione al punto di arrivo, e con un radar direzionale la distanza in linea d'aria. Fatte le misure, si mette in cammino, e in un modo o nell'altro raggiunge il punto di arrivo prefissato. Quindi ripete l'operazione per ogni tappa successiva. Quando è arrivato alla destinazione finale, comunica via radio le sue coordinate a un elicottero di appoggio che viene a prelevare. Come deve fare i calcoli?*

**Risposta.** Chiamiamo  $(x_0, y_0)$  le coordinate (longitudine e latitudine) iniziali. Nel primo tratto, l'esploratore va da  $(x_0, y_0)$  a  $(x_1, y_1)$ , percorrendo quindi uno spostamento  $\Delta \vec{r}_1 \equiv (\Delta x_1, \Delta y_1) = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ . Analogamente, nell' $i$ -esimo tratto, il vettore-spostamento sarà  $\Delta \vec{r}_i \equiv (\Delta x_i, \Delta y_i) = (x_i - x_{i-1}, y_i - y_{i-1})$ . L'angolo  $\theta$  della bussola è misurato rispetto al Nord e in senso orario, pertanto, detta  $\Delta \ell_i$  la lunghezza dell' $i$ -esimo tratto, deve essere:

$$\Delta x_i = \Delta \ell_i \sin \theta_i \quad ; \quad \Delta y_i = \Delta \ell_i \cos \theta_i$$

Lo spostamento totale dell'esploratore è pari alla somma vettoriale degli spostamenti:  $\Delta \vec{r}^{\text{tot}} = \sum_{i=1}^N \Delta \vec{r}_i$ , pertanto le coordinate finali saranno:

$$\begin{aligned} x^{\text{fin}} &= x_0 + \sum_{i=1}^N \Delta \ell_i \sin \theta_i \\ y^{\text{fin}} &= y_0 + \sum_{i=1}^N \Delta \ell_i \cos \theta_i \end{aligned}$$

**Un'osservazione:** abbiamo trattato longitudine e latitudine come coordinate cartesiane: questo va bene solo se la zona esplorata non è troppo vasta, e se l'esploratore è lontano dai poli, in modo da assumere che i meridiani siano ... paralleli — la superficie terrestre non è un piano!

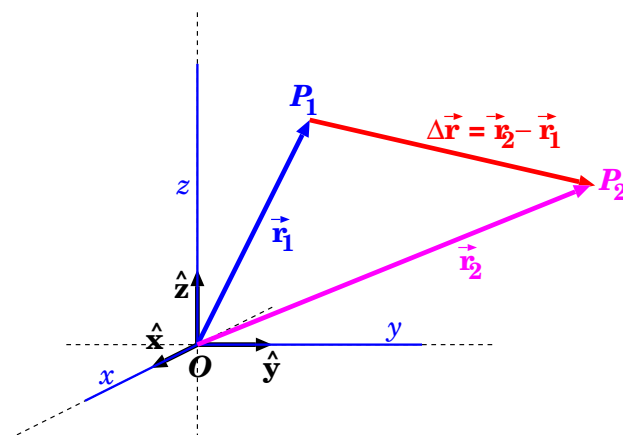


Figura 4.5: *Rappresentazione grafica della differenza di due vettori-spostamento,  $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ : unendo le “code” dei vettori  $\vec{r}_2$ ,  $\vec{r}_1$ , il vettore-differenza  $\Delta\vec{r}$  va dalla “freccia” di  $\vec{r}_1$  alla “freccia” di  $\vec{r}_2$ .*

### 4.3.3 Differenza di vettori-spostamento

Se le due posizioni  $P_1$  e  $P_2$  sono definite dai raggi vettori  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$ , come in Fig. 4.5, per spostarsi da  $O$  a  $P_2$  possiamo prima seguire il vettore  $\vec{r}_1$  per arrivare a  $P_1$ , quindi seguire il vettore spostamento  $\Delta\vec{r}$  per arrivare a  $P_2$ . Pertanto

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \Delta\vec{r}$$

e questo ci consente di definire la *differenza di due vettori spostamento*:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

che per componenti cartesiane diventa:

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 \equiv (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \quad (4.9)$$

### 4.3.4 Vettore-spostamento e versori

Per quanto detto sinora, i 3 versori  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$  possono essere scritti per componenti cartesiane:

$$\begin{aligned} \hat{x} &\equiv (1, 0, 0) \\ \hat{y} &\equiv (0, 1, 0) \\ \hat{z} &\equiv (0, 0, 1) \end{aligned}$$

I versori  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$  sono in effetti *vettori di modulo unitario* <sup>[1]</sup>:

$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1$$

Ora consideriamo un vettore-posizione  $\vec{r} \equiv (x, y, z)$ . Ovviamente,

$$x \hat{x} \equiv (x, 0, 0)$$

$$y \hat{y} \equiv (0, y, 0)$$

$$z \hat{z} \equiv (0, 0, z)$$

da cui si ricava immediatamente

$$\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z} \quad (4.10)$$

Tutto questo discorso a prima vista può apparire superfluo. Vedremo invece che l'Eq. (4.10) è molto utile quando si debbano considerare diversi sistemi di riferimento cartesiani,  $(O; x, y, z)$  e  $(O; x', y', z')$ , in cui gli assi del secondo sono ruotati rispetto a quelli del primo. In tal caso, lo stesso vettore  $\vec{r}$  potrà essere scomposto rispetto a una nuova terna di versori:  $\vec{r} = x' \hat{x}' + y' \hat{y}' + z' \hat{z}'$ .

## 4.4 Misure angolari

È consuetudine misurare gli angoli in *gradi sessagesimali* (o semplicemente *gradi*), che si indicano con “°”. Con questa convenzione, un grado è  $\frac{1}{360}$  di angolo-giro, ovvero

$$\text{angolo giro} = 360^\circ \quad (4.11)$$

Inoltre, per il grado si definiscono i sottomultipli *primo d'arco* e *secondo d'arco*:

$$\begin{aligned} 1' &= \left(\frac{1}{60}\right)^\circ && \text{(primo d'arco)} \\ 1'' &= \left(\frac{1}{60}\right)' && \text{(secondo d'arco)} \end{aligned} \quad (4.12)$$

---

<sup>1</sup> In inglese, il “versore” si chiama “unit vector”.

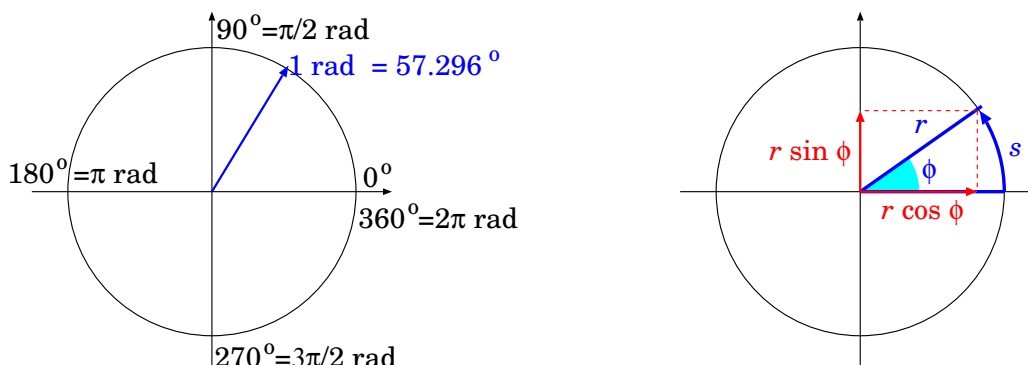


Figura 4.6: *Misure angolari e funzioni trigonometriche.*

#### 4.4.1 Definizione di radianti

Misurando gli angoli in gradi, la lunghezza  $s$  di un arco di cerchio di raggio  $r$ , sotteso da un angolo  $\phi$ , si scrive:

$$s = \frac{2\pi}{360} \cdot r \cdot \phi^\circ$$

(verifica: per  $\phi = 360^\circ$  l'arco diventa l'intera circonferenza, la cui lunghezza è  $2\pi r$ ). Il fattore  $\frac{2\pi}{360} \simeq 0.008727$  rende questa scelta di misura angolare poco pratica, in geometria e quindi anche in Fisica.

Si adotta quindi una unità di misura, il *radiante*, indicato con “rad”, definito in modo che

$$\text{angolo giro} = 2\pi \text{ rad} \quad (4.13)$$

In tal caso, la lunghezza  $s$  di un arco di cerchio di raggio  $r$ , sotteso da un angolo  $\phi$ , si scrive:

$$s = r \cdot \phi \text{ rad} \quad (4.14)$$

molto più maneggevole!

La conversione da gradi, primi, secondi a radianti si ricava confrontando le definizioni Eq. (4.11), Eq. (4.12) con la definizione Eq. (4.13):

$$\begin{aligned}
1^\circ &= \frac{2\pi}{360} \text{ rad} &= 1.745 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \\
1' &= \left(\frac{1}{60}\right)^\circ = \frac{2\pi}{21\,600} \text{ rad} &= 2.909 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\
1'' &= \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ = \frac{2\pi}{1\,296\,000} \text{ rad} &= 4.848 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \\
1 \text{ rad} &= \left(\frac{360}{2\pi}\right)^\circ &= 57.296^\circ
\end{aligned} \tag{4.15}$$

**Esercizio 4.1.** La Luna dista dalla Terra  $R = 384\,400$  km e ha un diametro  $D = 3\,474$  km. Calcolare la dimensione angolare apparente della Luna vista dalla Terra, esprimendo il risultato in gradi, primi, e radianti.

**Risposta** Cominciamo con il calcolo in radianti. La dimensione della Luna è molto minore della sua distanza dalla Terra:  $D \ll R$ . Quindi con ottima approssimazione possiamo trattare  $D$  come se fosse un archetto di cerchio, anziché un segmento. Pertanto, la dimensione angolare  $\alpha$  si ricava come  $\alpha = \frac{D}{R} = 9.037 \cdot 10^{-3}$  rad. La misura in gradi si ottiene sostituendo  $1 \text{ rad} = \left(\frac{360}{2\pi}\right)^\circ$ , quindi  $\alpha = 0.5178^\circ$ ; per ottenere la misura in primi d'arco si moltiplica per 60:  $\alpha = 31.07'$ . La parte non intera (0.07) si può a sua volta esprimere in secondi d'arco, moltiplicando ancora per 60:  $0.07' \cdot 60 \simeq 4''$ .

In conclusione, la dimensione angolare della Luna vista dalla Terra è

$$\alpha = 9.037 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0.5178^\circ = 31'04''$$

**Esercizio 4.2.** Ripetere l'esercizio precedente, con Giove, il pianeta più luminoso che vediamo. Il suo diametro è  $D = 140\,000$  km; come distanze dalla Terra consideriamo quella di massimo avvicinamento,  $R_{\min} = 628 \cdot 10^6$  km, e di massimo allontanamento,  $R_{\max} = 928 \cdot 10^6$  km.

**Risposta.** Il calcolo è identico:  $\alpha = \frac{D}{R}$ . Quando la distanza è minima la dimensione angolare  $\alpha$  è massima, e viceversa. Quantitativamente,  $\alpha_{\max} = \frac{D}{R_{\min}} = 2.229 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \simeq 46''$  e  $\alpha_{\min} = \frac{D}{R_{\max}} = 1.509 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \simeq 31''$ .

In effetti, Giove appare puntiforme ad occhio nudo, ma già con un buon binocolo si vede che è un dischetto. Con un telescopio da astronomo dilettante se ne possono distinguere i principali dettagli della superficie.

**Esercizio 4.3.** Ripetere l'esercizio per la stella Alpha Centauri, diametro  $D = 1.7 \cdot 10^6$  km e distanza  $R = 4.09 \cdot 10^{13}$  km.

**Risposta.**  $\alpha = \frac{D}{R} \simeq 4.2 \cdot 10^{-8} \text{ rad} \simeq 0.009''$ . *Meno di un centesimo di secondo d'arco. Nemmeno un ottimo telescopio a terra potrebbe vedere il disco stellare, senza distorsioni.*

#### 4.4.2 Ripasso delle funzioni trigonometriche

Le funzioni trigonometriche  $\sin$  e  $\cos$  sono definite nella Fig. 4.6 (destra). Ricordiamo rapidamente che, data una circonferenza di raggio  $r$  centrata nell'origine di un piano cartesiano, un angolo  $\phi$  misurato dall'asse  $x$  individua su di essa un punto di coordinate  $(x, y)$ ; si definiscono quindi:

$$\cos \phi = \frac{x}{r} \quad ; \quad \sin \phi = \frac{y}{r}$$

Ricordiamo la *fondamentale* identità trigonometrica

$$\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$$

Ricordiamo anche che:

$$\tan \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{y}{x} \quad ; \quad \cot \phi = \frac{\cos \phi}{\sin \phi} = \frac{x}{y}$$

Infine elenchiamo una serie di utili identità:

$$\begin{aligned} \cos(\phi + \pi/2) &= -\sin \phi & \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\phi - \pi/2) &= +\sin \phi & \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\phi \pm \pi) &= -\cos \phi & \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ \cos(\phi + 2n\pi) &= \cos \phi & \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ \sin(\phi + \pi/2) &= +\cos \phi & & \\ \sin(\phi - \pi/2) &= -\cos \phi & & \\ \sin(\phi \pm \pi) &= -\sin \phi & & \\ \sin(\phi + 2n\pi) &= \sin \phi & & \end{aligned}$$

#### 4.5 Coordinate polari

In molti problemi può essere utile definire il raggio vettore attraverso *coordinate polari* facendo uso di *coordinate angolari*.

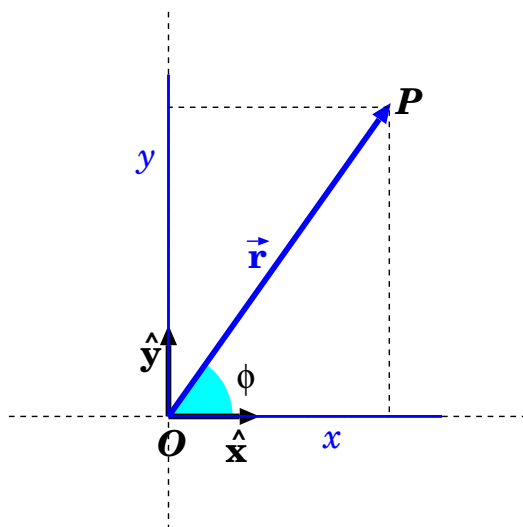


Figura 4.7: Posizione in un sistema di riferimento cartesiano  $Oxy$  in due dimensioni:  $(x, y)$  sono le coordinate cartesiane,  $(r; \phi)$  sono le coordinate polari.

#### 4.5.1 Coordinate polari in 2 dimensioni

Su un piano, il raggio vettore  $\vec{r}$  può essere specificato mediante la distanza  $r = |\vec{r}|$  dall'origine  $O$  e la sua direzione: quest'ultima è definita dall'angolo  $\phi$  che esso forma con l'asse  $x$  — vd Fig. 4.7. In tal caso, valgono le relazioni:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \\ y &= r \sin \phi \end{aligned} \tag{4.16}$$

La coppia di valori  $(r; \phi)$  costituisce le *coordinate polari piane* del punto  $P$ .

#### 4.5.2 Coordinate cilindriche e sferiche in 3D

Quando un problema è caratterizzato da un asse di simmetria, si sceglie l'asse  $z$  del sistema cartesiano lungo l'asse di simmetria e gli assi  $x, y$  su un piano ortogonale. In tal caso, le coordinate  $x, y$  possono essere rimpiazzate da una distanza  $\rho$  dall'asse  $z$  e da un angolo  $\phi$ , come nel caso bidimensionale: la situazione è indicata in Fig. 4.8 a sinistra. La conversione da  $(x, y)$  a  $(r; \phi)$  è sempre:

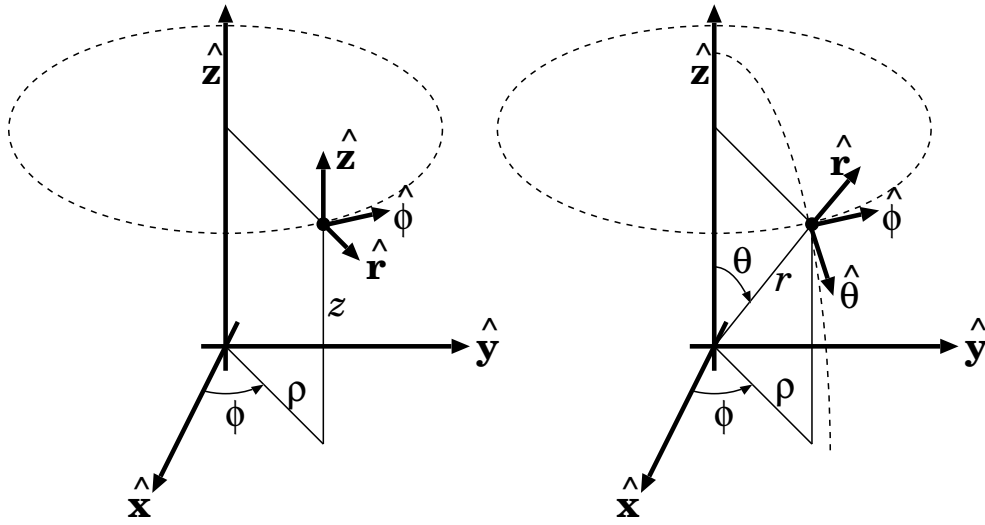


Figura 4.8: *Coordinate polari cilindriche (a sinistra) e sferiche (a destra).*

$$\begin{aligned}
 x &= \rho \cos \phi \\
 y &= \rho \sin \phi \\
 z &= z
 \end{aligned}
 \tag{4.17}$$

(la terza equazione è lì giusto per ricordare che ci troviamo in 3 dimensioni).  
 La terna  $(\rho; \phi; z)$  costituisce le *coordinate cilindriche*.

Viceversa, quando il problema è a simmetria sferica, la scelta degli assi cartesiani è del tutto arbitraria. In tal caso  $r$  indica la distanza dall'origine  $O$  e si usano due angoli per definire la direzione, come in Fig. 4.8 a destra. Si chiama  $\theta$  l'*angolo polare*, formato dal raggio vettore  $\vec{r}$  con il versore  $\hat{z}$ : pertanto la coordinata cartesiana  $z$  deve essere data da  $z = r \cos \theta$ . Viceversa, la proiezione  $\vec{r}_\perp$  di  $\vec{r}$  sul piano  $(x, y)$  ha modulo  $\rho = |\vec{r}_\perp| = r \sin \theta$ . Inoltre si definisce  $\phi$  come l'*angolo azimuthale*, formato da  $\vec{r}_\perp$  e il versore  $\hat{x}$ . Pertanto le coordinate  $x, y$  sono esprimibili come  $x = \rho \cos \phi$  e  $y = \rho \sin \phi$ .

La terna  $(r; \theta, \phi)$  costituisce le *coordinate sferiche*. La conversione da coordinate cartesiane a coordinate sferiche è data dalle seguenti formule:

$$\begin{aligned}
 x &= r \sin \theta \cos \phi \\
 y &= r \sin \theta \sin \phi \\
 z &= r \cos \theta
 \end{aligned}
 \tag{4.18}$$



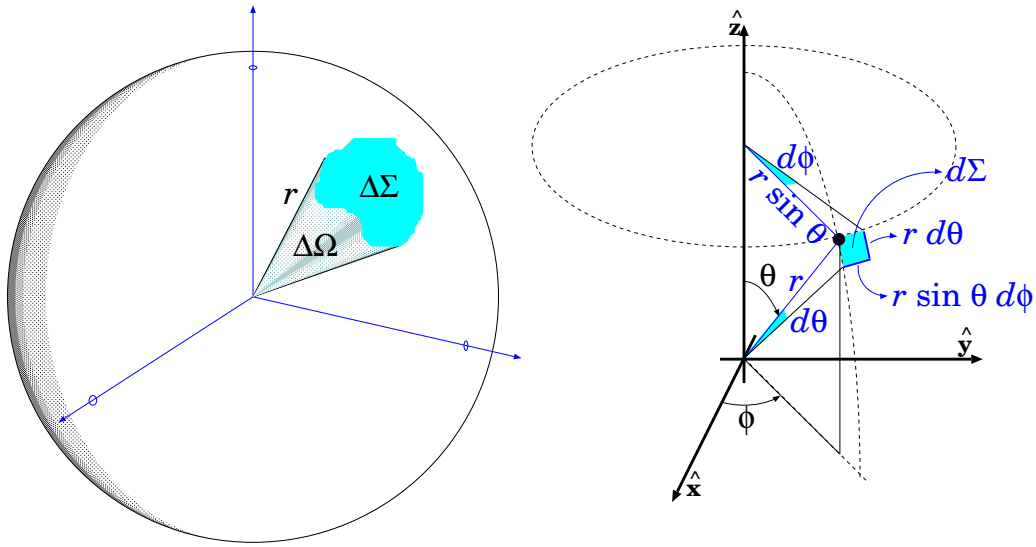


Figura 4.9: Sinistra: definizione di angolo solido. Destra: calcolo di un angolo solido infinitesimo.

Nelle coordinate sferiche, l'asse  $z$  si chiama *asse polare*,  $\theta$  si chiama *angolo polare* e  $\phi$  *angolo azimuthale*.

## 4.6 Angoli solidi

Gli angoli solidi sono misure di apertura di coni o conoidi. Un conoide come quello raffigurato in Fig. 4.9(sinistra) intercetta su una sfera di raggio  $r$  una superficie  $\Delta\Sigma$  che è proporzionale a  $r^2$ , e all'apertura del conoide. Pertanto, l'apertura del conoide viene *definita* come:

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta\Sigma}{r^2} \quad (4.19)$$

Gli angoli solidi si misurano in “stereo-radiani” (sterad). Poiché la superficie totale di una sfera è  $\Sigma_{sfera} = 4\pi r^2$ , l'angolo solido totale è:

$$\text{angolo solido totale} = 4\pi \text{ sterad} \quad (4.20)$$

Un angolo solido infinitesimo  $d\Omega$  può essere espresso in coordinate angolari sferiche. Guardando la Fig. 4.9(destra), la piccola area  $d\Sigma$  definita dagli angoli  $d\theta, d\phi$  è rettangolare nel limite  $d\theta \rightarrow 0$ ,  $d\phi \rightarrow 0$ , pertanto può essere calcolata come prodotto dei suoi lati. Il lato sotteso da  $d\theta$  è un

archetto di cerchio di raggio  $r$ , quindi vale  $r d\theta$ ; il lato sotteso da  $d\phi$  è invece un archetto di cerchio di raggio  $r \sin \theta$ , pertanto vale  $r \sin \theta d\phi$ . L'area  $d\Sigma$  quindi vale:

$$d\Sigma = (r d\theta) \cdot (r \sin \theta d\phi) = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

e quindi l'angolo solido  $d\Omega$  che sottende  $d\Sigma$  vale

$$d\Omega = \frac{d\Sigma}{r^2} \quad (4.21)$$

ovvero:

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi \quad (4.22)$$

**Esercizio 4.4.** *Una nave nell'oceano si trova alla latitudine  $\lambda = 40^\circ$  Nord e alla longitudine  $\phi = 30^\circ$  Ovest, e conosce la propria posizione con un'incertezza di  $1^\circ$  sia in latitudine che in longitudine. Pertanto è localizzata in un'area che dipende dalla precisione di tali misure. Quanto è vasta tale area?*

**Risposta.** *Anzitutto osserviamo che la latitudine è collegata all'angolo polare dalla relazione  $\theta = \frac{\pi}{2} - \lambda$ . Quindi l'angolo solido in cui la nave è localizzata è*

$$\Delta\Omega = \cos \lambda \Delta\lambda \Delta\phi$$

con  $\cos \lambda = 0.766$  e  $\Delta\lambda = \Delta\phi = 1^\circ = 1.745 \cdot 10^{-2}$  rad, quindi  $\Delta\Omega = 2.33 \cdot 10^{-4}$  sterad. Assumendo il raggio della Terra  $R_\oplus = 6371$  km troviamo

$$\Delta\Sigma = R_\oplus^2 \Delta\Omega = 9468 \text{ km}^2$$

**Osservazione.** *Che forma ha tale area? Con la formula usata, si assume che sia rettangolare, di lati  $(R_\oplus \cos \lambda \Delta\phi) \times (R_\oplus \Delta\lambda)$ . A rigore, sarebbe più simile a un trapezio, con le basi lungo i paralleli che misurano rispettivamente*

$$b_{max} = R_\oplus \cos \left( \lambda - \frac{\Delta\lambda}{2} \right) \Delta\phi = 85.8 \text{ km} \quad e$$

$$b_{min} = R_\oplus \cos \left( \lambda + \frac{\Delta\lambda}{2} \right) \Delta\phi = 84.5 \text{ km}, \text{ e altezza } h = R_\oplus \Delta\lambda = 11.2 \text{ km. Il}$$

calcolo dell'area viene però uguale.

## 4.7 Digressione: misure di distanze astronomiche (\*)

La meccanica newtoniana ha uno dei suoi più grandi successi nella descrizione dei moti di oggetti celesti (lune, pianeti, stelle, ...). Per ottenere la formulazione della legge di gravitazione universale (vedi Capitolo 22), e poi per verificare le sue predizioni, è necessario saper misurare le distanze fra gli oggetti celesti: per esempio dalla Terra alla Luna, o dal Sole alla Terra e ai pianeti, o ancora le distanze di altre stelle dal Sistema Solare.

Occorre procedere per passi successivi.

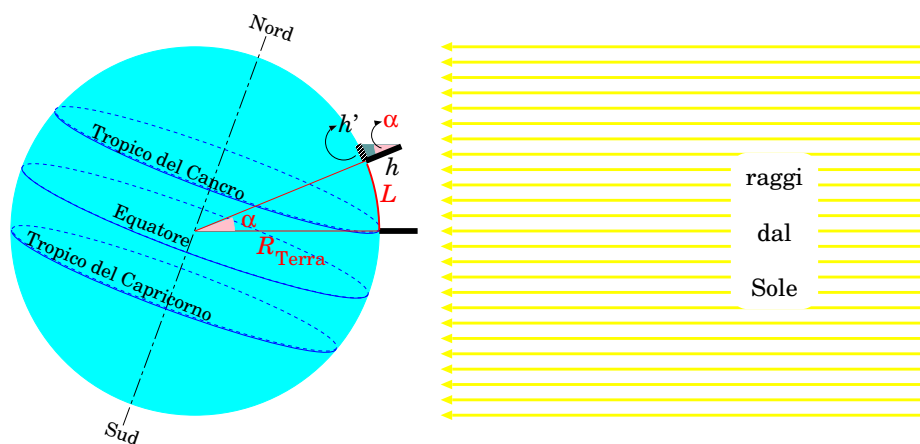


Figura 4.10: Misura del raggio della Terra.

#### 4.7.1 Misura del raggio della Terra

Il raggio della Terra,  $R_T$ , era noto con buona precisione dai tempi di Eratostene di Cirene (276-194 a.C.). Il metodo è illustrato in Fig. 4.10. Era già accettato che la Terra fosse sferica, e che il Sole fosse sufficientemente lontano da considerare i suoi raggi paralleli. Occorreva scegliere due località sullo stesso meridiano, una delle quali fosse sul tropico, in modo tale che il giorno del solstizio d'estate il Sole si trovasse esattamente allo zenith (cioè a perpendicolo). Le due località erano Alessandria e Syene (odierna Assuan). Conoscendo la distanza lineare  $L$  fra le due località e la loro separazione angolare  $\alpha$ , si poteva ricavare il raggio della Terra:

$$R_T = \frac{L}{\alpha} \quad (\alpha \text{ in radianti})$$

La misura di  $\alpha$  era effettuata con uno *gnomone*, ovvero un bastone verticale. Confrontando la sua altezza  $h$  con la lunghezza  $h'$  dell'ombra che esso proiettava a terra si poteva ricavare

$$\tan \alpha = \frac{h'}{h}$$

ottenendo  $\alpha = 7^\circ 12' = 0.126$  rad. La misura di  $L$  era la parte difficile del lavoro: misurare una distanza così lunga (circa 800 km) su terreno vario e su percorsi non precisamente rettilinei.

Oggi sappiamo che il raggio equatoriale della Terra è  $R_\oplus = 6371$  km.

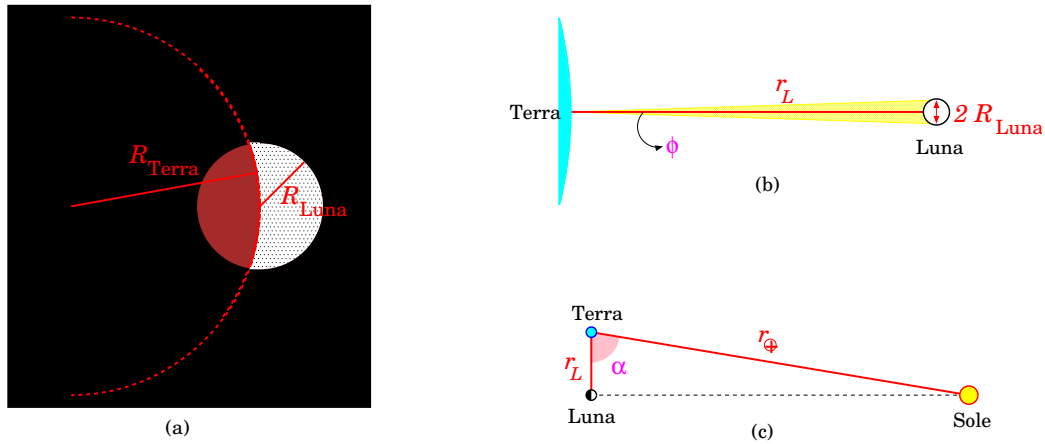


Figura 4.11: (a): rapporto fra i raggi della Terra e della Luna ( $R_T$ ,  $R_L$ ) durante un'eclissi parziale di Luna. (b): schema per calcolare la distanza Terra-Luna ( $r_L$ ). (c): schema per calcolare la distanza Terra-Sole ( $r_\oplus$ ).

#### 4.7.2 Distanze fra Terra, Luna e Sole

Durante le eclissi parziali di Luna, il confronto fra la forma della Luna e quella dell'ombra prodotta dalla Terra (Fig. 4.11 (a)) consente di determinare il rapporto  $\frac{R_L}{R_T}$  fra i raggi della Luna e della Terra. Se ne ricava che il raggio della Luna è  $R_L = 1737$  km.

La Luna, osservata dalla Terra, ha un diametro angolare  $\phi = 31'$ , ovvero  $\phi = 0.52^\circ = 0.009$  rad (Fig. 4.11 (b)). Questo angolo sottende il diametro della Luna,  $2R_L$ , da una distanza  $r_L$ , che vogliamo determinare. Essendo  $\phi$  molto piccolo, possiamo confondere il diametro della Luna (una corda) con un archetto, ottenendo così  $2R_L = r_L \cdot \phi$ , cioè:

$$r_L = \frac{2R_L}{\phi} \simeq 384\,000 \text{ km}$$

Ora supponiamo che la Luna sia illuminata esattamente a metà dal Sole (“mezza luna”, oppure “primo quarto” o “terzo quarto” ...). In questo caso le congiungenti Terra-Luna e Luna-Sole formano un angolo retto (Fig. 4.11 (c)). Chiamando  $\alpha$  l'angolo fra le rette Terra-Luna e Terra-Sole, si ricava che  $r_L = r_\oplus \cos \alpha$ , ovvero:

$$r_\oplus = \frac{r_L}{\cos \alpha}$$

In linea di principio, misurando  $\alpha$  si potrebbe ricavare  $r_\oplus$ . Occorre notare che questa misura è *difficilissima*! Infatti  $\alpha$  è quasi un angolo retto: usando le

distanze corrette,  $r_{\oplus} = 150 \cdot 10^6$  km e  $r_L = 384\,000$  km, si trova  $\alpha = 89.85^\circ$  [2].

Piccole variazioni  $\Delta\alpha$  producono enormi variazioni di  $\frac{1}{\cos\alpha}$ :

$\alpha$ ( $^\circ$ )	$\frac{1}{\cos\alpha}$
89.80	286.4
89.83	336.9
89.84	357.9
89.85 (*)	381.8 (*)
89.86	409.0
89.87	440.5
89.90	572.5

Un errore di  $0.01^\circ$  (un centesimo di grado! precisione di 0.01%) produce un'incertezza relativa su  $\frac{1}{\cos\alpha}$  — e quindi su  $r_{\oplus}$  — del 6% o 7% (a seconda che  $\alpha$  sia misurato in difetto o in eccesso). A causa della distorsione dei raggi di luce causati dall'atmosfera terrestre, è difficile misurare  $\alpha$  con buona precisione [3].

Il diametro angolare del Sole, visto dalla Terra, appare praticamente identico a quello della Luna ( $\phi$  nella Fig. 4.11 (b)), ma il Sole è molto più lontano, quindi anche molto più grande. Il suo raggio è calcolabile come:  $R_{Sole} = r_{\oplus} \frac{\phi}{2} = r_{\oplus} \cdot \frac{R_L}{r_L}$ . Il valore preciso è  $R_{Sole} = 695\,000$  km, ovvero 109 volte quello della Terra!

### 4.7.3 Distanze planetarie

Al giorno d'oggi, le distanze interplanetarie possono essere misurate con buona precisione usando dei radar. Però qui riportiamo le tecniche di misura storiche, perché hanno il pregio di essere didatticamente molto utili, come applicazioni della trigonometria.

<sup>2</sup> Aristarco di Samo, astronomo greco vissuto circa fra il 300 e il 230 a.C., fu il primo a stimare distanze e dimensioni della Luna e del Sole, con i metodi qui descritti. Mentre per la Luna i suoi valori erano abbastanza accurati, per il Sole erano clamorosamente sbagliati: egli infatti misurò alla quadratura un angolo  $\alpha = 87^\circ$ , e questo lo portò a dedurre una distanza Terra-Sole di  $\sim 7 \cdot 10^6$  km: 20 volte più piccola di quella reale. Era comunque un risultato notevole: sia per il metodo, che per il risultato, che rivelava una distanza enorme per la concezione dell'epoca!

<sup>3</sup> Nella Sezione 4.7.3 verrà spiegato come ricavare distanze Sole-pianeta ( $r_P$ ) conoscendo

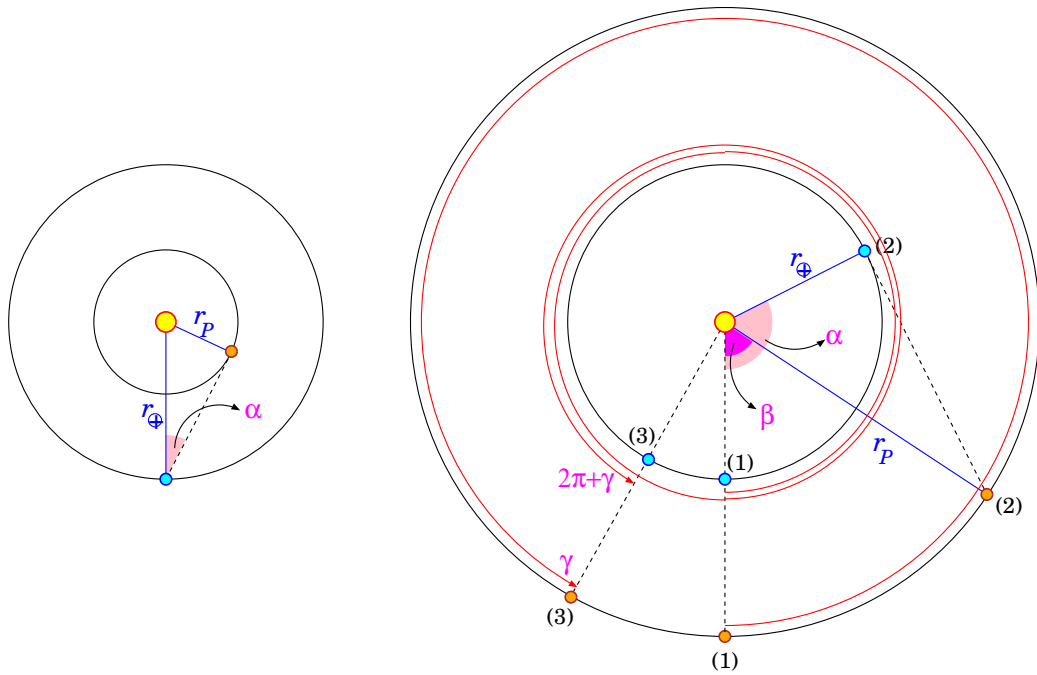


Figura 4.12: Misura della distanza  $R_P$  di un pianeta dal Sole: a sinistra, per un pianeta interno; a destra per un pianeta esterno. Nella figura a destra si devono considerare 3 momenti: (1) prima opposizione, (2) quadratura, (3) seconda opposizione.

Le orbite dei pianeti intorno al Sole sono approssimativamente circolari. Con misure angolari, si può calcolare il rapporto  $\frac{r_P}{r_\oplus}$ , tra la distanza  $r_P$  di un pianeta dal Sole, e la distanza  $r_\oplus$  della Terra dal Sole. Occorre distinguere due casi:

- pianeta “interno”, ovvero con  $r_P < r_\oplus$  (Mercurio e Venere);
- pianeta “esterno”, ovvero con  $r_P > r_\oplus$  (Marte, Giove, Saturno, Urano, Nettuno).

### Pianeta interno

Per un pianeta interno, occorre attendere il momento in cui si trova “in quadratura” con la Terra, ovvero quando le congiungenti Terra-pianeta e Sole-pianeta formano un angolo retto — vedi Fig. 4.12 (sinistra). A questo

---

$r_\oplus$ : misurando la distanza Terra-pianeta con il radar si può invertire l’argomento e calcolare  $r_\oplus$  con una migliore accuratezza.

punto si misura la distanza angolare  $\alpha$  fra il pianeta e il Sole, e si ricava:

$$\frac{r_P}{r_\oplus} = \sin \alpha$$

La quadratura si verifica quando  $\alpha$  è massimo; oppure, se si riescono ad osservare le fasi del pianeta, quando esso è esattamente illuminato a metà.

### Pianeta esterno

Per un pianeta esterno, il discorso si complica. Si guardi la Fig. 4.12 (destra). In quanto segue si parlerà di angoli percorsi dalla Terra lungo la sua orbita intorno al Sole: facciamo notare che tali angoli sono desumibili dalla posizione apparente del Sole sullo sfondo delle “stelle fisse”.

- (1) Si parte quando il pianeta e la Terra si trovano “in opposizione”, ovvero quando sono allineati dalla stessa parte del Sole.
- (2) Quando il pianeta si trova in quadratura con la Terra (verificabile perché le congiungenti Terra-Sole e Terra-pianeta formano un angolo retto), si misura l'angolo  $\alpha$  percorso dalla Terra fra opposizione e quadratura. Nel frattempo il pianeta ha percorso un angolo  $\beta$  (che valuteremo fra breve): la distanza del pianeta dal Sole è tale che

$$r_P = \frac{r_\oplus}{\cos(\alpha - \beta)}$$

Resta da determinare il rapporto fra gli angoli descritti da pianeta e Terra nello stesso tempo:

$$\xi = \frac{\beta}{\alpha}$$

- (3) Si attende una nuova opposizione: fra la prima e la seconda opposizione, il pianeta esterno ha compiuto un angolo  $\gamma$  intorno al Sole, mentre la Terra, che orbita più velocemente, ha compiuto un giro in più, quindi un angolo  $(2\pi + \gamma)$ . Quindi il rapporto fra gli angoli compiuti da Terra e pianeta è

$$\xi = \frac{\gamma}{2\pi + \gamma}$$

Mettendo insieme tutto,

$$\frac{r_P}{r_\oplus} = \frac{1}{\cos[\alpha(1 - \xi)]} = \frac{1}{\cos\left[\alpha \frac{2\pi}{2\pi + \gamma}\right]}$$

dove, ricordiamo,  $\alpha$  e  $\gamma$  sono quantità misurabili.

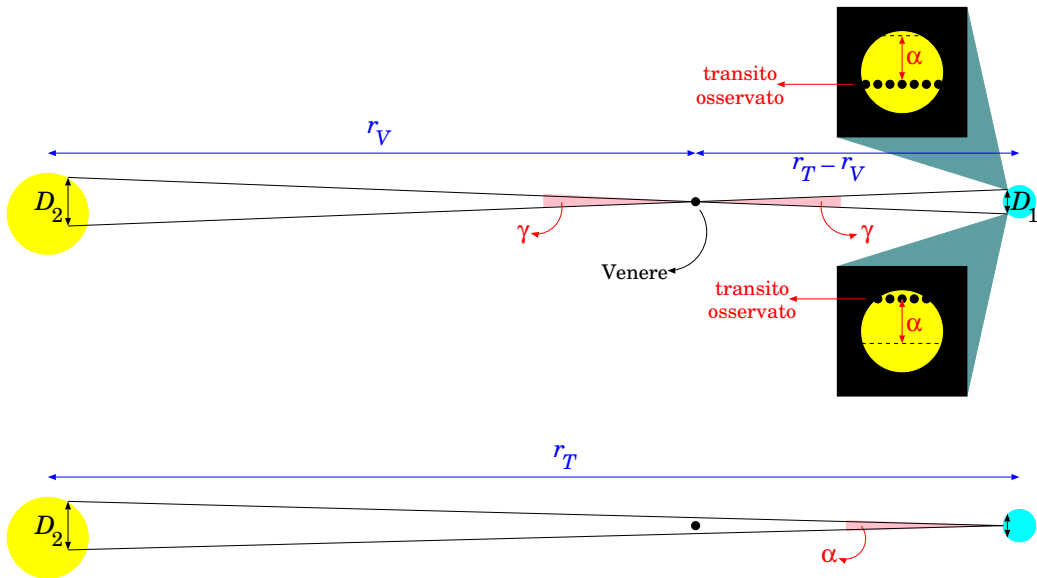


Figura 4.13: Metodo del transito di Venere.

### Transito di Venere

Nelle sezioni precedenti abbiamo visto come determinare  $\frac{r_P}{r_\oplus}$ . Se solo si conoscesse  $r_\oplus$ ... In Sezione 4.7.2 abbiamo notato come sia estremamente difficile misurare con accuratezza  $r_\oplus$ . L'uso moderno del radar consente però di misurare la distanza  $r_{\oplus P}$  fra Terra e pianeta. In condizioni di quadratura, misurando  $r_{\oplus P}$  e  $\alpha$  si possono ricavare sia  $r_\oplus$  che  $r_P$ :

$$r_\oplus = \frac{r_{\oplus P}}{\cos \alpha} \quad ; \quad r_P = r_{\oplus P} \tan \alpha$$

Un metodo geometrico interessante, proposto da Halley nel 1691, è basato sull'osservazione del transito di Venere davanti al disco solare, da due diversi punti di vista. Come mostrato in Fig. 4.13 (in alto), se le due osservazioni vengono fatte da due punti a distanza  $D_1$  sulla Terra, esse appariranno spostate di una distanza  $D_2$  sul disco solare: chiamando  $r_\ominus$  e  $r_\oplus$  rispettivamente le distanze di Venere e della Terra dal Sole, la relazione fra  $D_1$  e  $D_2$  è data da:

$$\frac{D_2}{r_\ominus} = \gamma = \frac{D_1}{r_\oplus - r_\ominus}$$



Inoltre  $D_2$  può essere stimato dalla separazione angolare  $\alpha$  fra le due osservazioni del transito, come mostrato in Fig. 4.13 (in basso):

$$\alpha = \frac{D_2}{r_{\oplus}}$$

Mettendo tutto insieme:

$$\alpha \frac{r_{\oplus}}{r_{\ominus}} = \frac{D_1}{r_{\oplus} - r_{\ominus}}$$

Ora ricordiamo che  $f \equiv \frac{r_{\ominus}}{r_{\oplus}}$  può essere calcolato quando Venere è in quadratura, dunque è noto. Esprimendo  $r_{\ominus} = f r_{\oplus}$  si ottiene

$$r_{\oplus} = \frac{f}{1-f} \frac{D_1}{\alpha}$$

In questa formula, tutte le quantità sono note — anche  $D_1$ , che è la distanza fra i due luoghi di osservazione — pertanto la distanza Terra-Sole è calcolabile.

Dopo la proposta di Halley, il primo transito di Venere avvenne nel 1761 (Halley era morto nel 1742), e fu osservato da diverse spedizioni di astronomi: le varie estrazioni della distanza Terra-Sole oscillavano fra  $123 \cdot 10^6$  km e  $157 \cdot 10^6$  km.

#### 4.7.4 Distanze stellari

Una tecnica per misurare la distanza di stelle “vicine” è il “metodo della parallasse”, schematizzato in Fig. 4.14. A causa dello spostamento della Terra intorno al Sole, una stella più vicina sembra spostarsi rispetto allo sfondo delle stelle più lontane. Lo spostamento angolare massimo (rilevato in 6 mesi) è  $2\alpha$ , dove  $\alpha$  viene chiamato “angolo di parallasse”.

Il massimo spostamento della Terra è pari al diametro dell’orbita,  $2r_{\oplus} = 300 \cdot 10^6$  km. Misurando l’angolo di parallasse  $\alpha$ , dello spostamento apparente della stella vicina sullo sfondo delle stelle più lontane, si può determinare la sua distanza  $D$ . Basta infatti trattare la distanza  $2r_{\oplus}$  come un archetto di circonferenza di raggio  $D$  sotteso dall’angolo  $2\alpha$  — la qual cosa è sempre possibile, trattandosi di angoli molto piccoli, cosicché  $2r_{\oplus} = 2\alpha D$  e quindi:

$$D = \frac{r_{\oplus}}{\alpha} \tag{4.23}$$

La tecnica funziona bene finché l’angolo  $\alpha$  di parallasse non diventa troppo piccolo.

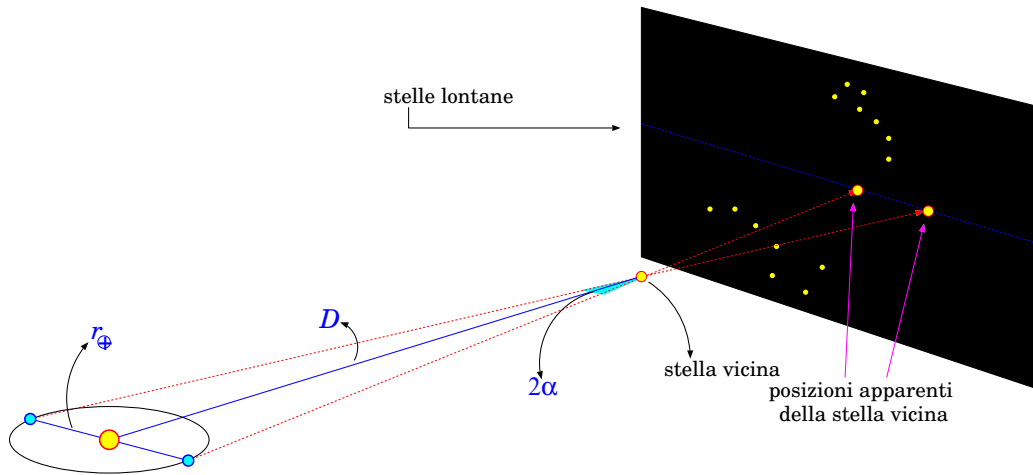


Figura 4.14: *Spostamento apparente di una stella “vicina” rispetto alle stelle “più lontane” che appaiono fisse sullo sfondo.*

Le distanze astronomiche vengono spesso espresse in *parsec*: un oggetto celeste si trova a distanza di 1 pc se il suo angolo di parallasse è pari a 1 secondo di arco ( $1''$ ). Essendo  $r_{\oplus} = 149.6 \cdot 10^6$  km, e  $1'' = 4.848 \cdot 10^{-6}$  rad, si trova  $1 \text{ pc} = \frac{r_{\oplus}}{1''} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ m} = 3.086 \cdot 10^{13} \text{ km}$ .

Un'altra unità di misura frequente in astronomia è l'anno-luce, ovvero la distanza percorsa dalla luce in un anno. La luce percorre 299 800 km in un secondo. In un giorno ci sono  $24 \text{ h} = 24 \cdot 3600 \text{ s} = 86 400 \text{ s}$ ; in un anno ci sono 365.25 giorni = 31 557 600 s. Quindi un anno-luce vale  $1 \text{ ly} = (299 800 \text{ km/s}) \times (31 557 600 \text{ s}) = 9.461 \cdot 10^{12} \text{ km} = 9.461 \cdot 10^{15} \text{ m}$  — quasi 9 500 miliardi di km.

Osserviamo che  $1 \text{ pc} \simeq 3.26 \text{ ly}$ .

**Esercizio 4.5.** *Il sistema stellare più vicino al Sistema Solare è quello di Alpha Centauri, che dista 4.3 anni-luce. Qual è l'angolo di parallasse di Alpha Centauri?*

*Se il più piccolo angolo di parallasse che si riesce a misurare da Terra con precisione accettabile è di 1/100 di secondo d'arco, qual è la massima distanza che si può misurare con il metodo della parallasse?*

*Il satellite Hipparcos (1989-93) riusciva a misurare angoli di parallasse con la precisione del millesimo di secondo d'arco: con quale precisione misura una distanza di 500 pc?*

**Risposte.** *La distanza di Alpha Centauri in km è  $D \simeq 4.3 \times 9.5 \cdot 10^{12} \text{ km} = 4.09 \cdot 10^{13} \text{ km}$ . L'angolo di parallasse vale  $\alpha = \frac{r_{\oplus}}{D} \simeq 3.7 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \simeq 0.7''$ . È un angolo molto piccolo, la qual cosa ci consente l'approssimazione del diametro dell'orbita con un archetto.*

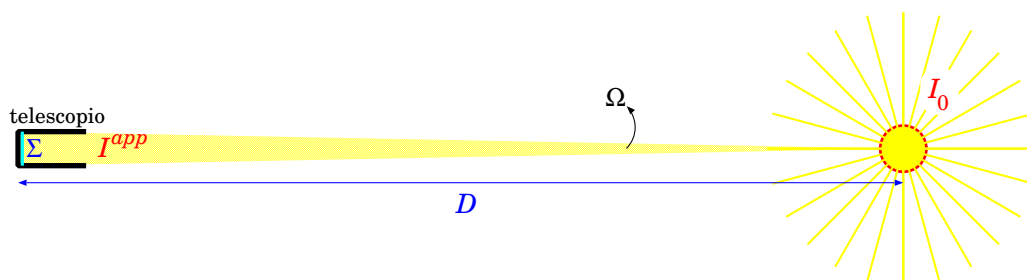


Figura 4.15: Legge della “distanza quadratica inversa” per la luminosità apparente di una stella.

L’angolo minimo di parallasse misurabile da Terra è  $\alpha_{min} = (10^{-2})'' \simeq 5 \cdot 10^{-8}$  rad. Quindi la distanza massima misurabile con la parallasse è  $D_{max}^{parallasse} = 100$  pc  $\simeq 3 \cdot 10^{15}$  km  $\simeq 330$  ly.

Infine, indichiamo con  $\sigma = 0.001''$  la precisione con cui Hipparcos misura  $\alpha$ ; quindi la misura angolare è  $\alpha \pm \sigma$ . Avremo dunque un valore stimato  $D = \frac{r_{\oplus}}{\alpha}$  che giace in un intervallo di incertezza  $\left[ \frac{r_{\oplus}}{\alpha + \sigma} ; \frac{r_{\oplus}}{\alpha - \sigma} \right]$ . Possiamo stimare l’incertezza su  $D$  come

$$\sigma_D = \frac{1}{2} \left( \frac{r_{\oplus}}{\alpha - \sigma} - \frac{r_{\oplus}}{\alpha + \sigma} \right) = \frac{r_{\oplus} \sigma}{\alpha^2 - \sigma^2} = D \frac{\sigma}{\alpha} \frac{1}{1 - \left(\frac{\sigma}{\alpha}\right)^2}$$

Ora,  $D = 500$  pc implica  $\alpha = 0.002''$ , quindi  $\frac{\sigma}{\alpha} = 0.5$ . Si ricava che

$$\frac{\sigma_D}{D} = \frac{\sigma}{\alpha} \frac{1}{1 - \left(\frac{\sigma}{\alpha}\right)^2} \simeq 0.7$$

Come si vede, per distanze così grandi (e angoli così piccoli) le incertezze diventano importanti.

Un’altra tecnica per misurare le distanze stellari è basata sulla *luminosità apparente* delle stelle. Ogni stella ha una sua luminosità assoluta  $I_0$  — in generale ignota. In maniera un po’ imprecisa, ma sufficiente al nostro scopo, diciamo che  $I_0$  è la “quantità di luce” emessa (oppure la quantità di energia irradiata in onde elettromagnetiche) dalla stella in una certa unità di tempo. La stella emette uniformemente in tutte le direzioni, dunque sull’angolo solido totale di  $4\pi$  sterad. Un osservatore lontano vede solo una piccola frazione della luminosità: quella che viene raccolta dalla superficie sensibile  $\Sigma$  del suo strumento di osservazione (per esempio lo specchio di un telescopio). Se

$D$  è la distanza della stella, l'angolo solido di luce che viene raccolta dallo strumento è  $\Omega = \frac{\Sigma}{D^2}$ , pertanto la luminosità “apparente” della stella è

$$I^{app} = I_0 \frac{\Omega}{4\pi} = I_0 \frac{\Sigma}{4\pi D^2} \quad (4.24)$$

Cioè la luminosità apparente decresce come l'inverso della distanza al quadrato (legge della “distanza quadratica inversa”, Fig. 4.15). Se conoscessimo la luminosità assoluta  $I_0$ , misurando la luminosità apparente  $I^{app}$  potremmo calcolare la distanza  $D$  della stella.

Esistono stelle particolari, le Cefeidi, che sono riconoscibili perché sono dotate di una pulsazione: con periodi che possono andare dai giorni ai mesi, il loro diametro e la loro luminosità aumentano e poi diminuiscono, ciclicamente. Per le Cefeidi più vicine, si può misurare la loro distanza  $D$  con la parallasse (Eq. (4.23)), quindi risalire alla loro luminosità assoluta  $I_0$  mediante l'Eq. (4.24): si è osservato che la luminosità assoluta è una funzione del periodo della pulsazione. Questa relazione può essere usata per dedurre la luminosità assoluta di Cefeidi più lontane (non misurabili con la parallasse), osservandone il periodo. Quindi si può usare direttamente l'Eq. (4.24) per determinarne la distanza.

**Esercizio 4.6.** *Una delle stelle Cefeidi più vicine a noi è la Stella Polare. Con la parallasse, si determina la sua distanza  $D_1 \simeq 300$  anni-luce. Nella galassia di Andromeda sono state osservate stelle Cefeidi con pulsazioni simili alla Stella Polare, quindi presumibilmente con luminosità assolute simili. La luminosità apparente di tali stelle è circa 70 milioni di volte inferiore a quella della Stella Polare. Quanto dista la galassia di Andromeda?*

**Risposta.** *Indicando con gli indici 1 e 2 rispettivamente la Stella Polare e una delle Cefeidi di Andromeda, abbiamo  $\frac{I_1^{app}}{I_2^{app}} \simeq 4 \cdot 10^7$ . Assumendo che  $I_0$  sia uguale,*

*deve essere  $\frac{I_1^{app}}{I_2^{app}} = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2$ , ovvero  $D_2 = D_1 \sqrt{\frac{I_1^{app}}{I_2^{app}}} \simeq D_1 \cdot 8400$ . La galassia di Andromeda dista circa 2.5 milioni di anni-luce.*

**Nota storica.** *La Via Lattea ha la forma di un disco con bracci a spirale; il suo diametro è  $\approx 100\,000$  ly. L'osservazione di stelle Cefeidi lontane è stata storicamente importantissima, perché ha permesso di capire che esistono strutture stellari esterne alla Via Lattea.*

Con la luminosità apparente delle stelle Cefeidi si riescono a misurare distanze fino a  $\approx 10^7$  ly. Per distanze maggiori, si usa un altro tipo di “candela”, ovvero le *supernovae I-a*. Una supernova è il processo finale di una stella molto massiva che, terminato il suo ciclo di reazioni di fusione nucleare,

subisce un collasso gravitazionale del nucleo, che libera energia causando un'espansione molto rapida degli strati esterni. Il risultato è il rilascio di una enorme quantità di energia in tempi rapidi: le supernovae sono gli oggetti astrofisici più luminosi dell'Universo. In particolare, le *supernovae I-a* si formano in sistemi binari, in cui una stella è molto massiva e compatta (per esempio una nana bianca) e l'altra è molto estesa (per esempio una gigante). La nana bianca "succhia" materia dalla gigante, accrescendosi, fino a diventare sufficientemente massiva da subire un collasso gravitazionale, che innesca la supernova. Il collasso avviene quando la nana bianca raggiunge una massa ben precisa: 1.4 masse solari (limite di Chandrasekhar); questo fissa anche un valore preciso della luminosità della supernova I-a.

I 3 metodi illustrati finora (parallasse, Cefeidi, supernovae I-a) si applicano a intervalli di distanze diversi. L'unico che fornisce una misura assoluta è quello della parallasse: pertanto viene usato per calibrare il metodo delle Cefeidi. Questo a sua volta è usato per calibrare il metodo delle supernovae.



# Capitolo 5

## Derivazione e integrazione in più dimensioni (\*)

Gli argomenti di questo capitolo sono di utilità generale. Le derivate parziali vengono utili quando si debba mettere in relazione forze conservative con le rispettive energie potenziali (Sezione 13.9), o quando si debbano calcolare forze di pressione, in fluidodinamica (Sezione 21.2.1). Gli integrali in 3 dimensioni sono invece necessari, per esempio, negli studi sui corpi rigidi, per calcolare centro di massa e momenti di inerzia (Sezione 19.4). Man mano che questi concetti verranno necessari, saranno reintrodotti nei rispettivi capitoli; qui ne diamo una trattazione generale.

### 5.1 Derivate parziali

Una funzione  $f$  può dipendere da diverse variabili. In tal caso, dovendo fare una derivata, occorre specificare rispetto a quale variabile.

Per fissare le idee, consideriamo una funzione  $f \equiv f(x, y, z, t, \dots)$ . Per ciascuna delle variabili  $x, y, z, t, \dots$  si può definire il limite del rapporto incrementale, similmente a quanto fatto nell'Eq. (3.1):

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial x} &\equiv \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta x} \\ \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial y} &\equiv \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta y} \\ \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial z} &\equiv \frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta z} \\ \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t} &\equiv \frac{\partial f}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z, t + \Delta t) - f(x, y, z, t)}{\Delta t}\end{aligned}\tag{5.1}$$

I simboli  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , ... si leggono “derivata parziale di  $f$  rispetto a  $x$ , rispetto a  $y$ , etc...” Come si vede, nulla di concettualmente diverso dalla derivata “ordinaria” definita in Eq. (3.1). Semplicemente, una particolare variabile di cui  $f$  è funzione viene variata, mentre le altre sono mantenute fisse.

## 5.2 Variazione di una funzione di più variabili

Per una funzione di più variabili,  $f \equiv f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , vale uno sviluppo in serie di Taylor simile a quello dato nell’Eq. (3.11) per una sola variabile. La forma generale è complicata da tutte le possibili combinazioni di variabili. Qui ricordiamo solo l’espansione fino al primo ordine:

$$\begin{aligned} f(x_1 + dx_1, \dots, x_n + dx_n) &\simeq f(x_1, \dots, x_n) \\ &+ \sum_{p=1}^n \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_p} \cdot dx_p \\ &+ \mathcal{O}(2) \end{aligned} \quad (5.2)$$

e al secondo ordine:

$$\begin{aligned} f(x_1 + dx_1, \dots, x_n + dx_n) &\simeq f(x_1, \dots, x_n) \\ &+ \sum_{p=1}^n \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_p} \cdot dx_p \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{\partial^2 f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_p \partial x_q} \cdot dx_p dx_q \\ &+ \mathcal{O}(3) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Anche qui  $\simeq$  ci ricorda che le espressioni contengono delle approssimazioni, e  $\mathcal{O}(2)$ ,  $\mathcal{O}(3)$  indicano che l’“errore” commesso in queste approssimazioni sono proporzionali a prodotti di  $dx_1, \dots, dx_n$  in cui la somma di tutti gli esponenti è rispettivamente 2 e 3.

Le Eq. (5.2) e Eq. (5.3) si scrivono spesso esprimendo direttamente la



variazione della funzione:

$$df = \sum_{p=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_p} \cdot dx_p + \mathcal{O}(2) \quad (5.4)$$

oppure

$$df = \sum_{p=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_p} \cdot dx_p + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_q} \cdot dx_p dx_q + \mathcal{O}(3) \quad (5.5)$$

### 5.2.1 Gradiente e matrice Hessiana

La totalità delle derivate prime parziali,  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$  costituisce un oggetto matematico a  $n$  componenti che si chiama *gradiente* di  $f$  e si indica con  $\vec{\nabla}$ :

$$\vec{\nabla} f \equiv \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \quad (5.6)$$

Analogamente, la totalità delle derivate seconde parziali,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_q}$ , con  $p, q = 1, \dots, n$ , costituisce un altro oggetto matematico a  $n \times n$  componenti, che si chiama *matrice Hessiana* di  $f$  e si indica spesso con  $\mathcal{H}$ :

$$\mathcal{H}[f] \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

## 5.3 Variazione di una funzione composta

Supponiamo di avere una funzione di più variabili,  $f \equiv f(x_1, \dots, x_n)$ , in cui tutte le variabili dipendono a loro volta da una sola variabile  $t$ . È un caso che in Fisica si incontra spesso <sup>[1]</sup>. Quindi, il valore di  $f$  dipende indirettamente da  $t$ , attraverso le variabili  $x_1, \dots, x_n$ . La variazione di  $f$ , al primo ordine

<sup>1</sup> Per esempio il valore della pressione  $P$  in un fluido potrebbe dipendere dalle coordinate  $x, y, z$  in cui la vado a misurare con il manometro, quindi  $P \equiv P(x, y, z)$ . Se al passare del tempo  $t$  sposto il manometro, allora  $x \equiv x(t)$ ,  $y \equiv y(t)$ ,  $z \equiv z(t)$ . Il manometro “sente” una variazione di pressione nel tempo, cioè  $P$  dipende da  $t$  indirettamente, attraverso  $x, y, z$ .

dello sviluppo in serie di Taylor, è data dall'Eq. (5.4), dove riscriveremo  $dx_p$  facendo uso dell'Eq. (3.14):  $dx_p = \frac{dx_p}{dt} dt$ . Si ottiene dunque:

$$\begin{aligned} df &\equiv f(x_1(t+dt), \dots, x_n(t+dt)) - f(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ &= \sum_{p=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_p} \cdot \frac{dx_p}{dt} \cdot dt \end{aligned} \quad (5.8)$$

Concludiamo con il caso più generale, in cui  $f \equiv f(x_1, \dots, x_n)$ , e tutte le variabili dipendono a loro volta da  $m$  altre variabili  $\xi_1, \dots, \xi_m$ , cioè  $x_p \equiv x_p(\xi_1, \dots, \xi_m)$ . La variazione di  $f$ , al primo ordine, è sempre data dall'Eq. (5.4), ma ora riscriveremo le variazioni  $dx_p$  facendo uso ancora dell'Eq. (5.4):  $dx_p = \sum_{r=1}^m \frac{\partial x_p}{\partial \xi_r} d\xi_r$ . Mettendo insieme tutto si ottiene:

$$\begin{aligned} df &\equiv f(x_1(\xi_1 + d\xi_1, \dots, \xi_m + d\xi_m), \dots, x_n(\xi_1 + d\xi_1, \dots, \xi_m + d\xi_m)) \\ &\quad - f(x_1(\xi_1, \dots, \xi_m), \dots, x_n(\xi_1, \dots, \xi_m)) \\ &= \sum_{p=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_p} \cdot \sum_{r=1}^m \frac{\partial x_p}{\partial \xi_r} \cdot d\xi_r \end{aligned} \quad (5.9)$$

## 5.4 Integrali in 2 o 3 dimensioni

Molto spesso in Fisica si devono affrontare integrali in più dimensioni — per esempio integrando una funzione  $f(x, y)$  in un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , oppure  $f(x, y, z)$  in un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Si scrivono dunque espressioni del tipo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x, y) d\Sigma &\quad (\text{in 2 dimensioni}) \\ \int_{\Omega} f(x, y, z) dV &\quad (\text{in 3 dimensioni}) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Si tratta di generalizzazioni di quanto introdotto in una dimensione, Eq. (3.5): anche in questi casi l'integrale è calcolato come una somma di infiniti termini

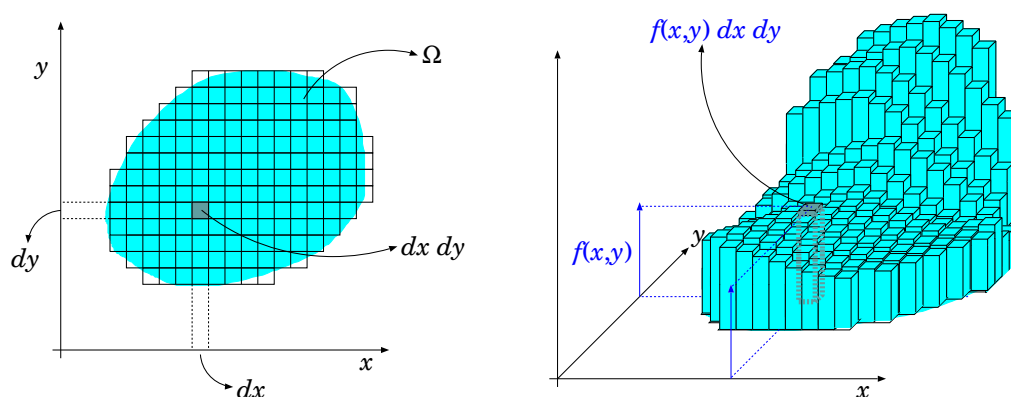


Figura 5.1: *Visualizzazione geometrica dell'integrale 2-dimensionale  $\int_{\Omega} f(x,y) dx dy$ . A sinistra: il dominio di integrazione  $\Omega$ , suddiviso in tante piccole aree  $d\Sigma = dx \cdot dy$ . A destra: l'integrale come somma di tanti elementini  $f(x,y) dx dy$ , ciascuno pari al volumetto di un parallelepipedo di base  $dx \times dy$  e altezza  $f(x,y)$ .*

infinitesimi, ciascuno pari al valore della funzione  $f$  calcolata in un dato punto, moltiplicata per la misura di un piccolo intorno di tale punto. In 2-D la misura è una piccola area  $d\Sigma$ , mentre in 3-D la misura è un volumetto  $dV$ .

Lavorando in coordinate cartesiane, esse possono essere scritte come:

$$\begin{aligned} d\Sigma &\equiv dx dy && \text{(coordinate cartesiane, 2 dimensioni)} \\ dV &\equiv dx dy dz && \text{(coordinate cartesiane, 3 dimensioni)} \end{aligned} \quad (5.11)$$

La visualizzazione grafica di un integrale in 2-D è illustrata in Fig. 5.1.

Rispetto al caso 1-D, si ha subito una complicazione: in generale, il dominio  $\Omega$  non è esprimibile come un semplice prodotto cartesiano  $[x_1; x_2] \times [y_1; y_2]$ , il che significa che l'intervallo su cui scorre  $y$  dipende dal valore di  $x$  — e viceversa — anche in maniera complicata — vedi Fig. 5.2.

In generale, questi integrali si risolvono in maniera “numerica”, al computer. L'idea per procedere è la seguente. Anzitutto, si definisce una “funzione caratteristica”:

$$\chi(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x,y \in \Omega \\ 0 & \text{se } x,y \notin \Omega \end{cases}$$

Poi, se possibile, si individua un rettangolo  $[x_1; x_2] \times [y_1; y_2]$  che contiene  $\Omega$ :

$$\Omega \subset [x_1; x_2] \times [y_1; y_2]$$

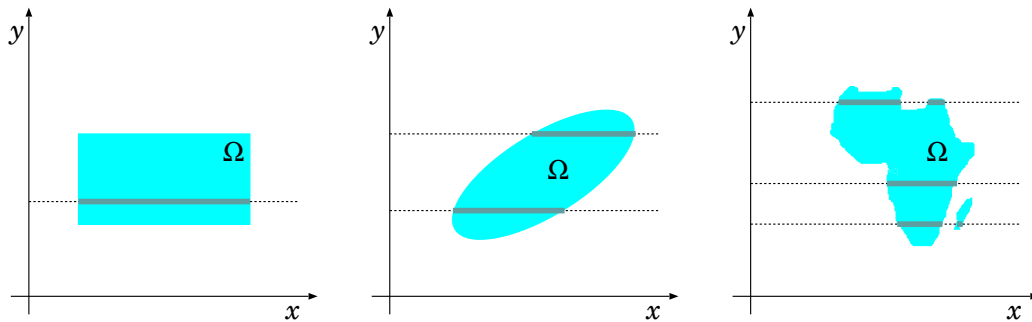


Figura 5.2: Esempi di domini di integrazione  $\Omega$ : a parte il caso semplice di un dominio rettangolare, i possibili valori di  $x$  dipendono da  $y$ , anche in maniera piuttosto complicata!

(al limite gli estremi del rettangolo possono essere all'infinito...) A questo punto

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x, y) d\Sigma &= \int_{\mathbb{R}^2} d\Sigma \chi(x, y) f(x, y) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left[ \int_{y_1}^{y_2} dy \chi(x, y) f(x, y) \right] \\ &= \int_{y_1}^{y_2} dy \left[ \int_{x_1}^{x_2} dx \chi(x, y) f(x, y) \right] \end{aligned}$$

Quindi l'integrale 2-D viene ridotto al calcolo di due integrali 1-D — si può integrare prima su  $y$  e poi su  $x$ , o viceversa <sup>[2]</sup>.

Al computer, l'integrale viene calcolato come somma di tutti i contributi  $\chi(x, y) f(x, y) \cdot dx \cdot dy$ : questi vengono scelti “piccoli” ma ovviamente non possono essere infinitesimi, pertanto il risultato sarà approssimato. Si può valutare l'effetto dell'approssimazione, per esempio ripetendo il calcolo sfasando la “griglia” in  $(x, y)$  di  $\pm dx/2$  lungo  $x$ , oppure di  $\pm dy/2$  lungo  $y$ , oppure adottando un passo  $dx, dy$  più fine.

Tutto quanto detto si può ripetere anche per gli integrali in 3-D.

### 5.4.1 Coordinate cartesiane e angolari

Se il problema è particolarmente simmetrico, nella forma della funzione  $f$  e/o del dominio  $\Omega$ , l'integrazione si semplifica adottando il sistema di coordinate opportuno. In alcuni casi l'integrazione può essere fatta in maniera analitica.

<sup>2</sup> L'ordine di integrazione, per funzioni  $f(x, y)$  non troppo “patologiche” è ininfluenza.

**Coordinate cartesiane, 2-D e 3-D**

Supponiamo che in 2-D il dominio  $\Omega$  sia facilmente individuabile, per esempio per ogni  $x$  sono noti  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  tali che

$$\Omega \equiv \{ (x, y) ; y_1(x) < y < y_2(x) \}$$

Allora

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy f(x, y) \right]$$

Analogamente si può procedere in 3-D.

**Coordinate polari, 2-D**

In alcuni casi, la funzione  $f(x, y)$  è meglio esprimibile in coordinate polari:  $f(\rho, \phi)$ . In tal caso è utile esprimere anche la areola  $d\Sigma$  in tali coordinate. Essa è assimilabile a un rettangolino di lati  $d\rho$  e  $\rho d\phi$ , pertanto

$$d\Sigma = d\rho \cdot \rho d\phi$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f d\Sigma &= \int \rho d\rho \left[ \int d\phi f(\rho, \phi) \right] \\ &= \int d\phi \left[ \int \rho d\rho f(\rho, \phi) \right] \end{aligned} \quad (5.12)$$

L'ordine dei due integrali è ininfluenza, pertanto si sceglie quello più comodo.

**Coordinate cilindriche, 3-D**

Un caso simile al precedente, ma in 3-D, si ha quando la funzione  $f(x, y, z)$  è più facilmente esprimibile in coordinate cilindriche:  $f(\rho, \phi, z)$ . In tal caso si deve esprimere anche il volumetto  $dV$  con le stesse coordinate. Con ragionamenti analoghi ai precedenti, si ottiene

$$dV = d\rho \cdot \rho d\phi dz$$

e quindi:

$$\int_{\Omega} f dV = \int \rho d\rho \left[ \int d\phi \left( \int dz f(\rho, \phi, z) \right) \right] \quad (5.13)$$

Anche qui l'ordine dei 3 integrali è ininfluenza.

### Coordinate sferiche, 3-D

Se la funzione  $f(x, y, z)$  è più facilmente esprimibile in coordinate sferiche,  $f(r, \theta, \phi)$ , anche il volumetto  $dV$  va espresso in tali coordinate. Possiamo pensarlo come un piccolo parallelepipedo di spigoli  $dr$ ,  $r d\theta$ ,  $r \sin \theta d\phi$ , pertanto

$$dV = r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$$

Ne segue che:

$$\int_{\Omega} f dV = \int r^2 dr \left[ \int \sin \theta d\theta \left( \int d\phi f(r, \theta, \phi) \right) \right] \quad (5.14)$$

L'ordine dei 3 integrali è sempre ininfluenza.

## 5.5 Esempi di calcoli di integrali

Questa sezione serve per fare alcuni esempi pratici...

### 5.5.1 Integrale della Gaussiana

La funzione Gaussiana unitaria è definita come:

$$\mathcal{G}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Il fattore  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  è introdotto per avere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(x) dx = 1$$

(come si conviene a una densità di probabilità).

La funzione  $e^{-x^2/2}$  non ha una funzione primitiva calcolabile analiticamente, ovvero non è esprimibile attraverso altre funzioni note (esponenziali, logaritmi, etc). In generale si definisce

$$\text{Erf}(x) = \int_{-\infty}^x dx' \mathcal{G}(x')$$

e i suoi valori vanno calcolati con metodi numerici. Però  $\text{Erf}(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(x)dx$  è calcolabile analiticamente. Vediamo come fare.

$$\begin{aligned} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(x)dx \right)^2 &= \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(x)dx \right) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(y)dy \right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{1}{2\pi} e^{-x^2/2} e^{-y^2/2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} dx dy e^{-(x^2+y^2)/2} \end{aligned}$$

L'integrale è su tutto il piano  $(x, y)$ . Passiamo alle coordinate polari  $(\rho, \phi)$ , cosicché l'elemento di superficie diventa  $d\Sigma = \rho d\rho d\phi$ , e  $x^2 + y^2 = \rho^2$ :

$$\begin{aligned} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(x)dx \right)^2 &= \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\phi}_{\rightarrow 2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=+\infty} \rho d\rho e^{-\rho^2/2} \\ &= \int_{\rho=0}^{\rho=+\infty} \rho d\rho e^{-\rho^2/2} \end{aligned}$$

(la funzione integranda,  $\rho e^{-\rho^2/2}$ , non dipendeva da  $\phi$ , quindi  $\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\phi$  ha dato il fattore  $2\pi$ ). Ora facciamo un cambiamento di variabile:  $u = \frac{\rho^2}{2}$ , cosicché  $du = \frac{du}{d\rho} d\rho = \rho d\rho$ . In questo modo:

$$\left( \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(x)dx \right)^2 = \int_{u=0}^{u=+\infty} du e^{-u} = [-e^{-u}]_{u=0}^{u=+\infty} = 1$$

... e il calcolo è completo.

### 5.5.2 Volume e superficie di una sfera

Vogliamo trovare il volume  $V(R)$  e la superficie  $\Sigma(R)$  di una sfera di raggio  $R$  (risultati che dovrebbero già essere arcinoti...)

Cominciamo con il volume: mettiamo la sfera nell'origine e usiamo coordinate cilindriche  $(\rho, \phi, z)$ . La sfera può essere "affettata" con tanti piani  $\perp z$ : ogni "fetta" è un dischetto a quota  $z$ , di spessore  $dz$  e di raggio  $\rho(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$ . Il volume del dischetto è quindi:

$$dV(z) = \pi \rho^2 dz = \pi (R^2 - z^2) dz$$

Quindi il volume della sfera è:

$$\begin{aligned} V(R) &= \int_{z=-R}^{z=+R} dV(z) = \pi \int_{z=-R}^{z=+R} dz (R^2 - z^2) \\ &= \pi \left[ R^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{z=-R}^{z=+R} = \frac{4}{3} \pi R^3 \end{aligned}$$

Lo stesso volume può essere calcolato suddividendo la sfera in tante “bucce” concentriche, ciascuna di raggio  $r$  e spessore  $dr$ . Qui usiamo coordinate sferiche. Il volume della “buccia” è  $dV(r) = \Sigma(r) dr$  — essendo  $\Sigma(r)$  da determinare — e quindi

$$V(R) = \int_{r=0}^{r=R} dV(r) = \int_{r=0}^{r=R} \Sigma(r) dr$$

Derivando l’equazione rispetto a  $R$  si trova

$$\frac{dV(R)}{dR} = \Sigma(R)$$

e utilizzando  $V(R) = \frac{4}{3} \pi R^3$  si trova:

$$\Sigma(R) = \frac{d}{dR} \left( \frac{4}{3} \pi R^3 \right) = 4\pi R^2$$

### 5.5.3 Superficie e volume del segmento sferico

Il segmento sferico è lo spazio racchiuso da una calotta che parte dal “polo Nord” e scende per un’altezza  $h$  — ovviamente se  $h = 2R$  si ottiene la sfera completa.

Per il volume, lavoriamo in coordinate cilindriche, come fatto per la sfera. L’unica differenza è l’intervallo di integrazione in  $dz$  è  $[R - h; R]$ , quindi:

$$V(R, h) = \pi \left[ R^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{z=R-h}^{z=R} = \frac{\pi}{3} h^2 (3R - h)$$

Per la superficie: dividiamo la calotta sferica in tanti “anelli”, ciascuno localizzato da un angolo polare  $\theta$  e sotteso da  $d\theta$ . Il raggio dell’anello è  $\rho = R \sin \theta$  e la sua larghezza  $ds = R d\theta$ , pertanto la sua area è

$$d\Sigma = 2\pi \rho ds = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$$



L'integrale in  $d\theta$  va fatto da  $\theta = 0$  (polo Nord), fino a un  $\theta_{max}$  tale che  $h = R - R \cos \theta_{max} = R(1 - \cos \theta_{max})$ :

$$\begin{aligned}\Sigma(R, h) &= \int_{\theta=0}^{\theta=\theta_{max}} \theta = \theta_{max} d\Sigma = 2\pi R^2 \int_{\theta=0}^{\theta=\theta_{max}} \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi R^2 [-\cos \theta]_{\theta=0}^{\theta=\theta_{max}} = 2\pi R^2 (1 - \cos \theta_{max}) \\ &= 2\pi Rh\end{aligned}$$

Nota: nel limite  $h \rightarrow 2R$  i risultati per  $V(R, h)$  e  $\Sigma(R, h)$  tendono a quelli trovati per la sfera (così, per *cross-check*...)

### 5.5.4 Funzione $\Gamma$ (\*)

La funzione- $\Gamma$  è così definita:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} du u^{(x-1)} e^{-u} \quad (x > 0)$$

La sua proprietà notevole è che

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

che si può verificare integrando per parti:

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} du u^x e^{-u} = [-e^{-u} u^x]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} du (-e^{-u} x u^{(x-1)}) \\ &= 0 + x\Gamma(x)\end{aligned}$$

(ricorda che  $u^x e^{-u} \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0 \quad \forall x > 0$ ).

È facile verificare che  $\Gamma(1) = 1$ . In generale quindi

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (n \text{ numero naturale})$$

Calcoliamo  $\Gamma(1/2)$ : useremo il cambiamento di coordinate  $u = r^2/2$ , con  $du = r dr$ :

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} du u^{-1/2} e^{-u} = \int_0^{+\infty} dr \sqrt{2} e^{-r^2/2} \\ &= \sqrt{2} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dr \sqrt{2} e^{-r^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2\pi} = \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

Possiamo compilare una tabellina per la funzione  $\Gamma$  calcolata per argomenti interi e semi-interi:

$x$	$\Gamma(x)$	$x$	$\Gamma(x)$
		$-\frac{1}{2}$	$-2\sqrt{\pi}$
1	1	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\pi}$
2	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$
3	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$
4	6	$\frac{7}{2}$	$\frac{15}{8}\sqrt{\pi}$
5	24		

### 5.5.5 Volumi e superfici di ipersfere in $N$ dimensioni (\*)

Una ipersfera di raggio  $r$  nello spazio  $N$ -dimensionale  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  è definita come l'insieme dei punti tali che  $\sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2} \leq r$ .

Chiamando  $V_N(r)$  il suo volume e  $\Sigma_N(r)$  la sua superficie, ci aspettiamo che  $V_N(r) \propto r^N$  e  $\Sigma_N(r) \propto r^{N-1}$  — ora vogliamo però determinare i coefficienti.

Consideriamo una Gaussiana unitaria in  $N$  dimensioni:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_N(x_1, \dots, x_N) &= \mathcal{G}(x_1)\mathcal{G}(x_2)\cdots\mathcal{G}(x_N) = \prod_{i=1}^N \mathcal{G}(x_i) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^N \prod_i e^{-x_i^2/2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^N e^{-(\sum_i x_i^2)/2} \end{aligned}$$

Ricordando che  $\int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(x) dx = 1$  abbiamo ovviamente che

$$\int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{G}_N(x_1, \dots, x_N) dx_1 \cdots dx_N = \left(\int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(x) dx\right)^N = 1$$

D'altra parte, possiamo dividere  $\mathbb{R}^N$  in gusci sferici concentrici, ciascuno di raggio  $r$  e spessore  $dr$ . Ciascun guscio ha volume  $dV = \Sigma_N(r) dr =$

$A_N r^{N-1} dr$ , con  $A_N$  da determinare. L'integrale diventa:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{G}_N(x_1, \dots, x_N) dx_1 \cdots dx_N \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} dx_1 \cdots dx_N \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^N e^{-(\sum_i x_i^2)/2} \\ &= \int_{r=0}^{r=+\infty} \frac{1}{(2\pi)^{(N/2)}} \underbrace{A_N r^{N-1} dr}_{dV} e^{-r^2/2} \end{aligned}$$

Ora facciamo la sostituzione  $u = r^2/2$  e  $du = r dr$ , quindi  $r^{N-1} dr = du (2u)^{(N/2-1)}$ :

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{A_N}{(2\pi)^{(N/2)}} \int_{u=0}^{u=+\infty} du (2u)^{(N/2-1)} e^{-u} = \frac{A_N}{(2\pi)^{N/2}} \int_0^{+\infty} u^{N/2-1} e^{-u} \\ &= \frac{A_N}{2 \pi^{N/2}} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \end{aligned}$$

Quindi  $A_N = \frac{2 \pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}$ , ovvero:

$$\Sigma_N(r) = \frac{2 \pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)} r^{(N-1)}$$

È facile verificare che per  $N = 2$  (circonferenza) e  $N = 3$  (sfera) si ottengono i risultati familiari:  $\Sigma_2(r) = 2\pi r$  e  $\Sigma_3(r) = 4\pi r^2$ . Il volume si ottiene integrando la superficie lungo  $r$ :

$$V_N(r) = \int_0^r dr' \Sigma_N(r') = \frac{2 \pi^{N/2}}{N \Gamma(N/2)} r^N$$



# Capitolo 6

## Vettori

Abbiamo introdotto il concetto di vettore parlando di posizioni e spostamenti nello spazio 3-dimensionale.

In effetti, molte quantità fisiche sono descritte tramite vettori: in generale chiamiamo *vettori* tutte le quantità per cui è necessario definire, oltre alla grandezza, anche l'orientamento <sup>[1]</sup>. Per contrasto, quelle per cui è sufficiente definire la grandezza, si chiamano *scalari*.

Vediamo alcuni esempi intuitivi, da approfondire in seguito. Se io dicessi: “parto da casa, cammino per mezz'ora alla velocità di 6 km/h, dove arrivo?”, uno che mi ascolta, anche se non ha mai studiato la Fisica, obietterebbe: “come faccio a saperlo se non mi dici da che parte ti sei diretto?” Evidentemente, la velocità deve essere definita con un *modulo* (o intensità) e un *orientamento*. Nello studio della cinematica tridimensionale (Capitolo 7) avremo abbondantemente a che fare con la natura vettoriale di velocità e accelerazioni. Anche le forze, che introdurremo con lo studio della dinamica (Capitolo 8), sono grandezze vettoriali. Anche in questo caso, chiunque capisce che spingere una carriola di pietre in orizzontale non è proprio la stessa cosa che cercare di sollevarla in verticale. . .

Alcuni esempi di quantità scalari con cui abbiamo familiarità sono la massa, la pressione, la temperatura, . . .

---

<sup>1</sup> Nei testi *italiani*, si suole definire una grandezza vettoriale come dotata di *intensità*, *direzione*, e *verso* — supponendo che la direzione indichi solo lungo che retta ci stiamo muovendo, mentre il verso dica se andiamo avanti o indietro. Ho preferito evitare questo livello di dettaglio, perché nella letteratura *inglese* “direction” ingloba anche il verso — e prima o poi nello studio della fisica passerete a leggere libri in inglese. D'altronde, anche in italiano, se io dico che sono “diretto a Nord”, nessuno si pone il dubbio se io stia andando “verso” Sud. Qui, per “orientamento”, si intende dunque l'informazione completa di direzione e verso.

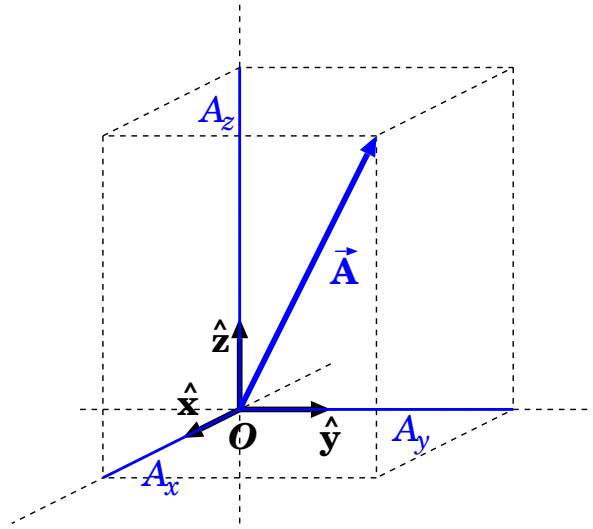


Figura 6.1: *Scomposizione di un vettore nelle sue componenti cartesiane*

In questo capitolo esploreremo le proprietà delle grandezze vettoriali e delle operazioni che possiamo fare con esse.

## 6.1 Vettori in fisica

In uno spazio 3-dimensionale si definisce un'origine  $O$  e un sistema di assi cartesiani orientati lungo segmenti  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ , che costituiscono una *base ortonormale* dello spazio vettoriale: hanno lunghezza unitaria e sono tutti perpendicolari l'un l'altro. Una qualunque quantità  $\vec{A}$ , dotata di orientamento e lunghezza in questo spazio, può essere identificata attraverso le sue tre componenti  $A_x, A_y, A_z$  lungo le tre direzioni cartesiane, come illustrato in Fig. 6.1.

La scomposizione lungo i versori di base si scrive in una delle due forme:

$$\begin{aligned}\vec{A} &= A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z} \\ \vec{A} &\equiv (A_x, A_y, A_z)\end{aligned}\tag{6.1}$$

a seconda se si vogliono esplicitare o meno gli assi cartesiani.

Poiché le componenti  $(A_x, A_y, A_z)$  sono tutte lungo direzioni perpendicolari, il modulo, o intensità, del vettore si ricava

dal teorema di Pitagora, e vale:

$$A \equiv |\vec{\mathbf{A}}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (6.2)$$

Per indicare solo l'orientamento del vettore  $\vec{\mathbf{A}}$ , si fa uso del *versore*  $\hat{\mathbf{A}}$ , così definito:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}} &= \frac{\vec{\mathbf{A}}}{|\vec{\mathbf{A}}|} = \frac{\vec{\mathbf{A}}}{A} \\ \text{(oppure)} \quad \hat{\mathbf{A}} &\equiv \left( \frac{A_x}{A}, \frac{A_y}{A}, \frac{A_z}{A} \right) \end{aligned} \quad (6.3)$$

## 6.2 Operazioni elementari con vettori

Dati due vettori  $\vec{\mathbf{A}}$  e  $\vec{\mathbf{B}}$ , di componenti  $(A_x, A_y, A_z)$  e  $(B_x, B_y, B_z)$ , si definiscono la somma, la differenza e il prodotto per una quantità scalare  $\alpha$  come:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} &= (A_x + B_x)\hat{\mathbf{x}} + (A_y + B_y)\hat{\mathbf{y}} + (A_z + B_z)\hat{\mathbf{z}} \\ &\equiv (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z) \\ \vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{A}} &= (B_x - A_x)\hat{\mathbf{x}} + (B_y - A_y)\hat{\mathbf{y}} + (B_z - A_z)\hat{\mathbf{z}} \\ &\equiv (B_x - A_x, B_y - A_y, B_z - A_z) \\ \alpha\vec{\mathbf{A}} &= (\alpha A_x)\hat{\mathbf{x}} + (\alpha A_y)\hat{\mathbf{y}} + (\alpha A_z)\hat{\mathbf{z}} \\ &\equiv (\alpha A_x, \alpha A_y, \alpha A_z) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Si può vedere che la somma e la differenza hanno una rappresentazione grafica come in Fig. 6.2. Si tratta della cosiddetta “*regola del parallelogramma*”<sup>[2]</sup>: i vettori  $\vec{\mathbf{A}}, \vec{\mathbf{B}}$  identificano un parallelogramma; la diagonale che parte dall'origine dà la somma  $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$ , l'altra diagonale dà la differenza  $\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{A}}$ .

<sup>2</sup> In generale, per effettuare calcoli conviene lavorare per coordinate cartesiane, con le Eq. (6.4). Le rappresentazioni grafiche sono utili per descrivere e capire problemi specifici.

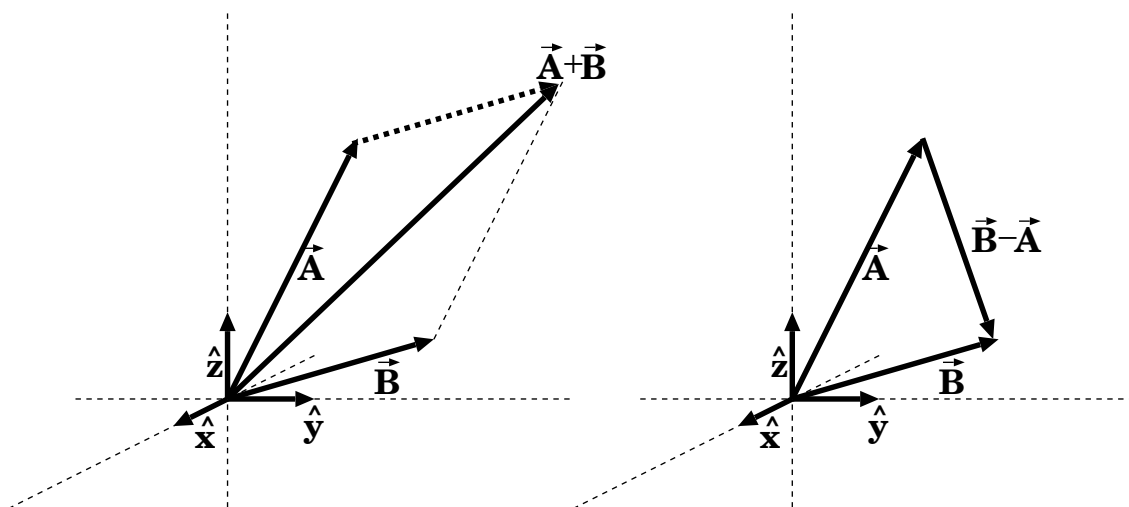


Figura 6.2: Somma e differenza di vettori

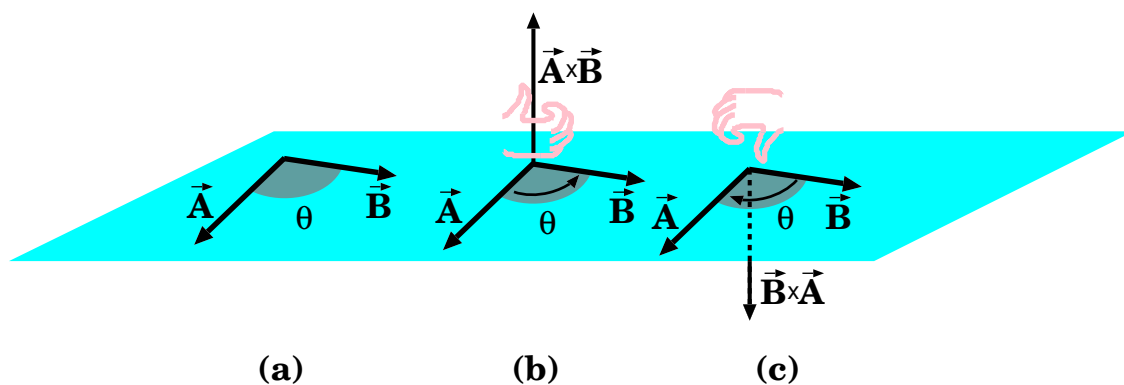


Figura 6.3: Spiegazione geometrica del prodotto scalare (a) e vettoriale (b,c)

### 6.3 Prodotto scalare di due vettori

Definiamo il *prodotto scalare* di due vettori  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  come:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (6.5)$$

ovvero la somma dei prodotti componente per componente. È subito evidente che il *prodotto scalare* è *commutativo*:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

Se i due vettori formano un angolo  $\theta$  (vedi Fig. 6.3(a)), si può mostrare



che

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta \quad (6.6)$$

Per dimostrare questa proprietà, scegliamo gli assi cartesiani in modo che l'asse  $x$  giaccia lungo il vettore  $\vec{A}$  e che il piano  $Oxy$  contenga il vettore  $\vec{B}$ . Allora le componenti cartesiane dei due vettori sono

$$\begin{array}{l} A_x \quad ; \quad A_y = 0 \quad ; \quad A_z = 0 \\ B_x \quad ; \quad B_y \quad \quad ; \quad B_z = 0 \end{array}$$

e il prodotto scalare diventa semplicemente  $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x$ . Ora, per la scelta degli assi,  $|\vec{A}| = A_x$ ; inoltre l'angolo  $\theta$  fra  $\vec{B}$  e  $\vec{A}$  può essere visto come angolo fra  $\vec{B}$  e l'asse  $x$ , quindi  $B_x = |\vec{B}| \cos \theta$ . Da questo si deduce la proprietà dell'Eq. (6.6).

Vale la pena notare che si può scrivere

$$|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} \quad (6.7)$$

Il prodotto scalare di due vettori perpendicolari è sempre nullo, essendo in questo caso  $\theta = \frac{\pi}{2}$  e quindi  $\cos \theta = 0$ . In generale:

$$\begin{array}{l} \theta < \frac{\pi}{2} \iff \vec{A} \cdot \vec{B} > 0 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \iff \vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \\ \theta > \frac{\pi}{2} \iff \vec{A} \cdot \vec{B} < 0 \end{array}$$

Le condizioni di ortonormalità per  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  possono ora essere riscritte:

$$\begin{array}{l} |\hat{x}| = 1 \quad ; \quad |\hat{y}| = 1 \quad ; \quad |\hat{z}| = 1 \\ \hat{x} \cdot \hat{y} = 0 \quad ; \quad \hat{x} \cdot \hat{z} = 0 \quad ; \quad \hat{y} \cdot \hat{z} = 0 \end{array} \quad (6.8)$$

### 6.3.1 Proiezione di un vettore lungo una direzione

In particolare, il prodotto scalare di un vettore  $\vec{A}$  con un vettore unitario  $\hat{u}$ ,  $\vec{A} \cdot \hat{u}$ , dà la proiezione di  $A$  sulla direzione indicata da  $\hat{u}$ :

$$A_u = \vec{A} \cdot \hat{u} \quad (6.9)$$

Come importante conseguenza:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{x}} &= A_x \\ \vec{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{y}} &= A_y \\ \vec{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{z}} &= A_z\end{aligned}\tag{6.10}$$

## 6.4 Prodotto vettoriale di due vettori

Il *prodotto vettoriale*  $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$  è un vettore che ha per componenti:

$$\begin{aligned}\left[\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}\right]_x &= (A_y B_z - A_z B_y) \\ \left[\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}\right]_y &= (A_z B_x - A_x B_z) \\ \left[\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}\right]_z &= (A_x B_y - A_y B_x)\end{aligned}\tag{6.11}$$

Questa scrittura è apparentemente complicata, ma può essere facilmente ricordata pensando alle coordinate  $x, y, z$  in modo ciclico:  $\widehat{xyz}$ .

Si nota subito che *il prodotto vettoriale è anti-commutativo*, ovvero cambia segno se si invertono i due vettori:

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$$

Se i due vettori formano un angolo  $\theta$  (vedi Fig. 6.3(b,c)), si può dimostrare che  $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$  è perpendicolare al piano individuato da  $\vec{\mathbf{A}}$  e  $\vec{\mathbf{B}}$ , ha modulo:

$$|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}| = |\vec{\mathbf{A}}| |\vec{\mathbf{B}}| \sin \theta\tag{6.12}$$

ed è orientato secondo la “regola della mano destra”, cioè se le dita della mano destra puntano da  $\vec{\mathbf{A}}$  a  $\vec{\mathbf{B}}$  — in questo ordine! — il pollice è diretto come  $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ .

Per dimostrare queste proprietà, scegliamo gli assi cartesiani in modo che l’asse  $x$  giaccia lungo il vettore  $\vec{\mathbf{A}}$  e che il piano  $Oxy$  contenga il vettore  $\vec{\mathbf{B}}$ . Allora le componenti cartesiane dei due vettori sono

$$\begin{array}{l} A_x \ ; \ A_y = 0 \ ; \ A_z = 0 \\ B_x \ ; \ B_y \ \ \ \ \ ; \ B_z = 0 \end{array}$$

Le componenti del prodotto vettoriale diventano:

$$\begin{aligned} \left[ \vec{A} \times \vec{B} \right]_x &= (A_y B_z - A_z B_y) = 0 \\ \left[ \vec{A} \times \vec{B} \right]_y &= (A_z B_x - A_x B_z) = 0 \\ \left[ \vec{A} \times \vec{B} \right]_z &= (A_x B_y - A_y B_x) = A_x B_y \end{aligned}$$

Anzitutto,  $\vec{A} \times \vec{B}$  ha solo componente lungo  $z$ , quindi è perpendicolare al piano  $Oxy$  che contiene  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ . Inoltre, per la scelta degli assi,  $|\vec{A}| = A_x$ ; l'angolo  $\theta$  fra  $\vec{B}$  e  $\vec{A}$  può essere visto come angolo fra  $\vec{B}$  e l'asse  $x$ , quindi  $B_y = |\vec{B}| \sin \theta$ . Da questo si deduce la proprietà dell'Eq. (6.12).

Il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è nullo: infatti, se i vettori hanno orientamenti concordi  $\theta = 0$ , se hanno orientamenti opposti  $\theta = \pi$ ; in ogni caso  $\sin \theta = 0$ .

Una proprietà interessante del prodotto vettoriale è che il suo modulo è uguale all'area del parallelogramma individuato dai due vettori  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  — infatti  $|\vec{B}| \sin \theta$  è la proiezione di  $\vec{B}$  lungo la direzione perpendicolare a  $\vec{A}$ , quindi  $|\vec{A}|$  può essere pensata come la base del parallelogramma, e  $|\vec{B}| \sin \theta$  come l'altezza.

Concludiamo con le seguenti relazioni fra i versori cartesiani:

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z} \quad ; \quad \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x} \quad ; \quad \hat{z} \times \hat{x} = \hat{y} \quad (6.13)$$

(facilmente verificabili con la “regola della mano destra”).

## 6.5 Identità vettoriali

Il prodotto scalare e il prodotto vettoriale sono operazioni *bilineari*, vale a dire:

$$\begin{aligned} (\alpha \vec{A} + \beta \vec{B}) \cdot \vec{C} &= \alpha(\vec{A} \cdot \vec{C}) + \beta(\vec{B} \cdot \vec{C}) \\ \vec{A} \cdot (\beta \vec{B} + \gamma \vec{C}) &= \beta(\vec{A} \cdot \vec{B}) + \gamma(\vec{A} \cdot \vec{C}) \\ (\alpha \vec{A} + \beta \vec{B}) \times \vec{C} &= \alpha(\vec{A} \times \vec{C}) + \beta(\vec{B} \times \vec{C}) \\ \vec{A} \times (\beta \vec{B} + \gamma \vec{C}) &= \beta(\vec{A} \times \vec{B}) + \gamma(\vec{A} \times \vec{C}) \end{aligned} \quad (6.14)$$

La dimostrazione, un semplice esercizio di algebra, è diretta conseguenza delle definizioni, Eq. (6.5) e Eq. (6.11).

Elenchiamo di seguito altre identità vettoriali, *molto utili*:

$$\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0 \quad (\text{a})$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \quad (\text{b})$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad (\text{c})$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) + \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = 0 \quad (\text{d})$$

(6.15)

La (a) è ovvia:  $\vec{A} \times \vec{B} \perp \vec{A}$ . Per (b) e (c) la dimostrazione è più complicata: si vedano i suggerimenti nella Sezione 6.9. La (d) è diretta conseguenza della (c).

## 6.6 Trasformazioni di vettori

Un vettore in fisica non è solo una quantità  $\vec{A}$  che può essere parametrizzata da una tripletta di variabili reali  $(A_x, A_y, A_z)$ . Occorre anche che gli elementi di tale tripletta soddisfino precise proprietà di trasformazione quando si effettui un cambiamento di coordinate. Vediamone i dettagli.

Quando si lavora sulle componenti, è utile introdurre una nomenclatura numerica 1, 2, 3 al posto di  $x, y, z$ . Le regole di corrispondenza sono le seguenti:

$$\begin{array}{lll} \hat{e}_1 \equiv \hat{x} & A_1 \equiv A_x & x_1 \equiv x \\ \hat{e}_2 \equiv \hat{y} & A_2 \equiv A_y & x_2 \equiv y \\ \hat{e}_3 \equiv \hat{z} & A_3 \equiv A_z & x_3 \equiv z \end{array}$$

Nello spazio 3-dimensionale, una posizione rispetto all'origine  $O$  è descritta da un *vettore posizione*, o *raggio vettore*,  $\vec{r}$ . In un dato sistema di coordinate, con assi lungo i versori ortonormali (vedi Eq. (6.8))  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  possiamo scomporre  $\vec{r}$  nelle sue componenti:

$$\vec{r} = \sum_{k=1}^3 x_k \hat{e}_k$$

dove

$$x_k = \vec{r} \cdot \hat{e}_k$$

Con una diversa scelta di coordinate, avremmo versori  $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$  e quindi una scomposizione

$$\vec{r} = \sum_{m=1}^3 x'_m \hat{e}'_m$$

Che relazione c'è fra le componenti  $(x_1, x_2, x_3)$  e  $(x'_1, x'_2, x'_3)$ ? Poiché:

$$\begin{aligned} x'_i &= \hat{e}'_i \cdot \vec{r} = \hat{e}'_i \cdot \left( \sum_{k=1}^3 x_k \hat{e}_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^3 (\hat{e}'_i \cdot \hat{e}_k) x_k \end{aligned}$$

otteniamo:

$$x'_i = \sum_{k=1}^3 (\hat{e}'_i \cdot \hat{e}_k) x_k \quad (6.16)$$

Analogamente si ottengono le trasformazioni inverse:

$$x_k = \sum_{i=1}^3 (\hat{e}_k \cdot \hat{e}'_i) x'_i \quad (6.17)$$

In fisica, chiamiamo *vettore* una quantità  $\vec{A}$  che può essere scomposta come  $\sum_{k=1}^3 A_k \hat{e}_k$ , tale che le sue componenti  $(A_1, A_2, A_3)$  si trasformino come quelle di un raggio vettore quando si effettui un cambiamento di coordinate, cioè:

$$A'_i = \sum_{k=1}^3 (\hat{e}'_i \cdot \hat{e}_k) A_k \quad (6.18)$$

Questo significa che  $\vec{A}$  può essere scritto come:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \sum_k A_k \hat{e}_k \\ &= \sum_i A'_i \hat{e}'_i \end{aligned}$$

Le componenti cartesiane, in ciascuno dei due sistemi di assi, sono raffigurate in Fig. 6.4.

Si può provare che, se  $\vec{A}, \vec{B}$  sono vettori, allora  $|\vec{A}|, |\vec{B}|, \vec{A} \cdot \vec{B}$  sono scalari (ovvero restano invariati se cambiamo le coordinate), mentre  $\vec{A} \times \vec{B}$  è un vettore, ovvero le sue coordinate si trasformano secondo l'Eq. (6.18). Inoltre, se  $\psi(x, y, z)$  è una funzione scalare delle coordinate  $(x, y, z)$ , allora il *gradiente*,  $\vec{\nabla}\psi \equiv \left( \frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial z} \right)$ , si trasforma come un vettore.

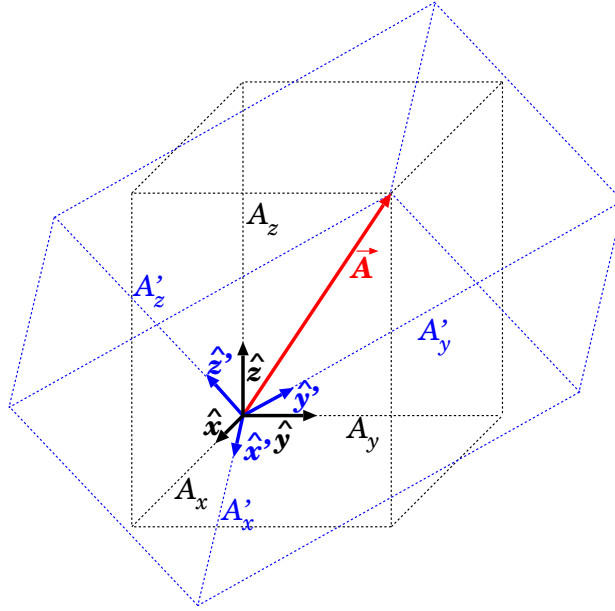


Figura 6.4: Scomposizione del vettore  $\vec{A}$  secondo gli assi  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  e secondo gli assi  $(\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$ .

### 6.6.1 Invarianza del prodotto scalare (\*)

Il prodotto scalare, definito come nell'Eq. (6.5), si può scrivere come:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i=1}^3 A_i B_i$$

Vogliamo mostrare che esso è *invariante per un cambiamento di coordinate*, ovvero che:

$$\sum_{i=1}^3 A_i B_i = \sum_{i=1}^3 A'_i B'_i$$

dove le componenti  $A'_i$ ,  $B'_i$  sono date dall'Eq. (6.18). Vediamo:

$$\begin{aligned} \sum_i A'_i B'_i &= \sum_i \left[ \sum_k (\hat{e}'_i \cdot \hat{e}_k) A_k \right] \left[ \sum_h (\hat{e}'_i \cdot \hat{e}_h) B_h \right] \\ &= \sum_{k,h} A_k B_h \left[ \sum_i (\hat{e}'_i \cdot \hat{e}_k) (\hat{e}'_i \cdot \hat{e}_h) \right] \end{aligned}$$

Ora concentriamoci sul termine fra [ ]:

$$\begin{aligned} \sum_i (\hat{e}'_i \cdot \hat{e}_k)(\hat{e}'_i \cdot \hat{e}_h) &= \left[ \sum_i (\hat{e}'_i \cdot \hat{e}_k) \hat{e}'_i \right] \cdot \hat{e}_h \\ &= \hat{e}_k \cdot \hat{e}_h \\ &= \begin{cases} 1 & (\text{se } k = h) \\ 0 & (\text{se } k \neq h) \end{cases} \equiv \delta_{kh} \end{aligned}$$

Abbiamo qui introdotto la “delta di Kronecker”,  $\delta_{kh}$  (molto utile!) Quindi:

$$\sum_i A'_i B'_i = \sum_{k,h} A_k B_h \delta_{kh}$$

Nella doppia sommatoria, solo i termini in cui  $k = h$  sopravvivono, gli altri si annullano, quindi

$$\sum_i A'_i B'_i = \sum_k A_k B_k$$

che è ciò che volevamo dimostrare.

Come conseguenza,  $|\vec{A}|$  è invariante: basti pensare che  $|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} \dots$

### 6.6.2 Trasformazione vettoriale del gradiente (\*)

Il *gradiente* di un campo scalare  $\psi(x, y, z)$  è definito da:

$$\vec{\nabla} \psi = \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \hat{x} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \hat{y} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \hat{z} \quad (6.19)$$

Vogliamo mostrare che questo oggetto si trasforma come un vettore. Per fare questo, utilizziamo la notazione numerica 1, 2, 3 per le tre direzioni cartesiane, come spiegato in Sezione 6.6: le tre coordinate sono chiamate  $x_1, x_2, x_3$  e i tre versori  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ , cosicché l'Eq. (6.19) diventa

$$\vec{\nabla} \psi = \sum_{k=1}^3 \hat{e}_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k}$$

Se scegliessimo un diverso sistema di coordinate con assi  $\hat{e}'_1, \dots, \hat{e}'_3$ , applicando la definizione Eq. (6.19) scriveremmo:

$$\vec{\nabla}' \psi = \sum_{m=1}^3 \hat{e}'_m \frac{\partial \psi}{\partial x'_m}$$

Le vecchie coordinate  $(x_1, \dots, x_3)$  sono collegate alle nuove  $(x'_1, \dots, x'_3)$  dall'Eq. (6.17), quindi:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x'_m} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_k}{\partial x'_m} \frac{\partial \psi}{\partial x_k}$$

Abbiamo usato la “regola di Leibnits”, o “regola della catena” <sup>[3]</sup>. Ma le Eq. (6.17) sono lineari, quindi

$$\frac{\partial x_k}{\partial x'_m} = (\hat{e}_k \cdot \hat{e}'_m)$$

e

$$\frac{\partial \psi}{\partial x'_m} = \sum_{k=1}^3 (\hat{e}'_m \cdot \hat{e}_k) \frac{\partial \psi}{\partial x_k}$$

Abbiamo trovato che le componenti di  $\vec{\nabla} \psi$  si trasformano secondo le Eq. (6.18), il che significa che il gradiente di un campo scalare è un campo vettoriale.

## 6.7 Rotazioni e inversioni spaziali (\*)

Le quantità:

$$R_{ik} = (\hat{e}'_i \cdot \hat{e}_k)$$

formano gli elementi di una matrice  $(3 \times 3)$   $\mathbf{R}$ . Le Eq. (6.16) e Eq. (6.17) possono essere scritte come:

$$x'_i = \sum_k R_{ik} x_k \quad ; \quad x_k = \sum_i R_{ik} x'_i$$

da cui vediamo che la trasformazione inversa si ottiene scambiando i due indici:

$$(\mathbf{R}^{-1})_{ki} = (\mathbf{R})_{ik} \quad \text{oppure} \quad \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$$

ovvero la matrice  $\mathbf{R}$  è *ortogonale*.

Si dimostra che le matrici ortogonali hanno tutte determinante  $\pm 1$ . Tutte le rotazioni nello spazio hanno determinante  $+1$ : infatti, qualunque rotazione

---

<sup>3</sup> Ve la ricordate? Se modifichiamo la coordinata  $x'_m$  di una quantità  $dx'_m$ , lasciando le altre coordinate  $x'_s$  ( $s \neq m$ ) invariate, induciamo variazioni su tutti le coordinate  $x_k$  date da  $dx_k = \frac{\partial x_k}{\partial x'_m} dx'_m$ , che a loro volta producono una variazione di  $\psi(x_1, \dots, x_n)$  pari

$$a \, d\psi = \sum_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} dx_k = \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial x'_m} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} dx'_m$$



di un angolo  $\alpha$  attorno ad un qualunque asse può essere ridotta con continuità alla trasformazione identica ( $\alpha \rightarrow 0$ ), che ha determinante  $+1$ ; essendo il determinante una funzione continua dei coefficienti della matrice, che a loro volta sono funzioni continue dell'angolo  $\alpha$ , esso non può mai passare da  $+1$  a  $-1$ .

### 6.7.1 Combinazioni di rotazioni

Una combinazione di due rotazioni è una rotazione: con il formalismo matriciale, una rotazione  $\mathbf{R}_1$  seguita da una rotazione  $\mathbf{R}_2$  è descritta da una matrice

$$\mathbf{R}_{tot} = \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1$$

(a sinistra la matrice che agisce “dopo”). Ora

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1)^{-1} &= \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} = \mathbf{R}_1^T \mathbf{R}_2^T \\ &= (\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1)^T \end{aligned}$$

quindi  $\mathbf{R}_{tot}$  è una matrice ortogonale; inoltre

$$\det(\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1) = \det(\mathbf{R}_2) \cdot \det(\mathbf{R}_1) = 1$$

quindi effettivamente  $\mathbf{R}_{tot}$  è una rotazione.

In generale le rotazioni *non commutano*:

$$\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1 \neq \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2$$

Ciò è dovuto al fatto che il prodotto di matrici non è commutativo — ma basta guardare l'esempio in Fig. 6.5 per rendersene conto. Solo quando 2 rotazioni sono eseguite attorno allo stesso asse, allora sono commutative.

### 6.7.2 Rotazioni infinitesime

Un caso particolare è costituito dalle rotazioni infinitesime — ovvero di un angolo infinitesimo rispetto a un dato asse. Una rotazione infinitesima è descritta da una matrice che differisce di una quantità infinitesima dalla

matrice identità  $\mathbf{1} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ :

$$\mathbf{r} = \mathbf{1} + \epsilon$$

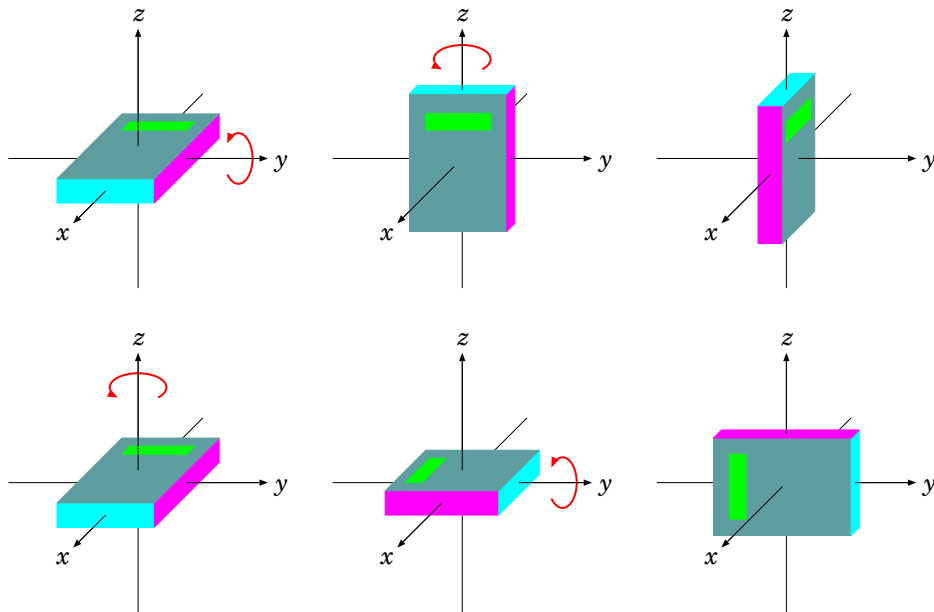


Figura 6.5: *Le rotazioni non commutano. In figura, sullo stesso parallelepipedo vengono eseguite 2 rotazioni di  $90^\circ$  attorno agli assi  $y$  e  $z$ , oppure  $z$  e  $y$ : i risultati sono evidentemente diversi.*

La condizione di ortogonalità,  $\mathbf{1} = \mathbf{r}^T \mathbf{r}$ , si traduce in:

$$\mathbf{1} = (\mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon}^T)(\mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon}) \simeq \mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon}^T + \boldsymbol{\epsilon}$$

(dove si è trascurato il termine  $\mathcal{O}(\boldsymbol{\epsilon}^2)$ ), quindi

$$\boldsymbol{\epsilon}^T = -\boldsymbol{\epsilon}$$

(la matrice  $\boldsymbol{\epsilon}$  è antisimmetrica).

La composizione di due rotazioni infinitesime è commutativa: sempre trascurando i termini  $\mathcal{O}(\boldsymbol{\epsilon}^2)$ :

$$\begin{aligned} (\mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon}_2)(\mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon}_1) &\simeq \mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon}_2 + \boldsymbol{\epsilon}_1 \\ (\mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon}_1)(\mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon}_2) &\simeq \mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon}_1 + \boldsymbol{\epsilon}_2 \end{aligned}$$

(e la somma di matrici è commutativa).

### 6.7.3 Inversioni spaziali

Una trasformazione con  $\det(\mathbf{R}) = -1$  non può essere una rotazione, o una composizione di rotazioni. D'altronde queste trasformazioni esistono:

si pensi a una che inverte solo l'asse  $\hat{e}_p$ , lasciando gli altri invariati. La corrispondente matrice sarebbe diagonale, con  $R_{pp} = -1$  e  $R_{kk} = +1 \forall k \neq p$ . Il suo determinante sarebbe  $-1$ . Inoltre, una trasformazione di questo tipo composta con una o più rotazioni avrebbe sempre determinante  $-1$ .

Nello spazio 3-dimensionale, una peculiare trasformazione che inverte i tre assi ha matrice:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= -y \\ z' &= -z \end{aligned} \quad (6.20)$$

quindi  $\det(\mathbf{P}) = -1$ . Questa trasformazione è chiamata *inversione spaziale* (o *trasformazione di parità* in fisica delle particelle e teoria dei campi).

## 6.8 Vettori e pseudo-vettori (\*)

Non tutte le quantità che si trasformano come vettori sotto rotazioni fanno lo stesso sotto inversioni spaziali. Vediamo un esempio semplice: il vettore posizione  $\vec{r}$  è un vettore per definizione: è in effetti il nostro prototipo di vettore. Quindi anche una sua variazione  $d\vec{r}$  è un vettore. Poiché le trasformazioni spaziali non alterano il flusso del tempo,  $dt$  è invariato, e la velocità  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$  è anch'essa un vettore. Ora consideriamo la velocità angolare  $\vec{\omega}$  e la relazione  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$  tipica di un moto circolare (vd Sezione 7.6.4). Essendo essa una relazione geometrica, non c'è ragione per cui essa cambi per trasformazioni spaziali. Eppure, eseguendo una inversione spaziale, le componenti di  $\vec{r}$  e  $\vec{v}$  cambiano segno (perché sono entrambi vettori), quindi le componenti di  $\vec{\omega}$  devono conservare il loro segno, cioè  $\vec{\omega}$  deve rimanere invariato.

Una quantità che si trasforma come vettore per rotazioni, ma rimane invariata per inversione spaziale, si chiama *pseudo-vettore*, o *vettore assiale*. In fisica ci sono diverse quantità di questo tipo. Nella tabella seguente elenchiamo quantità fisiche, distinguendo se sono vettori o pseudo-vettori (V o P rispettivamente) e motivando con un'equazione fisica il loro comportamento sotto inversione spaziale.

$\vec{r}$	vettore posizione	V	(per definizione)
$\vec{v}$	velocità	V	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$
$\vec{a}$	accelerazione	V	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$
$\vec{\omega}$	velocità angolare	P	$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$
$\vec{F}$	forza	V	$\vec{F} = m\vec{a}$
$\vec{p}$	quantità di moto	V	$\vec{p} = m\vec{v}$
$\vec{L}$	momento angolare	P	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
$\vec{M}$	momento torcente	P	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
$\vec{E}$	campo elettrico	V	$\vec{F} = q\vec{E}$
$\vec{B}$	campo magnetico	P	$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$
$\vec{J}$	densità di corrente	V	$\vec{J} = nq\vec{v}_D$

## 6.9 Calcolo tensoriale (\*)

In uno spazio 3-dimensionale, usiamo la convenzione di somma implicita sugli indici ripetuti, cioè

$$a_k b_k \equiv \sum_k a_k b_k$$

e introduciamo il  *tensore  $\delta$  di Kronecker  $\delta_{ij}$* , definito da:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Identità ovvie sono:

$$\delta_{ij} A_i = A_j \quad ; \quad \delta_{ij} A_i B_j = A_i B_i$$

Così come un vettore  $\vec{A}$  è un oggetto scomponibile in una tripletta  $(A_1, A_2, A_3)$  che si trasforma secondo le leggi:

$$A'_i = R_{ir} A_r$$

possiamo definire un tensore di rango  $P$  come un oggetto scomponibile in componenti a  $P$  indici:  $T_{i_1, \dots, i_P}$  che si trasforma secondo:

$$T'_{i_1, \dots, i_P} = R_{i_1 r_1} \cdots R_{i_P r_P} T_{r_1, \dots, r_P}$$

È immediato dimostrare che applicando una trasformazione ortogonale  $\mathbf{R}$  a due vettori  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  il loro prodotto scalare  $\vec{A} \cdot \vec{B}$  è invariante.

### 6.9.1 Il tensore di Levi-Civita (\*)

In uno spazio 3-dimensionale, introduciamo anche il *tensore totalmente antisimmetrico di Levi-Civita* di rango 3  $\epsilon_{ijk}$ , definito in modo che  $\epsilon_{123} = 1$  e che esso cambi segno per qualunque scambio di due dei suoi indici:

$$\epsilon_{klm} = -\epsilon_{kml} = -\epsilon_{lkm} = -\epsilon_{mlk}$$

Per questa proprietà, tale tensore è nullo se due qualunque degli indici sono uguali, ed è invariante per una permutazione ciclica dei tre indici:

$$\epsilon_{klm} = \epsilon_{lmk} = \epsilon_{mkl}$$

Le componenti cartesiane di un prodotto vettoriale possono essere scritte come:

$$(\vec{A} \times \vec{B})_k = \epsilon_{klm} A_l B_m$$

Se  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  sono due vettori, allora possiamo mostrare che  $\vec{A} \times \vec{B}$  è uno pseudo-vettore. Infatti, con un cambiamento di coordinate,  $A'_j = R_{jr} A_r$  e  $B'_k = R_{ks} B_s$ . La trasformazione è ortogonale, quindi  $R_{ip} R_{lp} = \delta_{il}$ . Allora  $\epsilon_{ijk} A'_j B'_k = \epsilon_{ijk} R_{jr} R_{ks} A_r B_s = (R_{ip} R_{lp}) \epsilon_{ljk} R_{jr} R_{ks} A_r B_s = R_{ip} \epsilon_{ljk} R_{lp} R_{jr} R_{ks} A_r B_s$ . Mostriamo che  $\epsilon_{ljk} R_{lp} R_{jr} R_{ks} = \det(\mathbf{R}) \epsilon_{prs}$ : entrambe le espressioni sono totalmente antisimmetriche nei tre indici  $p, r, s$ , e per  $(p, r, s) = (1, 2, 3)$  la prima è proprio  $\det(\mathbf{R})$ . Quindi abbiamo trovato che

$$(\vec{A} \times \vec{B})'_i = \epsilon_{ijk} A'_j B'_k = \det(\mathbf{R}) R_{ip} \epsilon_{prs} A_r B_s = \det(\mathbf{R}) R_{ip} (\vec{A} \times \vec{B})_p$$

Per rotazioni,  $\det(\mathbf{R}) = +1$  e abbiamo ottenuto che la quantità  $\vec{A} \times \vec{B}$  si trasforma come un vettore.

Per inversioni spaziali, il termine  $\det(\mathbf{R}) = -1$  produce un cambiamento di segno di tutte le 3 componenti.

Un'identità molto utile è <sup>[4]</sup>:

$$\epsilon_{klm} \epsilon_{krs} = \delta_{lr} \delta_{ms} - \delta_{ls} \delta_{mr}$$

**Esercizio 6.1.** Come esercizio, si provi ad usare questi strumenti di calcolo per mostrare le identità (b) e (c) delle Eq. (6.15).

**Dimostrazione di  $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$ .**

<sup>4</sup> Dimostrazione. Per avere valori non nulli nel membro sinistro,  $k, l, m$  devono essere tutti diversi; stessa cosa per  $k, r, s$ . Siccome i valori possibili sono in  $\{1, 2, 3\}$ , fissare  $l, m$  e  $r, s$  automaticamente fissa il valore di  $k$ . Gli unici casi non nulli sono  $(l, m) = (r, s)$  e  $(l, m) = (s, r)$ . Nel primo caso  $\epsilon_{klm} = \epsilon_{krs}$ , quindi  $\epsilon_{klm} \epsilon_{krs} = 1$ ; d'altra parte  $\delta_{lr} \delta_{ms} = 1$  e  $\delta_{ls} \delta_{mr} = 0$ . Nel secondo caso invece  $\epsilon_{klm} = \epsilon_{ksr} = -\epsilon_{krs}$ , quindi  $\epsilon_{klm} \epsilon_{krs} = -1$ ; ma  $\delta_{lr} \delta_{ms} = 0$  e  $\delta_{ls} \delta_{mr} = 1$ .

Si sfrutta la ciclicità  $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij}$ :

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= A_i (\vec{B} \times \vec{C})_i = A_i (\epsilon_{ijk} B_j C_k) = \epsilon_{ijk} A_i B_j C_k \\ &= \epsilon_{jki} A_i B_j C_k = B_j (\epsilon_{jki} C_k A_i) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})\end{aligned}$$

**Dimostrazione di  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ .**

Si sfrutta l'identità  $\epsilon_{klm}\epsilon_{krs} = \delta_{lr}\delta_{ms} - \delta_{ls}\delta_{mr}$ :

$$\begin{aligned}(\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}))_l &= \epsilon_{lmk} A_m (\vec{B} \times \vec{C})_k = \epsilon_{lmk} A_l \epsilon_{krs} B_r C_s \\ &= \epsilon_{lmk} \epsilon_{krs} A_m B_r C_s \\ &= (\delta_{lr}\delta_{ms} - \delta_{ls}\delta_{mr}) A_m B_r C_s \\ &= \delta_{lr}\delta_{ms} A_m B_r C_s - \delta_{ls}\delta_{mr} A_m B_r C_s \\ &= B_l (A_m C_m) - C_s (A_m B_m) \\ &= (\vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}))_l\end{aligned}$$

## 6.10 Digressione: a che ora sorge e tramonta il Sole? (\*)

(Esercizio educativo di matematica vettoriale)

La Terra ha un asse di rotazione inclinato: precisamente, esso forma un angolo  $\theta = 23.5^\circ$  rispetto alla perpendicolare al piano orbitale (vd Fig. 6.6). Questo causa l'alternarsi della stagioni, e in particolare il fatto che gli orari dell'alba e del tramonto del Sole cambiano durante l'anno, e in generale dipendono dalla latitudine  $\lambda$ . In estate, il giorno dura di più della notte, quindi c'è una maggiore esposizione alla radiazione solare, ... e fa più caldo. La posizione della Terra in cui il periodo di luce (giorno) è massimo si chiama *solstizio di estate*, quando invece il periodo di buio (notte) è massimo siamo nel *solstizio di inverno* — ovviamente se nell'emisfero Nord è estate, nell'emisfero Sud è inverno, e viceversa. Le posizioni in cui giorno e notte hanno la stessa durata si chiamano *equinozi*.

Per impostare il problema, adottiamo un sistema di riferimento con assi  $(x, y, z)$  in cui  $(x, y)$  giacciono sul piano orbitale, e parametrizziamo la posizione della Terra con un angolo  $\phi$  rispetto alla posizione del solstizio di estate per l'emisfero Nord — vd Fig. 6.6 (a). Il versore che, dalla Terra, punta verso il Sole, è:

$$\hat{\mathbf{u}} \equiv \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

6.10. DIGRESSIONE: A CHE ORA SORGE E TRAMONTA IL SOLE? (\*)127

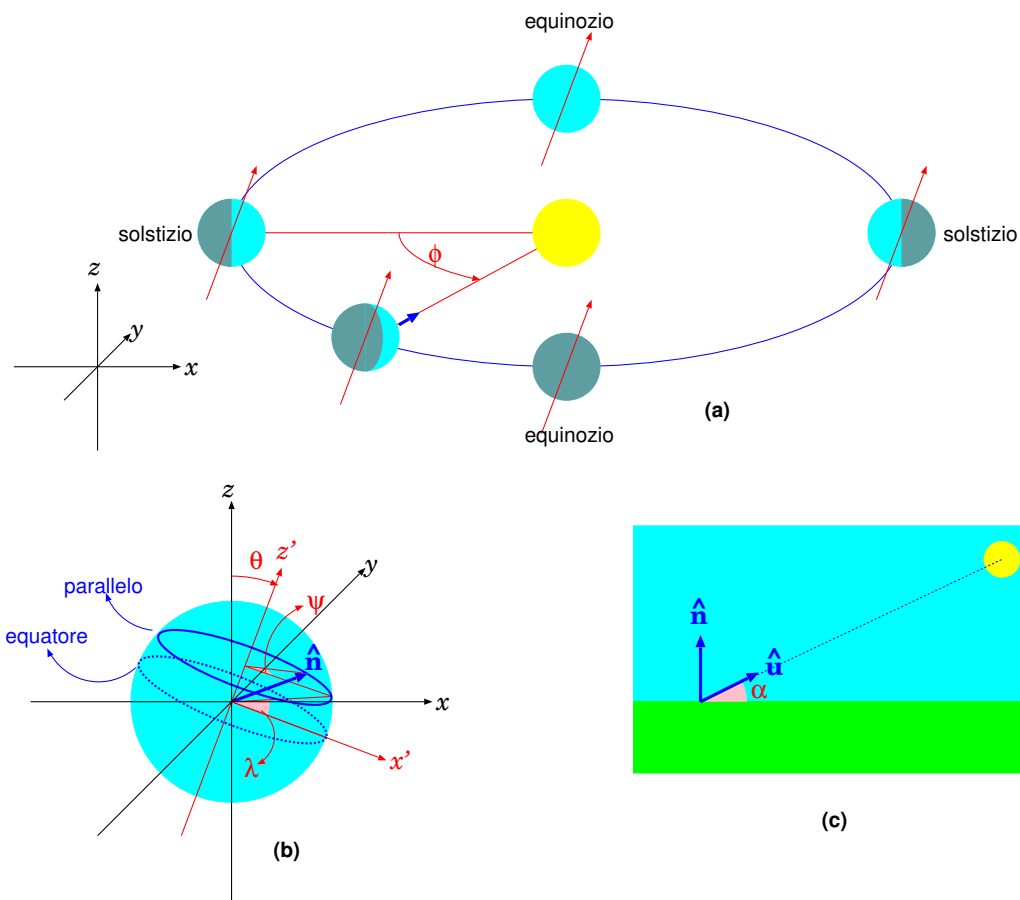


Figura 6.6: ...

Ora parametrizziamo un generico parallelo, a latitudine  $\lambda$ . Qui conviene adottare un altro sistema di riferimento con assi  $(x', y, z')$  — l'asse  $y$  è comune, mentre gli assi  $(x', z')$  sono ruotati di un angolo  $\theta$  rispetto agli assi  $(x, z)$ , come in Fig. 6.6 (b). Un generico parallelo a latitudine  $\lambda$  è parametrizzato così:

$$\left. \begin{aligned} x' &= R \cos \lambda \cos \psi \\ y &= R \cos \lambda \sin \psi \\ z' &= R \sin \lambda \end{aligned} \right\} \quad (\text{parallelo a latitudine } \lambda)$$

essendo  $R$  il raggio della Terra. Per portarci alle coordinate  $(x, y, z)$  occorre eseguire una rotazione di un angolo  $\theta$ . Per semplicità poniamo:

$$C = \cos \theta \quad ; \quad S = \sin \theta$$

quindi <sup>[5]</sup>:

$$\begin{aligned}x &= C x' + S z' \\z &= -S x' + C z'\end{aligned}$$

e il parallelo a latitudine  $\lambda$  si parametrizza con

$$\left. \begin{aligned}x &= R (C \cos \lambda \cos \psi + S \sin \lambda) \\y &= R \cos \lambda \sin \psi \\z &= R (C \sin \lambda - S \cos \lambda \cos \psi)\end{aligned} \right\} \quad (\text{parallelo a latitudine } \lambda)$$

Il versore  $\hat{\mathbf{n}}$  che punta allo zenith (verticale, in alto) si ottiene semplicemente dividendo per  $R$ :

$$\hat{\mathbf{n}} \equiv \begin{pmatrix} C \cos \lambda \cos \psi + S \sin \lambda \\ \cos \lambda \sin \psi \\ C \sin \lambda - S \cos \lambda \cos \psi \end{pmatrix}$$

Per sapere se è giorno o notte, basta calcolare  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{u}}$ :

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{u}} \quad \begin{cases} > 0 & \text{Sole sopra l'orizzonte} \implies \text{giorno} \\ = 0 & \text{Sole all'orizzonte} \implies \text{alba/tramonto} \\ < 0 & \text{Sole sotto l'orizzonte} \implies \text{notte} \end{cases}$$

Bene, da quanto detto, e facendo il prodotto scalare per componenti cartesiane:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{u}} = \cos \phi (C \cos \lambda \cos \psi + S \sin \lambda) + \sin \phi \cos \lambda \sin \psi$$

Si chiama *elevazione* del Sole,  $\alpha$ , l'angolo formato dal Sole con l'orizzonte. Dalla Fig. 6.6 (c) vediamo che  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{u}} = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ , ovvero

$$\sin \alpha = \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{u}}$$

In generale,  $\alpha$  dipende dalla latitudine  $\lambda$ , dal momento dell'anno (che abbiamo parametrizzato con  $\phi$ ) e dalla posizione sul parallelo, indicata da  $\psi$ .

La posizione  $\psi_{1/2}$  tale che  $\alpha$  è massimo si chiama *mezzogiorno locale*: se in quel punto  $\alpha > 0$  vuol dire che esiste un giorno. Analogamente, la posizione  $\psi_0$  tale che  $\alpha$  è minimo si chiama *mezzanotte locale*: se in quel punto  $\alpha < 0$  vuol dire che esiste una notte. Abbiamo 3 possibilità:

<sup>5</sup> per non sbagliare sul segno di  $S$  si suggerisce di considerare due punti,  $(x', 0)$  e  $(0, z')$  e immaginarsi le loro coordinate negli assi  $(x, z)$



6.10. DIGRESSIONE: A CHE ORA SORGE E TRAMONTA IL SOLE? (\*)129

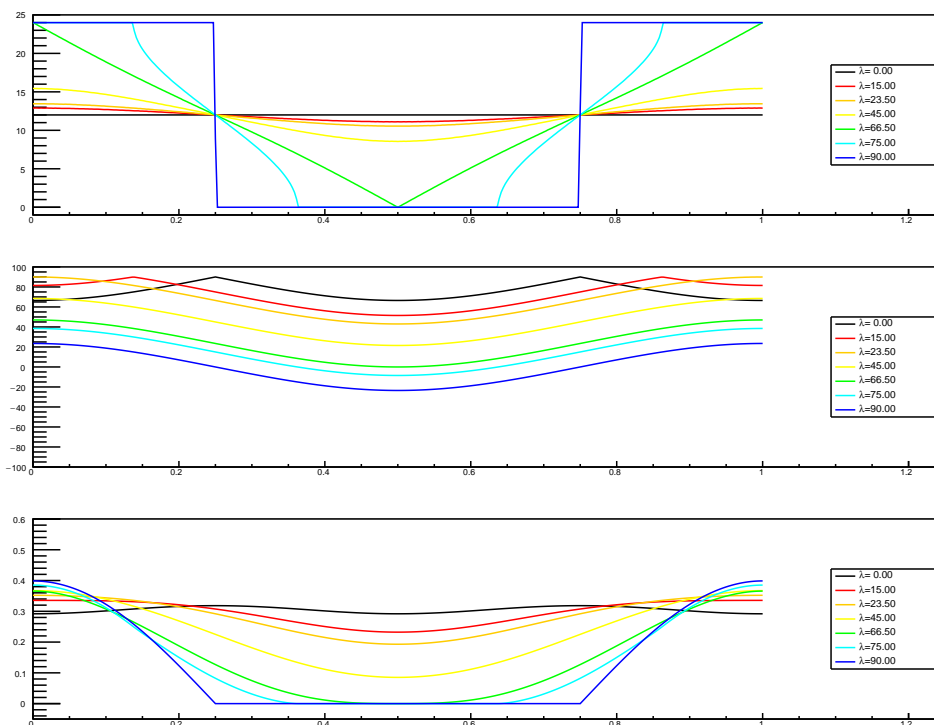


Figura 6.7: *In alto: durata del giorno (in ore). Al centro: elevazione massima del Sole a mezzogiorno (in gradi). In basso: insolazione giornaliera (frazione dell'insolazione massima). In tutte le figure l'asse orizzontale esprime il giorno come frazione di anno: 0 = solstizio di estate, 0.25 = equinozio di autunno, 0.5 = solstizio di inverno, 0.75 = equinozio di primavera. I diversi colori rappresentano diverse latitudini.*

- $\alpha(\psi_0) < 0 < \alpha(\psi_{1/2})$  : esiste l'alternanza giorno-notte. Ha quindi senso cercare due posizioni  $\psi_+$ ,  $\psi_-$  corrispondenti all'alba e al tramonto. Queste possono essere tradotte anche in orari: definendo le ore 12 corrispondenti al mezzogiorno,

$$t_{alba} = 12 \text{ h} - \frac{24 \text{ h}}{2\pi \text{ rad}} \cdot (\psi_{1/2} - \psi_+)$$

$$t_{tramonto} = 12 \text{ h} + \frac{24 \text{ h}}{2\pi \text{ rad}} \cdot (\psi_- - \psi_{1/2})$$

- $0 < \alpha(\psi_0) < \alpha(\psi_{1/2})$  : è sempre giorno, il Sole non tramonta mai.
- $\alpha(\psi_0) < \alpha(\psi_{1/2}) < 0$  : è sempre notte, il Sole non sorge mai.

Per tornare al problema iniziale (quando albeggia, e quando tramonta), potremmo procedere così: fissati  $\theta$  e  $\lambda$ , anzitutto cerchiamo  $\psi_{1/2}$ , ovvero il “mezzogiorno locale”. Anziché cercare una soluzione analitica, si può lavorare al computer, facendo una scansione di  $\psi \in [0, 2\pi]$  a piccoli passi — per esempio a passi di un minuto: in tal caso l’angolo giro viene diviso in  $\frac{24 \text{ h}}{1 \text{ min}} = 1440$  parti, quindi  $\Delta\psi = \frac{2\pi}{1440}$ . Si cerca il valore di  $\psi$  in cui  $\alpha(\psi)$  è massimo: questo definisce  $\psi_{1/2}$ . Nella stessa scansione si possono cercare (se esistono) i valori di  $\psi$  in cui  $\alpha(\psi)$  cambia di segno: se  $\alpha(\psi)$  è crescente, abbiamo l’alba ( $\psi_+$ ), mentre se  $\alpha(\psi)$  è decrescente, abbiamo il tramonto ( $\psi_-$ ).

La durata del giorno, a diverse latitudini, è rappresentata in Fig. 6.7 (alto). Analogamente, l’elevazione del Sole al mezzogiorno locale è raffigurata in Fig. 6.7 (centro).

Si può anche calcolare l’insolazione media al giorno. L’insolazione massima si avrebbe per  $\hat{\mathbf{u}} \parallel \hat{\mathbf{n}}$ , ovvero quando il Sole è allo zenith: ciò accade per esempio sul Tropico, al solstizio di estate, oppure sull’Equatore, negli equinozi, in entrambi i casi al mezzogiorno locale. L’insolazione istantanea è direttamente proporzionale a  $\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sin \alpha$ , e cambia durante le ore del giorno (di notte invece  $\alpha < 0$  e l’insolazione è nulla). Il grafico dell’insolazione giornaliera media è in Fig. 6.7 (basso). Si vede che nella zona tropicale ( $|\lambda| < 23.5^\circ$ ) l’insolazione durante l’anno cambia poco, mentre nelle zone polari ( $|\lambda| > 66.5^\circ$ ) ci sono grosse variazioni fra estate e inverno, e la media annuale è decisamente più bassa (ragion per cui ai poli fa più freddo che ai tropici...)

# Capitolo 7

## Cinematica

In questo capitolo estenderemo i concetti della cinematica — velocità ed accelerazione, nonché le loro relazioni — al moto nello spazio tridimensionale. Anche qui analizzeremo moti di oggetti che possono essere considerati puntiformi, ovvero tali per cui il loro stato sia definito solo dalla posizione: più precisamente dal *raggio vettore*, o *vettore posizione*, introdotto nel Capitolo 4.

Vale la pena notare che la cinematica è solo descrittiva: definisce i concetti necessari alla descrizione del moto (traiettoria, legge oraria, velocità, accelerazione), ma non indaga le cause del moto. Esse vengono trattate dalla *dinamica*, introdotta nel Capitolo 8 e sviluppata nei capitoli successivi.

### 7.1 Traiettoria e legge oraria

Il moto di un oggetto puntiforme nello spazio tridimensionale è descritto da un vettore posizione  $\vec{r}$  che cambia in funzione del tempo:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \tag{7.1}$$

(vd Fig. 7.1). L'insieme dei punti  $\vec{r}$  occupati dall'oggetto nel suo movimento si chiama *traiettoria*. La relazione fra posizione e tempo, espressa dall'Eq. (7.1), si chiama invece *legge oraria*.

È utile introdurre il *versore tangente alla traiettoria*,  $\hat{t}$ : il suo orientamento definisce anche l'orientamento convenzionale della traiettoria <sup>[1]</sup>.

---

<sup>1</sup> La forma della traiettoria in generale è determinata dalle condizioni nelle quali il punto

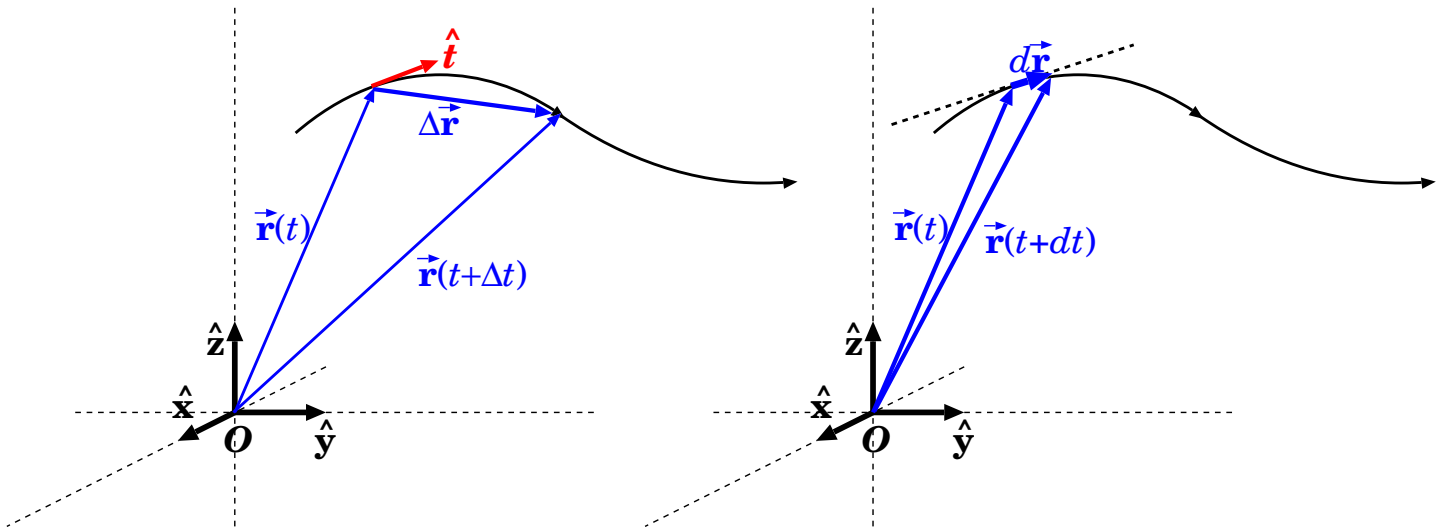


Figura 7.1: Traiettorie e legge oraria  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  di un oggetto puntiforme. A sinistra: le posizioni  $\vec{r}(t)$  e  $\vec{r}(t + \Delta t)$  in due diversi istanti, separati dal tempo  $\Delta t$ : il vettore-spostamento  $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$  è una corda che congiunge i due punti sulla traiettoria. A destra: nel limite  $\Delta t \rightarrow 0$  lo spostamento infinitesimo  $d\vec{r}$  è tangente alla traiettoria.

### 7.1.1 Spostamenti lungo la traiettoria

In un intervallo di tempo  $\Delta t$  l'oggetto si sposta dalla posizione  $\vec{r}(t)$  alla posizione  $\vec{r}(t + \Delta t)$ , compiendo uno spostamento

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) \quad (7.2)$$

che graficamente si può rappresentare come una *corda* congiungente due punti sulla traiettoria, come in Fig. 7.1 (sinistra). Per tempi  $\Delta t$  sempre più piccoli, tale corda si avvicina sempre più alla traiettoria, tendendo alla retta tangente alla traiettoria stessa. Nel limite  $\Delta t \rightarrow 0$  lo spostamento infinitesimo  $d\vec{r}$  è dunque *tangente* alla traiettoria, come raffigurato in Fig. 7.1 (destra). Come già detto in precedenza, mentre una variazione di una quantità viene indicata con  $\Delta$ , una variazione infinitesima viene indicata con  $d$ .

Nel Capitolo 2 avevamo considerato moti lungo una curva predefinita, indicando con la quantità  $ds$  lo spostamento infinitesimo. Ora vediamo che  $ds$  e  $d\vec{r}$  sono legati dalla relazione:

$$d\vec{r} = ds \hat{t} \quad (7.3)$$

materiale si muove. Tuttavia, in molti casi il verso della percorrenza della traiettoria può essere invertito: si pensi ad un carrello su una rotaia, o al moto di un pianeta intorno al Sole.

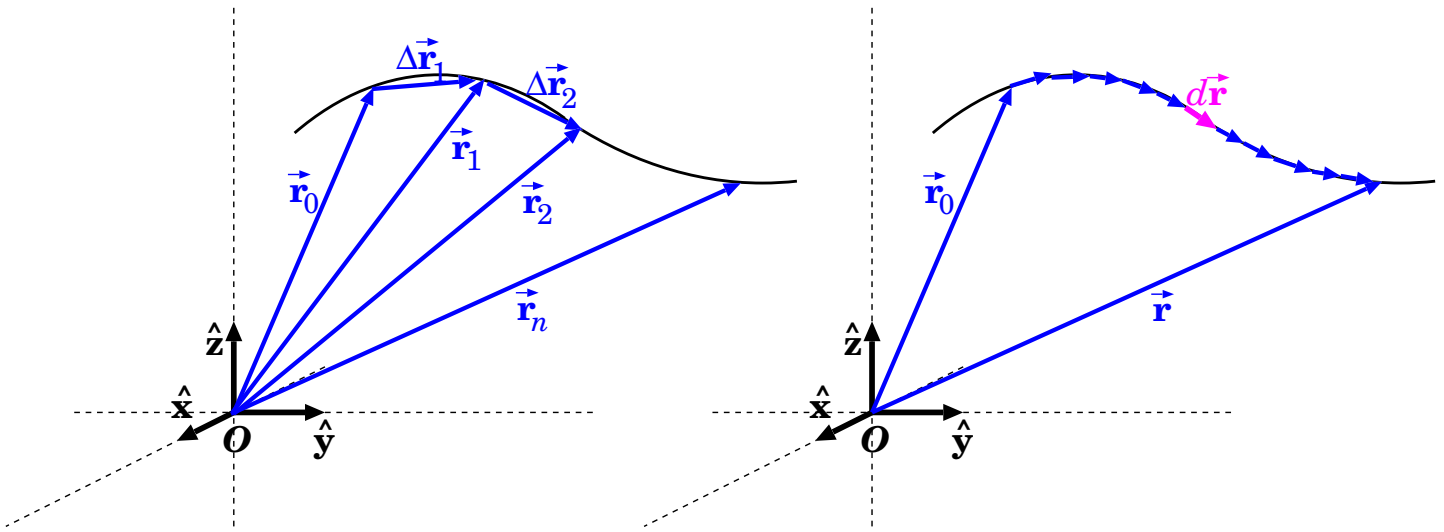


Figura 7.2: *Spostamento finito come successione di spostamenti più piccoli (a sinistra) e di spostamenti infinitesimi (a destra).*

Si noti che  $ds$  può essere  $> 0$  o  $< 0$ , a seconda che lo spostamento  $d\vec{r}$  sia concorde o discorde rispetto a  $\hat{t}$  <sup>[2]</sup>.

### 7.1.2 Successione di spostamenti infinitesimi

Uno spostamento lungo la traiettoria può essere sempre scomposto in una successione di spostamenti più piccoli.

Nella Fig. 7.2, a sinistra, un oggetto si sposta dalla posizione iniziale  $\vec{r}_0$  alla posizione finale  $\vec{r}_n$ , attraverso una successione  $\Delta\vec{r}_1, \Delta\vec{r}_2, \dots, \Delta\vec{r}_n$  di spostamenti più piccoli. Ciascuno produce un cambiamento di posizione:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{r}_0 + \Delta\vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 &= \vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2 \\ \vec{r}_3 &= \vec{r}_2 + \Delta\vec{r}_3 \\ &\vdots \\ \vec{r}_{n-1} &= \vec{r}_{n-2} + \Delta\vec{r}_{n-1} \\ \vec{r}_n &= \vec{r}_{n-1} + \Delta\vec{r}_n\end{aligned}$$

Concatenando tutte queste relazioni si ottiene

$$\vec{r}_n = \vec{r}_0 + \sum_{i=1}^n \Delta\vec{r}_i$$

<sup>2</sup> Si noti anche che sarebbe stato sbagliato scrivere  $d\vec{r} = dr \hat{t}$ : infatti  $r = |\vec{r}|$ , quindi  $dr = d|\vec{r}|$ , e  $d|\vec{r}| \neq |d\vec{r}|$ !

Aumentando il numero  $n$  di spostamenti, ciascuno di essi può essere reso sempre più piccolo, al limite infinitesimo:  $\Delta\vec{r}_i \rightarrow d\vec{r}$ . Contemporaneamente, il numero di elementi della somma diventa infinito:  $n \rightarrow +\infty$ . Questa situazione è rappresentata in Fig. 7.2 a destra: gli spostamenti infinitesimi  $d\vec{r}$  giacciono tutti sulla traiettoria. Come abbiamo già visto, nel caso limite di una somma di infiniti termini infinitesimi, si usa il simbolo di *integrale*:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int d\vec{r} \quad (7.4)$$

## 7.2 Velocità

Se un oggetto puntiforme, in un tempo  $\Delta t$ , si sposta dalla posizione  $\vec{r}(t)$  alla posizione  $\vec{r}(t + \Delta t)$ , compie uno spostamento:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) \quad (7.5)$$

come raffigurato in Fig. 7.1 (sinistra). Come fatto nel caso unidimensionale, si definisce la *velocità vettoriale* come rapporto fra  $\Delta\vec{r}$  e  $\Delta t$ , nel limite  $\Delta t \rightarrow 0$ .

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \quad (7.6)$$

ovvero si considera lo spostamento infinitesimo  $d\vec{r}$  che avviene in un tempo infinitesimo  $dt$ . Poiché lo spostamento infinitesimo  $d\vec{r}$  è tangente alla traiettoria (vd Fig. 7.1 (destra)), anche la velocità  $\vec{v}$  lo è.

Anche la velocità si può scomporre in componenti cartesiane:

$$\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z} \quad (7.7)$$

Poiché i vettori si sommano e si sottraggono per componenti, l'Eq. (7.6) è equivalente alle equazioni:

$$\begin{aligned} v_x &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt} \\ v_y &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = \frac{dy(t)}{dt} \\ v_z &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} = \frac{dz(t)}{dt} \end{aligned} \quad (7.8)$$

### 7.2.1 Spostamento come integrale della velocità

Abbiamo visto in Sezione 7.1.2 e in Fig. 7.2 che uno spostamento  $\Delta\vec{r}$  può essere scomposto in una successione di spostamenti infinitesimi, Eq. (7.4):

$$\Delta\vec{r} = \int d\vec{r}$$

Dalla definizione di velocità, Eq. (7.6), possiamo esprimere lo spostamento infinitesimo all'istante  $t$  come

$$d\vec{r} = \vec{v}(t)dt \quad (7.9)$$

Pertanto lo spostamento finito può essere scritto:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \int_{t_0}^t dt' \vec{v}(t') \quad (7.10)$$

oppure in coordinate cartesiane:

$$\begin{aligned} \Delta x &= x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t dt' v_x(t') \\ \Delta y &= y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^t dt' v_y(t') \\ \Delta z &= z(t) - z(t_0) = \int_{t_0}^t dt' v_z(t') \end{aligned} \quad (7.11)$$

Notiamo che per calcolare la posizione finale  $\vec{r}(t)$  è necessario conoscere la posizione all'istante iniziale  $\vec{r}(t_0)$ , oltre la velocità  $\vec{v}(t')$  per tutti gli istanti  $t' \in [t_0; t]$ .

### 7.2.2 Velocità scalare

Si può definire anche la *velocità scalare*, come limite del rapporto fra lo spostamento  $ds$  lungo la traiettoria e il tempo  $dt$  impiegato a percorrerlo:

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (7.12)$$

esattamente come fatto nel Capitolo 2. Essendo  $d\vec{r} = ds \hat{\mathbf{t}}$  — vd Eq. (7.3) — troviamo  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds \hat{\mathbf{t}}}{dt} = \frac{ds}{dt} \hat{\mathbf{t}} = v \hat{\mathbf{t}}$  e quindi:

$$\vec{v} = v \hat{\mathbf{t}} \quad (7.13)$$

Vale la pena notare che  $v$  può essere  $> 0$  o  $< 0$ , a seconda che lo spostamento  $d\vec{r}$  — o la velocità vettoriale  $\vec{v}$  — sia concorde o discorde rispetto a  $\hat{t}$ . In particolare,  $v \neq |\vec{v}|$ , ma  $|v| = |\vec{v}|$ .

## 7.3 Accelerazione

In maniera del tutto analoga si definisce l'*accelerazione vettoriale*, come il rapporto fra la variazione di velocità  $\Delta\vec{v}$  e il tempo  $\Delta t$  in cui essa ha luogo, nel limite  $\Delta t \rightarrow 0$ . Scritto in forma vettoriale:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \quad (7.14)$$

Come fatto per la velocità, anche l'accelerazione può essere scritta per componenti cartesiane:

$$\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z} \quad (7.15)$$

L'Eq. (7.14) è equivalente alle 3 equazioni per componenti cartesiane:

$$\begin{aligned} a_x &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_x(t + \Delta t) - v_x(t)}{\Delta t} = \frac{dv_x(t)}{dt} \\ a_y &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_y(t + \Delta t) - v_y(t)}{\Delta t} = \frac{dv_y(t)}{dt} \\ a_z &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_z(t + \Delta t) - v_z(t)}{\Delta t} = \frac{dv_z(t)}{dt} \end{aligned} \quad (7.16)$$

### 7.3.1 Variazione di velocità come integrale dell'accelerazione

In presenza di accelerazione, la velocità subisce variazioni. Dalla definizione di accelerazione, Eq. (7.14), possiamo esprimere la variazione infinitesima di velocità all'istante  $t$  come

$$d\vec{v} = \vec{a}(t)dt \quad (7.17)$$

Quanto varia la velocità, da un istante  $t_0$  ad un istante  $t$ ? Il ragionamento è del tutto analogo a quanto fatto per velocità e spostamenti. Avevamo visto che

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \quad \implies \quad \Delta\vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \int_{t_0}^t dt' \vec{v}(t')$$



Essendo  $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$  identico, formalmente, a  $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ , deve valere una regola di integrazione analoga, con la sostituzione  $(\vec{r}, \vec{v}) \rightarrow (\vec{v}, \vec{a})$ , ovvero:

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t) - \vec{v}(t_0) = \int_{t_0}^t dt' \vec{a}(t') \quad (7.18)$$

oppure in coordinate cartesiane:

$$\begin{aligned} \Delta v_x &= v_x(t) - v_x(t_0) = \int_{t_0}^t dt' a_x(t') \\ \Delta v_y &= v_y(t) - v_y(t_0) = \int_{t_0}^t dt' a_y(t') \\ \Delta v_z &= v_z(t) - v_z(t_0) = \int_{t_0}^t dt' a_z(t') \end{aligned} \quad (7.19)$$

Notiamo che per calcolare la velocità finale  $\vec{v}(t)$  è necessario conoscere la velocità all'istante iniziale  $\vec{v}(t_0)$ , oltre l'accelerazione  $\vec{a}(t')$  per tutti gli istanti  $t' \in [t_0; t]$ .

## 7.4 Moto rettilineo uniforme

Il primo esempio di moto particolare che consideriamo è quello con accelerazione nulla:

$$\vec{a} = 0$$

È ovviamente un caso *molto particolare*. Tuttavia vedremo che rappresenta un caso fisico ben preciso: quello di un oggetto che *non è soggetto a interazioni con l'ambiente circostante*.

La prima considerazione è che la velocità vettoriale deve essere costante:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \quad \implies \quad \vec{v} = \text{costante}$$

La legge oraria si ottiene integrando la velocità nel tempo (vd Eq. (7.10) oppure Eq. (7.11)):

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^t dt' \vec{v}(t') = \vec{r}(t_0) + \vec{v} \int_{t_0}^t dt'$$

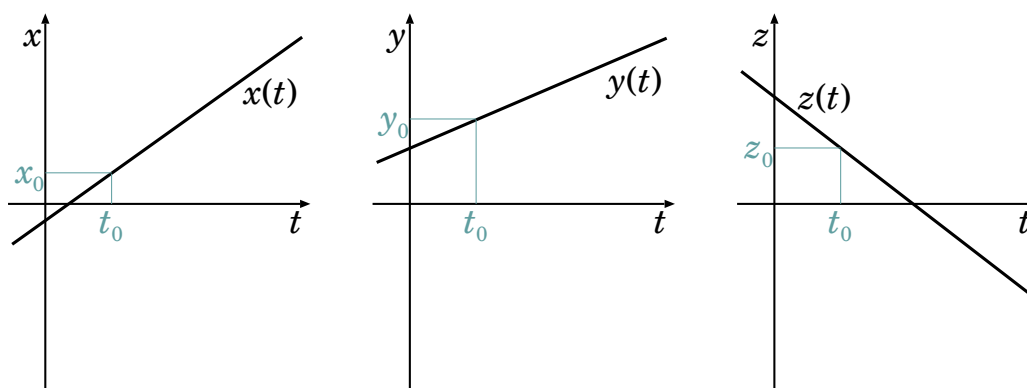


Figura 7.3: *Grafici della legge oraria del moto rettilineo uniforme, per le tre coordinate cartesiane  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ . La posizione  $(x_0, y_0, z_0)$  è occupata all'istante  $t = t_0$ . La pendenza delle rette nei tre grafici dipende dalle tre componenti cartesiane della velocità: i coefficienti angolari delle tre rette sono rispettivamente  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$ . Nell'esempio di questa figura,  $v_x$  e  $v_y$  sono positive — cioè  $x, y$  crescono nel tempo — e  $v_x > v_y$ . Invece  $v_z$  è negativa, cioè  $z$  decresce nel tempo.*

(essendo  $\vec{v}$  costante, può essere fattorizzato al di fuori dell'integrale). Ovviamente  $\int_{t_0}^t dt' = (t - t_0)$ , pertanto la legge oraria del moto è semplicemente data da:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + (t - t_0) \cdot \vec{v} \quad (\text{moto rettilineo uniforme}) \quad (7.20)$$

oppure in coordinate cartesiane:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + (t - t_0) \cdot v_x \\ y(t) &= y_0 + (t - t_0) \cdot v_y \\ z(t) &= z_0 + (t - t_0) \cdot v_z \end{aligned} \quad (\text{moto rettilineo uniforme}) \quad (7.21)$$

La rappresentazione grafica della legge oraria del moto rettilineo uniforme, per le tre componenti cartesiane, appare come nella Fig. 7.3.

Le Eq. (7.21) sono equazioni parametriche di una retta: infatti per valori arbitrari di  $\Delta t$ , i rapporti  $\Delta x/\Delta y$ ,  $\Delta x/\Delta z$ ,  $\Delta z/\Delta y$  restano costanti, ovvero la traiettoria non subisce variazioni di direzione.

Per riassumere, abbiamo trovato che *un oggetto puntiforme non soggetto*

ad accelerazioni si muove lungo una traiettoria rettilinea, con velocità  $v = |\vec{v}|$  costante — da cui il nome di *moto rettilineo uniforme*.

## 7.5 Moto uniformemente accelerato

Il secondo esempio di moto particolare che consideriamo è quello con accelerazione costante:

$$\vec{a} = \text{costante}$$

Anche questo è un caso molto particolare. Tuttavia anch'esso presenta molte applicazioni. Fra queste, ricordiamo per esempio i moti soggetti alla gravità in prossimità della superficie terrestre.

### 7.5.1 Integrazione del moto

Affrontiamo l'integrazione del moto. L'Eq. (7.14):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

oppure le Eq. (7.16):

$$a_x = \frac{dv_x(t)}{dt} \quad ; \quad a_y = \frac{dv_y(t)}{dt} \quad ; \quad a_z = \frac{dv_z(t)}{dt}$$

ci dicono come cambia la velocità nel tempo. Dalle formule della Sezione 3.3 sappiamo che l'integrale di una funzione costante è una funzione lineare,  $\int a dt = at$ , pertanto:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + (t - t_0) \cdot \vec{a} \quad (7.22)$$

(moto uniformemente accelerato)

oppure in coordinate cartesiane:

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_{x,0} + (t - t_0) \cdot a_x \\ v_y(t) &= v_{y,0} + (t - t_0) \cdot a_y \\ v_z(t) &= v_{z,0} + (t - t_0) \cdot a_z \end{aligned} \quad (7.23)$$

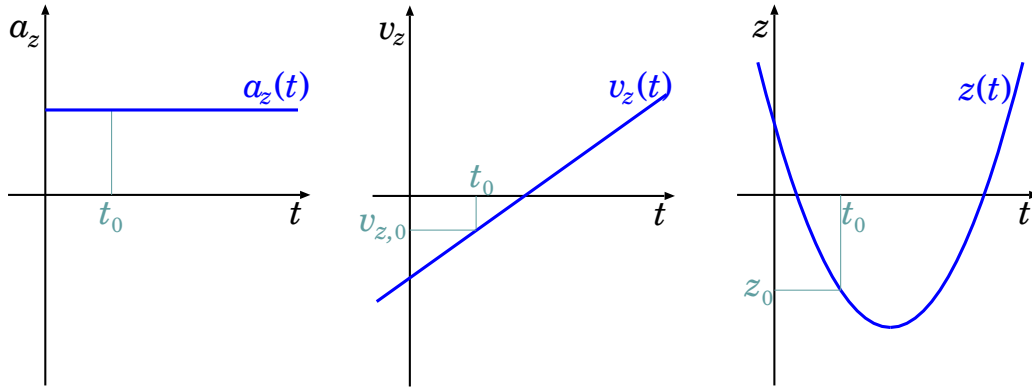


Figura 7.4: Grafici dell'evoluzione temporale dell'accelerazione (a sinistra), della velocità (al centro) e della posizione (a destra) di un moto uniformemente accelerato. In figura è rappresentata la coordinata  $z$ ; grafici analoghi valgono per  $x, y$ . L'accelerazione in questo esempio è positiva: quindi la velocità cresce linearmente nel tempo, e la posizione ha un andamento parabolico con la concavità verso l'alto.

La legge oraria del moto si ottiene *integrando* le Eq. (7.22), oppure Eq. (7.23). Usando le regole della Sezione 3.3:  $\int dt (v + at) = vt + \frac{1}{2}at^2$ . Si ricava che la legge oraria è:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + (t - t_0) \cdot \vec{v}_0 + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot (t - t_0)^2 \quad (7.24)$$

(moto uniformemente accelerato)

oppure in coordinate cartesiane:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + (t - t_0) \cdot v_{x,0} + \frac{1}{2} a_x \cdot (t - t_0)^2 \\ y(t) &= y_0 + (t - t_0) \cdot v_{y,0} + \frac{1}{2} a_y \cdot (t - t_0)^2 \\ z(t) &= z_0 + (t - t_0) \cdot v_{z,0} + \frac{1}{2} a_z \cdot (t - t_0)^2 \end{aligned} \quad (7.25)$$

La rappresentazione grafica della legge oraria del moto uniformemente accelerato, per la componente cartesiana  $z$ , appare come nella Fig. 7.4.

### 7.5.2 Traiettoria

Per capire la forma della traiettoria, conviene orientare gli assi cartesiani in modo che  $\hat{z}$  sia parallelo a  $\vec{a}$ , in tal caso:

$$a_x = a_y = 0 \quad ; \quad a_z \equiv a$$

e le componenti della velocità lungo  $x, y$  sono costanti:  $v_x = v_{x,0}$  e  $v_y = v_{y,0}$ . Possiamo inoltre scegliere  $\hat{y}$  ortogonale alla velocità iniziale  $\vec{v}_0$ , cosicché:

$$v_y = 0$$

La legge oraria in coordinate cartesiane diventa quindi:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + t \cdot v_{x,0} \\ y(t) &= y_0 \\ z(t) &= z_0 + t \cdot v_{z,0} + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \end{aligned}$$

(per semplicità di calcolo abbiamo assunto  $t_0 = 0$ ). Il grafico della legge oraria, per le tre coordinate, è illustrato in Fig. 7.5.

Abbiamo quindi due casi:

- La velocità iniziale  $\vec{v}_0$  è nulla, oppure parallela all'accelerazione  $\vec{a}$ . In tal caso, anche  $v_{x,0} = 0$ ; l'oggetto si muove solo lungo  $\hat{z}$ , cioè è un moto rettilineo: si chiama *moto rettilineo uniformemente accelerato*. Esso è caratterizzato da:

$$\begin{aligned} z(t) &= z_0 + v_{z,0}t + \frac{a}{2}t^2 \\ v_z(t) &= v_{z,0} + at \end{aligned}$$

- La velocità iniziale  $\vec{v}_0$  ha una componente ortogonale all'accelerazione  $\vec{a}$ . Allora  $v_x = v_{x,0} \neq 0$ ; si può ricavare  $t = \frac{x - x_0}{v_{x,0}}$  dalla 1<sup>a</sup> equazione e sostituirlo nella 3<sup>a</sup>, ottenendo:

$$z = z_0 + v_{z,0} \left( \frac{x - x_0}{v_{x,0}} \right) + \frac{a}{2} \left( \frac{x - x_0}{v_{x,0}} \right)^2$$

Allora  $z$  ha una dipendenza quadratica da  $x$ , quindi la traiettoria è una parabola con l'asse parallelo a  $\hat{z}$ . La concavità della parabola è rivolta verso  $+\hat{z}$  o  $-\hat{z}$  a seconda che sia  $a > 0$  o  $a < 0$ .

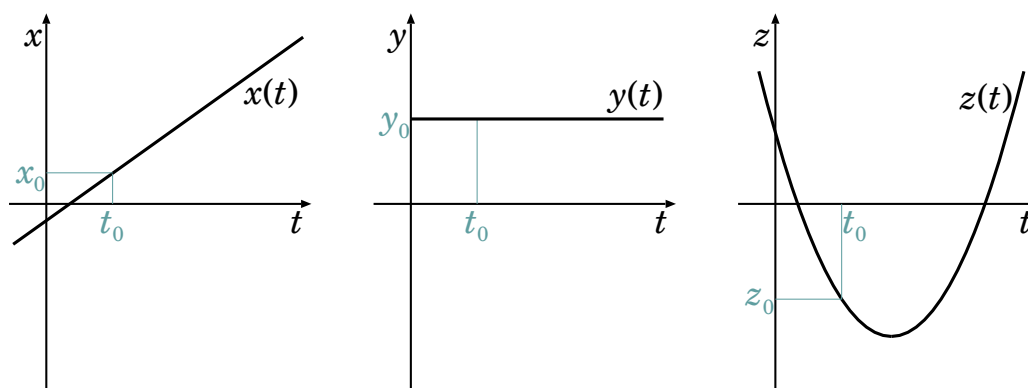


Figura 7.5: Grafici della legge oraria del moto uniformemente accelerato, per le tre coordinate cartesiane  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ . L'orientamento degli assi cartesiani è stato scelto in modo che l'accelerazione  $\vec{a}$  sia lungo l'asse  $z$  e che la velocità iniziale  $\vec{v}_0$  non abbia componente lungo l'asse  $y$ . In questo modo il grafico della legge oraria  $x(t)$  è una retta (non c'è accelerazione lungo  $x$ ) mentre quello di  $y(t)$  è una retta orizzontale (non c'è velocità lungo  $y$ ). Invece, in grafico della legge oraria  $z(t)$  è una parabola: nell'esempio,  $a_z > 0$ , cosicché la concavità è verso l'alto — per  $a_z < 0$  la concavità sarebbe stata verso il basso. La posizione  $(x_0, y_0, z_0)$  è occupata all'istante  $t = t_0$ .

### 7.5.3 Esercizi sul moto rettilineo uniformemente accelerato

Ricordiamo le leggi orarie del moto uniformemente accelerato, nel caso particolare che esso avvenga lungo una linea retta. Possiamo scegliere il sistema di coordinate  $Oxyz$  in modo che l'asse  $x$  sia orientato lungo la direzione del moto: le Eq. (7.25), Eq. (7.23) si riducono a:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2}a \cdot (t - t_0)^2 \\ v(t) &= v_0 + a \cdot (t - t_0) \end{aligned} \quad (7.26)$$

(lungo  $y, z$  non c'è moto).

**Esercizio 7.1.** Una pallina rotola giù per una rotaia inclinata, partendo da ferma. Per scendere di una lunghezza  $\ell = 1.5$  m impiega un tempo  $t = 5$  s. Assumendo che il moto sia uniformemente accelerato, calcolare l'accelerazione  $a$ . Che velocità ha raggiunto?

**Risposta.** Poiché la pallina parte da ferma, la relazione fra la distanza  $\ell$  percorsa e il tempo impiegato è  $\ell = \frac{1}{2}at^2$ . Da qui si può ricavare l'accelerazione

$a = \frac{2\ell}{t^2} = \frac{3 \text{ m}}{25 \text{ s}^2} = 0.12 \text{ m/s}^2$ . La velocità finale pertanto è  $v = at = 0.12 \text{ m/s}^2 \cdot 5 \text{ s} = 0.6 \text{ m/s}$ .

**Esercizio 7.2.** Consideriamo sempre la pallina e la rotaia dell'esempio precedente. Lungo la discesa, a distanze intermedie  $x_1 = 50 \text{ cm}$ ,  $x_2 = 1 \text{ m}$ , sono poste delle fotocellule collegate a cronometri, che rilevano tempi di passaggio di  $t_1 = 2.89 \text{ s}$  e  $t_2 = 4.08 \text{ s}$  rispettivamente. Queste osservazioni confermano che il moto sia effettivamente “uniformemente accelerato”?

**Risposta.** Con l'accelerazione calcolata, ci si aspetta che le distanze percorse dopo un tempo  $t_k$  siano  $x_k = \frac{1}{2}at_k^2$ ; dunque, al tempo  $t_1 = 2.89 \text{ s}$  risulterebbe  $x_1 = 0.501 \text{ m}$ , e a  $t_2 = 4.08 \text{ s}$  risulterebbe  $x_2 = 0.999 \text{ m}$ . Queste previsioni sono in accordo entro 1 mm con le posizioni dei cronometri.

**Commento.** Un accordo entro 1 mm è accettabile? Con quale precisione è nota la posizione delle fotocellule? Qual è la precisione dei cronometri? Per concludere se l'osservazione è in accordo con l'ipotesi di moto uniformemente accelerato bisognerebbe investigare questi quesiti. Purtroppo ciò va al di là dello scopo di questo testo...

**Esercizio 7.3.** Un carrello scende lungo una rotaia con moto uniformemente accelerato. Partendo da fermo, impiega  $t = 10 \text{ s}$  per percorrere  $\ell = 5 \text{ m}$ . Lo stesso carrello, se lanciato dal basso con una velocità  $v_0$ , risale la rotaia fino a fermarsi dopo una distanza  $\ell' = 3 \text{ m}$ . Calcolare  $v_0$ .

**Risposta.** Come negli esempi precedenti, si può calcolare l'accelerazione del carrello in discesa:  $a = \frac{2\ell}{t^2} = 0.1 \text{ m/s}^2$ . Per calcolare  $v_0$  occorre sapere con che legge si muove il carrello in salita. Si tratta di un modo “uniformemente decelerato”, ovvero uniformemente accelerato con accelerazione negativa. L'accelerazione è caratteristica del sistema carrello-rotaia, pertanto sarà la stessa che aveva in discesa, a parte il segno. Possiamo scrivere quindi  $x(t) = v_0t - \frac{a}{2}t^2$ , esplicitando il segno – davanti ad  $a$ . Il tempo  $t'$  a cui il carrello si arresta è dato dalla legge della velocità,  $v(t) = v_0 - at$ , in cui si ponga  $v(t') = 0$ , quindi:  $t' = \frac{v_0}{a}$ . Introducendo  $t'$  nella legge di  $x(t)$ , e imponendo  $x(t') = \ell'$ , si ottiene  $\ell' = v_0t' - \frac{a}{2}(t')^2 = \frac{v_0^2}{a} - \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2a}$ . Risolvendo per  $v_0$ , abbiamo  $v_0 = \sqrt{2a\ell'} = \sqrt{0.6 \text{ m}^2/\text{s}^2} = 0.775 \text{ m/s}$ .

### 7.5.4 Esercizi sui moti di caduta

In prossimità della superficie terrestre, un oggetto sottoposto solo alla gravità subisce una accelerazione diretta verso il basso, pari a:

$$\vec{a} = -g\hat{z}$$

essendo  $g = 9.806 \text{ m/s}^2$  <sup>[3]</sup> e  $\hat{z}$  il versore verticale orientato verso l'alto.

Pertanto, qualunque moto di oggetti sotto l'azione della gravità — in prossimità della superficie terrestre!! — è riconducibile al moto uniformemente accelerato.

**Esercizio 7.4.** *Un oggetto cade da fermo nel campo gravitazionale terrestre. Che distanza ha percorso, e che velocità ha raggiunto, dopo 1 secondo?*

**Risposta.** *Si fa semplicemente uso delle componenti- $z$  delle Eq. (7.25) e Eq. (7.23):*

$$\Delta z = -\frac{g}{2}t^2 = -4.903 \text{ m} \quad ; \quad v_z = -gt = -9.806 \text{ m/s}$$

**Esercizio 7.5.** *Un oggetto cade da fermo dall'altezza  $h = 1 \text{ m}$  nel campo gravitazionale terrestre. Quanto tempo dura la sua caduta? Con che velocità raggiunge il suolo? Come cambierebbero queste risposte, se l'altezza della caduta fosse  $h' = 2 \text{ m}$ ?*

**Risposta.** *Si tratta di un moto uniformemente accelerato con  $\vec{a} = -g\hat{z}$ . L'oggetto parte da fermo, pertanto le componenti della velocità lungo le direzioni orizzontali  $x, y$  sono e restano nulle. Il moto è quindi rettilineo lungo la verticale. Scegliamo l'origine ( $z = 0$ ) al livello del suolo, cosicché il valore iniziale di  $z$  è  $z_0 = h$ . La legge oraria è data dalla componente lungo  $z$  delle Eq. (7.25):*

$$z = h - \frac{g}{2}t^2$$

*L'oggetto tocca terra quando  $z = 0$ , dunque deve essere  $0 = h - \frac{g}{2}t^2$ : risolvendo per  $t$  si trova*

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0.45 \text{ s}$$

*La velocità con cui l'oggetto cade è data dalla componente lungo  $z$  delle Eq. (7.23): all'istante in cui tocca il suolo abbiamo:*

$$v_z = -gt = -\sqrt{2gh} = -4.43 \text{ m/s}$$

*Il segno  $-$  di  $v_z$  significa che la velocità ha direzione opposta all'orientamento dell'asse  $z$ .*

*Sia il tempo impiegato a cadere, che la velocità finale, sono proporzionali a  $\sqrt{h}$ . Se la caduta fosse stata da  $h' = 2 \text{ m}$ , entrambi aumenterebbero di un fattore  $\sqrt{2}$ , diventando rispettivamente  $0.64 \text{ s}$  e  $-6.26 \text{ m/s}$*

---

<sup>3</sup> In realtà il valore di  $g$  non è uniforme su tutta la superficie terrestre: quello indicato qui è un valore valido alle medie latitudini.



**Esercizio 7.6.** *Un oggetto cade dall'altezza  $h = 1$  m nel campo gravitazionale terrestre. La sua velocità iniziale è orizzontale e vale  $v_{x0} = 2$  m/s. Quanto tempo dura la sua caduta? Quanto è spostato il punto in cui cade, rispetto alla posizione in cui cadrebbe partendo da fermo?*

**Risposta.** *Si tratta sempre di un moto uniformemente accelerato con  $\vec{a} = -g\hat{z}$ , però ora la velocità iniziale ha una componente ortogonale alla accelerazione. Quindi il moto non è più rettilineo — anzi sappiamo che è parabolico. Il problema va affrontato in due dimensioni. Scegliamo l'origine degli assi cartesiani al livello del suolo, nel punto dove cadrebbe l'oggetto se partisse da fermo. La legge oraria è data dalle componenti  $x, z$  delle Eq. (7.25):*

$$z = h - \frac{g}{2}t^2 \quad ; \quad x = v_{x0}t$$

*Il tempo impiegato a cadere si ricava sempre dalla legge oraria di  $z$ , imponendo  $z = 0$ , cioè esattamente come nell'esempio precedente: il risultato è ovviamente identico:*

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0.45 \text{ s}$$

*ovvero il tempo impiegato a cadere non cambia se il moto aveva una componente iniziale di velocità orizzontale. Lo spostamento del punto di caduta rispetto alla caduta verticale è:*

$$\Delta x = v_{x0}t = v_{x0}\sqrt{\frac{2h}{g}} = 0.90 \text{ m}$$

**Esercizio 7.7.** *Un oggetto viene sparato dall'altezza  $h = 1$  m nel campo gravitazionale terrestre. La sua velocità iniziale è obliqua, con una componente verticale  $v_{z0} = 3$  m/s e una orizzontale  $v_{x0} = 2$  m/s. Quanto tempo dura la sua caduta? Quanto è spostato il punto in cui cade, rispetto alla posizione in cui cadrebbe partendo da fermo?*

**Risposta.** *Anche qui si tratta di un moto uniformemente accelerato con  $\vec{a} = -g\hat{z}$ , con traiettoria parabolica. Il problema si affronta in due dimensioni. Scegliamo l'origine degli assi cartesiani al livello del suolo, nel punto dove cadrebbe l'oggetto se partisse da fermo. La legge oraria è data dalle componenti  $x, z$  delle Eq. (7.25):*

$$z = h + v_{z0}t - \frac{g}{2}t^2 \quad ; \quad x = v_{x0}t$$

*La durata del volo si ricava sempre imponendo  $z = 0$  e risolvendo per  $t$ , però questa volta c'è una componente iniziale della velocità verticale che cambia il risultato. L'equazione da risolvere è  $gt^2 - 2v_{z0}t - 2h = 0$ . Si tratta di una equazione di 2° grado nell'incognita  $t$ , che ha due soluzioni:*

$$t_{\pm} = \frac{v_{z0} \pm \sqrt{v_{z0}^2 + 2gh}}{g}$$

La soluzione  $t_- = \frac{v_{z0} - \sqrt{v_{z0}^2 + 2gh}}{g}$  è negativa (essendo  $\sqrt{v_{z0}^2 + 2gh} > v_{z0}$ ), pertanto si riferirebbe ad un tempo anteriore alle condizioni iniziali, cioè a prima che il proiettile venisse sparato. Per questa ragione viene scartata, e ci concentriamo su quella positiva:

$$t_+ = \frac{v_{z0} + \sqrt{v_{z0}^2 + 2gh}}{g} = 0.85 \text{ s}$$

Lo spostamento del punto di caduta rispetto alla caduta verticale è:

$$\Delta x = v_{x0}t_+ = 1.70 \text{ m}$$

**Osservazione.** Notiamo che il tempo di caduta è maggiore rispetto ai casi precedenti, nonostante l'altezza iniziale sia la stessa:  $h = 1 \text{ m}$ . La ragione sta nel fatto che il proiettile era dotato di una velocità iniziale con una componente  $v_{z0}$  diretta verso l'alto. Pertanto prima di iniziare a cadere, è effettivamente salito. Per sapere di quanto è salito, dobbiamo trovare l'istante in cui la sua velocità verticale si è annullata. La legge oraria di tale velocità è

$$v_z = v_{z0} - gt$$

da cui si ricava che abbiamo  $v_z = 0$  all'istante  $t = \frac{v_{z0}}{g} = 0.31 \text{ s}$ . A tale istante il proiettile ha raggiunto un'altezza  $h + v_{z0}t - \frac{g}{2}t^2 = 1.46 \text{ m}$ .

**Esercizio 7.8.** Un oggetto viene sparato dall'altezza del suolo nel campo gravitazionale terrestre. La sua velocità iniziale  $v_0 = 5 \text{ m/s}$  è obliqua, e forma un angolo  $\alpha$  con l'orizzontale. Calcolare qual è l'angolo ottimale per massimizzare la "gittata", ovvero la distanza a cui il proiettile tocca il suolo. Quindi calcolare la gittata.

**Risposta.** Scegliamo il sistema di riferimento cartesiano con l'origine nel punto dove viene sparato il proiettile. Il problema è bidimensionale. Le componenti della velocità iniziale sono

$$v_{x0} = v_0 \cos \alpha \quad ; \quad v_{z0} = v_0 \sin \alpha$$

La legge oraria è:

$$z = v_{z0}t - \frac{g}{2}t^2 \quad ; \quad x = v_{x0}t$$

L'istante in cui il proiettile impatta il suolo è dato da  $z = 0$ , quindi  $t \left( v_{z0} - \frac{g}{2}t \right) = 0$ . Questa equazione è di 2° grado e ha due soluzioni. Una è  $t = 0$ , che coincide con l'istante in cui il proiettile viene sparato: non è quella che cerchiamo. L'altra è

$$t = \frac{2v_{z0}}{g} = \frac{2v_0}{g} \sin \alpha$$

La gittata quindi vale

$$\Delta x = v_{x0}t = v_0 \cos \alpha \cdot \frac{2v_0}{g} \sin \alpha = \frac{v_0^2}{g} \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

E qui occorre conoscere la trigonometria... in particolare, la relazione  $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin(2\alpha)$ . Per massimizzare  $\Delta x$ , occorre massimizzare  $\sin(2\alpha)$ . Questo si ottiene per  $2\alpha = \pi/2$ , ovvero per  $\alpha = \pi/4$  (45 gradi). In tal caso la gittata è

$$\Delta x = \frac{v_0^2}{g} = 2.55 \text{ m}$$

**Esercizio 7.9.** I delfini tursiopi sono veloci nuotatori: possono lanciarsi a grandi velocità ed emergere dall'acqua con salti alti anche 10 metri. Anche i pinguini non se la cavano male: battendo le ali sott'acqua possono acquisire una buona velocità e balzare fuori dall'acqua fino a 3 metri di altezza, cosa che permette loro di salire rapidamente sulle rive ghiacciate. Con quale velocità devono nuotare questi animali, per raggiungere queste altezze?

**Risposta.** Chiamiamo  $v_0$  la velocità che l'animale riesce a tenere in acqua. Appena esce dall'acqua non può più spingersi, quindi è soggetto solo alla forza di gravità che lo tira verso il basso con accelerazione  $g$ . Dall'istante  $t = 0$  in cui esce dall'acqua, il suo moto è governato dalle leggi orarie  $v = v_0 - gt$  e  $h = v_0t - \frac{g}{2}t^2$ . La massima altezza è raggiunta quando la velocità si annulla:  $0 = v_0 - gt$ , quindi  $t_{max} = \frac{v_0}{g}$ . L'altezza raggiunta a questo istante è

$$h_{max} = v_0t_{max} - \frac{g}{2}t_{max}^2 = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{g}{2} \left( \frac{v_0}{g} \right)^2 = \frac{v_0^2}{2g}. \text{ Ovvero, } v_0 = \sqrt{2gh_{max}}.$$

Per il delfino,  $h_{max} = 10 \text{ m}$ , quindi

$$v_0 = \sqrt{2(9.806 \text{ m/s}^2)(10 \text{ m})} = 14.00 \text{ m/s} \simeq 50 \text{ km/h}.$$

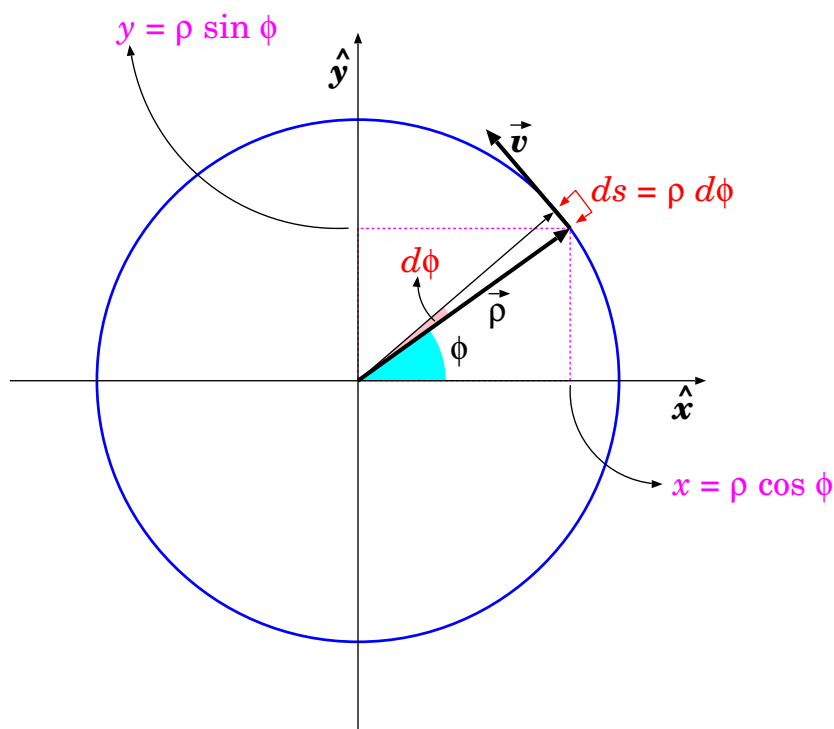
Per il pinguino,  $h_{max} = 3 \text{ m}$ , quindi

$$v_0 = \sqrt{2(9.806 \text{ m/s}^2)(3 \text{ m})} = 7.67 \text{ m/s} \simeq 28 \text{ km/h}.$$

## 7.6 Moti circolari

Consideriamo un moto molto particolare: quello di un punto materiale che si muove lungo una traiettoria circolare, come illustrato in Fig. 7.6. Si tratta di un moto molto speciale: in natura è improbabile che un oggetto si muova lungo una traiettoria perfettamente circolare. In realtà, esistono molti esempi pratici per i quali questo moto è realizzato con vincoli meccanici — per esempio il punto materiale segue una rotaia, oppure è trattenuto a distanza fissa da un ancoraggio mediante un filo inestensibile.

Questi moti ci consentono di introdurre diversi concetti, come il raggio di curvatura e la velocità angolare. Infine, vedremo nella Sezione 7.7 che

Figura 7.6: *Moto circolare.*

ogni moto curvilineo, per tratti infinitamente brevi, può essere approssimato come un moto lungo un archetto di cerchio.

### 7.6.1 Raggio di curvatura, velocità angolare

Il moto circolare è un moto piano, quindi può essere studiato con coordinate cartesiane  $(O; x, y)$ , in cui l'origine  $O$  è posta nel centro della traiettoria circolare. La distanza  $\rho$  dal centro è fissata, e definisce il *raggio di curvatura*; la posizione quindi è individuata da un angolo  $\phi$ , e le coordinate cartesiane sono:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \sin \phi \end{aligned} \tag{7.27}$$

In un tempo infinitesimo  $dt$ , il punto si sposta con velocità scalare  $v$  lungo

la circonferenza, per un tratto  $ds$  tale che:

$$\begin{aligned} ds &= \rho d\phi \\ &= v dt \end{aligned}$$

pertanto:

$$v = \rho \frac{d\phi}{dt}$$

Si introduce la *velocità angolare*

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} \quad (7.28)$$

che è legata alla velocità scalare  $v$  dalla relazione

$$v = \omega \rho \quad (7.29)$$

Notiamo ancora una volta che  $v$  può essere  $> 0$  o  $< 0$ , e quindi lo stesso vale per  $d\phi$ ,  $ds$ ,  $\omega$ . La convenzione del segno è quella degli angoli: se il moto è antiorario,  $d\phi > 0$  e quindi anche  $\omega > 0$ ,  $v > 0$ .

### 7.6.2 Accelerazione tangenziale e centripeta

Le componenti cartesiane della velocità  $\vec{v}$  si ottengono per derivazione temporale delle Eq. (7.27):

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = -\rho \omega \sin \phi \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \rho \omega \cos \phi \end{aligned} \quad (7.30)$$

e derivando una seconda volta si ottengono le componenti cartesiane dell'accelerazione  $\vec{a}$ :

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \rho \left( -\frac{d\omega}{dt} \sin \phi - \omega^2 \cos \phi \right) \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \rho \left( \frac{d\omega}{dt} \cos \phi - \omega^2 \sin \phi \right) \end{aligned} \quad (7.31)$$

Confrontando le Eq. (7.31) con le Eq. (7.30), Eq. (7.27), e osservando che:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\omega}{dt} = \frac{dv}{dt} & \quad ; & \quad -\sin \phi &= \frac{v_x}{\omega \rho} = \frac{v_x}{v} \\ & & \quad \cos \phi &= \frac{v_y}{\omega \rho} = \frac{v_y}{v} \end{aligned}$$

si trova:

$$\begin{aligned} a_x &= -\omega^2 x + \frac{dv}{dt} \frac{v_x}{v} \\ a_y &= -\omega^2 y + \frac{dv}{dt} \frac{v_y}{v} \end{aligned} \quad (7.32)$$

Possiamo riscrivere questa relazione in forma vettoriale:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_x \hat{x} + a_y \hat{y} \\ \vec{\rho} &= x \hat{x} + y \hat{y} \\ v \hat{t} = \vec{v} &= v_x \hat{x} + v_y \hat{y} \end{aligned}$$

da cui:

$$\vec{a} = \underbrace{-\omega^2 \vec{\rho}}_{\vec{a}_n} + \underbrace{\frac{dv}{dt} \hat{t}}_{\vec{a}_t} \quad (7.33)$$

L'accelerazione è stata scomposta in due componenti:

- una componente parallela alla direzione del moto, dunque tangente alla traiettoria:

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt} \hat{t} \quad (\text{accelerazione tangenziale}) \quad (7.34)$$

che descrive la variazione della velocità scalare;

- una componente perpendicolare alla direzione del moto, diretta verso il centro della circonferenza

$$\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{\rho} \quad (\text{accelerazione centripeta}) \quad (7.35)$$

che descrive il cambiamento di direzione del moto.

Usando  $\omega = \frac{v}{r}$  — Eq. (7.29) — l'Eq. (7.35) può essere scritta anche come:

$$\vec{a}_n = -\frac{v^2}{\rho} \hat{\rho} \quad (\text{accelerazione centripeta}) \quad (7.36)$$

### 7.6.3 Moto circolare uniforme

Un moto circolare si dice *uniforme* quando la *velocità scalare*  $v$  è costante. Dalla relazione  $v = \omega\rho$  si deduce che anche  $\omega$  è costante:

$$v \text{ costante} \quad ; \quad \omega \text{ costante} \quad (\text{moto circolare uniforme}) \quad (7.37)$$

da cui la legge oraria dell'angolo azimutale:

$$\phi(t) = \phi_0 + \omega t \quad (\text{moto circolare uniforme}) \quad (7.38)$$

Inserendo questo risultato nelle Eq. (7.27), si ricava che le coordinate  $x$ ,  $y$  per il moto circolare uniforme seguono leggi orarie *sinusoidali*:

$$\begin{cases} x(t) = \rho \cos(\omega t + \phi_0) \\ y(t) = \rho \sin(\omega t + \phi_0) \end{cases} \quad (\text{moto circolare uniforme}) \quad (7.39)$$

Leggi orarie con questa forma sinusoidale (con  $\omega$  costante!) si chiamano *moti oscillatori armonici*: ne ripareremo in Sezione 10.1.1.

### Periodicità

Le funzioni trigonometriche  $\cos$ ,  $\sin$  sono funzioni *periodiche*, nel senso che

$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos \alpha \quad ; \quad \sin(\alpha + 2\pi) = \sin \alpha \quad \forall \alpha$$

Questa proprietà si traduce in una *periodicità temporale*. Infatti  $\cos(\omega t + \phi_0) = \cos(\omega t + \phi_0 + 2\pi) = \cos\left(\omega \cdot \left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \phi_0\right)$  — e analogamente per  $\sin$  — cosicché:

$$\begin{aligned} x(t) &= x\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) \\ y(t) &= y\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) \end{aligned}$$

Da questa scrittura risulta che il moto circolare uniforme è un *moto periodico*, vale a dire che esiste un intervallo di tempo  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , chiamato *periodo*, tale che

$$\begin{cases} x(t) = x(t + T) \\ y(t) = y(t + T) \end{cases} \quad \left(T \equiv \frac{2\pi}{\omega}\right) \quad (\text{moto circolare uniforme}) \quad (7.40)$$

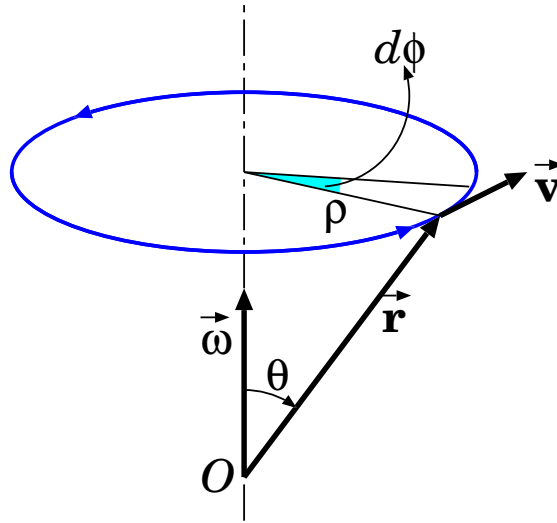


Figura 7.7: Moto circolare

### Accelerazione

Dall'Eq. (7.34), l'accelerazione tangenziale è sempre nulla, tutta l'accelerazione è solo centripeta:

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{\rho} = -\frac{v^2}{\rho} \hat{\rho} \quad (\text{moto circolare uniforme}) \quad (7.41)$$

---

### Moti periodici, considerazioni generali

---

Un moto è periodico quando esiste un intervallo di tempo  $T$ , detto periodo, tale che

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t + T) \quad \forall t$$

Il moto circolare uniforme è solo un caso particolarissimo di moto periodico. Nei moti periodici, anche velocità e accelerazione sono periodiche:  $\vec{v}(t) = \vec{v}(t + T)$  e  $\vec{a}(t) = \vec{a}(t + T)$ . Per esempio, per la velocità, basta ricordare che  $\vec{v}(t + T) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + T + \Delta t) - \vec{r}(t + T)}{\Delta t}$ , e applicare la periodicità per  $\vec{r}$ . Analogamente per l'accelerazione.

#### 7.6.4 Velocità angolare come vettore

Ora consideriamo il moto di un punto che ruota intorno ad un asse, individuato dal versore  $\hat{u}$ , come indicato in Fig. 7.7. La traiettoria è



sempre un arco di circonferenza, come nell'esempio precedente, ma stiamo immergendo il moto in uno spazio 3-dimensionale.

Nel tempo infinitesimo  $dt$  si compie una rotazione di angolo  $d\phi$ . Pertanto definiamo la *velocità angolare*

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} \quad (7.42)$$

In questo caso, conviene misurare la posizione  $\vec{r}$  da un'origine  $O$  scelta sull'asse di rotazione. Essendo  $\theta$  l'angolo fra  $\vec{r}$  e  $\hat{u}$ , il *raggio di curvatura* del moto è

$$\rho = r \sin \theta$$

pertanto lo spostamento  $ds$  nel tempo  $dt$  è:

$$ds = \rho d\phi = \rho \omega dt$$

e la velocità (scalare) del moto è:

$$v = \frac{ds}{dt} = \omega \rho = \omega r \sin \theta$$

Sempre dalla Fig. 7.7 si deduce che la velocità vettoriale  $\vec{v}$  deve avere direzione ortogonale al piano che contiene  $\vec{r}$  e  $\hat{u}$ . Queste considerazioni suggeriscono di definire il tutto attraverso una relazione vettoriale.

È conveniente definire il *vettore velocità angolare* come

$$\vec{\omega} = \omega \hat{u} \quad (7.43)$$

Ora è facile verificare che la relazione

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (7.44)$$

soddisfa tutti i requisiti: basti pensare alle proprietà del prodotto vettoriale descritte in Sezione 6.4: orientamento e modulo sono corretti.

### 7.6.5 Derivata di vettore che ruota intorno a un asse

Quanto detto nella sezione precedente può essere generalizzato a un qualunque vettore  $\vec{A}$ , costante in modulo, che ruota intorno ad un asse  $\hat{u}$  con velocità angolare  $\vec{\omega} \equiv \omega \hat{u}$ . La situazione è sempre la stessa raffigurata in Fig. 7.7 — a parte la sostituzione  $\vec{r} \rightarrow \vec{A}$ . La derivata del vettore deve quindi valere:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A} \quad (\text{vettore rotante}) \quad (7.45)$$

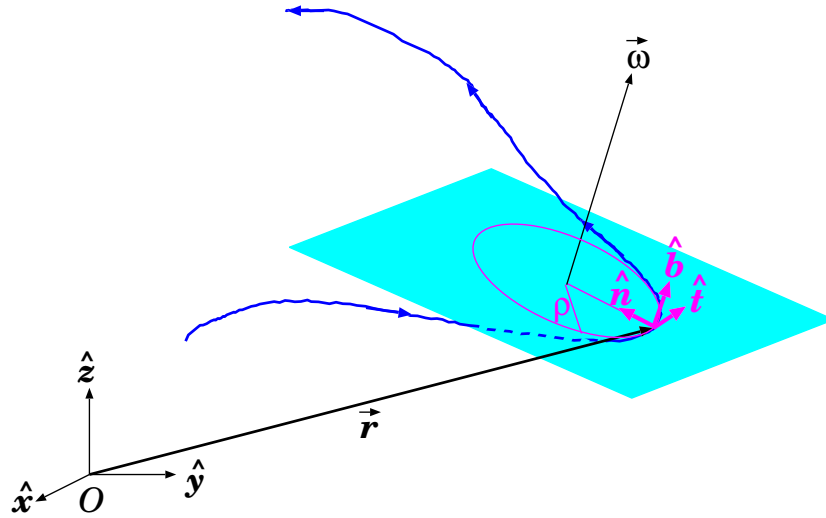


Figura 7.8: *Approssimazione di una traiettoria curva con la sua circonferenza osculatrice, e definizione dei versori tangente, normale, e binormale,  $\hat{\mathbf{t}}$ ,  $\hat{\mathbf{n}}$ ,  $\hat{\mathbf{b}}$ .*

Un caso particolare, che ci sarà molto utile più avanti, è quello del *versore rotante* — dato un versore  $\hat{\mathbf{e}}$  qualunque, ovviamente  $|\hat{\mathbf{e}}| = 1$  è costante per definizione. Quindi la derivata del versore è:

$$\frac{d\hat{\mathbf{e}}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{\mathbf{e}} \quad (\text{versore rotante}) \quad (7.46)$$

## 7.7 Traiettorie curve

Una traiettoria curva, in ogni punto può essere approssimata con un archetto infinitesimo di circonferenza (“circonferenza osculatrice”) <sup>[4]</sup>, come in Fig. 7.8. Quindi, localmente, possiamo trattare il moto come se fosse circolare.

Il raggio della circonferenza osculatrice si chiama *raggio di curvatura*,  $\rho$ . Possiamo definire tre versori:

- il *versore tangente*  $\hat{\mathbf{t}}$ , tangente alla traiettoria e orientato nel verso di percorrenza;

<sup>4</sup> Immaginate un punto generico  $P$  sulla traiettoria, e altri due punti “satelliti”  $P'$ ,  $P''$  posti prima e dopo di  $P$ : questi 3 punti individuano in modo univoco un piano e una circonferenza. Ora immaginiamo che i punti  $P'$ ,  $P''$  si spostino sempre più vicini al punto  $P$ : l'arco di circonferenza  $\widehat{P'PP''}$  approssima sempre meglio l'arco di traiettoria da  $P'$  a  $P''$ . La circonferenza osculatrice si ottiene come passaggio al limite di  $P' \rightarrow P$  e  $P'' \rightarrow P$ .

- il *versore normale*  $\hat{\mathbf{n}}$ , ortogonale alla traiettoria e giacente sul piano della circonferenza osculatrice, orientato verso il suo centro;
- il *versore binormale*, ortogonale al piano della circonferenza osculatrice, e definito da  $\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}$ .

In generale, quando un moto avviene lungo una traiettoria curva, la velocità  $\vec{v}(t)$  può cambiare sia in direzione che in modulo.

Si può definire il *versore tangente* nei due modi equivalenti:

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{d\vec{r}}{ds} \quad (7.47)$$

Ovviamente  $\vec{v} = v\hat{\mathbf{t}}$ . L'accelerazione si può quindi scrivere come:

$$\vec{a} = \frac{d(v\hat{\mathbf{t}})}{dt} = \underbrace{\frac{dv}{dt}\hat{\mathbf{t}}}_{\vec{a}_t} + v \underbrace{\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt}}_{\vec{a}_n} \quad (7.48)$$

Evidentemente,  $\vec{a}_t$  è parallela a  $\vec{v}$ . Inoltre, utilizzando la derivata del versore, Eq. (7.46), possiamo scrivere  $\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{\mathbf{t}}$ , quindi:

$$\begin{aligned} \vec{a}_n &= v \vec{\omega} \times \hat{\mathbf{t}} \\ &= \vec{\omega} \times \vec{v} \end{aligned} \quad (7.49)$$

da cui  $\vec{a}_n$  è manifestamente ortogonale a  $\vec{v}$ .

Il vettore  $\vec{\omega}$  che compare nell'Eq. (7.49) è ortogonale al piano del cerchio osculatore:

$$\vec{\omega} = \omega \hat{\mathbf{b}}$$

la velocità scalare  $v$  è legata a  $\rho$  da:

$$v = \omega \rho$$

quindi l'Eq. (7.49), nella sua prima versione, si riscrive:

$$\begin{aligned} \vec{a}_n &= v (\omega \hat{\mathbf{b}}) \times \hat{\mathbf{t}} = \omega v \hat{\mathbf{n}} \\ &= \frac{v^2}{\rho} \hat{\mathbf{n}} \\ &= \omega^2 \rho \hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (7.50)$$

Si può anche dare una definizione vettoriale del raggio di curvatura, come vettore  $\vec{\rho}$ , orientato dal centro di curvatura verso la posizione del punto <sup>[5]</sup>:

$$\vec{\rho} = -\rho\hat{n} \quad (7.51)$$

Così l'Eq. (7.50) si può riscrivere come:

$$\vec{a}_n = -\omega^2\vec{\rho} = -\frac{v^2}{\rho}\hat{\rho} \quad (7.52)$$

## 7.8 Esercizi

Per calcolare le derivate e gli integrali in questi esercizi, possono essere d'aiuto le tabelle in Sezione 3.3.

**Esercizio 7.10.** *Un oggetto puntiforme si muove con la seguente legge oraria:*

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega t) \\ y(t) &= B e^{-\gamma t} \\ z(t) &= C t^3 \end{aligned}$$

*Scrivere, per coordinate cartesiane, la velocità e l'accelerazione in funzione del tempo.*

**Risposta.** *Per calcolare la velocità, basta derivare le coordinate cartesiane:*

$$\begin{aligned} v_x(t) &= \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t) \\ v_y(t) &= \frac{dy}{dt} = -\gamma B e^{-\gamma t} \\ v_z(t) &= \frac{dz}{dt} = 3Ct^2 \end{aligned}$$

*e per calcolare l'accelerazione si derivano le velocità:*

$$\begin{aligned} a_x(t) &= \frac{dv_x}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t) \\ a_y(t) &= \frac{dv_y}{dt} = \gamma^2 B e^{-\gamma t} \\ a_z(t) &= \frac{dv_z}{dt} = 6Ct \end{aligned}$$

---

<sup>5</sup> **ATTENZIONE** però:  $\vec{\rho}$  NON è il raggio vettore  $\vec{r}$ : in generale, l'origine  $O$ , a cui si riferisce la posizione  $\vec{r}$ , non coincide con il centro di curvatura. Solo se la traiettoria è esattamente circolare allora si può scegliere  $O$  nel suo centro, altrimenti è impossibile.

**Esercizio 7.11.** Un oggetto puntiforme si muove con una velocità che, in coordinate cartesiane, vale:

$$\begin{aligned} v_x(t) &= a_x t && ( a_x = 3 \text{ m/s}^2 ) \\ v_y(t) &= u_y e^{\gamma t} && ( u_y = 2.5 \text{ m/s} ; \gamma_y = 0.1 \text{ s}^{-1} ) \\ v_z(t) &= 0 \end{aligned}$$

All'istante  $t = 0$  si trova nella posizione  $\vec{r}_0 \equiv (1 \text{ m}, 0 \text{ m}, 1 \text{ m})$ . Calcolare la sua posizione al tempo  $t_1 = 10 \text{ s}$ .

**Risposta.** Per ottenere il vettore-spostamento  $\Delta\vec{r}$  occorre integrare ciascuna componente della velocità:

$$\begin{aligned} \Delta x &= \int_0^{t_1} dt v_x(t) = \left[ \frac{a_x}{2} t^2 \right]_0^{t_1} = 150 \text{ m} \\ \Delta y &= \int_0^{t_1} dt v_y(t) = \left[ \frac{u_y}{\gamma} e^{\gamma t} \right]_0^{t_1} = (25 \text{ m}) (e^1 - e^0) = 42.95 \text{ m} \\ \Delta z &= \int_0^{t_1} dt v_z(t) = 0 \end{aligned}$$

La posizione finale si ottiene come  $\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \Delta\vec{r}$ . Per coordinate cartesiane si ottiene

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \Delta x = 151 \text{ m} \\ y_1 &= y_0 + \Delta y = 42.95 \text{ m} \\ z_1 &= z_0 + \Delta z = 1 \text{ m} \end{aligned}$$

**Esercizio 7.12.** Un oggetto che cade liberamente in verticale acquista velocità sempre maggiori. In tempi pre-Galileiani, quando le leggi del moto non erano ancora state formulate, c'era l'ipotesi — sbagliata — che la velocità  $v$  fosse direttamente proporzionale allo spazio totale percorso  $s$ . Con il linguaggio cinematico che abbiamo imparato, formuleremmo questa ipotesi così:

$$v(t) = \alpha \cdot s(t)$$

Si provi a dedurre la legge oraria del moto sotto questa ipotesi. Suggestivo: scrivere  $v = \frac{ds}{dt}$ , quindi si scriva la legge del moto come  $\frac{ds}{s} = \alpha dt$ , oppure si sfrutti la proprietà della derivata del logaritmo  $\frac{d \ln(f(t))}{dt} = \frac{f'(t)}{f(t)}$ , essendo  $f'(t) \equiv \frac{df}{dt}$ . Se partisse da fermo, l'oggetto cadrebbe davvero?

**Risposta.** La legge del moto è  $\frac{ds}{dt} = \alpha s$ , che si può scrivere come  $\frac{ds}{s} = \alpha dt$ . Mettendo un segno di integrale, con estremi opportuni, da entrambi i lati,

otteniamo  $\int_{s_0}^s \frac{ds'}{s'} = \alpha \int_0^t dt'$ , ovvero  $\ln\left(\frac{s}{s_0}\right) = t$ . Risolvendo per  $s$  si trova:

$$s = s_0 e^{\alpha t}$$

Approccio più formale (ma meno diretto): scriviamo la legge del moto così:  $\frac{ds/dt}{s(t)} = \alpha$ . Assomiglia molto alla forma  $\frac{f'(t)}{f(t)}$ , ma attenzione: non possiamo porre  $f \equiv s$  perché il logaritmo accetta come argomento solo numeri privi di dimensioni — non possiamo fare  $\ln(s)$ . Quindi poniamo  $f(t) = \frac{s(t)}{\bar{s}}$ , con  $\bar{s}$  una distanza arbitraria. Allora

$$\frac{d \ln(f(t))}{dt} = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{ds/dt}{s(t)} = \alpha$$

La derivata di  $\ln(f(t))$  è una costante,  $\alpha$ , quindi  $\ln(f(t)) = \alpha t + \beta$  (con  $\beta$  costante arbitraria), ovvero  $\frac{s(t)}{\bar{s}} = f(t) = e^{\alpha t + \beta}$ , infine  $s(t) = \bar{s} e^{\alpha t}$ . Risultato identico a quello trovato con l'approccio più diretto — basta identificare  $s_0$  con  $\bar{s} e^{\beta}$ .

Per rispondere all'ultima domanda: la velocità è  $v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \alpha s_0 e^{\alpha t}$ ; se per  $t = 0$  l'oggetto è fermo, l'unica possibilità è che sia  $\alpha = 0$ , ma così sarebbe anche  $s(t) = 0$  sempre, ovvero l'oggetto non entrerebbe mai in movimento, cioè non cadrebbe mai. Pur senza conoscere ancora il calcolo differenziale, Galileo aveva intuito che una legge del moto  $v \propto s$  non avrebbe mai funzionato.

**Esercizio 7.13.** Galileo, dopo ripetuti esperimenti, osservò una regolarità nella “caduta dei gravi”: un oggetto, lanciato con velocità orizzontale  $v_0$  e libero di cadere, si muove con una traiettoria curva, contenuta in un piano verticale. Adottando su questo piano due coordinate cartesiane, con l'asse  $\hat{x}$  lungo  $v_0$  e l'asse  $\hat{z}$  verso l'alto, la legge oraria osservata è sempre esprimibile come:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 t \\ z(t) &= -\frac{g}{2} t^2 \end{aligned}$$

Calcolare la velocità e l'accelerazione vettoriali, per componenti cartesiane, in un generico istante  $t$ . Calcolare inoltre la velocità scalare  $v$ , l'accelerazione tangenziale  $a_t$ , l'accelerazione centripeta  $a_n$ , il raggio di curvatura  $\rho$ , e la velocità angolare  $\omega$ .

**Risposta.** La velocità, per componenti cartesiane, si calcola derivando  $x$ ,  $z$  rispetto a  $t$ :

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_0 \\ v_z(t) &= -gt \end{aligned}$$

Derivando ancora rispetto a  $t$  si trova l'accelerazione, per componenti cartesiane:

$$\begin{aligned} a_x(t) &= 0 \\ a_z(t) &= -g \end{aligned}$$

La velocità scalare è

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}$$

L'accelerazione tangenziale si può calcolare proiettando  $\vec{a}$  su  $\vec{v}$ :

$$\begin{aligned} a_t &= \vec{a} \cdot \frac{\vec{v}}{v} = \frac{a_x v_x + a_z v_z}{v} \\ &= \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + (gt)^2}} \end{aligned}$$

L'accelerazione centripeta si calcola di conseguenza:

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{g^2 - \frac{(g^2 t)^2}{v_0^2 + (gt)^2}} = g \sqrt{1 - \frac{(gt)^2}{v_0^2 + (gt)^2}} \\ &= \frac{v_0 g}{\sqrt{v_0^2 + (gt)^2}} \end{aligned}$$

Il raggio di curvatura si calcola da  $a_n = \frac{v^2}{\rho}$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(v_0^2 + (gt)^2)^{3/2}}{v_0 g}$$

Infine, la velocità angolare si calcola come

$$\omega = \frac{v}{\rho} = \frac{v_0 g}{v_0^2 + (gt)^2}$$

**Osservazione.** All'inizio ( $t = 0$ ) l'accelerazione è solo centripeta:  $a_n = g$ ,  $a_t = 0$ . Man mano che passa il tempo,  $a_t$  cresce, tendendo a  $g$ ; nel frattempo  $a_n$  decresce, tendendo a  $0$ ; anche la velocità aumenta in modulo con una legge complicata. Invece, in coordinate cartesiane, le componenti dell'accelerazione sono tutte costanti, e anche l'evoluzione delle velocità è più semplice. La descrizione del moto per componenti cartesiane è decisamente più semplice che scomponendo lungo le direzioni tangente e ortogonale alla traiettoria. Anche questa idea è stata un'altra delle innovazioni che dobbiamo a Galileo.

## 7.9 Riassunto

Riassumiamo i concetti introdotti finora. Un oggetto che si sposta nello spazio, all'istante  $t$  ha una posizione  $\vec{r}(t) \equiv (x(t), y(t), z(t))$ . La sua velocità,

in forma vettoriale e per componenti cartesiane, è definita da:

$$\vec{v}(t) = \frac{\vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t)}{dt} \quad ; \quad \begin{cases} v_x(t) = \frac{x(t+dt) - x(t)}{dt} \\ v_y(t) = \frac{y(t+dt) - y(t)}{dt} \\ v_z(t) = \frac{z(t+dt) - z(t)}{dt} \end{cases}$$

mentre l'accelerazione è espressa come:

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t)}{dt} \quad ; \quad \begin{cases} a_x(t) = \frac{v_x(t+dt) - v_x(t)}{dt} \\ a_y(t) = \frac{v_y(t+dt) - v_y(t)}{dt} \\ a_z(t) = \frac{v_z(t+dt) - v_z(t)}{dt} \end{cases}$$

Relazioni fra posizione e velocità:		
velocità	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	$v_x = \frac{dx}{dt}$ $v_y = \frac{dy}{dt}$ $v_z = \frac{dz}{dt}$
spostamento	$\Delta\vec{r} = \int_{t_0}^t dt' \vec{v}(t')$	$\Delta x = \int_{t_0}^t dt' v_x(t')$ $\Delta y = \int_{t_0}^t dt' v_y(t')$ $\Delta z = \int_{t_0}^t dt' v_z(t')$



Relazioni fra velocità e accelerazione:		
accelerazione	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	$a_x = \frac{dv_x}{dt}$ $a_y = \frac{dv_y}{dt}$ $a_z = \frac{dv_z}{dt}$
variazione di velocità	$\Delta\vec{v} = \int_{t_0}^t dt' \vec{a}(t')$	$\Delta v_x = \int_{t_0}^t dt' a_x(t')$ $\Delta v_y = \int_{t_0}^t dt' a_y(t')$ $\Delta v_z = \int_{t_0}^t dt' a_z(t')$

Formule per il moto rettilineo uniforme:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= 0 \\ \vec{v}(t) &= \vec{v}_0(\text{costante}) \\ \vec{r}(t) &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot (t - t_0)\end{aligned}$$

Formule per il moto uniformemente accelerato:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \text{costante} \\ \vec{v}(t) &= \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot (t - t_0) \\ \vec{r}(t) &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot (t - t_0)^2\end{aligned}$$

Formule per il moto su traiettoria curvilinea:

$$\vec{\omega} = \frac{d\alpha}{dt} \hat{\mathbf{b}}$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{\mathbf{t}}$$

$$v = \omega \rho$$

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_t + \vec{\mathbf{a}}_n$$

$$\vec{\mathbf{a}}_t = (\vec{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{v}} = \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{t}}$$

$$\vec{\mathbf{a}}_n = \vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{a}}_t = -\frac{v^2}{\rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} = -\omega^2 \vec{\boldsymbol{\rho}} = \vec{\omega} \times \vec{\mathbf{v}}$$

# Capitolo 8

## Dinamica del punto materiale

La cinematica descrive le caratteristiche del moto di un oggetto: legge oraria, velocità accelerazione. La dinamica indaga le *cause* del moto.

Più precisamente, *il moto di un oggetto è influenzato dalla sua “interazione” con l’ambiente circostante*. Tutto ciò che si trova nello spazio intorno ad un oggetto può influire sul suo moto, o per contatto diretto, oppure anche a distanza.

Abbiamo esempi ovvi di *interazione per contatto*, quando due oggetti si urtano, o sfregano l’uno contro l’altro, o quando spingiamo o tiriamo un oggetto. Tuttavia, esistono anche le *interazioni a distanza* — per esempio quando una calamita attrae un oggetto di ferro, o quando un qualunque oggetto cade al suolo: in questi casi il moto dell’oggetto subisce influenze senza che nessun altro oggetto lo tocchi.

La dinamica mette in relazione il moto di un oggetto e le sue interazioni con l’ambiente che lo circonda. Queste interazioni sono descritte con quantità vettoriali, chiamate *forze*. In questo capitolo vedremo le relazioni generali fra forze e moto. Nei capitoli successivi analizzeremo le diverse nature e caratteristiche di tali forze.

### 8.1 Le leggi della dinamica

Le leggi della dinamica sono il frutto di accurati studi sperimentali sul moto degli oggetti e di un enorme sforzo intellettuale che ha fornito un metodo matematico per darne una descrizione unificata. Dobbiamo la nostra attuale conoscenza della dinamica a numerose menti del passato, fra cui è d’obbligo ricordare Galileo Galilei e Isaac Newton.

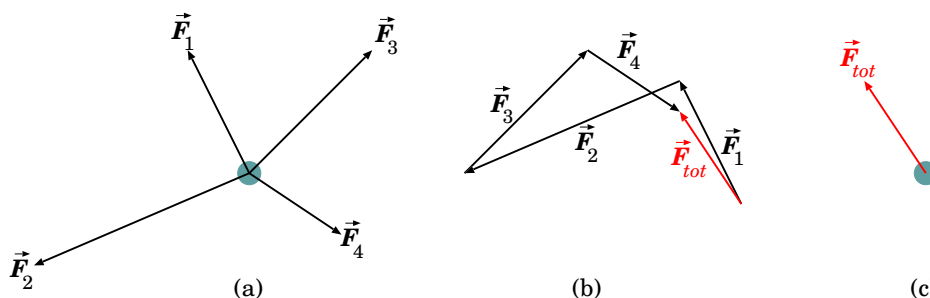


Figura 8.1: *Risultante di un sistema di forze: (a) forze  $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_N$  agenti su un punto materiale; (b) risultante come loro somma vettoriale,  $\vec{F}_{tot} = \sum_i \vec{F}_i$ ; (c) forza risultante  $\vec{F}_{tot}$  applicata al punto materiale in luogo del sistema di forze fisiche.*

Introdurre le leggi della dinamica con un approccio “storico” — cioè ripercorrendo i ragionamenti che hanno portato alla loro formulazione — sarebbe di estremo interesse, ma richiederebbe uno sforzo notevole, che esula da questo contesto. Scegliamo invece una esposizione assiomatica, per ragioni di maggiore chiarezza. Con questo non vogliamo essere dogmatici: al contrario, l’insieme di questi assiomi deve la sua validità al fatto che *funzionano!* Nel senso che consentono di spiegare i moti osservati, e anche di predirli.

Enunciamo ora le *leggi della dinamica* <sup>[1]</sup>:

[1] *Legge di inerzia, o di Galileo (1<sup>a</sup> legge della dinamica)*

Un oggetto puntiforme che non sia soggetto ad azioni esterne rimane in quiete (fermo) oppure si muove di moto rettilineo uniforme.

[2.a] *Forze e loro composizione*

Se un oggetto subisce una o più azioni esterne, queste sono descritte da quantità vettoriali che si chiamano *forze*. Nel caso agiscano più azioni esterne, ciascuna di esse è descrivibile da una forza  $\vec{F}_i$ ; il loro effetto è quello di produrre una *forza risultante*, pari alla somma vettoriale delle singole forze:

$$\vec{F}_{tot} = \sum_i \vec{F}_i \quad (8.1)$$

<sup>1</sup> Molti testi enunciano le “tre leggi della dinamica”, posponendo la legge di composizione delle forze; trovo personalmente questa scelta piuttosto restrittiva, perché raramente succede nella realtà che esista una sola forza agente: tanto vale quindi esporre tutti gli “assiomi” della dinamica contemporaneamente.

(vedi Fig. 8.1).

[2.b] Legge di Newton (2<sup>a</sup> legge della dinamica)

Ogni oggetto è dotato di una proprietà intrinseca che si chiama *massa*. Un oggetto di massa  $m$ , sottoposto ad una sola forza  $\vec{F}$ , oppure ad un sistema di forze la cui risultante sia  $\vec{F}_{tot}$ , subisce un'accelerazione  $\vec{a}$ , data da

$$\vec{F}_{tot} = m\vec{a} \quad (8.2)$$

Riprenderemo bene questo concetto nella Sezione 8.4: per il momento possiamo dire che la *massa* descrive l'*inerzia* di un oggetto, ovvero la sua "resistenza" ad essere accelerato.

[3] Legge di azione-reazione (3<sup>a</sup> legge della dinamica)

Le forze agenti su un oggetto sono sempre dovute ad interazioni con gli oggetti circostanti. A prescindere dalla natura di tali interazioni, vale una legge di reciprocità nelle interazioni fra oggetti: se l'oggetto (1) produce sull'oggetto (2) una forza  $\vec{F}_{21}$ , allora l'oggetto (2) necessariamente deve produrre una forza uguale e contraria  $\vec{F}_{12}$  sull'oggetto (1):

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (8.3)$$

Inoltre, le forze  $\vec{F}_{12}$ ,  $\vec{F}_{21}$  sono dirette lungo la linea retta che congiunge gli oggetti (1) e (2). Questa legge è illustrata in Fig. 8.2. Dette  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$  le posizioni degli oggetti (1) e (2), la direzione che li congiunge è lungo  $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ , pertanto possiamo scrivere questa proprietà come:

$$\vec{F}_{12}, \vec{F}_{21} \text{ parallele a } (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (8.4)$$

### 8.1.1 Unità di misura

Nel Sistema Internazionale delle unità di misura (SI) la massa si misura in *chilogrammi*, kg. Altre unità utili sono il *grammo*, g, e i suoi multipli e sottomultipli:

tonnellata	ton	= 1000 kg
quintale	q	= 100 kg
chilogrammo	kg	
grammo	g	= 10 <sup>-3</sup> kg
milligrammo	mg	10 <sup>-3</sup> g = 10 <sup>-6</sup> kg
microgrammo	μg	10 <sup>-6</sup> g = 10 <sup>-9</sup> kg

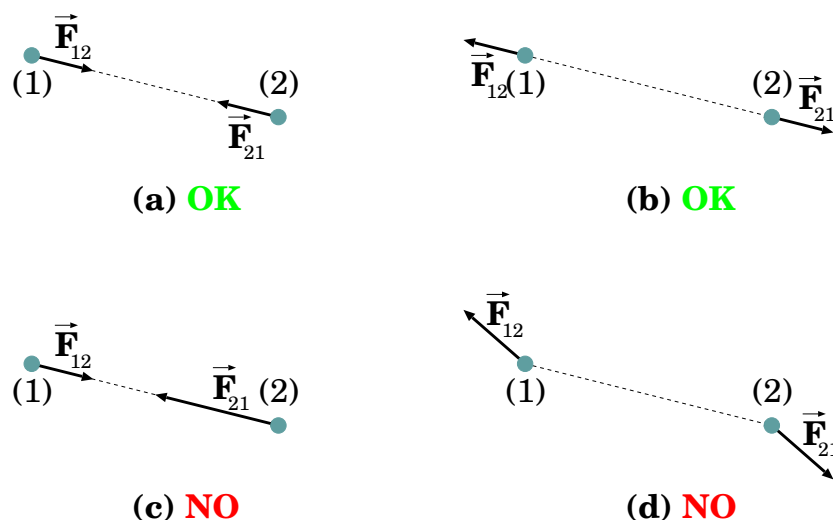


Figura 8.2: Esempi di forze che soddisfano (a,b) o non soddisfano (c,d) il principio di azione-reazione. L'oggetto (1) esercita una forza  $\vec{F}_{21}$  sull'oggetto (2), il quale a sua volta produce una forza  $\vec{F}_{12}$  sull'oggetto (1). Nei casi (a,b) le due forze sono uguali ed opposte:  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ ; inoltre giacciono sulla retta congiungente gli oggetti (1), (2). Quindi il principio di azione-reazione è soddisfatto. In particolare, nel caso (a) si tratta di forze attrattive, mentre nel caso (b) di forze repulsive. Nei casi (c,d) il principio di azione-reazione non è soddisfatto: in (c), le forze giacciono sulla congiungente, ma non sono uguali ed opposte ( $\vec{F}_{12} \neq -\vec{F}_{21}$ ); in (d) le forze sono uguali ed opposte ma non giacciono sulla congiungente.

Le forze nel SI si misurano in *Newton*, N. Il Newton è un'unità di misura *derivata*, nel senso che si può esprimere attraverso le unità fondamentali di lunghezza, tempo e massa: metri (m), secondi (s) e chilogrammi (kg). Si definisce “*Newton*” la forza necessaria per imprimere una accelerazione di  $1 \text{ m/s}^2$  ad una massa di un chilogrammo.

$$\text{N} = \text{kg m/s}^2 \quad (8.5)$$

Un'altra unità di forza spesso usata è la *dyne*, definita come la forza necessaria per imprimere una accelerazione di  $1 \text{ cm/s}^2$  ad una massa di un grammo

$$\text{dyne} = \text{g cm/s}^2 \quad (8.6)$$

Essendo  $1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$  e  $1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$ , si ricava subito la conversione fra Newton e dyne:

$$1 \text{ N} = 10^5 \text{ dyne} \quad (8.7)$$

## 8.2 Natura delle forze

In natura incontriamo diverse forze, le cui origini e caratteristiche sono svariate.

Vediamo alcuni esempi di forze che incontriamo più spesso:

- oggetti dotati di massa si attraggono a causa della *forza gravitazionale*;
- qualunque oggetto — in prossimità della superficie terrestre — è attratto verso il basso dalla *forza-peso* (si tratta di un caso particolare di forza gravitazionale, in cui la massa della Terra attrae la massa dell'oggetto);
- oggetti dotati di carica elettrica si attraggono o respingono a causa della *forza elettrica*; se essi sono in movimento interagiscono anche attraverso una *forza magnetica*;
- oggetti deformati da azioni esterne, a seconda del materiale di cui sono costituiti, tendono a riassumere la forma originale, mediante *forze elastiche*;
- oggetti vincolati a strutture rigide (fili inestensibili, piani o rotaie indeformabili, ...) sono da queste influenzati nel loro moto, attraverso le *reazioni vincolari*;
- oggetti a contatto con l'ambiente circostante possono subire da questo azioni che tendono ad opporsi al loro moto: sono le *forze di attrito*, e si manifestano in diversi modi;

Alcune forze si manifestano solo quando gli oggetti entrano in contatto, altre agiscono anche fra oggetti distanti. Di seguito alcuni esempi:

- *forze di contatto*: forze elastiche, reazioni vincolari, forze di attrito, ...
- *forze a distanza*: forze gravitazionali (e quindi anche forza-peso), elettriche, magnetiche, ...

Ricordiamo che tutte le forze di contatto elencate sono manifestazioni macroscopiche delle forze elettromagnetiche agenti fra gli atomi che costituiscono gli oggetti: in natura le uniche forze *fondamentali* sono quelle gravitazionali e elettromagnetiche <sup>[2]</sup>: entrambe agenti a distanza.

---

<sup>2</sup> Le *interazioni* debole e forte sono altrettanto fondamentali, ma non sono descrivibili come *forze*: a causa del loro raggio di azione molto limitato, giocano un ruolo solo a livello subatomico, e quindi devono essere trattate con la meccanica quantistica.

Gli assiomi [2.a] e [2.b] *non danno indicazioni sulla natura delle forze agenti e su come calcolarle*: servono a descrivere il moto di un oggetto, una volta che le forze agenti siano note. In ogni caso, l'assioma [2.a] ci dice che la forza totale su un oggetto è pari alla somma vettoriale delle varie forze, *anche se queste sono di diverse nature!*

L'assioma [3] fornisce un principio di reciprocità anche sulla *natura* delle forze: se l'oggetto (1) esercita una forza di natura X (gravitazionale, o elettrica, o magnetica, o elastica, o vincolare, ...) sull'oggetto (2), allora anche (2) esercita una forza della stessa natura X su (1). Un esempio: se un sasso cade a terra a causa della forza-peso, anche la Terra è attratta dal sasso con una forza della stessa natura (gravitazionale) — anche se la cosa può apparire a prima vista strana <sup>[3]</sup>.

## 8.3 Commenti sulla legge di inerzia

La legge di inerzia — assioma [1] — ci insegna che il moto rettilineo uniforme è il moto “naturale” di un oggetto.

Matematicamente, è semplicemente un caso particolare di  $\vec{F} = m\vec{a}$ , per  $\vec{F} = 0$ . Tuttavia ci dice qualcosa di più, ovvero che, in assenza di influenze esterne, gli stati di quiete e di moto rettilineo uniforme sono altrettanto naturali per un oggetto. Non è necessario cercare una causa esterna per giustificare che un oggetto, dotato di moto, continui a mantenere la sua velocità inalterata.

Viceversa, se in un moto riscontriamo delle accelerazioni, cioè delle variazioni di velocità, allora devono essere all'opera degli agenti esterni che le causano.

Rimarchiamo che la legge di inerzia è *più generale* di  $\vec{F} = m\vec{a}$ . Vedremo (Capitolo 23) che in *relatività* la legge di inerzia è ancora valida, mentre la 2<sup>a</sup> legge di Newton va modificata.

### 8.3.1 Come verificare la legge di inerzia?

Nel mondo reale è praticamente impossibile realizzare le condizioni di un moto non soggetto ad azioni esterne: l'ambiente in cui viviamo è tutt'altro che vuoto, ed ogni oggetto tende ad interagire in qualche modo con l'ambiente

---

<sup>3</sup> La forza-peso che attrae il sasso verso terra è pari, in intensità, alla forza che attrae la Terra verso il sasso, ma l'effetto di quest'ultima non è percepibile, poiché la massa della Terra è troppo grande...



che lo circonda: un oggetto, lanciato in aria, risente dell'azione del proprio peso — tende a cadere; oppure, un oggetto, lanciato sulla superficie di un tavolo orizzontale, viene frenato dallo sfregamento — diciamo che risente dell'*attrito* con la superficie su cui appoggia.

L'ambiente in cui viviamo non consente di verificare la legge di inerzia direttamente, pertanto si arriva ad essa mediante un processo di astrazione. Per esempio, si possono far slittare oggetti via via più lisci su superfici orizzontali via via più levigate: ci accorgiamo che il moto è sempre frenato, ma si approssima sempre più ad un moto uniforme; nel frattempo il rumore dello strisciamento diventa sempre più debole, quindi deduciamo che l'interazione con la superficie diventa sempre più debole. Con un'estrapolazione concettuale, affermiamo che se l'interazione con la superficie scomparisse del tutto il moto sarebbe esattamente uniforme.

In effetti, si possono realizzare condizioni sperimentali molto simili a quelle di oggetti esenti da forze esterne. L'esempio tipico è fare uso di un piano orizzontale molto levigato, su cui vengono fatti scivolare oggetti appoggiati su dischi di ghiaccio secco. Il ghiaccio secco si ottiene raffreddando l'anidride carbonica ( $CO_2$ ) a temperature inferiori a  $-78^\circ C$ . In condizioni di pressione e temperatura ambiente, esso passa dallo stato solido direttamente allo stato gassoso, cioè "sublima". Un disco di ghiaccio secco, a contatto con un piano a temperatura ambiente, sublima, producendo un sottile strato di  $CO_2$  gassoso su cui scivola praticamente senza venire frenato. Pertanto, un oggetto di questo tipo si muove sul piano in condizioni praticamente libere. Osservandone il moto, si ottiene un'ottima approssimazione di moto rettilineo uniforme.

Si può realizzare una situazione simile anche in maniera molto più "casalinga". Si prende una pentola di acciaio, la si mette sul fornello per diversi minuti (vuota!), quindi si fa cadere all'interno qualche piccola gocciolina d'acqua. La pentola è diventata estremamente calda, ha una temperatura più alta di  $100^\circ C$ , pertanto la gocciolina, appena entra a contatto con il fondo della pentola, evapora continuamente sulla superficie inferiore di contatto, quindi è costantemente separata dal fondo da un piccolo strato di vapore acqueo. Il risultato è che la gocciolina, se inizialmente dotata di moto, lo mantiene indefinitamente (rimbalzando contro le pareti quando le incontra), finché non è evaporata del tutto <sup>[4]</sup>.

---

<sup>4</sup>Se l'esperimento non funziona, è perché la pentola non è sufficientemente calda, e la gocciolina in parte la bagna dove appoggia, creando così un contatto diretto con l'acciaio. . . Occorre aspettare che la pentola si scaldi di più. Difficile dire a priori quanto tempo occorre lasciarla sul fuoco: dipende dalle dimensioni della pentola e dalla potenza del fornello.

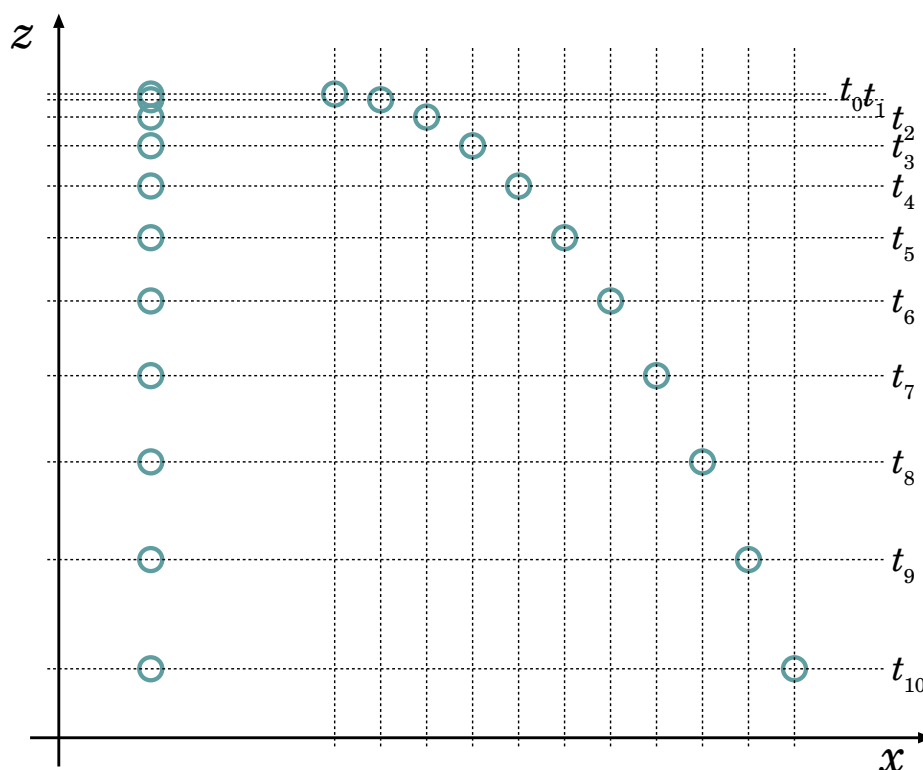


Figura 8.3: *Fotogrammi di un oggetto che cade a terra, scattati a intervalli di tempo regolari. A sinistra: l'oggetto cade da fermo. A destra: l'oggetto parte con una velocità orizzontale.*

### 8.3.2 Un ragionamento più articolato

Un'altra considerazione, più elaborata, ci può guidare allo stesso risultato. Pensiamo dapprima ad un oggetto lasciato cadere da fermo e misuriamone il moto. Orientiamo gli assi cartesiani in modo che  $\hat{z}$  sia orientato verso l'alto. Si osserva che il moto è rettilineo e diretto verso il basso. Facendo diversi fotogrammi a intervalli di tempo regolari, come in Fig. 8.3 a sinistra, si può ricavare la sua legge oraria, che per componenti cartesiane, è:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \\ y(t) &= y_0 \\ z(t) &= z_0 - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

Calcolando velocità e accelerazione lungo la direzione  $\hat{z}$ , con l'ausilio delle formule di derivazione descritte in Sezione 3.3 otteniamo:

$$v_z = \frac{dz}{dt} = -gt \quad ; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = -g$$

Il moto lungo  $\hat{z}$  non è uniforme: ha accelerazione  $-g\hat{z}$ . D'altra parte sappiamo empiricamente che qualunque oggetto lasciato libero cade sotto il suo peso. C'è un'azione esterna, indipendente dal singolo oggetto, che agisce lungo la verticale — nella fattispecie, verso il basso. Niente di nuovo. Viceversa, le prime due equazioni ci dicono che le coordinate  $x, y$  non cambiano: non si osserva nessuno spostamento lungo le direzioni  $\hat{x}, \hat{y}$ , pertanto non abbiamo ragione di sospettare di azioni esterne all'oggetto che agiscano in queste direzioni.

Misuriamo ora il moto di un oggetto lanciato in aria in direzione orizzontale con velocità iniziale  $v$  lungo la direzione  $\hat{x}$ :  $\vec{v}_0 = v\hat{x}$ . In questo caso il moto osservato ha una traiettoria parabolica, come in Fig. 8.3 a destra. Anche qui, con fotogrammi presi a intervalli di tempo regolari, si ottiene la legge oraria del moto, che per componenti è:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + vt \\ y(t) &= y_0 \\ z(t) &= z_0 - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

Calcolando per componenti la velocità e l'accelerazione — sempre con le formule della Sezione 3.3 — e omettendo la direzione  $\hat{y}$  per semplicità, otteniamo:

$$\begin{aligned} v_x = \frac{dx}{dt} = v \quad ; \quad a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ v_z = \frac{dz}{dt} = -gt \quad ; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = -g \end{aligned}$$

Anche ora il moto lungo  $\hat{z}$  non è uniforme, ma questo non ci deve turbare: sappiamo già che c'è un'azione esterna lungo la verticale. Il fatto che l'accelerazione sia sempre la stessa ( $-g$ ) è notevole: ci suggerisce che l'azione esterna non dipende dalla diversa condizione iniziale. Invece, il moto lungo  $\hat{x}$  *mantiene invariata la sua velocità iniziale*; nello stesso tempo, come abbiamo discusso prima, non abbiamo alcuna evidenza di azioni esterne che agiscano lungo tale direzione.

Proviamo a riassumere per punti i passaggi logici. Analizzando il moto di caduta di oggetti, sotto diverse condizioni iniziali (da fermi o con una

velocità iniziale orizzontale), ma nello stesso ambiente, abbiamo osservato le seguenti cose:

- esiste un’azione esterna diretta lungo la verticale — più precisamente verso il basso — che produce un’accelerazione costante  $g$ ;
- tale azione influenza la componente del moto lungo la direzione  $\hat{z}$ , in modo indipendente dalla condizione iniziale di quiete o di moto orizzontale;
- la precedente osservazione ci suggerisce che i moti lungo direzioni ortogonali (verticale e orizzontale in questo caso) possano essere trattati indipendentemente;
- nel caso di caduta da fermo, non si innesca nessuna componente orizzontale di moto; questo ci suggerisce che non esistano azioni esterne in direzioni orizzontali;
- se il moto aveva una velocità iniziale in direzione orizzontale, essa viene mantenuta invariata lungo la caduta;
- quindi, nelle direzioni orizzontali, non abbiamo azioni esterne e le velocità non subiscono variazioni, ovvero non ci sono accelerazioni orizzontali.

## 8.4 Commenti sulla legge di Newton

La legge di Newton

$$\vec{F}_{tot} = m\vec{a}$$

introduce due concetti strettamente legati fra loro: quello di *forza* e quello di *massa*. Non va presa come una definizione di forza, o di massa — è una *relazione* fra forze e massa.

- Una *forza* è una qualunque causa che contribuisce a produrre una accelerazione su un oggetto, vale a dire che ne modifichi la velocità (oppure che lo metta in moto se era fermo).
- La *massa* quantifica la “resistenza” di un oggetto a modificare la propria velocità.

La *massa* è legata ai concetti di “inerzia” e di “quantità di materia”. Facciamo un esempio. Supponiamo di avere un carrello della spesa vuoto:

possiamo metterlo in moto con una leggera spinta, e anche fargli cambiare direzione senza grande sforzo. In entrambi i casi stiamo alterando il suo stato di moto: stiamo impartendo ad esso una accelerazione. Quando il carrello è pieno diventa più faticoso metterlo in moto, e anche fargli cambiare direzione! Ovviamente il carrello ha più inerzia, e ovviamente contiene più materia di prima (c'è in più tutta la spesa fatta). In fisica, diciamo che il carrello pieno ha una massa maggiore di quando era vuoto. Diciamo anche che per imprimere la stessa accelerazione al carrello pieno occorre più forza che per il carrello vuoto.

**Esercizio 8.1.** *Un carrello della spesa, vuoto, ha una massa di 15 kg. Spingendolo con una forza costante per un tempo di 1 s, da fermo arriva a muoversi con una velocità di 2 m/s. Quanto vale la forza applicata? Alla fine della spesa, nel carrello sono stati caricati 30 kg di prodotti. Applicando la stessa forza per 1 s, che velocità raggiunge? Per quanto tempo è necessario spingerlo, con la stessa forza, affinché raggiunga la velocità di 2 m/s?*

**Risposta.** Il carrello vuoto ha massa  $m_0 = 15$  kg: applicando una forza  $F$  subisce un'accelerazione costante  $a_0 = \frac{F}{m_0}$ , pertanto dopo un tempo  $\Delta t_0 = 1$  s raggiunge una velocità  $v_0 = a_0 \Delta t_0$ . La forza impressa deve essere  $F = m_0 a = m_0 \frac{v_0}{\Delta t_0} = 15 \text{ kg} \cdot \frac{2 \text{ m/s}}{1 \text{ s}} = 30 \text{ N}$ .

A fine spesa, la massa del carrello è diventata  $m_1 = 45$  kg. Applicandovi la stessa forza  $F$ , si ottiene un'accelerazione  $a_1 = \frac{F}{m_1} = \frac{30 \text{ N}}{45 \text{ kg}} = 0.667 \text{ m/s}^2$ . Spingendolo per  $\Delta t_0 = 1$  s raggiunge una velocità  $a_1 \Delta t_0 = 0.667 \text{ m/s}$ . Per fargli raggiungere la velocità di 2 m/s occorre spingerlo per un tempo  $\frac{2 \text{ m/s}}{0.667 \text{ m/s}^2} = 3 \text{ s}$ .

**Esercizio 8.2.** *Un'automobile di massa  $m_0 = 1.2$  ton, con a bordo il conducente di massa  $m_1 = 80$  kg, deve frenare improvvisamente: il suo impianto frenante produce la massima decelerazione possibile, pari a  $a_0 = 5 \text{ m/s}^2$ . Se la stessa automobile, con lo stesso conducente, dovesse anche trasportare altre 4 persone della stessa massa e un carico di 400 kg, quale sarebbe la massima decelerazione che può produrre? Se inizialmente l'auto viaggiava alla velocità di 130 km/h, calcolare lo spazio necessario ad arrestarsi, in entrambi i casi.*

**Risposta.** La massa dell'automobile in unità S.I. è  $m_0 = 1200$  kg. La forza massima impressa dai freni deve essere  $F_0 = (m_0 + m_1)a_0 = (1280 \text{ kg})(5 \text{ m/s}^2) = 6400 \text{ N}$ . L'automobile con 5 persone e il carico ha una massa totale  $m' = (1200 + 5 \cdot 80 + 400) \text{ kg} = 2000 \text{ kg}$ . L'impianto frenante è sempre lo stesso, dunque  $F_0$  non è cambiata. La decelerazione sarà dunque  $a' = \frac{F_0}{m'} = \frac{6400 \text{ N}}{2000 \text{ kg}} = 3.2 \text{ m/s}^2$ .

Per rispondere all'ultima domanda, calcoliamo anzitutto il tempo di frenata: è il tempo  $t$  necessario per passare dalla velocità iniziale,  $v_0 = 130 \text{ km/h} = 36.11 \text{ m/s}$ , a velocità nulla. La legge oraria per la velocità è  $v = v_0 - at$ , da cui

$t = \frac{v_0}{a}$ . In tale tempo, lo spazio percorso è  $\Delta x = v_0 t - \frac{a}{2} t^2 = \frac{v_0^2}{2a}$ . Quando l'auto ha su solo il guidatore  $a = 5 \text{ m/s}^2$ , dunque  $\Delta x = 130 \text{ m}$ . Quando l'auto ha 4 passeggeri e il carico,  $a = 3.2 \text{ m/s}^2$ , dunque  $\Delta x = 204 \text{ m}$ .

### 8.4.1 Commenti su forza e accelerazione

La legge

$$\vec{F}_{\text{tot}} = m\vec{a}$$

fornisce una *relazione fra forze, massa, e accelerazione*:

- se conosciamo la massa  $m$  di un oggetto e la forza  $\vec{F}$ , o il sistema di forze  $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ , agente su di esso, possiamo *predire* l'accelerazione  $\vec{a}$  cui è soggetto:

$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}}{m}$$

- se conosciamo il sistema di forze  $\vec{F}_i$  che agiscono su un oggetto e ne misuriamo l'accelerazione  $\vec{a}$ , possiamo dedurre la massa  $m$ ;
- se conosciamo la massa  $m$  dell'oggetto e ne misuriamo l'accelerazione  $\vec{a}$ , possiamo risalire alla risultante delle forze  $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$  che agiscono su di esso.

### 8.4.2 Integrazione del moto

Il problema fondamentale della dinamica è *ricavare la legge oraria del moto*  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  a partire dalla conoscenza delle forze agenti.

Se in ogni istante  $t'$  conosciamo la forza totale  $\vec{F}(t')$ , possiamo calcolare l'accelerazione  $\vec{a}(t') = \frac{\vec{F}(t')}{m}$ , e quindi ricavare la legge oraria della velocità:

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^t dt' \vec{a}(t') \\ &= \vec{v}(t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt' \vec{F}(t') \end{aligned} \tag{8.8}$$

Analogamente, si ricava la legge oraria della posizione, integrando la velocità:

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^t dt' \vec{v}(t') \\
&= \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^t dt' \left[ \vec{v}(t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t'} dt'' \vec{F}(t'') \right] \\
&= \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \vec{F}(t'')
\end{aligned} \tag{8.9}$$

Questo calcolo si chiama *integrazione del moto*.

Osserviamo che, per risolvere il moto, è necessario conoscere non solo la forza  $\vec{F}$  applicata in tutto l'intervallo di tempo  $[t_0; t]$ , ma anche le *condizioni iniziali*, ovvero la velocità  $\vec{v}(t_0)$  e la posizione  $\vec{r}(t_0)$  all'istante iniziale  $t_0$ .

In alcuni (rari!) casi, la forma di  $\vec{F}(t)$  rende queste integrazioni possibili in forma analitica, sfruttando le regole riassunte nella Sezione 3.3. In molti casi l'integrazione analitica non è possibile, pertanto si risolve il problema al computer, con metodi numerici.

### 8.4.3 Condizione di equilibrio statico

Un punto materiale è in *equilibrio statico* se, una volta posto in quiete in una data posizione, lì resta.

Perché ciò si realizzi, occorre che  $\vec{a} = 0$ , e quindi che *la risultante delle forze* agenti su di esso sia nulla:

$$\vec{F}_{tot} = \sum_i \vec{F}_i = 0 \quad (\text{equilibrio statico}) \tag{8.10}$$

Insistiamo sul significato di tale condizione: non occorre che sull'oggetto non agiscano forze: esse possono esserci, e delle nature più svariate. L'importante è che la loro somma vettoriale sia zero.

Per esempio, sappiamo che un oggetto di massa  $m$  tende a cadere verso il basso con un'accelerazione  $\vec{a} = -g \hat{z}$  (vd Sezione 7.5.4), quindi deve essere soggetto ad una *forza-peso*  $\vec{F}_g = -mg \hat{z}$ . Se lo stesso oggetto è appoggiato su un piano orizzontale, oppure se è appeso ad un filo, resta fermo. Evidentemente, la forza-peso continua ad esistere — per esempio, se il piano è flessibile osserviamo che si incurva sotto il peso, oppure se il filo non è perfettamente inestensibile osserviamo un allungamento. Quindi, deve subentrare un'altra forza — dovuta al vincolo, piano o filo che sia — che bilancia la forza-peso:  $\vec{F}_{vinc} = -\vec{F}_g$ . Riprenderemo meglio questi casi nel Capitolo 9.

### 8.4.4 Forza tangenziale e centripeta

Nel Capitolo 7 abbiamo introdotto le accelerazioni *tangenziale* e *centripeta*:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \quad ; \quad \begin{array}{l} \vec{a}_t \parallel \vec{v} \\ \vec{a}_n \perp \vec{v} \end{array}$$

Questo suggerisce di scomporre anche la forza totale  $\vec{F}$  in due componenti: una *tangenziale*, parallela a  $\vec{v}$ , e una *centripeta*, perpendicolare a  $\vec{v}$ . Precisamente, se su un punto materiale agisce una forza  $\vec{F}$ , o più in generale un sistema di forze  $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$  di risultante  $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ , possiamo calcolare la componente tangenziale e quella centripeta come:

$$\begin{aligned} \vec{F}_t &= (\vec{F} \cdot \hat{v}) \hat{v} \\ \vec{F}_n &= \vec{F} - \vec{F}_t \end{aligned}$$

La forza tangenziale e centripeta sono legate alle rispettive accelerazioni da:

$$\vec{F} = \vec{F}_t + \vec{F}_n \quad ; \quad \begin{array}{ll} \vec{F}_t = m\vec{a}_t \parallel \vec{v} & \text{forza tangenziale} \\ \vec{F}_n = m\vec{a}_n \perp \vec{v} & \text{forza centripeta} \end{array} \quad (8.11)$$

Gli effetti di tali forze si deducono da quelli delle rispettive accelerazioni:

- la *forza tangenziale* altera il modulo della velocità, ma non la sua direzione:

$$\vec{F}_t = m \left( \frac{dv}{dt} \right) \hat{t} \quad (8.12)$$

- la *forza centripeta* altera la direzione del moto, ma non il modulo della velocità:

$$\vec{F}_n = m \left( \frac{v^2}{\rho} \right) \hat{n} = m\omega^2\rho\hat{n} \quad (8.13)$$

## 8.5 Commenti sulla legge di azione-reazione

Le forze che agiscono su di un oggetto sono dovute ad interazioni con altri oggetti circostanti. Queste interazioni possono avvenire sotto diverse forme. Per esempio per urti, oppure a distanza. In ogni caso, vale un principio generale: se l'oggetto (1) produce una forza  $\vec{F}_{21}$  sull'oggetto (2), allora anche



l'oggetto (2) è in grado di produrre una forza  $\vec{F}_{12}$  sull'oggetto (1). E c'è di più: queste due forze sono “uguali e contrarie”:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

e agiscono lungo la congiungente i due oggetti:  $\vec{F}_{12}, \vec{F}_{21} \parallel (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ .

Vedremo poi (Sezione 8.6 e Sezione 15.6) che questa legge ha importanti conseguenze rispetto all'esistenza di *quantità conservate*, ovvero *costanti del moto*.

Almeno qualitativamente, l'idea di azione-reazione fa parte della nostra esperienza quotidiana. Se una persona, seduta in ufficio alla sua scrivania su una sedia con le rotelle, spinge le braccia in avanti contro il bordo del tavolo, ottiene come effetto che per reazione “il tavolo la spinge indietro”. Una nave a motore, con le sue eliche spinge l'acqua all'indietro, e come effetto riceve una spinta in avanti. In modo del tutto simile, un aereo a reazione raccoglie l'aria dall'apertura frontale dei suoi turbo-reattori, la comprime e la scalda, facendola poi uscire all'indietro ad altissima velocità: come risultato viene spinto fortemente in avanti e riesce a volare. Il nome stesso, “aereo a reazione”, deriva proprio dal principio che stiamo descrivendo. Anzi, a questo punto viene da chiedersi quale sia un meccanismo di propulsione che non sfrutti il principio di azione-reazione... Anche un'automobile, o un pedone, avanzano perché “spingono all'indietro il terreno”.

**Esercizio 8.3.** *Un'auto da corsa di massa  $m = 500$  kg accelera da 0 a 100 km/h in  $\Delta t = 2.5$  s. Assumendo (che non è proprio vero!) che l'accelerazione sia costante, si calcoli la forza sviluppata dal motore. Perché, mentre è evidente che l'auto accelera in avanti, nessuno rileva che il terreno viene spinto all'indietro?*

**Risposta.**

L'accelerazione si calcola come  $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{100 \text{ km/h}}{2.5 \text{ s}} = 11.111 \text{ m/s}^2$ . La forza del motore sull'auto è  $F_a = ma = 5556 \text{ N}$ .

Secondo la legge di azione-reazione, deve esistere una forza uguale e contraria agente sul terreno:  $F_t = -F_a$ , quindi il terreno deve essere accelerato all'indietro. Qual è la massa del terreno? Se la strada è rigida, attaccata al suolo sottostante, dobbiamo considerare la massa di tutto ciò che è solidale con la strada... ovvero la massa del pianeta Terra, che è  $M = 6 \cdot 10^{24}$  kg. Quindi, l'accelerazione del terreno è  $a_t = \frac{F_t}{M} = 9 \cdot 10^{-22} \text{ m/s}^2$ ... decisamente non misurabile!

### L'asinello “saggio”

Un asino, avendo studiato Fisica, si rifiuta di trainare il carro. Ragiona così: “se io sono l'oggetto (a) e il carro l'oggetto (c), io applico una forza  $F_{ca}$  al carro, il

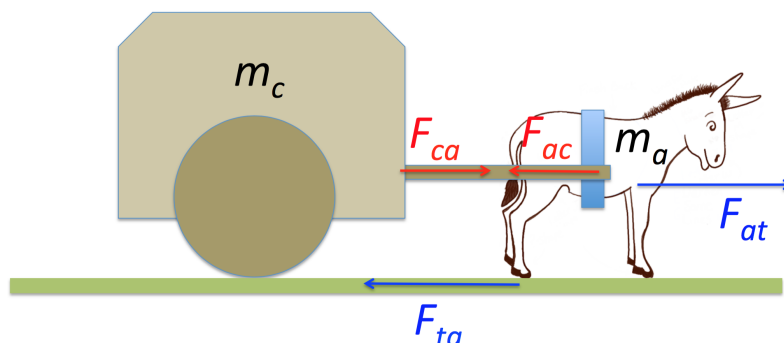


Figura 8.4: Schema delle forze nel problema dell'“asinello saggio”

carro applica su di me una forza  $F_{ac} = -F_{ca}$ ; quindi la forza totale è nulla e non ci muoviamo. Più io tiro, più il carro mi contrasta, quindi che tiro a fare???. Ovviamente l'affermazione è paradossale. Dov'è l'errore?

**Risposta.** Le forze  $F_{ca}$ ,  $F_{ac}$  non sono le uniche in gioco. L'asino (se si convince...) esercita anche una forza sul terreno, il quale reagisce sull'asino. Chiamando (t) il terreno, la forza che l'asino esercita sul terreno è  $F_{ta}$ , mentre il terreno di rimando esercita sull'asino una forza  $F_{at} = -F_{ta}$ . Lo schema di tutte le forze in gioco è quello di Fig. 8.4.

La forza totale agente sull'asino è dunque  $F_a^{tot} = F_{at} + F_{ac} = -(F_{ta} + F_{ca})$ . Guardiamo ai segni: l'asino spinge indietro il terreno, dunque  $F_{ta} < 0$ , però tira avanti il carro, quindi  $F_{ca} > 0$ . Basta che l'asino spinga abbastanza forte il terreno —  $|F_{ta}| > F_{ca}$  — perché la forza totale sull'asino sia  $> 0$ . L'accelerazione dell'asino è  $a = \frac{F_a^{tot}}{m_a} = -\frac{F_{ca} + F_{ta}}{m_a}$ , essendo  $m_a$  la massa dell'asino. Ma quanto deve valere  $F_{ta}$ ? Oppure, quanto vale  $F_{ca}$ ?

Proviamo ora a ragionare considerando il sistema (asino) + (carro). La forza totale agente su di esso è  $F_{c+a}^{tot} = F_c^{tot} + F_a^{tot} = F_{ca} + (F_{ac} + F_{at}) = F_{at} = -F_{ta}$ . L'accelerazione del sistema (asino) + (carro) è sempre  $a$ , e deve valere  $a = \frac{F_{c+a}^{tot}}{m_c + m_a} = -\frac{F_{ta}}{m_c + m_a}$ , essendo  $m_c$  la massa del carro.

Quindi, la forza che l'asino deve applicare sul terreno, è  $F_{ta} = -(m_c + m_a)a$ . Confrontando le due equazioni per l'accelerazione,  $\frac{F_{ca} + F_{ta}}{m_a} = \frac{F_{ta}}{m_c + m_a}$ , da cui  $F_{ca} = -\frac{m_c}{m_c + m_a}F_{ta} = \frac{m_c}{m_c + m_a}|F_{ta}|$ . Della forza applicata dall'asino sul terreno ( $|F_{ta}|$ ), una frazione  $\frac{m_c}{m_c + m_a}$  viene trasmessa al carro (il resto mette in moto lo stesso asino). Notate che, al crescere di  $\frac{m_c}{m_a}$ , la frazione di forza trasmessa al carro è maggiore. Se siete bravi carrettieri, potete convincere l'asino che gli conviene tirare carri più pesanti...

## 8.6 Quantità di moto

La legge di Newton ci porta a definire una quantità meccanica di importanza fondamentale: la *quantità di moto* <sup>[5]</sup>. Un oggetto di massa  $m$  e dotato di velocità  $\vec{v}$  possiede una quantità di moto

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (8.14)$$

Poiché la massa  $m$  è costante nel tempo,  $\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$ . Quindi la legge di Newton,  $\vec{F} = m\vec{a}$ , si può scrivere in modo equivalente come:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (8.15)$$

Questa equazione può facilmente essere integrata, per ottenere la variazione di quantità di moto  $\Delta\vec{p}$  che subisce un oggetto sottoposto a una forza  $\vec{F}(t)$ , in generale variabile con il tempo:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}(t) - \vec{p}(t_0) = \int_{t_0}^t \vec{F}(t') dt' \quad (8.16)$$

L'Eq. (8.16) è spesso nota come “teorema dell'impulso”. Nel caso di forza costante, questa equazione si riduce semplicemente a

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}(t) - \vec{p}(t_0) = \vec{F} \cdot (t - t_0) \quad (\vec{F} \text{ costante}) \quad (8.17)$$

### 8.6.1 Forze impulsive, impulso di una forza

Si chiamano “forze impulsive” forze che agiscono per intervalli di tempo  $\Delta t$  molto brevi — per esempio durante un urto.

Se su un oggetto agisce una forza impulsiva  $\vec{F}_{imp}$  per un intervallo di tempo  $\Delta t$ , si definisce l'*impulso* della forza come

$$\vec{\mathcal{I}} = \int_t^{t+\Delta t} dt' \vec{F}_{imp}(t') = \overline{\vec{F}_{imp}} \Delta t \quad (8.18)$$

dove abbiamo introdotto la “forza impulsiva media”

$$\overline{\vec{F}_{imp}} \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} dt' \vec{F}_{imp}(t') \quad (8.19)$$

---

<sup>5</sup> Attenzione alla terminologia: in relatività e in fisica delle particelle, al posto di “quantità di moto” si suole più spesso usare il termine *impulso*. In fisica classica, invece, tale termine è spesso usato per indicare l'integrale di una forza nel tempo, come spiegato in Sezione 8.6.1. Dunque, se trovate la parola “impulso” nella letteratura, attenzione a che cosa si intende!

agente nel breve intervallo di tempo  $\Delta t$ . Applicando l'Eq. (8.16):

$$\Delta \vec{p} = \int_t^{t+\Delta t} dt' \vec{F}_{imp}(t') = \overline{\vec{F}_{imp}} \Delta t = \vec{\mathcal{I}}$$

In generale, deve trattarsi di una forza molto intensa, se deve produrre un  $\Delta \vec{p}$  apprezzabile in un tempo  $\Delta t$  molto piccolo. Immaginate una martellata su un chiodo, o un sasso che sfonda un vetro. . . La durata  $\Delta t$  potrebbe anche non essere facile da definire, e di conseguenza nemmeno la forza media  $\overline{\vec{F}_{imp}}$ . In questi casi è molto più comodo caratterizzare l'effetto attraverso l'impulso  $\vec{\mathcal{I}}$ .

Se su un punto materiale agiscono tante forze  $\vec{F}_i$ , e una forza impulsiva  $\vec{F}_{imp}$ , la risultante è  $\vec{F}_{tot} = \sum_i \vec{F}_i + \vec{F}_{imp}$ . La variazione della quantità di moto, nel tempo  $\Delta t$  in cui agisce  $\vec{F}_{imp}$ , è quindi

$$\begin{aligned} \Delta \vec{p} &= \int_t^{t+\Delta t} dt' \left( \sum_i \vec{F}_i + \vec{F}_{imp} \right) \\ &= \vec{\mathcal{I}} + \int_t^{t+\Delta t} dt' \left( \sum_i \vec{F}_i \right) \end{aligned}$$

Ora, la forza impulsiva è normalmente molto più intensa delle altre,  $\vec{F}_{imp} \gg \sum_i \vec{F}_i$ , pertanto, nel breve tempo  $\Delta t$ , è l'unica che dà un effetto apprezzabile, mentre le altre  $\vec{F}_i$ , integrate su un tempo  $\Delta t$  molto breve, sono trascurabili:

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} dt' \left( \sum_i \vec{F}_i \right) &\ll \overline{\vec{F}_{imp}} \Delta t \equiv \vec{\mathcal{I}} \\ \Delta \vec{p} &\simeq \vec{\mathcal{I}} \end{aligned}$$

### 8.6.2 Conservazione della quantità di moto

Consideriamo due oggetti (1) e (2) che si scambiano forze  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  ciascuno sull'altro, e supponiamo che non esistano altre forze esterne. Le due forze soddisfano il principio di azione-reazione:  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ , pertanto anche le variazioni delle due quantità di moto sono tali che:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

Senza conoscere i dettagli delle forze scambiate fra (1) e (2), possiamo comunque affermare che in un tempo  $\Delta t$  le due quantità di moto sono variate ciascuna di

$$\Delta \vec{p}_i = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} dt \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

(con  $i = 1, 2$  per indicare ciascuno dei due oggetti), e quindi

$$\Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2 \quad (8.20)$$

ovvero la variazione di quantità di moto di un oggetto è *compensata* dalla variazione di quantità di moto dell'altro oggetto. In altre parole, la quantità di moto totale dei due oggetti non cambia:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{costante} \quad (8.21)$$

ma durante l'interazione viene scambiata da un oggetto all'altro.

Ripetiamo che questa circostanza si verifica *solo se le uniche forze in gioco sono quelle scambiate fra i due oggetti*.

Riassumendo: *quando due oggetti sono sottoposti solo alle reciproche forze — cioè senza ulteriori forze esterne — la loro quantità di moto totale si conserva, ovvero è una costante del moto*.

Nella dimostrazione abbiamo usato la legge di azione-reazione, in particolare il fatto che le forze agenti su (1) e su (2) siano uguali in modulo ed opposte. Se ciò non è vero, per esempio come in Fig. 8.2(c), la conservazione della quantità di moto viene violata.

### 8.6.3 Misure di massa

La conservazione della quantità di moto ci fornisce un metodo di misurare le masse di oggetti — anche se non è il metodo più comunemente usato.

Due oggetti di masse  $m_0$ ,  $m$  (ignote) vengono posti in quiete, separati da un dispositivo di massa trascurabile che li collega ed è pronto a “spararli via” — per esempio, una molla compressa e bloccata, che può rapidamente estendersi non appena viene sbloccata. Si può immaginare di appoggiare il tutto su un tavolo orizzontale liscio. La quantità di moto totale del sistema è nulla. Appena il dispositivo viene sbloccato, le due masse vengono sparate in direzioni opposte, con velocità  $\vec{v}_0$ ,  $\vec{v}$ , tali che

$$0 = m_0 \vec{v}_0 + m \vec{v}$$

In moduli,  $m_0 v_0 = mv$ , essendo le velocità  $v_0$ ,  $v$  misurabili subito dopo lo sblocco. Si noti che non facciamo nessuna ipotesi su come il dispositivo spari via le masse. Inoltre, l'estensione avviene in un tempo talmente breve, da poter trascurare qualunque effetto dell'interazione fra le due masse e il tavolo — si tratta di una forza *impulsiva*. Quindi si può risalire al valore della massa  $m$ :

$$m = \frac{v_0}{v} m_0$$

Il problema potrebbe sembrare indeterminato: due incognite ( $m$ ,  $m_0$ ) con una sola equazione. Ricordiamo però il significato di misura, ovvero “quante volte una grandezza campione è contenuta nella grandezza che dobbiamo misurare”. Quindi, se adottiamo una massa campione  $m_0$  (per esempio  $m_0 = 1$  kg), qualunque altra massa  $m$  può essere misurata con questo sistema in unità di  $m_0$ .

### 8.6.4 Esercizi sulla quantità di moto

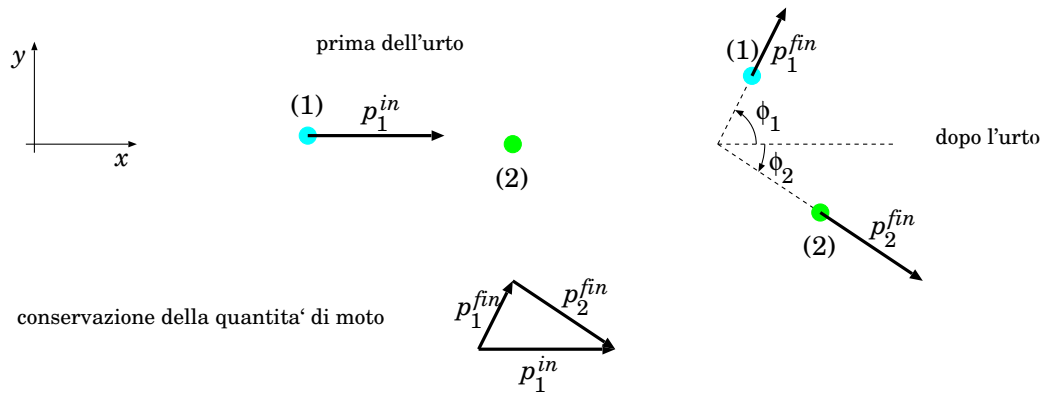
**Esercizio 8.4.** *Un pattinatore maleducato, di massa  $m_1 = 80$  kg, si muove sul ghiaccio alla velocità di  $v_1 = 3$  m/s, quando improvvisamente dà uno spintone ad un altro pattinatore di massa  $m_2 = 65$  kg, inizialmente fermo. In seguito alla spinta questo prende a muoversi con velocità di  $v_2 = 2$  m/s nella stessa direzione. Qual è la velocità del pattinatore maleducato dopo la spinta?*

**Risposta.** *Non sappiamo con quale forza il primo pattinatore ha spinto il secondo, però possiamo usare la conservazione della quantità di moto. Per il secondo pattinatore, la quantità di moto è cambiata di  $\Delta p_2 = m_2 v_2 = 130$  kg m/s. Pertanto per il primo deve essere cambiata di  $\Delta p_1 = -\Delta p_2$ . Chiamando  $v'_1$  la sua velocità dopo la spinta, deve quindi essere  $\Delta p_1 = m_1(v'_1 - v_1) = -\Delta p_2$ , ovvero  $v'_1 = v_1 - \frac{\Delta p_2}{m_1} = 3$  m/s  $- \frac{130$  kg m/s  $}{80$  kg  $= 1.375$  m/s.*

**Esercizio 8.5.** *Un soldato in addestramento spara un colpo di fucile contro un sacco di sabbia. Il proiettile, con massa  $m = 25$  g, viene sparato ad una velocità di 250 m/s. Se il soldato ha massa  $M = 85$  kg, con quale velocità rincula all'indietro? Il sacco di sabbia ha una massa  $m' = 30$  kg: che velocità acquista quando il proiettile si conficca in esso?*

**Risposta.** *Prima dello sparo, la quantità di moto del sistema soldato+proiettile è zero. Pertanto, tale deve essere anche dopo. La quantità di moto del proiettile è  $p = mv = (0.025$  kg  $\cdot$   $250$  m/s  $) = 6.25$  kg  $\cdot$  m/s. La stessa quantità di moto (all'indietro) viene quindi ceduta al soldato, che quindi rincula alla velocità  $\frac{p}{M} = \frac{6.25$  kg  $\cdot$  m/s  $}{85$  kg  $= 0.0735$  m/s.*

*Prima dell'impatto, il sacco è fermo, dunque non ha quantità di moto. Dopo l'impatto, la quantità di moto del sistema sacco+proiettile deve essere la stessa*

Figura 8.5: *Urto fra due bocce.*

posseduta dal proiettile prima dell'impatto; inoltre il proiettile si conficca nel sacco, quindi i due oggetti si muovono insieme. Pertanto, detta  $v'$  la velocità del sacco dopo l'impatto, deve essere  $(m + m')v' = p$ . Risolvendo, si trova

$$v' = \frac{p}{m + m'} = \frac{6.25 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{30.025 \text{ kg}} = 0.208 \text{ m/s}.$$

**Esercizio 8.6.** Una boccia di massa  $m_1$  si muove con velocità  $v_1^{in}$ , quando all'improvviso urta un'altra boccia di massa  $m_2$ , inizialmente ferma. Dopo l'urto, la prima boccia si muove con velocità  $v_1^{fin}$ , in una direzione diversa che forma un angolo  $\phi_1$  rispetto alla direzione iniziale. Si calcolino la velocità  $v_2^{fin}$  della seconda boccia, e l'angolo  $\phi_2$  della sua direzione, sempre rispetto alla direzione iniziale della prima boccia.

**Risposta.** Si usa sempre la conservazione della quantità di moto. Schematizziamo il problema come in Fig. 8.5. Inizialmente le quantità di moto sono  $\vec{p}_1^{in}$  e  $\vec{p}_2^{in} = 0$ . Dopo l'urto abbiamo  $\vec{p}_1^{fin}$  e  $\vec{p}_2^{fin}$ , tali che  $\vec{p}_1^{in} = \vec{p}_1^{fin} + \vec{p}_2^{fin}$ . Quindi i 3 vettori non nulli  $(\vec{p}_1^{in}, \vec{p}_1^{fin}, \vec{p}_2^{fin})$  non sono linearmente indipendenti. Il problema è 2-dimensionale, poiché si svolge sul piano individuato da  $\vec{p}_1^{in}$ ,  $\vec{p}_2^{fin}$ . Quindi introduciamo le coordinate cartesiane  $x, y$ , tali che l'asse  $\hat{x}$  sia orientato come  $\vec{v}_1^{in}$ . Con questa scelta:

$$\begin{aligned} p_{1,x}^{in} &= m_1 v_1^{in} & ; & & p_{1,y}^{in} &= 0 \\ p_{1,x}^{fin} &= m_1 v_1^{fin} \cos \phi_1 & ; & & p_{1,y}^{fin} &= m_1 v_1^{fin} \sin \phi_1 \\ p_{2,x}^{fin} &= m_2 v_2^{fin} \cos \phi_2 & ; & & p_{2,y}^{fin} &= m_2 v_2^{fin} \sin \phi_2 \end{aligned}$$

Dalla conservazione della quantità di moto:

$$\begin{aligned} v_{2,x}^{fin} &= \frac{p_{2,x}^{fin}}{m_2} = \frac{m_1}{m_2} (v_1^{in} - v_1^{fin} \cos \phi_1) \\ v_{2,y}^{fin} &= \frac{p_{2,y}^{fin}}{m_2} = -\frac{m_1}{m_2} v_1^{fin} \sin \phi_1 \end{aligned}$$

Poi ovviamente  $v_2^{fin} = \sqrt{(v_{2,x}^{fin})^2 + (v_{2,y}^{fin})^2}$  e  $\tan \phi_2 = \frac{v_{2,y}^{fin}}{v_{2,x}^{fin}}$ .

**Esercizio 8.7.** *Un oggetto di massa  $m = 10$  kg cade al suolo da un'altezza  $h = 1$  m. Così come l'oggetto è attratto dalla gravità terrestre, anche la Terra è attratta dall'oggetto, con una forza di pari intensità ma di direzione opposta. Quindi, che ci crediate o no, anche la Terra “cade verso l'alto”. Con quale velocità la Terra “cade” al momento della collisione con l'oggetto? Occorre sapere che la massa della Terra è  $M_{\oplus} = 6 \cdot 10^{24}$  kg.*

**Risposta.** *L'oggetto si muove di moto uniformemente accelerato verso il basso, secondo la legge  $\Delta s = \frac{1}{2}gt^2$ . Quando colpisce il terreno, il tempo intercorso è tale che  $\frac{1}{2}gt^2 = h$ , ovvero  $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0.452$  s. La sua velocità è  $v = gt = \sqrt{2gh} = 4.43$  m/s. Quindi la sua quantità di moto è  $p = mv = 44.3$  kg m/s. Anche la Terra deve avere acquistato una uguale quantità di moto, verso l'alto:  $M_{\oplus}v_{\oplus} = p$ , pertanto la velocità acquistata dalla Terra è  $v_{\oplus} = \frac{p}{M_{\oplus}} = 7.38 \cdot 10^{-24}$  m/s. Ovviamente si tratta di una velocità estremamente piccola ed assolutamente non rilevabile. Per questo il buon senso ci dice che “la Terra non cade verso l'alto, ma se ne sta lì dov'è”.*



# Capitolo 9

## Forze “macroscopiche”

Cominciamo con lo studiare il moto di un punto materiale in condizioni che ci sono più familiari. Alcune forze fanno parte della nostra esperienza quotidiana:

- la prima è la cosiddetta “forza-peso”, ovvero la *forza di gravità*, che attrae qualunque oggetto verso il basso.

Questa forza agisce sempre, su qualunque oggetto in prossimità della superficie terrestre.

Vi sono poi numerose altre forze, dette *forze di contatto* che si manifestano quando un oggetto entra in contatto con altri materiali, solidi o liquidi o gassosi.

- le *reazioni vincolari*, quando l’oggetto con cui si entra in contatto è rigido, cioè si oppone alle deformazioni;
- le *tensioni*, prodotte da fili inestensibili tesi;
- le *forze elastiche*, quando l’oggetto con cui si entra in contatto ha la capacità di deformarsi, e la tendenza a riprendere la sua forma iniziale: per esempio una molla;
- gli *attriti*, prodotti dal contatto con altri materiali, solidi o liquidi o gassosi.

Nell’introduzione abbiamo già detto che la materia (solida, liquida, o gassosa che sia) è sostanzialmente “vuota”, nel senso che le masse occupano una frazione di volume minuscola (Sezione 1.1). Inoltre tutte le interazioni, a livello elementare fra atomi e molecole, sono di natura elettromagnetica, dunque sono “interazioni a distanza” (Sezione 1.3.3).

Quindi, a livello fondamentale *le forze di contatto non esistono*. Esse sono in effetti la manifestazione macroscopica di una combinazione di interazioni fondamentali. Tuttavia, descriverle in questo modo sarebbe estremamente complicato e poco utile ai fini pratici, pertanto è preferibile una trattazione più empirica. Il limite di validità di questa trattazione è dato dalle dimensioni dei sistemi fisici descritti: devono essere formati da *molti atomi*, affinché gli effetti locali di ciascuno di essi si diluiscano con quelli degli atomi circostanti.

## 9.1 La “forza-peso”

Nella Sezione 7.5.4 abbiamo visto che qualunque oggetto, in prossimità della superficie terrestre, subisce la forza di gravità che lo sottopone ad una accelerazione pari a:

$$\vec{a} \equiv -g \hat{z} \quad (\text{alla superficie terrestre}) \\ (g = 9.806 \text{ m/s}^2)$$

Questo fatto è *indipendente dalla massa  $m$  dell’oggetto*. Quindi, la *forza di gravità* agente su un oggetto di massa  $m$  è sempre proporzionale alla massa:

$$\vec{F}_g = m \vec{g} \quad (9.1)$$

essendo:

$$\vec{g} \equiv -g \hat{z} \quad (\text{alla superficie terrestre}) \quad (9.2) \\ (g = 9.806 \text{ m/s}^2)$$

La forza di gravità alla superficie terrestre è spesso chiamata anche *forza-peso* <sup>[1]</sup>.

### 9.1.1 Proporzionalità fra forza-peso e massa

La proporzionalità fra la forza-peso e la massa, e quindi il fatto che l’accelerazione sia indipendente dalla massa, è una importantissima peculiarità della gravità. Un’applicazione immediata è che, per misurare masse  $m$  di oggetti, si può misurare la forza-peso,  $F_g = mg$ , mediante una bilancia, quindi ricavare la misura della massa come  $m = \frac{F_g}{g}$ .

Ritroveremo spesso, nei prossimi capitoli, altre importanti conseguenze di questa proprietà.

---

<sup>1</sup> La forza di gravità è uniforme solo in prossimità della superficie della Terra, o di un pianeta, o di un qualunque oggetto molto esteso e massivo. In generale, la forza di gravità *non è uniforme*. Per esempio, a grandi distanze dall’oggetto astrofisico che la genera, essa è radiale e si attenua come l’inverso del quadrato della distanza.

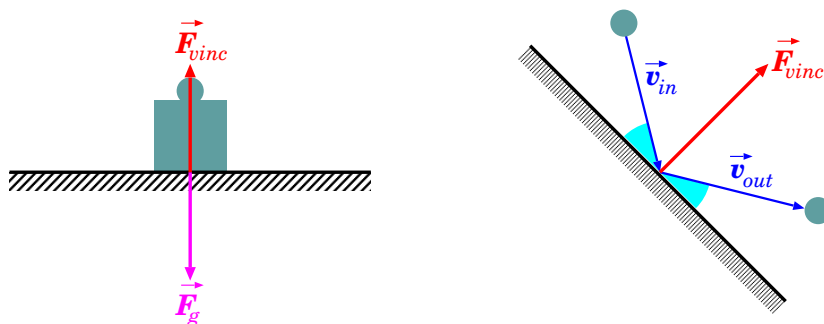


Figura 9.1: Due esempi di reazione vincolare: a sinistra, un piano orizzontale che si oppone alla forza-peso; a destra, un rimbalzo contro una parete rigida. In entrambi i casi,  $\vec{F}_{vinc}$  è perpendicolare alla superficie rigida.

## 9.2 Reazioni vincolari

Le reazioni vincolari entrano in funzione quando un oggetto rigido entra in contatto con un altro oggetto rigido. Poiché entrambi sono indeformabili, non possono compenetrarsi.

Al livello atomico e molecolare abbiamo già discusso nella Sezione 1.3.3 che cosa succede: gli atomi hanno interazioni elettriche che li tengono “in posizione”, ovvero non possono schiacciarsi gli uni contro gli altri, nè allontanarsi gli uni dagli altri.

Al livello macroscopico, diamo una descrizione più empirica, e diciamo che gli oggetti solidi, quando entrano in contatto diretto, manifestano forze repulsive, perpendicolari alla superficie di contatto, che impediscono la compenetrazione <sup>[2]</sup>.

Per esempio, se appoggiamo un oggetto di massa  $m$  su un tavolo orizzontale, esso sta fermo — vd Fig. 9.1 (sinistra). Quindi la risultante delle forze agenti su di esso deve essere nulla. Sappiamo che su di esso agisce la forza di gravità, diretta verso il basso:  $\vec{F}_g = -mg\hat{z}$ . Deve quindi esistere un'altra forza che la contrasti esattamente, in modo che la risultante sia nulla. Questa è la reazione vincolare opposta dal tavolo:  $\vec{F}_{vinc} = -\vec{F}_g$ .

Un altro esempio: una palla da biliardo rimbalza contro una superficie rigida — vd Fig. 9.1 (destra). Misurando le velocità  $\vec{v}_{in}$ ,  $\vec{v}_{out}$  prima e dopo l'urto, si osserva che sono uguali in modulo,  $|\vec{v}_{in}| = |\vec{v}_{out}|$ , e che gli angoli di entrata e di uscita sono uguali. Si deduce quindi che la variazione di velocità,  $\Delta\vec{v} = \vec{v}_{out} - \vec{v}_{in}$ , è perpendicolare alla superficie rigida. L'urto deve

<sup>2</sup> Per un modello macroscopico un po' più approfondito, rimandiamo alla Sezione 9.5.5, e poi alla Sezione 14.4.1.

essere durato per un breve tempo  $\Delta t$ , durante il quale ha agito la reazione del vincolo, che ha prodotto la variazione di velocità:  $\vec{F}_{vinc} = m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ . Quindi anche in questo caso risulta che  $\vec{F}_{vinc}$  è perpendicolare alla superficie rigida. Il suo modulo,  $F_{vinc}$ , non è facilmente determinabile: si tratta di una forza impulsiva che agisce in un breve tempo  $\Delta t$ , producendo una inversione della componente della velocità ortogonale alla superficie del vincolo,  $v_{\perp}$ . Possiamo solo calcolare il suo valore medio: la variazione della quantità di moto, in modulo, è  $|\Delta \vec{p}| = 2mv_{\perp}$ , quindi  $\overline{F_{vinc}} = \frac{2mv_{\perp}}{\Delta t}$ .

Ancora un esempio: un treno viaggia con velocità  $v$  su una rotaia, che descrive un tratto curvo ad arco di cerchio, con raggio di curvatura  $\rho$ . Dalle nozioni di cinematica, Sezione 7.7, sappiamo che un cambiamento di direzione implica la presenza di un'accelerazione centripeta. Precisamente, l'Eq. (7.36) ci dice che  $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ , quindi deve esistere una forza centripeta  $F_n = m \frac{v^2}{\rho}$ . In questo caso è la reazione vincolare della rotaia a produrre tale forza: essa costringe il treno a seguire un percorso curvo, pertanto deve imprimere su di esso una forza:  $F_{vinc} = m \frac{v^2}{\rho}$ .

Notiamo che in tutti questi casi, l'intensità della reazione vincolare non è determinata a priori — non è cioè una caratteristica intrinseca del vincolo, dipende dalle condizioni del problema.

Riassumiamo quindi le caratteristiche delle reazioni vincolari:

- la reazione vincolare esiste solo in caso di contatto;
- è sempre perpendicolare alla superficie del vincolo e diretta verso l'esterno (repulsiva);
- il suo modulo è determinato dalle condizioni del problema: in generale, la strategia è identificare le altre forze agenti,  $\vec{F}_i$ , e le condizioni realizzate nel moto, ovvero l'accelerazione  $\vec{a}$ ;  $\vec{F}_{vinc}$  sarà tale da soddisfare  $\vec{F}_{vinc} + \sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$ .

### 9.2.1 Esercizi sulle reazioni vincolari

Consideriamo qui alcuni esempi di forze vincolari.

**Esercizio 9.1.** *Un oggetto di massa  $m = 2.5$  kg è appoggiato su un piano orizzontale rigido. Calcolare la reazione vincolare che il piano esercita sull'oggetto, nei seguenti casi: (1) il piano è fermo; (2) il piano accelera verso l'alto con*

accelerazione  $a_2 = 3 \text{ m/s}^2$ ; (3) il piano accelera verso il basso con accelerazione  $a_3 = -4 \text{ m/s}^2$ ; (4) il piano accelera verso il basso con accelerazione  $a_4 = -10 \text{ m/s}^2$ .

**Risposta.** In tutti i casi si deve applicare  $\vec{F}_{\text{tot}} = m\vec{a}$ . L'oggetto è a contatto con il piano, quindi l'accelerazione dell'oggetto è uguale a quella del piano. In questo problema,  $\vec{F}_{\text{tot}} = -mg\hat{z} + \vec{F}_{\text{vinc}}$ , ed essendo il piano sempre orizzontale,  $\vec{F}_{\text{vinc}}$  è sempre verticale:  $\vec{F}_{\text{vinc}} = F_{\text{vinc}}\hat{z}$ . Inoltre, essendo la forza vincolare sempre diretta verso l'esterno del vincolo, deve essere sempre  $F_{\text{vinc}} \geq 0$ . Il problema diventa dunque unidimensionale:  $ma = F_{\text{tot}} = F_{\text{vinc}} - mg$ , ovvero  $F_{\text{vinc}} = m(a+g)$ . Ora analizziamo i vari casi:

- (1) il piano è fermo, quindi  $a = 0$  e  $F_{\text{vinc}} = mg = 24.52 \text{ N}$  — facile, no? La forza vincolare è tale da contrastare esattamente la forza-peso.
- (2) il piano accelera verso l'alto:  $F_{\text{vinc}} = m(a_2 + g) = 32.02 \text{ N}$ . Ora la forza vincolare è maggiore della forza-peso — se il piano fosse una bilancia, “sentirebbe un peso maggiore”, per così dire...
- (3) il piano accelera verso il basso:  $F_{\text{vinc}} = m(a_3 + g) = 14.52 \text{ N}$ . La forza vincolare è minore della forza-peso — se il piano fosse una bilancia, “sentirebbe un peso minore”.
- (4) il piano accelera verso il basso con un'accelerazione che, in valore assoluto, è maggiore di  $g$ :  $F_{\text{vinc}} = m(a_4 + g) = -0.485 \text{ N}$ . Abbiamo trovato  $F_{\text{vinc}} < 0$ , che non ha significato fisico. Questo significa che in realtà l'oggetto non può restare appoggiato al piano, perché “il piano cade più in fretta”. Quindi accade che il piano si stacca dall'oggetto, e non esercita più la reazione vincolare:  $F_{\text{vinc}} = 0$ . L'unica forza agente sull'oggetto è la forza-peso,  $F_g = -mg$ , e l'oggetto cade con accelerazione  $-g$ , verso il basso.

**Esercizio 9.2.** Una locomotiva di massa  $m = 80 \text{ ton}$  percorre una curva di raggio  $\rho = 100 \text{ m}$  alla velocità  $v = 75 \text{ km/h}$ . Calcolare l'accelerazione centripeta e la reazione vincolare della rotaia.

**Risposta.** Anzitutto convertiamo le misure in unità del S.I.:  $m = 80 \text{ ton} = 8 \cdot 10^4 \text{ kg}$ ;  $v = 75 \text{ km/h} = 20.83 \text{ m/s}$ . L'accelerazione centripeta è  $a_n = \frac{v^2}{\rho} = 4.339 \text{ ms}^{-2}$ . La reazione vincolare è  $F_{\text{vinc}} = ma_n = 3.47 \cdot 10^5 \text{ N}$ .

**Esercizio 9.3.** Un'automobile di massa  $m = 1.5 \text{ ton}$  percorre a velocità  $v$  una curva il cui raggio di curvatura è  $\rho = 50 \text{ m}$ . La forza centripeta massima che i pneumatici possono imprimere alla vettura è  $F_n^{\text{max}} = 8 \cdot 10^3 \text{ N}$ . Qual è la velocità massima  $v^{\text{max}}$  che l'automobile può sostenere senza sbandare?

**Risposta:** la forza centripeta impressa dai pneumatici in curva è  $F_n = m \frac{v^2}{\rho}$ . Ovviamente deve essere  $F_n < F_n^{\text{max}}$ , quindi  $v = \sqrt{\frac{F_n \rho}{m}} < \sqrt{\frac{F_n^{\text{max}} \rho}{m}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 50 \text{ m}}{1500 \text{ kg}}} = 16.33 \text{ m/s} = 58.79 \text{ km/h}$ .

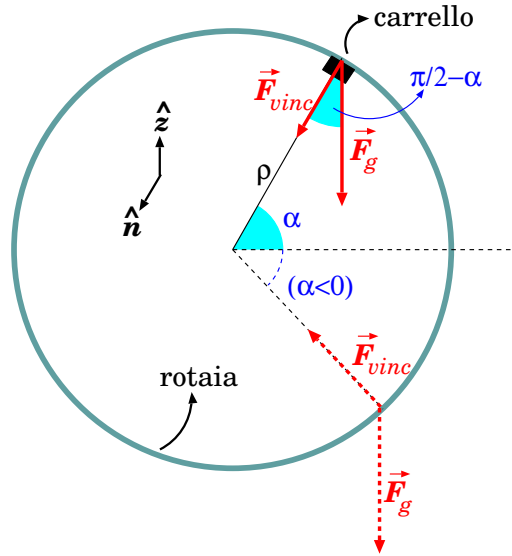


Figura 9.2: Giro della morte nelle montagne russe, con diagramma delle forze. Per  $\alpha > 0$  il carrello potrebbe staccarsi dalla rotaia, se la velocità è troppo bassa; invece, per  $\alpha < 0$  (linee tratteggiate) il distacco non c'è mai.

### Giro della morte sulle montagne russe

Un carrello delle montagne russe deve fare un “giro della morte” verticale, di forma circolare di raggio  $\rho$  (vd Fig. 9.2). Chiamato  $\alpha$  l'angolo, rispetto all'orizzontale, che denota la posizione del carrello, che condizioni deve soddisfare la velocità  $v$  affinché il carrello non si stacchi dalla rotaia?

**Risposta.** Agiscono due forze: la forza-peso  $\vec{F}_g = -mg\hat{z}$ , diretta verticalmente verso il basso, e la forza vincolare  $\vec{F}_{vinc} = F_{vinc}\hat{n}$ , diretta perpendicolare alla rotaia e verso il centro: quindi  $F_{vinc} > 0$  — il caso  $F_{vinc} < 0$  vorrebbe dire che il vincolo attrae verso di sé il carrello, cosa che non è possibile.

La forza risultante deve avere componente centripeta  $\vec{F}_n = m\frac{v^2}{\rho}\hat{n}$ . Quindi:

$$F_n = \vec{F}_{tot} \cdot \hat{n} = (F_{vinc}\hat{n} + \vec{F}_g) \cdot \hat{n}$$

$$m\frac{v^2}{\rho} = F_{vinc} + F_g \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = F_{vinc} + mg \sin \alpha$$

La condizione  $F_{vinc} > 0$  diventa quindi  $m\left(\frac{v^2}{\rho} - g \sin \alpha\right) > 0$ , ovvero:

$$v^2 > \rho g \sin \alpha$$

A questo punto i casi sono due:

- *il carrello si trova più in basso del centro di curvatura: quindi  $\alpha < 0$ ,  $\sin \alpha < 0$ , e la condizione è sempre soddisfatta per qualunque valore di  $v$ : il carrello non si stacca mai (come ci si aspetterebbe!)*
- *il carrello si trova più in alto del centro di curvatura: in questo caso esiste una velocità minima  $v_{min} = \sqrt{\rho g \sin \alpha}$ , al di sotto della quale avremmo la condizione assurda  $F_{vinc} < 0$ : non essendo possibile, il carrello si staccerebbe.*

### 9.3 Tensioni su fili inestensibili

Un oggetto, attaccato ad una corda inestensibile tesa, viene da essa trattenuto, quindi subisce una forza vincolare. In tal caso essa è costituita dalla *tensione* della corda. In generale, le tensioni — che sono comunque delle forze — si indicano con  $F_T$  <sup>[3]</sup>.

Qui consideriamo sempre fili e/o corde di massa trascurabile. Consideriamo alcuni esempi.

Un oggetto di massa  $m$  viene trainato con una corda, con accelerazione  $\vec{a}$ . Se non agiscono altre forze, l'accelerazione è tutta dovuta alla tensione della corda, quindi  $\vec{F}_T = m\vec{a}$ . La corda è tesa nella direzione in cui l'oggetto viene trainato.

Oppure: un oggetto di massa  $m$  è appeso ad una corda, in quiete. Su di esso agiscono la forza-peso,  $\vec{F}_g = -mg\hat{z}$ , e la tensione della corda,  $\vec{F}_T$ . Siamo in condizione di equilibrio statico, quindi  $\vec{F}_g + \vec{F}_T = 0$ , ovvero  $\vec{F}_T = mg\hat{z}$ . La tensione è diretta in verticale, verso l'alto, e il suo modulo è  $F_T = mg$ .

Ancora: un oggetto di massa  $m$  ruota, con velocità  $v$ , trattenuto da una corda di lunghezza  $\ell$  ancorata ad un punto fisso. Il moto per forza di cose è circolare, con raggio  $\ell$ , quindi ci deve essere una forza centripeta  $F_n = m\frac{v^2}{\ell}$ . Se non agiscono altre forze, l'unica forza che contribuisce a  $F_n$  è la tensione  $F_T$ , quindi  $F_T = m\frac{v^2}{\ell}$ . Ovviamente la corda è disposta sempre lungo il raggio della circonferenza.

Le proprietà delle *forze di tensione* sono:

- la tensione agisce solo quando la corda è tesa;

---

<sup>3</sup> In molti testi si usa il simbolo  $T$  per le tensioni: attenzione a non confondersi con il *periodo* del moto armonico, anch'esso indicato con  $T$ ...

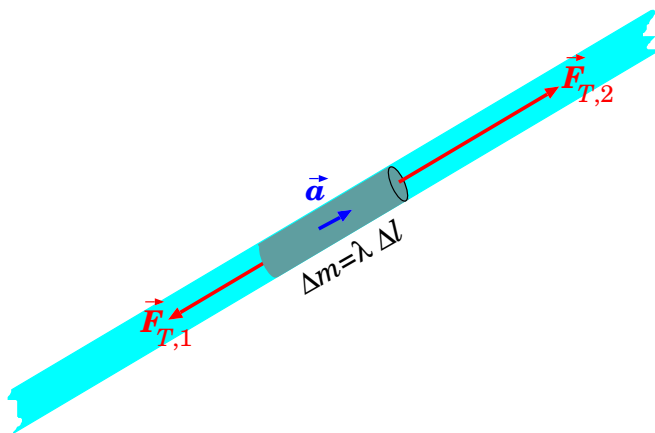


Figura 9.3: Schema delle tensioni sull'elemento di corda.

- agisce lungo la direzione della corda, sempre in trazione;
- il valore  $F_T$  della tensione e la direzione  $\hat{F}_T$  in cui si dispone la corda dipendono dalle condizioni del problema: dette  $\vec{F}_i$  le altre forze agenti, e  $\vec{a}$  l'accelerazione dell'oggetto, deve essere  $\vec{F}_T + \sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$ .

### 9.3.1 Propagazione della tensione lungo un filo “ideale”

In quanto segue consideriamo solo *fili ideali*, ovvero:

- inestensibili (la lunghezza del filo e di ogni sua parte non sono modificabili);
- di massa nulla (o meglio, il filo e ogni sua parte hanno masse trascurabili rispetto a tutte le altre masse del sistema considerato).

La tensione esiste lungo tutto il filo — non solo ai capi. Vogliamo mostrare che essa è uniforme, in modulo, ai capi e in ogni punto del filo ideale.

Con riferimento alla Fig. 9.3, l'elementino  $\Delta l$  di filo è sottoposto, ai suoi estremi, a due tensioni  $\vec{F}_{T,1}$ ,  $\vec{F}_{T,2}$  che lo tirano in direzioni opposte. Detta  $\Delta m$  la massa dell'elementino, si suole definire la *densità lineare*

$$\lambda = \frac{\Delta m}{\Delta l} \quad (\text{densità lineare di massa})$$



La dinamica dell'elementino è data da:

$$\vec{F}_{T,1} + \vec{F}_{T,2} = \Delta m \cdot \vec{a} = \lambda \Delta \ell \cdot \vec{a}$$

Per un filo teso, tutti i vettori hanno la stessa direzione. Pertanto, con una scelta opportuna dell'orientamento, l'equazione diventa scalare:

$$F_{T,2} - F_{T,1} = \Delta m \cdot a = \lambda \Delta \ell \cdot a$$

In generale,  $F_{T,1} \neq F_{T,2}$ . Tuttavia, le tensioni ai capi dell'elementino sono uguali se:

- se il filo è *statico*, oppure *scorre con velocità costante*, allora  $a = 0$  e  $F_{T,1} = F_{T,2}$ ;
- anche in caso di moto accelerato, se *la massa del filo è trascurabile* abbiamo ancora  $F_{T,1} = F_{T,2}$ .

Nei casi che tratteremo qui, considereremo sempre la tensione come uguale lungo tutto il filo.

Se il filo è flesso da una o più carrucole, i cui effetti (massa e attriti) siano trascurabili, l'effetto di ciascuna carrucola è di modificare la direzione del filo, e quindi della tensione, senza alterarne l'intensità (per farsi un'idea, vd Fig. 9.4). Questo fatto viene approfondito nella Sezione 9.3.2.

### 9.3.2 Carrucola ideale e filo ideale

Una carrucola è un dispositivo rigido attorno al quale il filo, posto a contatto, si flette. Parliamo di *carrucola ideale* quando il contatto con il filo non ha attriti. Possiamo pensare alla carrucola anche come ad un perno che non ruota. La situazione è illustrata in Fig. 9.5 (sinistra).

Vogliamo mostrare che, se ai capi  $A$ ,  $B$  del filo vengono applicate due tensioni  $\vec{F}_T^A$ ,  $\vec{F}_T^B$ , allora:

- la presenza della carrucola modifica la direzione della tensione, ma non il suo modulo, ovvero

$$\left| \vec{F}_T^A \right| = \left| \vec{F}_T^B \right|$$

- la carrucola applica sul filo una forza vincolare:

$$\vec{F}_{vinc} = - \left( \vec{F}_T^A + \vec{F}_T^B \right)$$

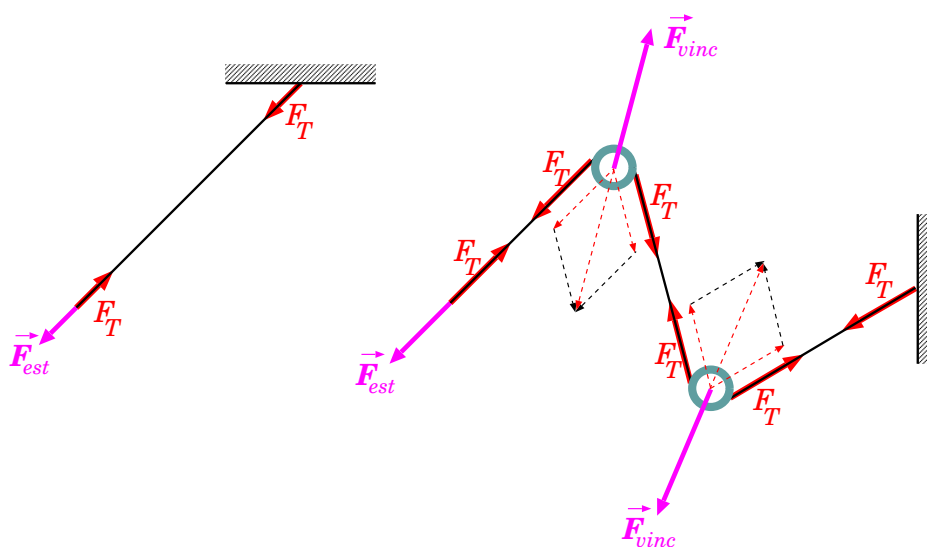


Figura 9.4: Schemi di tensioni, indicate dalle frecce rosse, lungo corde inestensibili tese. A sinistra: una semplice corda, con tensioni uguali in modulo ma opposte agli estremi. A destra: una corda flessa da carrucole, lungo la quale la tensione mantiene sempre lo stesso modulo, ma cambia direzione, disponendosi sempre lungo la corda. In questo caso, in prossimità di ciascuna carrucola, le due tensioni producono una risultante (freccia rossa tratteggiata), che deve essere compensata dalla reazione vincolare della carrucola (freccia viola).

- il filo applica sulla carrucola una forza:

$$\vec{F}_{CF} = \vec{F}_T^A + \vec{F}_T^B$$

Notiamo che il 3° punto è conseguenza del 2° e della legge di azione-reazione, quindi ci concentriamo sui primi 2.

Parametizziamo la posizione sul filo con la coordinata curvilinea  $s$ , e chiamiamo  $s_A, s_B$  i valori che essa assume ai capi  $A, B$  del filo.

Chiamiamo  $\vec{F}_T(s)$  la tensione nel punto di coordinata curvilinea  $s$ , sempre orientata nello stesso verso, quindi ai capi del filo:

$$\vec{F}_T^A = -\vec{F}_T(s_A) \quad ; \quad \vec{F}_T^B = \vec{F}_T(s_B)$$

Suddividiamo il filo a contatto con la carrucola in tanti segmentini di lunghezza  $ds$ , come in Fig. 9.5 (destra); quindi ai capi del segmentino agiscono due forze:

$$-\vec{F}_T(s) \quad ; \quad \vec{F}_T(s + ds)$$

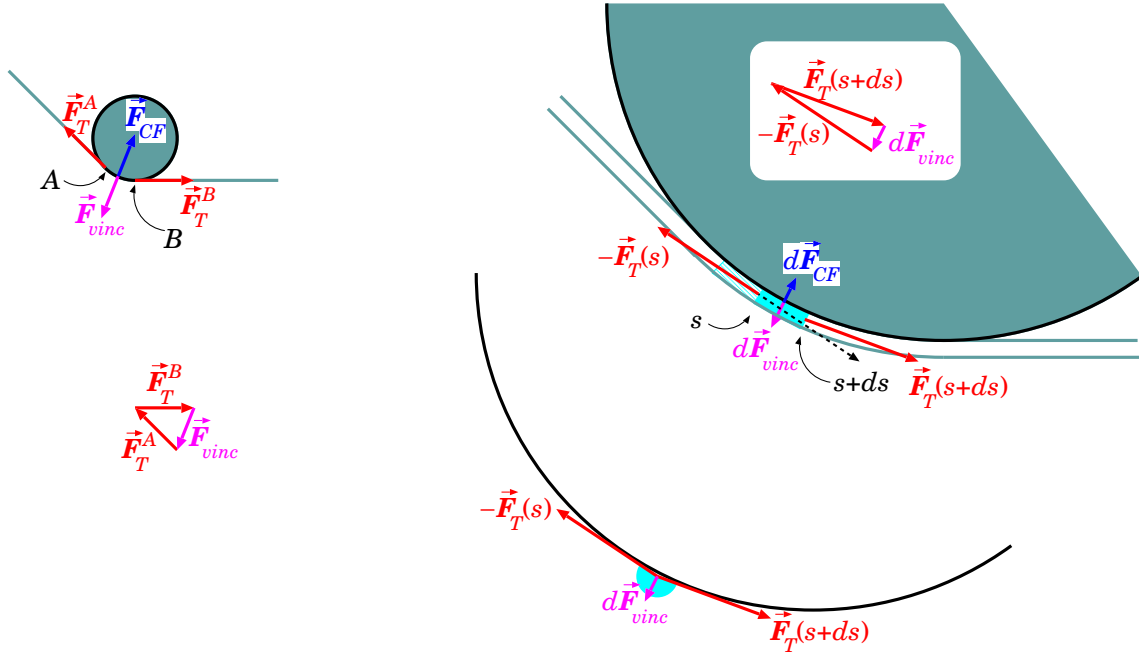


Figura 9.5: Tensione su un filo ideale flesso su una carrucola ideale. A sinistra: le tensioni  $\vec{F}_T^A$ ,  $\vec{F}_T^B$  ai capi del filo, la forza vincolare  $\vec{F}_{vinc}$  applicata dalla carrucola sul filo, la forza  $\vec{F}_{CF}$  applicata dal filo sulla carrucola. A destra, un dettaglio di un tratto  $ds$  di filo, con tensioni ai capi pari a  $-\vec{F}_T(s)$  e  $\vec{F}_T(s+ds)$ , reazione vincolare  $d\vec{F}_{vinc}$  applicata dalla carrucola sul tratto  $ds$  di filo, forza  $d\vec{F}_{CF}$  applicata dal tratto di filo sulla carrucola.

La carrucola esercita una forza vincolare  $d\vec{F}_{vinc}(s)$  sul segmentino. Quindi, detta  $dm$  la massa del segmentino, l'accelerazione  $\vec{a}$  è tale che:

$$dm \vec{a} = -\vec{F}_T(s) + \vec{F}_T(s+ds) + d\vec{F}_{vinc}(s)$$

Per il filo ideale,  $dm = 0$ , quindi qualunque sia il moto del filo (e della carrucola) deve essere:

$$d\vec{F}_{vinc}(s) = \vec{F}_T(s) - \vec{F}_T(s+ds) = -d\vec{F}_T(s)$$

Ora,  $d\vec{F}_{vinc}(s)$  è ortogonale alla carrucola e quindi al segmentino di filo; per ragioni di simmetria evidenti in figura, gli angoli formati rispettivamente da  $(-\vec{F}_T(s); d\vec{F}_{vinc})$  e  $(\vec{F}_T(s+ds); d\vec{F}_{vinc})$  sono uguali; quindi il triangolo di lati  $-\vec{F}_T(s)$  e  $\vec{F}_T(s+ds)$  è isoscele, quindi

$$\left| -\vec{F}_T(s) \right| = \left| \vec{F}_T(s+ds) \right|$$

ovvero  $|\vec{F}_T(s)|$  è costante lungo il filo. Quest’ultimo risultato può essere quindi applicato agli estremi, attraverso tutti i segmentini intermedi, ottenendo:

$$|\vec{F}_T^A| = |\vec{F}_T^B|$$

Inoltre, la forza vincolare totale applicata dalla carrucola sul filo è la somma delle forze vincolari applicate su ciascun segmentino  $ds$ :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{vinc} &= \int_A^B d\vec{F}_{vinc}(s) = - \int_A^B d\vec{F}_T(s) = \vec{F}_T(s_A) - \vec{F}_T(s_B) \\ &= - \left( \vec{F}_T^A + \vec{F}_T^B \right) \end{aligned}$$

e quindi anche la seconda parte è dimostrata.

### 9.3.3 Esercizi sulle tensioni

**Esercizio 9.4.** Una massa  $m = 100$  g si muove con moto circolare, legata ad una corda di lunghezza  $\ell = 50$  cm, che può sopportare una tensione massima  $F_T^{max} = 100$  N. Qual è la velocità angolare massima che la massa può avere, senza rompere la corda? Quanto impiegherebbe a fare un giro? Quanti giri farebbe in un secondo?

**Risposta.** La massa è dotata di un’accelerazione centripeta  $a_n = \omega^2 \ell$ , quindi è soggetta ad una forza centripeta  $F_n = ma_n = m\omega^2 \ell$  che è data dalla tensione  $F_T$  della corda: quindi  $T = m\omega^2 \ell$ . La velocità angolare massima è

$$\text{quindi } \omega_{max} = \sqrt{\frac{F_T^{max}}{m\ell}} = \sqrt{\frac{100 \text{ N}}{(0.1 \text{ kg})(0.5 \text{ m})}} = 44.72 \text{ rad/s.}$$

Il tempo necessario per fare un giro sarebbe  $T = \frac{2\pi \text{ rad}}{\omega} = 0.1405$  s. Quindi in un secondo farebbe

$$n = \frac{1 \text{ s}}{T} = 7.12 \text{ giri.}$$

**Esercizio 9.5.** Tre corde solo collegate insieme come in Fig. 9.6(a), e sottoposte a tensioni  $F_{T,1}, F_{T,2}, F_{T,3}$  mediante delle masse appese  $m_1 = 130$  g,  $m_2 = 120$  g,  $m_3 = 50$  g. Calcolare gli angoli  $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$  con cui si dispongono le tre corde.

**Risposta.** Intanto le tensioni devono equilibrare le forze-peso delle masse, quindi si possono calcolare come  $F_{T,1} = m_1 g$ ,  $F_{T,2} = m_2 g$ ,  $F_{T,3} = m_3 g$ . Le tre corde si disporranno in modo da realizzare l’equilibrio, quindi con notazione vettoriale deve essere  $\vec{F}_{T,1} + \vec{F}_{T,2} + \vec{F}_{T,3} = 0$ . Ricaviamo  $\vec{F}_{T,3} = -(\vec{F}_{T,1} + \vec{F}_{T,2})$ :

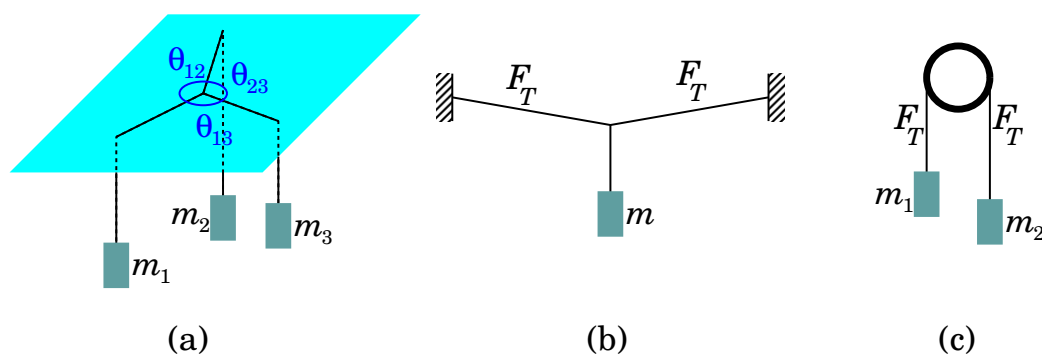


Figura 9.6: Esercizi sulle tensioni.

quindi il suo modulo quadro deve essere:

$$\begin{aligned}
 F_{T,3}^2 &= \vec{F}_{T,3} \cdot \vec{F}_{T,3} = (\vec{F}_{T,1} + \vec{F}_{T,2}) \cdot (\vec{F}_{T,1} + \vec{F}_{T,2}) \\
 &= \vec{F}_{T,1} \cdot \vec{F}_{T,1} + \vec{F}_{T,2} \cdot \vec{F}_{T,2} + 2\vec{F}_{T,1} \cdot \vec{F}_{T,2} = F_{T,1}^2 + F_{T,2}^2 + 2F_{T,1}F_{T,2} \cos \theta_{12} \\
 \cos \theta_{12} &= \frac{F_{T,3}^2 - (F_{T,1}^2 + F_{T,2}^2)}{2F_{T,1}F_{T,2}}
 \end{aligned}$$

Nel nostro caso,  $\cos \theta_{12} = \frac{m_3^2 - (m_1^2 + m_2^2)}{2m_1m_2} = -0.923$ , ovvero  $\theta_{12} = 2.747 \text{ rad} = 157.4^\circ$ .

Procediamo in modo del tutto analogo per gli altri angoli. Troviamo quindi  $\cos \theta_{23} = \frac{m_1^2 - (m_2^2 + m_3^2)}{2m_2m_3} = 0$ , cioè  $\theta_{23} = 1.571 \text{ rad} = 90^\circ$ , e  $\cos \theta_{13} = \frac{m_2^2 - (m_1^2 + m_3^2)}{2m_1m_3} = -0.3846$ , cioè  $\theta_{13} = 1.966 \text{ rad} = 112.6^\circ$ .

**Commento.** Una piccola verifica, per controllare di non aver commesso sbagli:  $\theta_{12} + \theta_{23} + \theta_{13} = 360^\circ$ . Bene, era quello che ci aspettavamo!

**Esercizio 9.6.** Una massa  $m = 5 \text{ kg}$  è appesa verticalmente ad una corda. Calcolare la tensione della corda.

**Risposta.** La forza di gravità cui la massa è soggetta è  $F_g = mg = 5 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ ms}^{-2} = 49.05 \text{ N}$ . Essa deve essere contrastata dalla tensione del filo, che quindi deve avere la stessa intensità, e ovviamente direzione opposta. Pertanto la tensione vale  $F_T = F_g = 49.05 \text{ N}$ .

**Esercizio 9.7.** Una massa  $m = 5 \text{ kg}$  è appesa a due corde, che formano con la verticale angoli di  $80^\circ$  — come in Fig. 9.6(b). Calcolare la tensione delle corde.

**Risposta.** La forza di gravità,  $F_g = mg = 5 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ ms}^{-2} = 49.05 \text{ N}$ , deve essere bilanciata dalla risultante delle due tensioni. Ciascuna di queste può essere scomposta nelle sue componenti orizzontale,  $F_{T,h} = F_T \sin \theta$  e verticale,

$F_{T,v} = F_T \cos \theta$ , essendo  $\theta = 80^\circ = 1.396$  rad. Le componenti orizzontali si bilanciano fra loro, mentre quelle verticali si sommano e contrastano  $F_g$ ; dunque  $F_g = 2F_{T,v} = 2F_T \cos \theta$ . Risolvendo,  $F_T = \frac{F_g}{2 \cos \theta} = \frac{mg}{2 \cos \theta} = 141.0$  N.

**Osservazione.** Nonostante le corde siano due, la loro tensione per tenere su la massa di 5 kg è maggiore di quella trovata nel caso di una sola corda. La ragione sta nel grande angolo formato dalle corde con la verticale: buona parte delle tensioni sono disposte orizzontalmente e si contrastano fra loro, mentre le componenti verticali (che servono a sorreggere la massa) sono in proporzione piccole:  $F_{T,v} = F_T \cos \theta$ . In effetti, quando è possibile, è meglio realizzare una configurazione con un angolo  $\theta$  più piccolo: questo è quello che fanno gli scalatori quando devono attrezzare una sosta in parete. Viceversa, in altri casi, un grande angolo  $\theta$  è d'obbligo: si pensi per esempio ad un lampione stradale, sospeso in mezzo da due cavi ancorati a due edifici sui lati opposti della strada: in tal caso i cavi sono quasi orizzontali, cioè  $\theta$  è molto vicino a  $90^\circ$  e la tensione è molto grande. In tal caso il cavo e i suoi ancoraggi devono essere molto robusti.

**Esercizio 9.8.** Su una carrucola, di massa trascurabile, è disposta una corda, ai cui estremi sono ancorate due masse  $m_1 = 5$  kg e  $m_2 = 6$  kg, il tutto nel campo gravitazionale alla superficie terrestre — vedi Fig. 9.6(c). Calcolare la tensione della corda e l'accelerazione delle masse.

**Risposta.** La tensione della corda  $F_T$  è uguale agli estremi, e in entrambi i casi è diretta verso l'alto, per contrastare la forza di gravità. Scegliamo come orientamento convenzionale quello verso il basso, per  $m_1$ : quindi per  $m_2$  sceglieremo quello verso l'alto, visto che se  $m_1$  scende,  $m_2$  sale, e viceversa. Su  $m_1$  agisce dunque una forza risultante  $F_1 = m_1 g - F_T$ . La forza risultante su  $m_2$  è  $F_2 = F_T - m_2 g$ .

Le accelerazioni per  $m_1$  e  $m_2$  sono rispettivamente  $a_1 = \frac{F_1}{m_1} = g - \frac{F_T}{m_1}$  e  $a_2 = \frac{F_2}{m_2} = \frac{F_T}{m_2} - g$ . D'altronde, essendo il filo inestensibile, gli spostamenti di  $m_1$ ,  $m_2$  sono identici ( $ds_1 = ds_2$ ) quindi anche le velocità sono identiche:  $v_1 = v_2$  in ogni istante. Si deduce che  $a_1 = a_2$ .

$$\text{Uguagliando } g - \frac{F_T}{m_1} = \frac{F_T}{m_2} - g \text{ si ricava } F_T = 2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = 53.49 \text{ N.}$$

L'accelerazione quindi  
 è  $a_1 = g - \frac{F_T}{m_1} = g - 2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = -0.892 \text{ m/s}^2$ . Ovviamente si  
 ottiene lo stesso risultato partendo da  $a_2 = \frac{F_2}{m_2} = \frac{F_T}{m_2} - g$ .

**Osservazione:** l'accelerazione è negativa: dunque  $m_1$  accelera verso l'alto (come da aspettarsi, visto che è più leggera di  $m_2$ ).

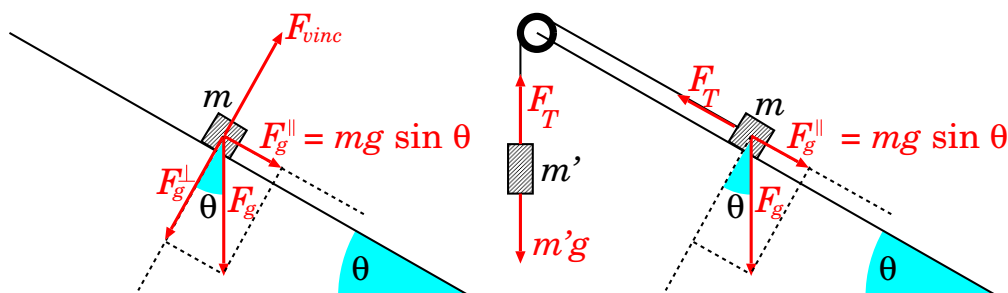


Figura 9.7: Moto su un piano inclinato

## 9.4 Moti su un piano inclinato

Consideriamo un piano molto levigato, inclinato di un angolo  $\theta$  rispetto all'orizzontale, e appoggiato su di esso un oggetto di massa  $m$  libero di scivolare sul piano — come in Fig. 9.7 (a sinistra). Le forze in gioco sono due: la forza di gravità, diretta verso il basso, e la reazione del vincolo, ortogonale al piano. Scomponiamo la forza di gravità lungo due direzioni: parallela e ortogonale al piano:

$$F_{g\parallel} = mg \sin \theta \quad ; \quad F_{g\perp} = mg \cos \theta$$

La reazione vincolare  $F_{vinc}$  deve essere esattamente opposta a  $F_{g\perp}$  — altrimenti l'oggetto non starebbe sul piano, ma si solleverebbe o sprofonderebbe in esso. Quindi la forza risultante è parallela al piano e vale esattamente  $F_{g\parallel} = mg \sin \theta$ .

Questo risultato si può verificare sperimentalmente, collegando l'oggetto sul piano ad un altro, di massa  $m'$ , mediante un filo. Se l'oggetto di massa  $m'$  è appeso in verticale, su di esso tutta la forza di gravità  $F'_g = m'g$  è efficace. Analizziamo il sistema così costituito, aiutandoci con la Fig. 9.7 (a destra). Come orientamento positivo scegliamo quello della forza  $F_{g\parallel}$  agente su  $m$ . Chiamiamo  $a$  l'accelerazione, di entrambe le masse  $m$ ,  $m'$  (l'accelerazione è la stessa per le 2 masse, essendo il filo teso e inestensibile). La forza totale  $F$  agente su  $m$  è costituita da  $F_{g\parallel}$  e dalla tensione  $F_T$  del filo, che ha direzione opposta:

$$ma = F = mg \sin \theta - F_T$$

La forza totale  $F'$  agente su  $m'$  è costituita da  $F'_g$  (con segno  $-$  perché tira in direzione opposta rispetto a  $F_{g\parallel}$ ) e dalla tensione del filo  $F_T$  (questa volta con segno  $+$  perché tira nella direzione di  $F_{g\parallel}$ )

$$m'a = F' = -m'g + F_T$$

Sommando le 2 equazioni,  $F_T$  (che era ignoto) si cancella e resta

$$(m + m')a = F + F' = g(m \sin \theta - m')$$

quindi:

$$a = \frac{F + F'}{m + m'} = g \frac{m \sin \theta - m'}{m + m'}$$

Scegliendo opportunamente le masse  $m, m'$  e/o l'angolo  $\theta$  si può realizzare una condizione di equilibrio, se  $m' = m \sin \theta$ .

Volendo, ora si può anche calcolare  $F_T$ :

$$F_T = m'(a + g) = \frac{mm'}{m + m'}g(\sin \theta + 1)$$

**Esercizio 9.9.** Una rotaia inclinata di lunghezza  $\ell = 1.5$  m forma un angolo  $\theta = 20^\circ$  con l'orizzontale. Un carrellino scende lungo la rotaia, partendo da fermo dall'estremo più alto: quanto tempo impiega per arrivare all'estremo più basso?

**Risposta.** Sul carrello agiscono la forza di gravità,  $F_g = mg$ , e la reazione del vincolo  $F_{vinc} = mg \cos \theta$ . La prima può essere scomposta nelle direzioni perpendicolare e parallela alla rotaia:  $F_{g\perp} = mg \cos \theta$  e  $F_{g\parallel} = mg \sin \theta$ .  $F_{vinc}$  e  $F_{g\perp}$  si annullano, resta dunque  $F_{g\parallel}$ , diretta lungo la rotaia e verso il basso.

Pertanto l'accelerazione del carrello è  $a = \frac{F_{g\parallel}}{m} = g \sin \theta$ , indipendente dalla massa  $m$  del carrello. Numericamente,  $a = 3.36 \text{ ms}^{-2}$ . L'accelerazione è costante, quindi la legge oraria del moto è  $x = \frac{1}{2}at^2$ ; la distanza da percorrere è  $\ell$ , quindi  $t = \sqrt{\frac{2\ell}{a}} = 0.946 \text{ s}$ .

**Esercizio 9.10.** Un'automobile di massa  $m_0 = 1.5$  ton con a bordo il conducente di massa  $m_1 = 80$  kg può frenare con una decelerazione massima  $a' = 4 \text{ m/s}^2$ , se la strada è in piano. Qual è la forza sviluppata dall'impianto frenante? Qual è la decelerazione se la strada è in discesa, con una pendenza di  $10^\circ$ ? Qual è la massima pendenza possibile della strada, oltre la quale l'auto non riesce più a frenare?

**Risposta.** La massa totale di auto+guidatore è  $m' = m_0 + m_1 = 1580$  kg. La forza dell'impianto frenante è  $F' = m'a' = 6320$  N.

Quando l'auto è in discesa, su di essa agisce anche la componente della gravità parallela alla strada:  $F_{g\parallel} = m'g \sin \theta$ , quindi l'accelerazione dell'auto è  $a = \frac{m'g \sin \theta - F'}{m'}$ . Si è scelto come positivo l'orientamento in discesa, cosicché  $F'$  ha segno negativo. Sviluppando i calcoli,  $a = g \sin \theta - a' = (9.806 \text{ m/s}^2) \sin(10^\circ) - 4 \text{ m/s}^2 = -2.297 \text{ m/s}^2$ . È negativa, quindi l'auto effettivamente decelera, ma molto meno che in piano.



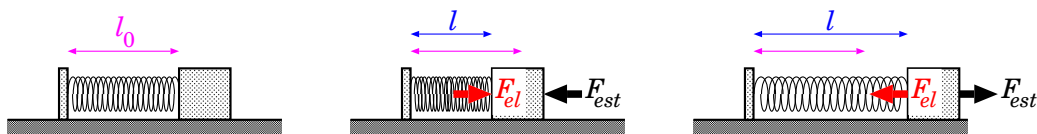


Figura 9.8: Molla a riposo, in compressione, e in estensione: negli ultimi due casi è indicata la forza elastica  $F_{el}$  esercitata dalla molla, e l'eventuale forza esterna  $F_{est}$  che la equilibra.

Quando l'auto non riesce più a frenare, vuol dire che l'accelerazione diventa nulla o positiva, cioè  $a = \frac{m'g \sin \theta - F'}{m'} \geq 0$ . Questo accade se  $m'g \sin \theta \geq F'$ , cioè  $\sin \theta \geq \frac{F'}{m'g} = \frac{a'}{g} = 0.4079$ , ovvero  $\theta \geq 0.42 \text{ rad} = 24^\circ$ .

## 9.5 Forze elastiche

Le forze elastiche, in generale, sono forze che tendono ad opporsi a spostamenti da una posizione di equilibrio, in maniera proporzionale agli spostamenti stessi.

L'esempio fisico più semplice per introdurre le forze elastiche è quello di una molla con una massa attaccata.

### 9.5.1 Forza elastica di una molla

Una molla che viene tirata esercita una forza di richiamo, che tende a riportarla alla sua lunghezza iniziale. Analogamente, se viene compressa esercita una spinta che tende a contrastare la compressione. Più la molla viene deformata, più la sua reazione diventa forte. Molte molle vengono costruite in modo che *la forza di reazione sia proporzionale alla deformazione*: detta  $\ell_0$  la lunghezza di una molla a riposo (cioè senza forze esterne agenti su di essa) e  $\ell$  la lunghezza attuale, la forza elastica è data da:

$$F_{el} = -k(\ell - \ell_0) \quad (9.3)$$

dove  $k$  è la *costante di elasticità* della molla. Il segno  $-$  sta ad indicare che ad una compressione ( $\ell < \ell_0$ ) corrisponde una reazione che tende ad allungare ( $F_{el} > 0$ ), e viceversa, ad un allungamento ( $\ell > \ell_0$ ) corrisponde una reazione che tende ad accorciare ( $F_{el} < 0$ ): in ogni caso la forza elastica è diretta in modo da tentare di ripristinare la lunghezza  $\ell_0$  — vd Fig. 9.8.

L'Eq. (9.3) è nota come *legge di Hooke*.

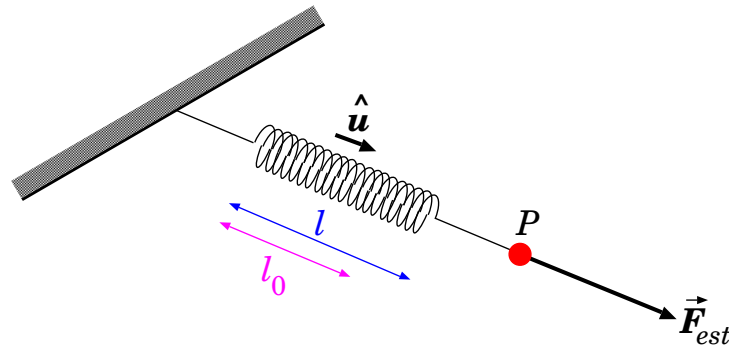


Figura 9.9: Misura statica di una forza.

Se si applica alla molla una forza esterna  $F_{est}$ , essa modifica la propria lunghezza fino a realizzare una condizione di equilibrio. La nuova lunghezza  $\ell_{eq}$  deve essere tale che la forza elastica  $F_{el}$  compensi esattamente la forza esterna  $F_{est}$ :  $F_{el} + F_{est} = 0$ . Ovvero:

$$F_{est} = -F_{el} = +k(\ell_{eq} - \ell_0) \quad (9.4)$$

Se la forza esterna è di trazione ( $F_{est} > 0$ ) si ha un allungamento della molla ( $\ell > \ell_0$ ). Viceversa, una forza di compressione ( $F_{est} < 0$ ) produce un accorciamento ( $\ell < \ell_0$ ). A parità di forza applicata  $F_{est}$ , una molla con  $k$  elevato si allunga meno di una con  $k$  più piccolo: grandi  $k$  corrispondono a molle “dure”, piccoli  $k$  a molle “morbide”.

### 9.5.2 Misure statiche di forze

Una molla, di costante elastica  $k$  nota, consente di effettuare misure statiche di forze. Infatti, immaginiamo che un punto materiale  $P$  sia sottoposto ad un sistema di forze di risultante  $\vec{F}_{tot}$ . In generale esso subirà un’accelerazione  $\vec{a} = \frac{\vec{F}_{tot}}{m}$ . Ora colleghiamo  $P$  ad una molla, che metteremo in tensione in modo da mantenere  $P$  fermo. La molla subisce un allungamento  $\Delta\ell = \ell - \ell_0$ , misurabile, ed è mantenuta tesa lungo una direzione che individuiamo con un versore  $\hat{u}$  — vd Fig. 9.9. La molla imprime una forza elastica

$$\vec{F}_{el} = -k \Delta\ell \hat{u}$$

Siamo in una condizione di equilibrio statico, quindi la risultante delle forze deve essere nulla:  $\vec{F}_{tot} + \vec{F}_{el} = 0$ . Pertanto il sistema di forze esterne deve avere risultante

$$\vec{F}_{tot} = -\vec{F}_{el} = +k \Delta\ell \hat{u}$$

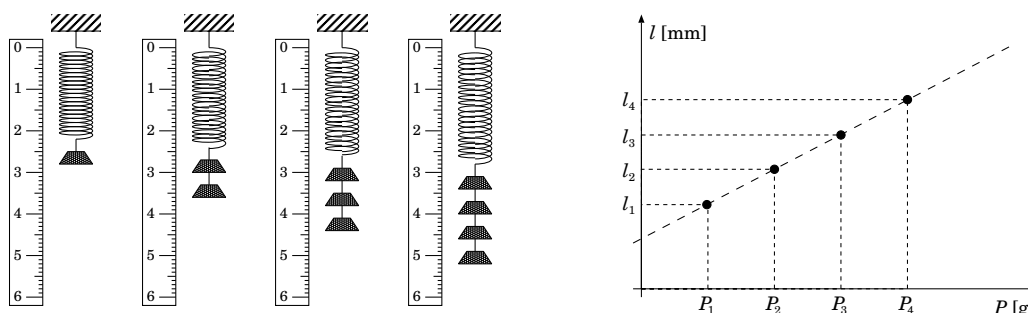


Figura 9.10: Uso di una molla per misurare le masse.

**ATTENZIONE:** va notato che questo sistema funziona solo se nessuna delle forze che contribuiscono a  $\vec{F}_{tot}$  ha dipendenze dalla velocità: per esempio, non è applicabile per la misura di forze magnetiche agenti su cariche elettriche, perché queste agiscono solo se le cariche elettriche sono in movimento. Similmente non si può fare per misurare attriti dinamici.

### 9.5.3 Misure di massa con una molla

Un'applicazione ovvia è quella di usare una molla per misurare delle masse. Una massa  $m$  nel campo gravitazionale terrestre è soggetta alla forza-peso  $F_g = mg$  ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ). Appendendo dunque una massa  $m$  ad una molla con elasticità  $k$ , l'Eq. (9.4), applicata per  $F_{est} = mg$ , predice un allungamento:

$$\Delta\ell = \ell_{eq} - \ell_0 = \frac{g}{k}m \quad (9.5)$$

Quindi una molla può essere usata come bilancia, come in Fig. 9.10.

In effetti, si tratta di una bilancia di ottima precisione, *purché la molla sia davvero elastica*, cioè purché  $F_{el} = -k(\ell - \ell_0)$ . Per verificare questa condizione si può procedere idealmente nel seguente modo. Si costruiscono diversi oggetti, tutti della stessa massa: l'omogeneità fra essi può essere ottenuta per costruzione, quindi verificata appendendoli uno alla volta alla stessa molla: se non si osservano differenze negli allungamenti ottenuti possiamo affermare che effettivamente le masse siano omogenee. Fatto ciò, si possono appendere  $n$  oggetti alla molla e si osserva l'allungamento  $\Delta\ell$ : se esso è sempre proporzionale al numero di oggetti appesi, possiamo affermare che la molla sia elastica.

Una volta verificata l'elasticità della molla, una qualunque massa  $m$  può essere misurata osservando l'allungamento prodotto sulla molla:

$$m = \frac{k}{g} \cdot \Delta\ell \quad (9.6)$$

Naturalmente occorre conoscere  $k$  e  $g$ , o più semplicemente il loro rapporto  $\frac{k}{g}$ . Questo può essere dedotto appendendo una massa-campione  $\bar{m}$  (per esempio 1 g, o 1 kg, a seconda dell'elasticità della molla) e misurando l'allungamento ottenuto  $\bar{\Delta\ell}$ . Ovviamente  $\frac{k}{g} = \frac{\bar{m}}{\bar{\Delta\ell}}$ . Pertanto, per qualunque massa  $m$  appesa vale la relazione

$$m = \frac{\bar{m}}{\bar{\Delta\ell}} \cdot \Delta\ell \quad (9.7)$$

### 9.5.4 Esercizi sulle forze elastiche

**Esercizio 9.11.** *Un oggetto di massa  $m = 15$  kg, nel campo gravitazionale terrestre, è appeso ad una molla, di costante  $k = 250$  N/m, sospesa dall'estremo superiore. Un piano d'appoggio orizzontale, situato al di sotto della massa, viene sollevato, fino a toccare la massa e sollevarla di  $\Delta h^{(1)} = 10$  cm. Quanto vale la reazione vincolare  $F_{vinc}$  del piano? Come cambia, se il sollevamento è di  $\Delta h^{(2)} = 70$  cm?*

**Risposta.** Sulla massa  $m$  agiscono 3 forze: la forza-peso,  $F_g = -mg$ , diretta verso il basso; la forza elastica,  $F_{el} = k \Delta\ell$ , diretta verso l'alto se la molla è estesa; la reazione vincolare,  $F_{vinc}$ , da determinare, che comunque deve essere diretta verso l'alto. La condizione di equilibrio è  $F_g + F_{el} + F_{vinc} = 0$ .

Prima che il piano d'appoggio sollevi la massa, non c'è reazione vincolare,  $F_{vinc} = 0$ . Chiamando  $\Delta\ell^{(0)}$  l'allungamento della molla in questo caso, la condizione di equilibrio diventa  $-mg + k\Delta\ell^{(0)} = 0$ ; si deduce l'allungamento della molla,  $\Delta\ell^{(0)} = \frac{mg}{k} = 0.588$  m.

Dopo il sollevamento, l'allungamento della molla diventa  $\Delta\ell^{(1)} = \Delta\ell^{(0)} - \Delta h^{(1)} = 0.488$  m. Ora la condizione di equilibrio è  $-mg + k\Delta\ell^{(1)} + F_{vinc} = 0$ , da cui  $F_{vinc} = mg - k\Delta\ell^{(1)} = 25$  N. Nota:  $F_{vinc} < mg$ , poiché parte del peso è sostenuto dalla molla.

Ripetendo il ragionamento per  $\Delta h^{(2)} = 70$  cm, si trova  $F_{vinc} = 175$  N. In questo caso,  $F_{vinc} > mg$ . La ragione è che ora la molla è compressa:  $\Delta\ell^{(2)} = \Delta\ell^{(0)} - \Delta h^{(2)} = -0.112$  m, pertanto spinge verso il basso. La reazione vincolare deve quindi contrastare sia la forza-peso, che la forza elastica.

**Esercizio 9.12.** *Su un furgone, inizialmente scarico, viene caricato del materiale per una massa totale  $\Delta m = 350$  kg. Alla fine, il fondo del furgone si è abbassato di  $\Delta h = 10$  cm. Assumendo che tutto il carico gravi sulle sospensioni posteriori, e che queste siano identiche, quanto vale costante elastica  $k$  di ciascuna di queste?*

**Risposta.** Chiamiamo  $\ell_0$  la lunghezza a riposo di ciascuna sospensione. Per una generica compressione  $\Delta\ell = \ell - \ell_0$ , la forza elastica totale, prodotta da entrambe le sospensioni, vale  $F_{el} = -2k\Delta\ell$  (controllo sui segni: per una compressione,  $\Delta\ell < 0$  e  $F_{el} > 0$ , diretta verso l'alto). La forza elastica contrasta

la forza-peso  $F_g = -m_{tot}g$ , diretta verso il basso:  $F_g + F_{el} = 0$ , dunque

$$-2k \Delta\ell - m_{tot}g = 0$$

A furgone scarico,  $m_{tot} = m_1$  pari alla massa (ignota) del furgone, e la compressione delle sospensioni è  $\Delta\ell_1$  (ignota). A furgone carico  $m_{tot} = m_1 + \Delta m \equiv m_2$ , e la compressione è  $\Delta\ell_2$ . Quindi:

$$\begin{aligned} 2k \Delta\ell_1 &= -m_1g \\ 2k \Delta\ell_2 &= -m_2g = -(m_1 + \Delta m)g \end{aligned}$$

Non conosciamo  $\Delta\ell_1$ ,  $\Delta\ell_2$ ,  $m_1$ , ma conosciamo  $\Delta\ell_1 - \Delta\ell_2 = \Delta h$ . Facendo la differenza fra le 2 equazioni:

$$\begin{aligned} 2k \Delta h &= \Delta m g \\ k &= \frac{\Delta m g}{2 \Delta h} = 17\,160 \text{ N/m} \end{aligned}$$

**Esercizio 9.13.** Una corda elastica ha lunghezza a riposo  $\ell_0$  e costante elastica  $k$ . Un suo estremo viene fissato, all'altro viene attaccata una massa  $m = 130$  g. La massa viene fatta roteare, su un piano orizzontale liscio, in modo che descriva una traiettoria circolare. Si osserva che se una rotazione completa impiega un tempo  $T_1 = 1$  s la corda raggiunge una lunghezza  $\ell_1 = 15$  cm; se invece la rotazione diventa più rapida,  $T_2 = 0.5$  s, la corda si allunga e diventa  $\ell_2 = 17$  cm. Quanto valgono  $k$  e  $\ell_0$ ?

**Risposta.** La forza elastica, di modulo  $F_{el} = k(\ell - \ell_0)$ , deve provvedere la forza centripeta  $F_n = \omega^2 \ell = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \ell$ . Quindi, per le due configurazioni, deve valere:

$$\begin{aligned} k(\ell_1 - \ell_0) &= \frac{4\pi^2}{T_1^2} \ell_1 \\ k(\ell_2 - \ell_0) &= \frac{4\pi^2}{T_2^2} \ell_2 \end{aligned}$$

Si può eliminare  $\ell_0$  sottraendo le 2 equazioni:

$$\begin{aligned} k(\ell_2 - \ell_1) &= 4\pi^2 \left( \frac{\ell_2}{T_2^2} - \frac{\ell_1}{T_1^2} \right) \\ k &= \frac{4\pi^2}{\ell_2 - \ell_1} \left( \frac{\ell_2}{T_2^2} - \frac{\ell_1}{T_1^2} \right) = 1046 \text{ N/m} \end{aligned}$$

Poi dalla 1<sup>a</sup> equazione si ricava

$$\ell_0 = \ell_1 \left( 1 - \frac{4\pi^2}{k T_1^2} \right) = 14.43 \text{ cm}$$

**Esercizio 9.14.** Due masse  $m_1 = 150$  g e  $m_2 = 80$  g sono posate su una superficie inclinata liscia, formata da due superfici piane collegate, di pendenze diverse:  $\theta_1 = 10^\circ$  sotto  $m_1$ , e  $\theta_2 = 30^\circ$  sotto  $m_2$ .  $m_1$  si trova più in alto di  $m_2$ . Le due masse sono collegate da una corda elastica che rimane parallela alle superfici. Il sistema scivola in discesa, la lunghezza della corda rimane costante, e si osserva che è allungata di una quantità  $\Delta\ell = 5$  mm rispetto alla sua lunghezza a riposo.

Calcolare l'accelerazione  $a$  del sistema e la costante elastica  $k$  della corda.

**Risposta.** Scegliamo come orientamento positivo quello in discesa. Su ciascuna massa agisce la componente della forza-peso parallela alla superficie,  $F_{g,\parallel}^{(i)} = m_i g \sin \theta_i$  ( $i = 1, 2$ ). Inoltre su  $m_1$  agisce la forza elastica  $F_{el} = h \Delta\ell > 0$  (positiva perché tira in discesa) e su  $m_2$  agisce la forza elastica  $-F_{el}$ . Quindi la forza totale su ciascuna massa è:

$$\begin{aligned} m_1 a &= F_{tot}^{(1)} = m_1 g \sin \theta_1 + F_{el} \\ m_2 a &= F_{tot}^{(2)} = m_2 g \sin \theta_2 - F_{el} \end{aligned}$$

Sommando le 2 equazioni si ottiene subito:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)a &= (m_1 g \sin \theta_1 + m_2 g \sin \theta_2)g \\ a &= \frac{m_1 g \sin \theta_1 + m_2 g \sin \theta_2}{m_1 + m_2} g = 2.816 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Poi dalla 1<sup>a</sup> equazione si ricava:

$$\begin{aligned} F_{el} &= m_1(a - g \sin \theta_1) = m_1 g \left( \frac{m_1 g \sin \theta_1 + m_2 g \sin \theta_2}{m_1 + m_2} - \sin \theta_1 \right) \\ &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} k &= \frac{F_{el}}{\Delta\ell} \\ &= \frac{1}{\Delta\ell} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) = 33.39 \text{ N/m} \end{aligned}$$

### 9.5.5 Modello elastico delle forze vincolari

Abbiamo visto che le reazioni vincolari e le tensioni, introdotte in Sezione 9.2 e Sezione 9.3, sono di tipo *adattivo*, nel senso che il loro modulo non è prefissato, ma si adatta in modo da contrastare le altre forze agenti:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{vinc} &= m\vec{a} - \sum_i \vec{F}_i \\ \vec{F}_T &= m\vec{a} - \sum_i \vec{F}_i \end{aligned}$$

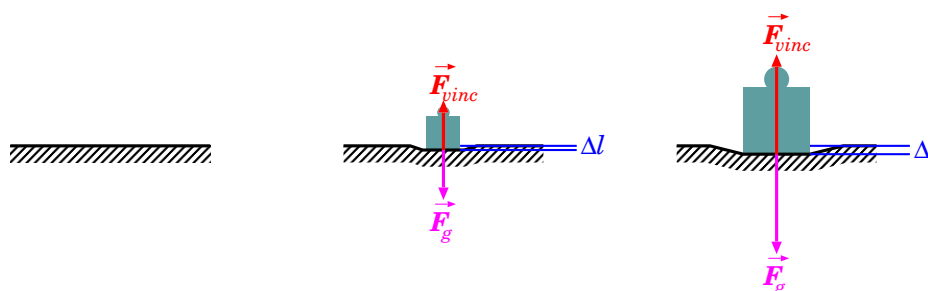


Figura 9.11: *Natura elastica della reazione vincolare.*

Finora abbiamo supposto che il vincolo (superficie nel caso di  $\vec{F}_{vinc}$ , corda nel caso di  $\vec{F}_T$ ) sia *indeformabile*. Questa è una idealizzazione: in realtà il vincolo subisce una piccola deformazione  $\Delta\ell$ , in una direzione  $\hat{u}$  (la superficie rientra, oppure la corda si allunga), e questa produce una reazione di natura elastica:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{vinc} &= -k \Delta\ell \hat{u} \\ \vec{F}_T &= -k \Delta\ell \hat{u}\end{aligned}$$

Quando il sistema di forze  $\sum_i \vec{F}_i$  è tale da sforzare maggiormente il vincolo, questo subisce una deformazione  $\Delta\ell$  maggiore, e di conseguenza produce una reazione ( $F_{vinc}$  oppure  $F_T$ ) più intensa: questo spiega il carattere adattivo della reazione — vedi Fig. 9.11.

Normalmente tali deformazioni sono molto piccole, spesso trascurabili: ciò significa che la costante elastica  $k$  è molto elevata.

## 9.6 Forze di attrito

Esistono in natura numerose forze, che vengono genericamente chiamate *attriti*, che si manifestano quando un corpo è in contatto con l'ambiente circostante, sia esso formato da superfici solide, o da sostanze liquide o gassose.

Quando l'ambiente circostante è *in quiete*, le *forze di attrito* tendono a:

- trattenere un oggetto, inizialmente fermo, nella sua condizione di quiete, anche se intervengono dall'esterno altre forze che dovrebbero metterlo in movimento — si chiamano *attriti "statici"*, e si manifestano tipicamente nel contatto fra l'oggetto in questione e una superficie di appoggio solida;

- rallentare un oggetto, inizialmente in movimento, fino a farlo fermare, se non intervengono altre forze esterne a mantenerlo in moto — questi sono gli *attriti “dinamici”*, e si manifestano quando l’oggetto esaminato scivola lungo una superficie solida (attrito *radente*), oppure quando si muove in un mezzo liquido o gassoso (attrito *viscoso*).

(Nota: a causa degli attriti, non è così sorprendente che, prima di Galileo, si pensasse che lo “stato naturale” di un oggetto, non sottoposto ad azioni esterne, fosse la quiete, e non il moto rettilineo uniforme!)

Se l’ambiente circostante è in movimento (per esempio una superficie di contatto in moto, oppure un fluido che scorre), gli attriti statici tendono a mantenere l’oggetto in moto alla stessa velocità dell’ambiente, mentre quelli dinamici tendono a uniformare la velocità dell’oggetto con quella dell’ambiente (rallentandolo se va più veloce, o accelerandolo se va troppo lentamente).

In generale, possiamo dire che *gli attriti tendono ad opporsi ad un moto relativo dell’oggetto in esame rispetto all’ambiente che lo circonda*.

Da un punto di vista microscopico, gli attriti sono l’effetto risultante di tutte le interazioni fra gli atomi dell’oggetto e quelli dell’ambiente. Ogni interazione interatomica comporta un trasferimento di quantità di moto, il cui effetto netto è quello osservato sull’oggetto macroscopico. Una descrizione microscopica degli attriti è in generale molto complessa. Viceversa, alcuni casi standard sono descritti bene da leggi empiriche.

Nella trattazione che segue, descriviamo le caratteristiche degli attriti (statico, radente viscoso) in un *ambiente statico*. In Sezione 9.6.4 adatteremo le equazioni al caso di ambiente in movimento.

### 9.6.1 Attrito statico

L’attrito statico si manifesta quando l’oggetto solido è posto a contatto con una superficie solida (ambiente). Se l’ambiente è fermo, l’attrito statico tende a mantenere l’oggetto fermo anche se su di esso agisce una forza esterna  $\vec{F}_{est}$ . Ciò significa che la forza di attrito si oppone a quella esterna:

$$\vec{F}_{attr} = -\vec{F}_{est} \quad (\text{attrito statico}) \quad (9.8)$$

Consideriamo un oggetto di massa  $m$  appoggiato su un piano orizzontale, fermo. Su di esso agiscono la forza-peso  $\vec{F}_g = -mg\hat{z}$  e la reazione del vincolo  $\vec{F}_{vinc} = +mg\hat{z}$  che si contrastano esattamente. Ora immaginiamo



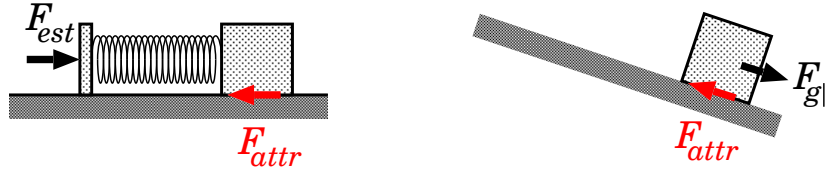


Figura 9.12: Esempi di attrito statico: a sinistra, la forza esterna  $F_{est}$  è applicata attraverso una molla; a destra, è la componente della forza di gravità parallela al piano,  $F_{g\parallel} = mg \sin \theta$ .

di applicare una forza orizzontale esterna  $F_{est}$ . Per esempio, possiamo applicarla attraverso una molla, come in Fig. 9.12 (sinistra), in modo che, dalla compressione  $\Delta \ell$ , possiamo conoscere la forza che stiamo applicando:  $F_{est} = k \Delta \ell$ . Si osserva che, comprimendo la molla pian piano, l'oggetto resta fermo, ma oltre una certa compressione l'oggetto si muove. Evidentemente, la forza di attrito non ha un valore preciso, bensì si adatta per contrastare la forza esterna, ma oltre un certo limite non ce la fa più. Quindi ha un "valore massimo",  $F_{attr}^{max}$ :

$$|\vec{F}_{attr}| \leq F_{attr}^{max} \quad (\text{attrito statico})$$

Sperimentalmente, si osserva che  $F_{attr}^{max}$  è sempre direttamente proporzionale al modulo della reazione vincolare  $F_{vinc}$ , pertanto si può scrivere:

$$|\vec{F}_{attr}| \leq F_{attr}^{max} = \mu_s F_{vinc} \quad (\text{attrito statico}) \quad (9.9)$$

Il coefficiente di proporzionalità,  $\mu_s$ , si chiama *coefficiente di attrito statico*. È un numero adimensionale, che dipende dai materiali che sono posti a contatto, ma *non* dall'estensione della superficie di contatto.

L'Eq. (9.9) esprime un limite superiore alla forza di attrito statico. Quando l'Eq. (9.9) e l'Eq. (9.8) non possono essere simultaneamente realizzate, non può esserci attrito statico — ovvero l'oggetto si muove.

Se il piano è inclinato, con un angolo  $\theta$ , come in Fig. 9.12 (destra), la reazione vincolare diventa  $F_{vinc} = mg \cos \theta$  (vd Sezione 9.4), pertanto

$$F_{attr} \leq \mu_s mg \cos \theta \quad (\text{attrito statico})$$

mentre la componente parallela al piano della forza di gravità è  $F_{g\parallel} = mg \sin \theta$ . Siccome  $\vec{F}_{attr}$  è sempre diretta opposta a  $\vec{F}_{g\parallel}$ , l'oggetto resta fermo solo se le due forze sono uguali in modulo:

$$\begin{aligned} F_{g\parallel} &= F_{attr} \\ mg \sin \theta &\leq \mu_s mg \cos \theta && (\text{attrito statico}) \\ \tan \theta &\leq \mu_s \end{aligned}$$

Quindi l'angolo-limite perché l'attrito statico contrasti la forza-peso è tale che

$$\tan \theta_{lim} = \mu_s \quad (\text{attrito statico}) \quad (9.10)$$

### 9.6.2 Attrito radente (o dinamico)

L'attrito radente, o dinamico, si ha quando un oggetto in movimento striscia su una superficie solida. Sperimentalmente, la forza di attrito radente ha le seguenti proprietà:

- è indipendente dalla velocità;
- è sempre diretta in direzione opposta allo spostamento;
- dipende dalla natura dei materiali a contatto (l'oggetto che striscia e la superficie su cui striscia) attraverso un *coefficiente di attrito dinamico*  $\mu_d$ ;
- è direttamente proporzionale al modulo della reazione vincolare  $F_{vinc}$  prodotta dalla superficie sull'oggetto strisciante.

Queste caratteristiche possono essere espresse da una formula vettoriale:

$$\vec{F}_{attr} = -\mu_d F_{vinc} \hat{v} \quad (\text{attrito radente}) \quad (9.11)$$

dove  $\hat{v} \equiv \frac{\vec{v}}{v}$  è il versore che indica la direzione dello spostamento.

Sperimentalmente, fra due oggetti a contatto, si osserva sempre che

$$\mu_d < \mu_s \quad (9.12)$$

### Scivolamento in discesa

Calcoliamo il moto di un oggetto di massa  $m$ , nel campo gravitazionale terrestre  $g$ , che scivola con attrito giù per un piano inclinato ad un angolo  $\theta$  rispetto all'orizzontale — la situazione è sempre quella della Fig. 9.7 (a sinistra).

Le forze in gioco sono 3: la forza di gravità, la forza del vincolo, e la forza di attrito radente. La reazione vincolare

$$F_{vinc} = F_{g\perp} = mg \cos \theta$$

bilancia esattamente la componente della forza di gravità perpendicolare al piano, lasciando la componente parallela

$$F_{g\parallel} = mg \sin \theta$$

Scegliendo convenzionalmente il verso positivo come orientato verso il basso lungo la direzione di massima pendenza del piano,  $F_{g\parallel} > 0$ . La forza di attrito vale

$$F_{attr} = -\mu_d F_{vinc} = -\mu_d mg \cos \theta$$

$F_{attr} < 0$  perché è opposta alla direzione del moto. La risultante delle forze è diretta parallelamente al piano, e vale:

$$F_{tot} = F_{g\parallel} + F_{attr} = mg (\sin \theta - \mu_d \cos \theta) \quad (9.13)$$

(scivolamento in discesa con attrito radente)

Si tratta dunque di un moto uniformemente accelerato, con accelerazione

$$a = g (\sin \theta - \mu_d \cos \theta) \quad (9.14)$$

(scivolamento in discesa con attrito radente)

Il segno di  $F_{tot}$  e di  $a$  dipende da  $\tan \theta$ :

- se  $\tan \theta > \mu_s$ , il piano è più ripido dell'angolo-limite dell'attrito statico: se l'oggetto era in quiete, si mette in moto spontaneamente; in questo caso, sicuramente  $\tan \theta > \mu_d$  <sup>[4]</sup>, quindi  $a > 0$  e il moto è accelerato in discesa;
- se  $\tan \theta \leq \mu_s$ , bisogna innescare il moto con un'azione esterna; in tal caso distinguiamo ulteriormente 3 casi:
  - se  $\tan \theta > \mu_d$ , il moto è accelerato:  $a > 0$ ; la velocità aumenta man mano che l'oggetto scivola giù per il piano inclinato;
  - se  $\tan \theta = \mu_d$ , allora  $a = 0$  e il moto è a velocità uniforme in discesa lungo il piano inclinato;
  - se  $\tan \theta < \mu_d$ , il moto è decelerato:  $a < 0$ ; l'oggetto rallenta sempre più fino a fermarsi; l'attrito diventa statico, e l'oggetto resta fermo.

---

<sup>4</sup> Ricordiamo che  $\mu_s > \mu_d$ . Anzi, questo esempio ci fa capire che non può essere  $\mu_d > \mu_s$ . Se lo fosse, potremmo scegliere un angolo  $\theta$  tale che  $\mu_s < \tan \theta < \mu_d$ , quindi ci troveremmo nella situazione ASSURDA che l'oggetto si "sblocca" spontaneamente dalla condizione di attrito statico (perché  $\tan \theta > \mu_s$ ), ma essendo  $\tan \theta < \mu_d$  avrebbe  $a < 0$ , cioè sarebbe accelerato in salita!

### Scivolamento in salita

Analogamente, immaginiamo che un oggetto di massa  $m$  venga lanciato in salita sul piano inclinato e calcoliamo l'accelerazione per lo scivolamento in salita: a causa della gravità e dell'attrito, l'oggetto rallenterà. Possiamo scegliere l'orientamento positivo lungo il moto, cioè in salita. Le forze in gioco sono

$$F_{g\parallel} = -mg \sin \theta \quad ; \quad F_{attr} = -\mu_d mg \cos \theta$$

entrambe  $< 0$  poiché dirette in discesa. Quindi la forza totale è:

$$F_{tot} = F_{g\parallel} + F_{attr} = -mg (\sin \theta + \mu_d \cos \theta) \quad (9.15)$$

(scivolamento in salita con attrito radente)

Si tratta dunque di un moto uniformemente accelerato, con accelerazione negativa

$$a = -g (\sin \theta + \mu_d \cos \theta) \quad (9.16)$$

(scivolamento in salita con attrito radente)

La velocità dovrà necessariamente decrescere, finché non si annullerà: a quel punto l'oggetto si arresterà. Anche qui distinguiamo diversi casi, a seconda del valore di  $\tan \theta$ :

- se  $\tan \theta > \mu_s$ , l'oggetto non può restare fermo, perché siamo oltre l'angolo limite dell'attrito statico; pertanto l'oggetto riprenderà a scivolare in discesa;
- se  $\tan \theta \leq \mu_s$ , l'attrito statico entrerà in funzione e l'oggetto resterà fermo.

### 9.6.3 Attrito viscoso

L'attrito viscoso si manifesta quando un oggetto si muove attraverso un mezzo fluido (cioè liquido o gassoso). In tal caso, empiricamente si osserva che il mezzo oppone una forza frenante al moto, in direzione opposta a questo, che cresce con la velocità  $\vec{v}$  di movimento:

$$\vec{F}_{attr} = -(\eta v + \eta' v^2) \hat{v} \quad (9.17)$$

I coefficienti  $\eta, \eta'$  si chiamano *coefficienti di attrito viscoso* e dipendono dalla forma dell'oggetto che si muove, dalla sua superficie e dal mezzo fluido in cui

si muove. In generale, per un oggetto affusolato è dominante la componente  $-\eta\vec{v}$ ; la componente  $\propto v^2$  entra in gioco per oggetti poco aerodinamici, o in moto veloce.

Un oggetto che cade all'interno di un fluido, nel campo gravitazionale terrestre, è soggetto a due forze:

- la forza gravitazionale,  $F_g = mg$ ;
- la forza di attrito viscoso,  $F_{attr} = -\eta v - \eta' v^2$

(abbiamo scelto per convenzione il verso positivo diretto verso il basso). La forza totale agente è quindi:

$$F_{tot} = F_g + F_{attr} = mg - \eta v - \eta' v^2$$

Anche senza integrare il moto, possiamo farci un'idea qualitativa di ciò che succede. Quando la velocità è piccola, la forza di gravità è dominante e l'accelerazione è  $a \simeq g$ , verso il basso. Man mano che la velocità aumenta, la forza di attrito cresce sempre più, fino a diventare pari alla forza di gravità: a questo punto la risultante delle forze è nulla e la velocità si mantiene costante. Per trovare la velocità-limite  $v_{lim}$ , basta porre  $F_{tot} = 0$ , ovvero  $\eta' v^2 + \eta v - mg = 0$ . Questa è un'equazione di 2° grado che ammette due soluzioni:  $v_{lim} = \frac{-\eta \pm \sqrt{\eta^2 + 4mg\eta'}}{2\eta'}$ . Scartando la soluzione negativa, che non ha significato fisico, otteniamo:

$$v_{lim} = \frac{-\eta + \sqrt{\eta^2 + 4mg\eta'}}{2\eta'} \simeq \begin{cases} \sqrt{\frac{mg}{\eta'}} & \text{(per } \eta v \text{ trascurabile)} \\ \frac{mg}{\eta} & \text{(per } \eta' v^2 \text{ trascurabile)} \end{cases} \quad (9.18)$$

---

### Caduta di una goccia di pioggia in aria

---

*Studiamo il moto di una goccia di pioggia, che cade verticalmente nell'aria. Le forze in gioco sono: la gravità,  $F_g = mg$ , e l'attrito viscoso,  $F_{attr} = -\eta v$ . Normalmente la velocità  $v$  è tale che la componente  $-\eta' v^2$  della forza di attrito è trascurabile. Il problema è unidimensionale, e in questo caso è comodo scegliere come positivo l'orientamento verso il basso. L'equazione del moto è:*

$$\frac{dv}{dt} \equiv a = \frac{F_g + F_{attr}}{m} = g - \frac{\eta}{m} v = g - \beta v$$

essendo  $\beta \equiv \frac{\eta}{m}$ . Questa equazione si risolve con il metodo della “separazione delle variabili”, ovvero si isolano le due variabili ( $v$  e  $t$ ) dalle parti opposte del segno =:

$$\frac{dv}{g - \beta v} = dt$$

Si ottiene un’uguaglianza fra due forme differenziali, che va integrata fra estremi opportuni. Conviene rinominare le variabili di integrazione:  $t \rightarrow t'$  e  $v \rightarrow v'$ . L’intervallo temporale è  $0 < t' < t$ , mentre per le velocità  $v(t = 0) = 0$ , quindi l’intervallo è  $0 < v' < v \equiv v(t)$ . Quindi otteniamo:

$$\int_0^t dt' = \int_0^v \frac{dv'}{g - \beta v'}$$

Notiamo che il membro destro assomiglia a  $\frac{1}{v'}$ , che avrebbe come funzione primitiva  $\ln v'$ . In effetti, una primitiva di  $\frac{1}{g - \beta v'}$  è  $-\frac{1}{\beta} \ln(g - \beta v')$ . Quindi l’equazione integrale diventa:

$$\begin{aligned} t &= \left[ -\frac{1}{\beta} \ln(g - \beta v') \right]_0^v \\ &= -\frac{1}{\beta} [\ln(g - \beta v) - \ln(g)] = -\frac{1}{\beta} \ln \left( \frac{g - \beta v}{g} \right) \\ e^{-\beta t} &= \frac{g - \beta v}{g} = 1 - \frac{\beta}{g} v \\ v \equiv v(t) &= \frac{g}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) \\ &= \frac{mg}{\eta} (1 - e^{-\beta t}) \end{aligned}$$

Si noti che, per  $t \rightarrow +\infty$ , si raggiunge la velocità-limite, come aspettato:  $v(t) \rightarrow \frac{mg}{\eta} \equiv v_{lim}$ .

La distanza  $s(t)$ , percorsa dalla goccia, si trova con una ulteriore integrazione:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t v(t') = \frac{mg}{\eta} \left\{ t + \left[ \frac{1}{\beta} e^{-\beta t'} \right]_{t'=0}^{t'=t} \right\} \\ &= \frac{mg}{\eta} \left( t + \frac{e^{-\beta t} - 1}{\beta} \right) \end{aligned}$$

*Bonus (\*):* com’è il moto della goccia, all’inizio, quando  $v$  è ancora molto piccola, e quindi l’attrito è trascurabile rispetto alla gravità? Ci si aspetterebbe  $v(t) \simeq gt$  e  $s(t) \simeq \frac{gt^2}{2}$ , giusto? Provate a verificare che le

equazioni trovate descrivono questo comportamento. Utilizzate l'approssimazione  $e^{-\beta t} \simeq 1 - \beta t + \frac{\beta^2 t^2}{2} + \dots$  valida per piccoli valori di  $t$ .

### Moto di un proiettile in aria

Abbiamo già trattato il moto di un proiettile nel campo gravitazionale, trascurando gli attriti – vd Sezione 7.5.4. Ora studiamo il moto, in presenza di un attrito viscoso  $\vec{F}_{\text{attr}} = -\eta\vec{v}$ . Le forze in gioco sono:

$$\begin{aligned} F_x &= -\eta v_x \\ F_z &= -\eta v_z - mg \end{aligned}$$

Quindi si possono risolvere i moti lungo  $x$  e  $z$  separatamente. Convieni introdurre le quantità  $\beta = \frac{\eta}{m}$  e  $\alpha = \frac{g}{\beta}$ . Lungo  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -\beta v_x \\ \frac{dv_x}{v_x} &= -\beta dt \\ \int_{v_{x0}}^{v_x} \frac{dv'_x}{v'_x} &= -\beta \int_0^t dt' \\ \ln\left(\frac{v_x}{v_{x0}}\right) &= -\beta t \\ v_x &= v_{x0} e^{-\beta t} \end{aligned}$$

In modo appena più complicato, si risolve per  $z$ :

$$\begin{aligned} \frac{dv_z}{dt} &= -\beta v_z - \frac{g}{m} = -\beta(v_z + \alpha) \\ \frac{dv_z}{v_z + \alpha} &= -\beta dt \\ \int_{v_{z0}}^{v_z} \frac{dv'_z}{v'_z + \alpha} &= -\beta \int_0^t dt' \\ \ln\left(\frac{v_z + \alpha}{v_{z0} + \alpha}\right) &= -\beta t \\ v_z &= (v_{z0} + \alpha) e^{-\beta t} - \alpha \end{aligned}$$

Le coordinate spaziali si integrano dalle velocità:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_0^t v_x(t') dt' = x_0 + \frac{v_{x0}}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) \\ z(t) &= z_0 + \int_0^t v_z(t') dt' = z_0 + \frac{v_{z0} + \alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) - \alpha t \end{aligned}$$

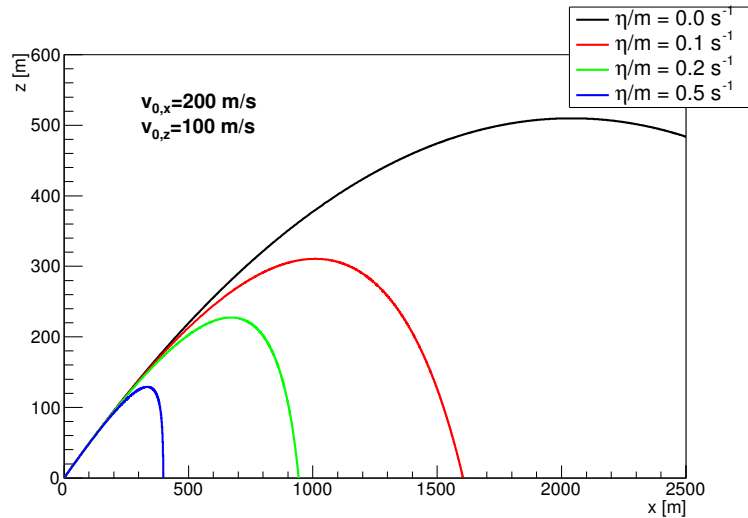


Figura 9.13: Traiettoria di un proiettili, per diversi valori dell’attrito viscoso.

Il risultato è mostrato in Fig. 9.13, per diversi valori di  $\eta$ . Come si nota, al crescere di  $\eta$ , la componente orizzontale del moto è sempre più frenata: l’effetto è che la traiettoria si discosta sempre più dalla parabola, mostrando una caduta sempre più verticale dopo l’apice. Analogamente, anche la componente verticale subisce un frenamento, che si manifesta nella diminuzione dell’altezza massima raggiunta.

#### 9.6.4 Attriti in ambiente non statico

Tutto quanto detto può essere esteso al caso di ambiente in movimento.

L’attrito statico tende a mantenere l’oggetto “fermo rispetto all’ambiente”. Se l’ambiente si muove, con accelerazione  $\vec{a}_{amb}$ , anche l’oggetto deve avere la stessa accelerazione; pertanto, la risultante delle forze su di esso,  $\vec{F}_{est}$  e  $\vec{F}_{attr}$ , deve essere tale che

$$\vec{F}_{attr} + \vec{F}_{est} = m\vec{a}_{amb} \quad (\text{attrito statico}) \quad (9.19)$$

Vale comunque il limite superiore per la forza di attrito:

$$|\vec{F}_{attr}| \leq \mu_s F_{vinc}$$

Un esempio: se l’oggetto è premuto contro una superficie in moto, la quale reagisce con una reazione vincolare  $F_{vinc}$ , la forza di attrito riesce a



trascinare l'oggetto in modo solidale con l'ambiente solo se l'accelerazione dell'ambiente è  $|\vec{\mathbf{a}}_{amb}| \leq \mu_s \frac{F_{vinc}}{m}$ .

L'attrito dinamico radente tende ad uniformare la velocità  $\vec{\mathbf{v}}$  dell'oggetto alla velocità  $\vec{\mathbf{v}}_{amb}$  dell'ambiente. È utile introdurre quindi la *velocità relativa*

$$\vec{\mathbf{v}}_{rel} = \vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{v}}_{amb}$$

dell'oggetto rispetto all'ambiente, e il suo versore  $\hat{\mathbf{v}}_{rel} = \frac{\vec{\mathbf{v}}_{rel}}{v_{rel}}$ . Allora, l'Eq. (9.11) si modifica in:

$$\vec{\mathbf{F}}_{attr} = -\mu_d F_{vinc} \hat{\mathbf{v}}_{rel} \quad (\text{attrito radente}) \quad (9.20)$$

Anche per l'attrito viscoso, si può modificare l'Eq. (9.17) in:

$$\vec{\mathbf{F}}_{attr} = -(\eta v_{rel} + \eta' v_{rel}^2) \hat{\mathbf{v}}_{rel} \quad (\text{attrito viscoso}) \quad (9.21)$$

### 9.6.5 Esercizi sugli attriti

**Esercizio 9.15.** *Un oggetto viene appoggiato su un piano, inizialmente orizzontale; questo viene poi inclinato lentamente, fino al punto che l'oggetto comincia a scivolare. L'angolo-limite, sotto il quale non c'è scivolamento, è  $\theta_{lim} = 35^\circ$ . A questo angolo, l'accelerazione osservata è  $a = 0.15 \text{ m/s}^2$ . Quanto valgono i coefficienti di attrito statico e dinamico?*

**Risposta.** Il coefficiente di attrito statico si ricava da  $\mu_s = \tan \theta_{lim} = \tan(35^\circ) = 0.7$ . L'accelerazione è  $a = \frac{F_{tot}}{m} = g(\sin \theta - \mu_d \cos \theta)$ , pertanto  $\mu_d = \frac{g \sin \theta - a}{g \cos \theta}$ , quindi per  $\theta = \theta_{lim}$  e a dato, si trova  $\mu_d = 0.68$ .

**Commento.** Si noti che tutti questi risultati sono indipendenti dalla massa dell'oggetto. La ragione è che sia la forza di gravità che la forza di attrito radente sono proporzionali a  $m$ .

**Esercizio 9.16.** *Un oggetto è appoggiato su una piattaforma rotante orizzontale, che compie una rotazione completa in  $T = 5 \text{ s}$ . La distanza dell'oggetto dall'asse di rotazione è  $\rho$ : si osserva che l'oggetto è solidale con la piattaforma fino a  $\rho^{max} = 50 \text{ cm}$ : a distanze più grandi scivola via. Qual è il coefficiente di attrito statico,  $\mu_s$ ?*

**Risposta.** L'oggetto è trascinato nella rotazione della piattaforma dalla forza di attrito statico, che produce la forza centripeta, pertanto, uguagliando i moduli,

$m\omega^2\rho = F_{as}$ , con  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . Sappiamo poi che  $F_{as} \leq \mu_s F_{vinc}$ , e che su un piano orizzontale  $F_{vinc} = mg$ . Quindi:

$$\begin{aligned} m \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 \rho &= F_{as} \leq \mu_s mg \\ \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 \rho^{max} &= \mu_s g \\ \mu_s &= \frac{4\pi^2 \rho^{max}}{T^2 g} = 0.0805 \end{aligned}$$

**Esercizio 9.17.** Un'auto è dotata di pneumatici che hanno, sull'asfalto asciutto, coefficienti di attrito statico e dinamico  $\mu_s = 0.9$  e  $\mu_d = 0.8$ . Supponendo che il motore dell'auto sia estremamente potente:

- (a) qual è la massima accelerazione possibile per l'auto, su una strada orizzontale?
- (b) come si modifica la risposta, se le ruote perdono aderenza?
- (c) qual è la massima pendenza affrontabile in salita?
- (d) qual è la massima pendenza affrontabile in discesa?

**Risposta.** La forza che accelera l'auto viene dall'attrito fra pneumatici e strada. In generale,  $|F_{as}| \leq \mu_s F_{vinc}$  e  $|F_{ad}| = \mu_d F_{vinc}$ . Poiché  $\mu_s > \mu_d$ , è evidente che la forza può raggiungere valori maggiori quando c'è aderenza dei pneumatici.

In accelerazione, solo le ruote motrici entrano. Supponendo che l'auto abbia trazione su 2 delle 4 ruote, e che il peso sia uniformemente distribuito fra avantreno e retrotreno, per una strada orizzontale  $F_{vinc}^{2ruote} = \frac{mg}{2}$ . Invece in frenata tutte le ruote agiscono, quindi  $F_{vinc}^{4ruote} = mg$ .

(a) L'accelerazione massima, con 2 ruote motrici in aderenza, è:

$$\begin{aligned} a^{max} &= \frac{F_{as}^{max}}{m} = \frac{\mu_s F_{vinc}^{2ruote}}{2} \\ &= \frac{\mu_s g}{2} = 4.41 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

(b) L'accelerazione, con ruote non in aderenza, è:

$$\begin{aligned} a &= \frac{F_{ad}}{m} = \frac{\mu_d F_{vinc}^{2ruote}}{2} \\ &= \frac{\mu_d g}{2} = 3.92 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

(da cui si vede che è più vantaggioso non “sgommare” — e non solo per il conto del gommista!)

(c) In una salita di pendenza  $\theta$ ,  $F_{vinc}^{2ruote} = \frac{mg \cos \theta}{2}$ , mentre (orientando il verso positivo in salita)  $F_{g\parallel} = -mg \sin \theta$ ,  $0 < F_{as} \leq \mu_s F_{vinc}^{2ruote}$  e  $F_{ad} = \mu_d F_{vinc}^{2ruote}$ . Nuovamente  $F_{as}^{max} > F_{ad}$ , quindi ragioniamo con l'attrito statico. Per la massima pendenza  $F_{as}^{max} + F_{g\parallel} = 0$ , ovvero:

$$\begin{aligned}\mu_s \frac{mg \cos \theta}{2} &= mg \sin \theta \\ \tan \theta^{max} &= \frac{\mu_s}{2} \\ \theta^{max} &= \tan^{-1} \left( \frac{\mu_s}{2} \right) = 0.42 \text{ rad} = 24^\circ\end{aligned}$$

Attenzione però: se le ruote perdessero aderenza anche solo per un attimo, entrerebbe in gioco l'attrito dinamico, più basso, per il quale otterremmo

$$\theta^{max} = \tan^{-1} \left( \frac{\mu_d}{2} \right) = 0.38 \text{ rad} = 23^\circ$$

**Osservazione:** per il punto (c) abbiamo mantenuto l'ipotesi che il peso sia ugualmente distribuito sui due assi dell'auto, la qual cosa in salita non è precisamente vera, perché il peso tende a sbilanciarsi più sull'asse posteriore. Se l'auto ha trazione anteriore, è quindi svantaggiata.

**Altra osservazione:** se l'auto avesse 4 ruote motrici, sarebbe avvantaggiata: i valori di  $a^{max}$  e  $\tan \theta^{max}$  raddoppierebbero.

(d) La forza-peso lungo la pendenza è  $F_{g\parallel} = mg \sin \theta$ , la forza vincolare è  $F_{vinc} = mg \cos \theta$ . Per scendere a velocità costante deve essere  $F_{g\parallel} = F_{as} \leq \mu_s F_{vinc}$ , quindi  $mg \sin \theta \leq \mu_s mg \cos \theta$ ; la massima pendenza è:

$$\theta^{max} = \tan^{-1}(\mu_s) = 0.73 \text{ rad} = 42^\circ$$

Se solo  
per un attimo le ruote perdono aderenza, entra in funzione l'attrito dinamico, che è inferiore: a questo punto l'auto accelera in discesa con accelerazione  $a = \frac{g \sin \theta^{max} - F_{ad}}{m} = g \cos \theta^{max} (\tan \theta^{max} - \mu_d) = g \cos \theta^{max} (\mu_s - \mu_d)$ , e non la fermate più! Quindi meglio considerare un più prudente:

$$\theta^{max} = \tan^{-1}(\mu_d) = 0.67 \text{ rad} = 39^\circ$$

**ATTENZIONE!** Questi calcoli sono comunque molto ottimistici. Infatti si assume che la forza dei freni sia illimitata, che le gomme siano nuove, che l'asfalto sia perfetto, senza sassolini, e che l'auto possa scendere a velocità costante, ovvero senza la necessità di rallentare fino in fondo alla discesa. Non sto consigliando a nessuno di affrontare in auto una lunga discesa a  $39^\circ$  di pendenza! **Anzi, confido che nessuno sia così scriteriato da provarci!**

Per dare un'idea: le strade asfaltate più ripide del mondo hanno pendenze intorno al “35%”: questa percentuale esprime  $\sin \theta$ , quindi stiamo parlando di  $\theta \simeq 20^\circ$

**Esercizio 9.18.** Uno scatolone pesante, di massa complessiva  $m = 35$  kg, è appoggiato sul pavimento. I coefficienti di attrito statico e dinamico sono rispettivamente  $\mu_s = 0.3$  e  $\mu_s = 0.25$ . Lo scatolone viene tirato con una corda che forma un angolo  $\theta$  rispetto al pavimento. La tensione applicata alla corda è  $F_T$ .

Qual è il valore minimo,  $F_T^{\min}$ , che va applicato alla corda per smuovere lo scatolone, e a quale angolo ottimale  $\theta^{\text{opt}}$  lo si realizza?

**Risposta.** Sullo scatolone agiscono la forza-peso  $\vec{F}_g = -mg\hat{z}$ , la forza vincolare  $\vec{F}_{\text{vinc}} = F_{\text{vinc}}\hat{z}$ , la tensione  $\vec{F}_T$ , e l'attrito  $\vec{F}_{\text{attr}} = F_{\text{attr}}\hat{x}$ . Separando per componenti verticale e orizzontale abbiamo:

$$\begin{aligned} F_{\text{tot},z} &= -mg + F_{\text{vinc}} + F_T \sin \theta \\ F_{\text{tot},x} &= F_T \cos \theta + F_{\text{attr}} \end{aligned}$$

Sia che lo scatolone sia fermo, sia che si muova sul pavimento, non c'è accelerazione verticale, per cui  $F_{\text{tot},z} = 0$ . Dalla 1ª equazione si deduce:

$$F_{\text{vinc}} = mg - F_T \sin \theta$$

Finché lo scatolone è fermo, l'attrito è statico, e l'accelerazione è nulla, quindi

$$F_{\text{as}} = -F_T \cos \theta \quad ; \quad |F_{\text{as}}| \leq \mu_s F_{\text{vinc}} = \mu_s (mg - F_T \sin \theta)$$

Per smuovere lo scatolone occorre che  $F_{\text{tot},x} > 0$ , cioè  $F_T \cos \theta > -F_{\text{as}}$  (ricordiamo che  $F_{\text{as}} < 0$ , quindi  $-F_{\text{as}} > 0$ ). All'aumentare di  $F_T$ ,  $F_{\text{as}}$ , che è adattiva, aumenta in modulo per mantenere la condizione  $F_{\text{as}} + F_T \cos \theta = 0$ , ma ad un certo punto raggiunge il suo valore limite  $F_{\text{as}}^{\text{lim}} = -\mu_s (mg - F_T \sin \theta)$ . Lo scatolone si smuove quindi se  $F_T \cos \theta > \mu_s (mg - F_T \sin \theta)$ . Il valore minimo di  $F_T$  è quindi tale che:

$$\begin{aligned} F_T^{\min} \cos \theta &= \mu_s (mg - F_T^{\min} \sin \theta) \\ F_T^{\min} &= \frac{\mu_s mg}{\cos \theta + \mu_s \sin \theta} \end{aligned}$$

Il valore minimo di  $F_T$  si ottiene per  $\theta$  tale da massimizzare la funzione  $f(\theta) = \cos \theta + \mu_s \sin \theta$ . Ponendo a zero la derivata prima,  $0 = \frac{df(\theta)}{d\theta} = -\sin \theta + \mu_s \cos \theta$  si ottiene l'estremale per  $\tan \theta = \mu_s$ . Poiché  $\frac{d^2 f(\theta)}{d\theta^2} = -(\cos \theta + \mu_s \sin \theta) < 0 \forall \theta$  (nell'intervallo  $\theta \in [0; \pi/2]$ ) l'estremale trovato è effettivamente un massimo di  $f(\theta)$ .

Poi [5],

$$\begin{aligned} F_T^{min} &= \frac{\mu_s mg}{\cos \theta^{opt} + \mu_s \sin \theta^{opt}} \\ &= \frac{\mu_s}{\cos \theta^{opt} (1 + \mu_s \tan \theta^{opt})} mg \\ &= \frac{\mu_s \sqrt{1 + \mu_s^2}}{1 + \mu_s^2} mg = \frac{\mu_s}{\sqrt{1 + \mu_s^2}} mg \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \theta^{opt} &= \tan^{-1}(\mu_s) = 0.29 \text{ rad} = 16.7^\circ \\ F_T^{min} &= \frac{\mu_s}{\sqrt{1 + \mu_s^2}} mg = 98.6 \text{ N} \end{aligned}$$

**Esercizio 9.19.** Un paracadutista di massa  $m_1 = 65$  kg indossa un paracadute di massa  $m_0 = 8$  kg (compreso zaino e tutto); dopo aver aperto il paracadute, si stabilizza ad una velocità di discesa di  $v_1 = 15$  km/h. Con che velocità scenderebbe un suo collega di massa  $m_2 = 90$  kg, usando un modello di paracadute identico? Per risolvere l'esercizio occorre sapere che in questo caso l'attrito viscoso è proporzionale al quadrato della velocità.

**Risposta.** Facciamo uso direttamente dell'equazione della velocità-limite, Eq. (9.18). Per il primo paracadutista  $v_1 = \sqrt{\frac{(m_0 + m_1)g}{\eta'}}$ , da cui potremmo ricavare  $\eta'$ . In realtà possiamo procedere evitando questo calcolo: scriviamo l'equazione per il secondo paracadutista,  $v_2 = \sqrt{\frac{(m_0 + m_2)g}{\eta'}}$ , e dividiamole:

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{(m_0 + m_2)}{(m_0 + m_1)}} = \sqrt{\frac{(90 + 8) \text{ kg}}{(65 + 8) \text{ kg}}} = 1.159. \quad \text{Abbiamo supposto la stessa } \eta',$$

poiché i paracaduti sono identici. In conclusione:  $v_2 = v_1 \cdot 1.159 = 17.4$  km/h.

## 9.7 Esercizi sulle forze macroscopiche

Qui vediamo alcuni esempi di problemi in cui più oggetti subiscono forze esterne e forze mutue. In tutti i casi occorre fare l'“appello” di tutte le forze che agiscono su ciascun oggetto e poi applicare la 2<sup>a</sup> legge della dinamica a ciascun oggetto:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_{tot}^{(i)}$$

---

<sup>5</sup> Ricorda che  $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$ .

Risolvere il problema significa determinare tutte le accelerazioni.

Per le forze mutue, possiamo indicare con  $\vec{F}_{descr}^{(ij)}$  una forza prodotta sull'oggetto ( $i$ ) dall'oggetto ( $j$ ), essendo  $descr$  un descrittore della natura della forza (per esempio forza vincolare, tensione, attrito, ...); ricordiamo che vale sempre la 3<sup>a</sup> legge della dinamica:

$$\vec{F}_{descr}^{(ij)} = -\vec{F}_{descr}^{(ji)}$$

Per le forze esterne sull'oggetto ( $i$ ) usiamo una notazione  $\vec{F}_{descr}^{(i)}$  — qui  $descr$  può indicare, per esempio, la forza-peso, o qualunque altra azione esterna.

Ricordiamo che alcune forze sono “adattive”, nel senso che la loro intensità non è data a priori, ma si adatta per realizzare una particolare condizione: è il caso delle forze vincolari, delle tensioni, degli attriti statici. In tal caso i loro valori fanno parte delle incognite; d'altronde, proprio in questi casi, abbiamo oggetti a contatto fra loro, cosicché le loro accelerazioni non sono indipendenti, e questo abbassa il numero di incognite del problema. Per esempio:

- in caso di attrito statico fra 2 oggetti, le loro accelerazioni sono identiche:  $\vec{a}_i = \vec{a}_j$ ;
- in caso di scivolamento fra superfici piane, le componenti delle accelerazioni ortogonali alla superficie sono identiche:  $a_i^\perp = a_j^\perp$ ;
- in caso di tensione agente fra 2 oggetti, le componenti delle accelerazioni lungo la direzione della tensione sono identiche:  $a_i^\parallel = a_j^\parallel$ ;

Infine ricordiamo alcune proprietà delle corde ideali e delle carrucole ideali:

- una carrucola ideale ha massa e attrito trascurabili;
- una corda ideale ha massa trascurabile;
- la tensione lungo una corda ideale ha modulo costante in tutti i suoi punti;
- l'effetto di una carrucola ideale su una corda ideale è di modificare la direzione della tensione, senza alterarne il modulo, a prescindere dal moto della corda o della stessa carrucola.

---

**Osservazione: oggetti non puntiformi!**

---

*Nei problemi che seguiranno, gli oggetti non sono necessariamente puntiformi... Eppure verranno trattati come tali. Qui occorre anticipare alcuni concetti, anche intuitivi, che diverranno più chiari solo quando si affronterà il “corpo rigido” (Capitolo 19).*



Figura 9.14: Schemi per gli esercizi sulle carrucole.

- Un oggetto rigido esteso è idealmente formato da tante parti più piccole, al limite puntiformi: se il moto dell'oggetto è puramente traslatorio (cioè senza rotazioni) tutti i suoi punti materiali hanno la stessa velocità, e quindi la stessa accelerazione: queste verranno semplicemente chiamate velocità e accelerazione dell'oggetto esteso.
- Una forza applicata ad un punto di un oggetto esteso rigido va considerata come applicata a tutto l'oggetto; l'effetto, per l'accelerazione, è come se l'oggetto fosse puntiforme.
- Le forze mutue fra due oggetti estesi soddisfano la “prima parte” della legge di azione-reazione,  $\vec{F}^{(ij)} = -\vec{F}^{(ji)}$ ; sulla “seconda parte”, ovvero la linea di azione, non si può dire granché, visto che due oggetti estesi non hanno una linea congiungente ben definita.

**Esercizio 9.20.** Due oggetti (1) e (2) di masse  $m_1$ ,  $m_2$  sono appesi a un sistema di carrucole ideali (3), (4) mediante una corda ideale ancorata al soffitto, come in Fig. 9.14 (sinistra). Calcolare le accelerazioni  $a_1$ ,  $a_2$  dei due oggetti. Quale relazione ci deve essere fra  $m_1$  e  $m_2$ , per mantenere in equilibrio il sistema?

**Soluzione.** Il sistema è composto da 4 oggetti: per ciascuno di questi occorre calcolare tutte le forze in gioco. Poiché tutte le forze sono verticali, le scriviamo in forma non vettoriale, scegliendo positivo l'orientamento verso l'alto. Chiamiamo (0) il soffitto. Pertanto:

oggetto	simbolo	descrizione
(1)	$F_g^{(1)} = -m_1g$	forza peso
	$F_{vinc}^{(13)}$	forza vincolare
(2)	$F_g^{(2)} = -m_2g$	forza peso
	$F_T^{(24)}$	tensione
(3)	$F_{vinc}^{(31)}$	forza vincolare
	$F_T^{(30)}$	tensione
	$F_T^{(34)}$	tensione
(4)	$F_{vinc}^{(40)}$	forza vincolare
	$F_T^{(43)}$	tensione
	$F_T^{(42)}$	tensione

Ora scriviamo  $F_{tot} = ma$  per ciascun oggetto, ricordando che le carrucole ideali hanno massa trascurabile:

$$\begin{aligned}
 m_1 a_1 &= F_{tot}^{(1)} = -m_1 g + F_{vinc}^{(13)} \\
 m_2 a_2 &= F_{tot}^{(2)} = -m_2 g + F_T^{(24)} \\
 0 &= m_3 a_3 = F_{tot}^{(3)} = F_{vinc}^{(31)} + F_T^{(30)} + F_T^{(34)} \\
 0 &= m_4 a_4 = F_{tot}^{(4)} = F_{vinc}^{(40)} + F_T^{(43)} + F_T^{(42)}
 \end{aligned}$$

Abbiamo 4 equazioni. Contiamo le incognite:  $a_1, a_2, F_{vinc}^{(13)}, F_T^{(24)}, F_{vinc}^{(31)}, F_T^{(30)}, F_T^{(34)}, F_{vinc}^{(40)}, F_T^{(43)}, F_T^{(42)}$ , quindi 10 incognite! Però, per la legge di azione-reazione,  $F_{vinc}^{(13)} = -F_{vinc}^{(31)}$ ; inoltre, per corde ideali su carrucole ideali, le tensioni sono tutte uguali in modulo, pertanto

$$F_T^{(30)} = F_T^{(34)} = -F_T^{(43)} = -F_T^{(42)} = F_T^{(24)} = F_T$$

Il sistema diventa quindi:

$$\begin{aligned}
 m_1 a_1 &= F_{tot}^{(1)} = -m_1 g + F_{vinc}^{(13)} \\
 m_2 a_2 &= F_{tot}^{(2)} = -m_2 g + F_T \\
 0 &= m_3 a_3 = F_{tot}^{(3)} = -F_{vinc}^{(13)} + 2 F_T \\
 0 &= m_4 a_4 = F_{tot}^{(4)} = F_{vinc}^{(40)} - 2 F_T
 \end{aligned}$$

Ora le incognite sono:  $a_1, a_2, F_{vinc}^{(13)}, F_T, F_{vinc}^{(40)}$ , ovvero 5. Meglio, ma non basta! In realtà  $a_1, a_2$  non sono indipendenti, a causa della corda inestensibile. Se (1) compie uno spostamento  $ds_1$  (per esempio verso l'alto), anche la carrucola (3) compie lo stesso spostamento, quindi ciascuno dei tratti di corda — quello fra (3) e il soffitto, e quello fra (3) e (4), si accorciano di  $ds_1$ , ovvero la corda si allunga di  $2 ds_1$  oltre la carrucola (4): questo produce un abbassamento di (2) pari



a  $ds_2 = -2ds_1$ . Dividendo per il tempo  $dt$  in cui ciò avviene, si ottiene  $v_2 = -2v_1$ ; derivando rispetto al tempo,

$$a_2 = -2a_1$$

Dalla 3<sup>a</sup> equazione si ricava  $F_{vinc}^{(13)} = 2F_T$ , quindi la 1<sup>a</sup> e la 2<sup>a</sup> diventano ora:

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= -m_1 g + 2F_T \\ m_2 a_2 = -2m_2 a_1 &= -m_2 g + F_T \end{aligned}$$

Eliminando  $F_T$  si trova:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2m_2 - m_1}{m_1 + 4m_2} g \\ a_2 &= -2a_1 \end{aligned}$$

In particolare, per equilibrare il sistema ( $a_1 = 0$ ) occorre che sia  $m_1 = 2m_2$ .

**Esercizio 9.21.** Una piattaforma (1) di massa  $m_1$  sostiene una persona (2) di massa  $m_2$ , che cerca di sollevarsi (con tutta la piattaforma) tirando con forza  $F_{est}$  una corda ideale ancorata al soffitto (0) e passante per due carrucole ideali (3), (4), come in Fig. 9.14 (destra). Calcolare l'accelerazione  $a$  del sistema, assumendo che la persona rimanga solidale con la piattaforma. Qual è la condizione su  $m_1$ ,  $m_2$  affinché la persona non si sollevi dalla piattaforma?

**Soluzione.** Anche qui abbiamo 4 oggetti, per cui dobbiamo individuare tutte le forze. Anche qui tutte le forze sono verticali, per cui il problema è unidimensionale. Ricordiamo che le carrucole ideali non hanno massa.

oggetto	simbolo	descrizione
(1)	$F_g^{(1)} = -m_1 g$	forza peso piattaforma
	$F_{vinc}^{(13)}$	forza vincolare piattaforma-carrucola
	$F_{vinc}^{(14)}$	forza vincolare piattaforma-carrucola
	$F_{vinc}^{(12)}$	forza vincolare piattaforma-persona
(2)	$F_g^{(2)} = -m_2 g$	forza peso persona
	$F_{vinc}^{(21)}$	forza vincolare persona-piattaforma
	$F_T^{(24)}$	tensione applicata dalla corda sulla persona
(3)	$F_{vinc}^{(31)}$	forza vincolare carrucola-piattaforma
	$F_T^{(30)}$	tensione carrucola-soffitto
	$F_T^{(34)}$	tensione carrucola-carrucola
(4)	$F_{vinc}^{(41)}$	forza vincolare carrucola-piattaforma
	$F_T^{(43)}$	tensione carrucola-carrucola
	$F_T^{(42)} = -F_{est}$	tensione applicata dalla persona sulla corda

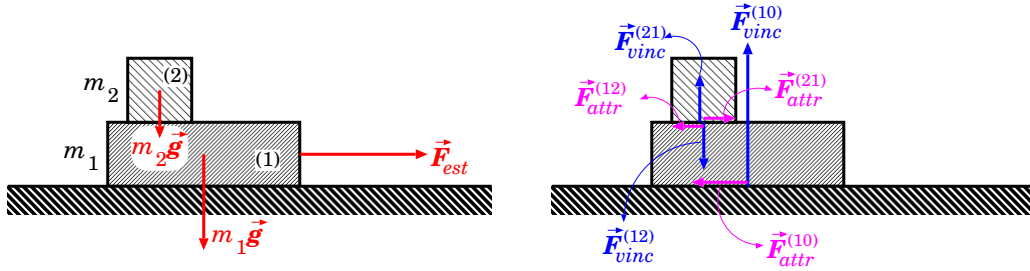


Figura 9.15: Schema delle forze per l'esercizio sugli attriti: a sinistra le forze “esterne”, a destra quelle mutue.

Ricordando che le carrucole ideali hanno massa nulla, e che in questo problema piattaforma, persona e carrucole devono muoversi in modo solidale, troviamo:

$$\begin{aligned} m_1 a &= F_{tot}^{(1)} = -m_1 g + F_{vinc}^{(12)} + F_{vinc}^{(13)} + F_{vinc}^{(14)} \\ m_2 a &= F_{tot}^{(2)} = -m_2 g + F_{vinc}^{(21)} + F_T^{(24)} \\ 0 &= m_3 a = F_{tot}^{(3)} = F_{vinc}^{(31)} + F_T^{(30)} + F_T^{(34)} \\ 0 &= m_4 a = F_{tot}^{(4)} = F_{vinc}^{(41)} + F_T^{(43)} + F_T^{(42)} \end{aligned}$$

Sommando le 4 equazioni e applicando la legge di azione-reazione si trova subito  $(m_1 + m_2)a = -(m_1 + m_2)g + F_T^{(30)}$ . Per una corda ideale, la tensione è uguale ovunque, pertanto  $F_T^{(30)} = F_{est}$ , quindi:

$$a = \frac{F_{est} - (m_1 + m_2)g}{m_1 + m_2}$$

Tuttavia, perché persona e piattaforma siano solidali, occorre che  $F_{vinc}^{(21)} > 0$ . Dalla 2<sup>a</sup> equazione si trova

$$\begin{aligned} F_{vinc}^{(21)} &= m_2(a + g) - F_T^{(24)} = m_2 \frac{F_{est}}{m_1 + m_2} - F_{est} \\ &= F_{est} \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

Quindi occorre che  $m_2 > m_1$ : la persona deve essere più massiva della piattaforma — risultato, tutto sommato, ragionevole!

**Esercizio 9.22.** Due oggetti piatti (1) e (2), di masse  $m_1$ ,  $m_2$ , sono disposti in modo che (1) appoggia su un piano orizzontale, (2) appoggia su (1). I coefficienti di attrito, statico e dinamico, sono rispettivamente  $\mu_s^{01}$ ,  $\mu_d^{01}$  fra piano e (1), e  $\mu_s^{12}$ ,  $\mu_d^{12}$  fra (1) e (2). A (1) è attaccata una corda, tesa orizzontalmente, con una forza  $F_{est}$  — vd Fig. 9.15.

- (a) Calcolare in valore limite  $F'_{est}$  che  $F_{est}$  può assumere, affinché non ci sia movimento.
- (b) Esiste un intervallo  $F'_{est} < F_{est} \leq F''_{est}$  tale che (1) e (2) si muovono in modo solidale? Se sì, qual è la loro accelerazione?
- (c) Come sono le accelerazioni  $a_1, a_2$  dei due corpi per  $F_{est} > F''_{est}$ ?

**Soluzione.** Occorre anzitutto individuare tutte le forze, agenti su ciascun oggetto. Indicheremo con  $\vec{F}_{tot}^{(i)}$  la forza totale agente sull' $i$ -esimo oggetto ( $i = 1, 2$ ) e con  $\vec{F}_{descr}^{(ij)}$  la forza di natura "descr" agente sull' $i$ -esimo oggetto causata dal  $j$ -esimo oggetto. Inoltre, ci dotiamo di assi cartesiani con  $\hat{x}$  orizzontale e allineato con  $\vec{F}_{est}$  e  $\hat{z}$  verso l'alto. Quindi:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{tot}^{(1)} &= \left( F_{est} + F_{attr}^{(10)} + F_{attr}^{(12)} \right) \hat{x} + \left( -m_1 g + F_{vinc}^{(10)} + F_{vinc}^{(12)} \right) \hat{z} \\ \vec{F}_{tot}^{(2)} &= \left( F_{attr}^{(21)} \right) \hat{x} + \left( -m_2 g + F_{vinc}^{(21)} \right) \hat{z}\end{aligned}$$

Per la legge di azione-reazione, deve essere  $F_{vinc}^{(21)} = -F_{vinc}^{(12)}$  e  $F_{attr}^{(21)} = -F_{attr}^{(12)}$ , pertanto le equazioni diventano:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{tot}^{(1)} &= \left( F_{est} + F_{attr}^{(10)} - F_{attr}^{(21)} \right) \hat{x} + \left( -m_1 g + F_{vinc}^{(10)} - F_{vinc}^{(21)} \right) \hat{z} \\ \vec{F}_{tot}^{(2)} &= \left( F_{attr}^{(21)} \right) \hat{x} + \left( -m_2 g + F_{vinc}^{(21)} \right) \hat{z}\end{aligned}$$

La descrizione delle forze di attrito dipende dalle condizioni dinamiche, a seconda delle quali possiamo avere attriti statici o dinamici.

Quindi iniziamo con le componenti verticali: qualunque cosa succeda, sicuramente non abbiamo accelerazione verticale, pertanto  $F_{tot,z}^{(1)} = 0$  e  $F_{tot,z}^{(2)} = 0$ . Da qui si deduce:

$$\begin{aligned}F_{vinc}^{(21)} &= m_2 g \\ F_{vinc}^{(10)} &= m_1 g + F_{vinc}^{(21)} = (m_1 + m_2)g\end{aligned}$$

Poi esaminiamo le componenti orizzontali.

**Caso (a).** Per avere assenza di moto, deve essere  $F_{tot,x}^{(1)} = 0$  e  $F_{tot,x}^{(2)} = 0$ . In tal caso gli attriti sono statici:

$$\begin{aligned}0 &= F_{tot,x}^{(2)} = F_{as}^{(21)} \\ 0 &= F_{tot,x}^{(1)} = F_{est} + F_{as}^{(10)} - F_{as}^{(21)}\end{aligned}$$

con  $|F_{as}^{(10)}| \leq \mu_s^{01} |F_{vinc}^{(10)}|$  e  $|F_{as}^{(21)}| \leq \mu_s^{12} |F_{vinc}^{(21)}|$ . La seconda è sicuramente soddisfatta —  $F_{as}^{(21)} = 0$  — mentre la prima implica che  $|F_{as}^{(10)}| = |-F_{est}| \leq \mu_s^{01} (m_1 + m_2)g$ , ovvero:

(a) il sistema resta fermo per

$$F_{est} \leq \underbrace{\mu_s^{01}(m_1 + m_2)g}_{F'_{est}}$$

**Caso (b).** Ovviamente per  $F_{est} > F'_{est}$  l'oggetto (1) si muove, con accelerazione  $a_1 > 0$ , e l'attrito  $F_{attr}^{(10)}$  diventa dinamico,  $F_{ad}^{(10)} = -\mu_d^{01}F_{vinc}^{(10)}$ . Se gli oggetti (1) e (2) devono muoversi in modo solidale, occorre che l'attrito fra essi resti statico, e che anche (2) si muova con la stessa accelerazione  $a_2 = a_1$ . Pertanto le equazioni delle forze diventano:

$$\begin{aligned} m_2 a_1 &= F_{tot,x}^{(2)} = F_{as}^{(21)} \\ m_1 a_1 &= F_{tot,x}^{(1)} = F_{est} - \mu_d^{01} F_{vinc}^{(10)} - F_{as}^{(21)} \\ &= F_{est} - \mu_d^{01} (m_1 + m_2)g - F_{as}^{(21)} \end{aligned}$$

Abbiamo 2 incognite:  $a_1$  e  $F_{as}^{(21)}$ . Per trovare  $a_1$  possiamo sommare le due equazioni, trovando

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)a_1 &= F_{est} - \mu_d^{01}(m_1 + m_2)g \\ a_1 &= \frac{F_{est}}{m_1 + m_2} - \mu_d^{01}g \end{aligned}$$

Quindi  $F_{as}^{(21)} = m_2 \left( \frac{F_{est}}{m_1 + m_2} - \mu_d^{01}g \right)$ . Si noti che  $F_{as}^{(21)} > 0$  — essendo nella condizione  $F_{est} > \mu_s^{01}(m_1 + m_2)g$  e  $\mu_s^{01} > \mu_d^{01}$ . La condizione di attrito statico per  $F_{as}^{(21)}$  diventa

$$\begin{aligned} |F_{as}^{(21)}| &\leq \mu_s^{12} |F_{vinc}^{(21)}| \\ m_2 \left( \frac{F_{est}}{m_1 + m_2} - \mu_d^{01}g \right) &\leq \mu_s^{12} m_2 g \\ F_{est} &\leq (m_1 + m_2)(\mu_s^{12} + \mu_d^{01}) \end{aligned}$$

Quindi:

(b) il sistema accelera, con (1) e (2) solidali, se

$$\underbrace{\mu_s^{01}(m_1 + m_2)g}_{F'_{est}} < F_{est} \leq \underbrace{(\mu_d^{01} + \mu_s^{12})(m_1 + m_2)g}_{F''_{est}}$$

Va notato che questa condizione potrebbe non essere sempre realizzata: per avere  $F'_{est} < F''_{est}$  occorre che sia  $\mu_s^{01} < \mu_d^{01} + \mu_s^{12}$  — cosa non sempre possibile, essendo  $\mu_d^{01} < \mu_s^{01}$  — quindi:

$$\mu_s^{12} > \mu_s^{01} - \mu_d^{01}$$

**Caso (c).** Per  $F_{est} > \max\{F''_{est}, F'_{est}\}$ , tutti gli attriti sono dinamici:

$$\begin{aligned} F_{ad}^{(10)} &= -\mu_d^{01} F_{vinc}^{(10)} = -\mu_d^{01} (m_1 + m_2)g \\ F_{ad}^{(21)} &= +\mu_d^{12} F_{vinc}^{(21)} = +\mu_d^{12} m_2 g \end{aligned}$$

Un commento sul segno di  $F_{ad}^{(21)}$ : esso è +, poiché l'effetto dell'attrito è che (1) traina (2). Quindi:

$$\begin{aligned} m_2 a_2 &= F_{tot,x}^{(2)} = F_{ad}^{(21)} \\ &= \mu_d^{12} m_2 g \\ m_1 a_1 &= F_{tot,x}^{(1)} = F_{est} + F_{ad}^{(10)} - F_{ad}^{(21)} \\ &= F_{est} - \mu_d^{01} (m_1 + m_2)g - \mu_d^{12} m_2 g \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} a_2 &= \mu_d^{12} g \\ a_1 &= \frac{F_{est} - \mu_d^{01} (m_1 + m_2)g - \mu_d^{12} m_2 g}{m_1} \end{aligned}$$

**Esercizio 9.23.** Due oggetti (1) e (2), di masse  $m_1$ ,  $m_2$ , sono appoggiati su un piano inclinato che forma un angolo  $\theta$  rispetto all'orizzontale. L'oggetto (1) è "a monte" dell'oggetto (2). Ciascun oggetto ha coefficienti di attrito statico e dinamico con il piano pari a  $\mu_s^{(i)}$ ,  $\mu_d^{(i)}$  (con  $i = 1, 2$ ). I due oggetti sono collegati da una corda ideale. Quando si verificano le seguenti condizioni?

- (a) La corda è tesa e i due oggetti sono in quiete;  
 (b) La corda è tesa e i due oggetti scivolano sul piano.

**Soluzione.** Come sempre, elenchiamo le forze. Scegliamo due direzioni:  $\hat{n}$  ortogonale al piano ed uscente da esso;  $\hat{t}$  parallela al piano, in discesa.

$$\begin{aligned} m_1 \vec{a}_1 &= \vec{F}_{tot}^{(1)} = \left( -m_1 g \cos \theta + F_{vinc}^{(1)} \right) \hat{n} + \left( m_1 g \sin \theta + F_{attr}^{(1)} + F_T^{(12)} \right) \hat{t} \\ m_2 \vec{a}_2 &= \vec{F}_{tot}^{(2)} = \left( -m_2 g \cos \theta + F_{vinc}^{(2)} \right) \hat{n} + \left( m_2 g \sin \theta + F_{attr}^{(2)} + F_T^{(21)} \right) \hat{t} \end{aligned}$$

In direzione  $\hat{n}$  non ci deve essere accelerazione, pertanto otteniamo subito

$$F_{vinc}^{(1)} = m_1 g \cos \theta \quad ; \quad F_{vinc}^{(2)} = m_2 g \cos \theta$$

(niente di nuovo...)

Ora passiamo alla direzione  $\hat{t}$ . Anzitutto, per la legge di azione-reazione,  $F_T^{(12)} = -F_T^{(21)}$ ; inoltre, affinché la corda sia tesa, deve essere  $F_T^{(12)} > 0$ .

Per il resto, occorre separare il caso statico da quello dinamico.

**Caso (a).** *Le accelerazioni sono nulle. Gli attriti devono essere statici:*  
 $F_{attr}^{(i)} \equiv F_{as}^{(i)}$ , con  $|F_{as}^{(i)}| \leq F_{vinc}^{(i)}$ . *Quindi:*

$$\left. \begin{aligned} 0 &= m_1 g \sin \theta + F_{as}^{(1)} + F_T^{(12)} \\ 0 &= m_2 g \sin \theta + F_{as}^{(2)} - F_T^{(12)} \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

*In sistema ha 3 incognite: le 3 forze adattive  $F_{as}^{(1)}$ ,  $F_{as}^{(2)}$ ,  $F_T^{(12)}$ . Esse devono soddisfare le 3 disequazioni:*

$$\left. \begin{aligned} |F_{as}^{(1)}| &\leq \mu_s^{(1)} m_1 g \cos \theta \\ |F_{as}^{(2)}| &\leq \mu_s^{(2)} m_2 g \cos \theta \\ F_T^{(12)} &> 0 \end{aligned} \right\} \quad (ii)$$

*che pongono limiti sui loro valori, ma non aiutano a completare il sistema.*

*Questo non deve stupirci: possiamo immaginarci diverse situazioni in cui il sistema resta statico: per esempio i coefficienti  $\mu_s^{(i)}$  sono molto elevati, consentendo agli attriti statici di raggiungere valori molto grandi, adatti a contrastare non solo le forze-peso, ma anche una forte tensione della corda.*

*Mettiamoci invece in una situazione meno estrema. Immaginiamo che (1) venga appoggiato sul piano inclinato e resti fermo: siccome forza-peso e tensione lo tirano entrambi in discesa, l'unica forza che può tenerlo in equilibrio è l'attrito statico, che deve quindi tirare in salita. Dunque:*

$$F_{as}^{(1)} < 0 \quad ; \quad \tan \theta < \mu_s^{(1)}$$

*Poi (2) viene appoggiato sul piano a valle di (1), e collegato ad esso dalla corda. Se il suo attrito statico fosse sufficiente a contrastare la forza-peso, la corda non andrebbe in tensione. Quindi l'attrito statico, pur tirando in salita, non è sufficiente a contrastare interamente la forza-peso, e la tensione contribuisce a mantenere l'equilibrio:*

$$F_{as}^{(2)} = -\mu_s^{(2)} m_2 g \cos \theta \quad ; \quad \tan \theta > \mu_s^{(2)}$$

*In particolare, la pendenza deve essere tale che*

$$\mu_s^{(2)} < \tan \theta < \mu_s^{(1)} \quad (iii)$$

*Il fatto che  $F_{as}^{(2)}$  raggiunga il suo valore-limite (negativo) consente ora di risolvere il sistema. Anzitutto, dalla 2<sup>a</sup> delle equazioni (i):*

$$\begin{aligned} F_T^{(12)} &= m_2 g \sin \theta - \mu_s^{(2)} m_2 g \cos \theta \\ &= m_2 (\tan \theta - \mu_s^{(2)}) g \cos \theta \end{aligned}$$

*(che è manifestamente  $> 0$ ). Poi dalla 1<sup>a</sup> delle equazioni (i):*

$$F_{as}^{(1)} = -m_1 g \sin \theta - m_2 (\tan \theta - \mu_s^{(2)}) g \cos \theta$$

In sintesi abbiamo trovato:

$$\left. \begin{aligned} F_{as}^{(1)} &= -m_1 g \sin \theta - m_2 (\tan \theta - \mu_s^{(2)}) g \cos \theta \\ F_{as}^{(2)} &= -\mu_s^{(2)} m_2 g \cos \theta \\ F_T^{(12)} &= m_2 g \sin \theta - \mu_s^{(2)} m_2 g \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (iv)$$

Occorre verificare che le soluzioni trovate soddisfino tutte le disequazioni (ii). In particolare, quella per  $|F_{as}^{(1)}|$  dà:

$$|F_{as}^{(1)}| = \left( (m_1 + m_2) \tan \theta - \mu_s^{(2)} m_2 \right) g \cos \theta \leq \mu_s^{(1)} m_1 g \cos \theta$$

che può essere risolta nei due modi equivalenti:

$$\begin{aligned} \tan \theta &\leq \frac{\mu_s^{(1)} m_1 + \mu_s^{(2)} m_2}{m_1 + m_2} \\ \frac{m_1}{m_2} &\geq \frac{\tan \theta - \mu_s^{(2)}}{\mu_s^{(1)} - \tan \theta} \end{aligned}$$

La prima forma pone un limite superiore alla pendenza — sempre compatibile con la condizione (iii), visto che  $\frac{\mu_s^{(1)} m_1 + \mu_s^{(2)} m_2}{m_1 + m_2} \in [\mu_s^{(2)}; \mu_s^{(1)}]$ : se il piano è troppo ripido, l'attrito statico  $F_{as}^{(1)}$ , anche se sufficiente a trattenere la sola  $m_1$ , non basta a trattenere anche  $m_2$ . La seconda forma invece ci dice che  $m_1$  non può essere troppo leggera, in caso contrario il suo attrito statico non riuscirebbe a trattenere  $m_2$ .

**Caso (b).** Le accelerazioni sono identiche, pari ad  $a$ , e le equazioni del moto sono:

$$\begin{aligned} m_1 a &= m_1 g \sin \theta + F_{ad}^{(1)} + F_T^{(12)} \\ m_2 a &= m_2 g \sin \theta + F_{ad}^{(2)} - F_T^{(12)} \end{aligned}$$

con  $F_{ad}^{(i)} = -\mu_d^{(i)} m_i g \cos \theta$  — assumiamo lo scivolamento in discesa, quindi  $F_{ad}^{(i)} < 0$ .

Abbiamo un sistema di 2 equazioni, nelle incognite  $a$ ,  $F_T^{(12)}$ . Sommando le equazioni:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) a &= (m_1 + m_2) g \sin \theta - (m_1 \mu_d^{(1)} + m_2 \mu_d^{(2)}) g \cos \theta \\ a &= g \sin \theta - \frac{m_1 \mu_d^{(1)} + m_2 \mu_d^{(2)}}{m_1 + m_2} g \cos \theta \end{aligned}$$

Ora si può ricavare  $F_T^{(12)}$  da una qualunque delle 2 equazioni:

$$F_T^{(12)} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \cos \theta \left( \mu_d^{(1)} - \mu_d^{(2)} \right)$$

*La condizione di corda tesa,  $F_T^{(12)} > 0$ , è verificata se (e solo se)  $\mu_d^{(1)} > \mu_d^{(2)}$ . Il risultato è sensato: solo se  $m_1$  (la massa “a monte”) è più frenata di  $m_2$ , può trattenere quest’ultima con la tensione della corda.*



# Capitolo 10

## Moti oscillatori

Abbiamo introdotto le forze elastiche nella Sezione 9.5: ricordiamo che sono forze che entrano in azione quando un oggetto viene spostato da una posizione di equilibrio, ed agiscono in modo da riportarlo in tale posizione, con un'intensità direttamente proporzionale allo spostamento  $\Delta\ell$ . In formule:

$$F_{el} = -k \Delta\ell \quad (10.1)$$

L'effetto di tali forze è di creare dei moti di oscillazione intorno alla posizione di equilibrio, detti *moti armonici*.

L'esempio più semplice da trattare è quello di una massa attaccata ad una molla. In realtà, le forze elastiche si applicano ad una vasta categoria di sistemi fisici: in generale, ogni volta che si ha a che fare con un moto di un oggetto intorno ad un suo punto di equilibrio stabile, per piccoli spostamenti da esso il problema può essere trattato con buona approssimazione come un moto elastico. Riprenderemo questo argomento nella Sezione 14.3.

### 10.1 Oscillazioni di una molla

Consideriamo un oggetto di massa  $m$  attaccato ad una molla con costante di elasticità  $k$ . Supponiamo dapprima che sul sistema non agiscano altre forze. Per esempio, la molla sia disposta orizzontalmente lungo una rotaia, sulla quale la massa  $m$  può scorrere senza attrito, come in Fig. 10.1 (sinistra).

Il problema è unidimensionale. Definiamo l'origine  $O$  del sistema di riferimento nel punto in cui la molla è in equilibrio, e l'asse  $x$  orientato verso la direzione di allungamento della molla. Quindi

$$x = \ell - \ell_0 = \Delta\ell$$

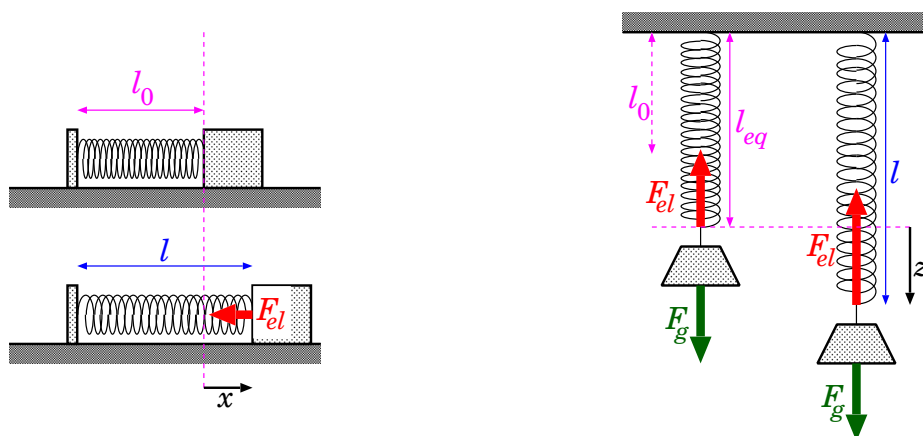


Figura 10.1: Molla che oscilla in orizzontale (a sinistra) e in verticale (a destra).

e la forza elastica dell'Eq. (10.1) diventa:

$$F_{el} = -kx \quad (10.2)$$

Applicando la legge di Newton,  $F = ma$ , otteniamo la seguente equazione del moto:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m} = -\frac{k}{m}x \quad (10.3)$$

Come si muove la massa  $m$ ? L'esperienza ci insegna che si tratta di un moto oscillatorio... ma qui vogliamo verificare che le equazioni della dinamica lo descrivano correttamente. Occorre trovare una funzione  $x(t)$  tale che la sua derivata seconda sia proporzionale ad essa, con segno opposto:

$$\frac{d^2x}{dt^2} \propto -x$$

Funzioni di questo genere esistono: sono le funzioni trigonometriche!

Consideriamo dunque una funzione

$$x(t) = A \cos(\Omega t + \phi)$$

e verifichiamo se può essere soluzione dell'Eq. (10.3).

Dalle regole di derivazione della Sezione 3.3 sappiamo che <sup>[1]</sup>:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} [A \cos(\Omega t + \phi)] &= -A\Omega \sin(\Omega t + \phi) \\ \frac{d^2}{dt^2} [A \cos(\Omega t + \phi)] &= \frac{d}{dt} [-A\Omega \sin(\Omega t + \phi)] = -A\Omega^2 \cos(\Omega t + \phi)\end{aligned}$$

Pertanto:

$$\frac{d^2}{dt^2} [A \cos(\Omega t + \phi)] = -\Omega^2 [A \cos(\Omega t + \phi)]$$

Quindi possiamo concludere che la funzione

$$x(t) = A \cos(\Omega t + \phi) \tag{10.4}$$

soddisfa un'equazione identica all'Eq. (10.3), purché sia

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{10.5}$$

Quindi, l'Eq. (10.4) descrive esattamente la legge oraria dell'oscillazione della molla.

Ora consideriamo il problema di una massa  $m$  appesa verticalmente ad una molla di costante di elasticità  $k$ , come in Fig. 10.1 (destra). Le forze in gioco sono due: la forza elastica  $\vec{F}_{el}$  e la forza-peso  $\vec{F}_g$ . Entrambe sono verticali, quindi il problema è comunque unidimensionale, e possiamo trattare  $F_{el}$ ,  $F_g$  come quantità numeriche con l'opportuno segno. Scegliendo come positivo l'orientamento verso il basso,  $F_{el} = -k(\ell - \ell_0)$  e  $F_g = mg$ . La posizione del sistema è identificata univocamente dalla lunghezza  $\ell$

---

<sup>1</sup> Si può ragionare così:

$$\begin{aligned}x &= A \cos(\underbrace{\Omega t + \phi}_{\alpha}) \\ \frac{dx}{dt} &= A \frac{d \cos(\Omega t + \phi)}{dt} = A \frac{d \cos(\alpha)}{dt} \\ &= A \frac{d \cos(\alpha)}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} \\ &= A [-\sin(\alpha)] \frac{d(\Omega t + \phi)}{dt} \\ &= -A \sin(\Omega t + \phi) \Omega\end{aligned}$$

della molla, e potremmo pensare di ricavare la legge oraria per  $\ell = \ell(t)$ . L'equazione del moto sarebbe:

$$\frac{d^2\ell}{dt^2} = \frac{F_{el} + F_g}{m} = -\frac{k}{m}(\ell - \ell_0) + g$$

Questa equazione è un po' meno comoda di quella trovata per il moto orizzontale, Eq. (10.3), a causa della presenza del termine  $g$ . Tuttavia sappiamo dalla Sezione 9.5.3 che l'effetto della forza-peso è di spostare il punto di equilibrio da  $\ell_0$  a

$$\ell_{eq} = \ell_0 + \frac{gm}{k}$$

Pertanto scegliamo il sistema di riferimento con l'asse  $z$  orientato verso il basso (in modo che allungamenti della molla corrispondano a  $z$  crescenti) e con l'origine  $O$  nel punto di equilibrio, cosicché  $z = \ell - \ell_{eq}$ . Con questa scelta l'equazione del moto diventa:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{k}{m}z$$

del tutto identica all'Eq. (10.3). Pertanto anche la legge oraria deve essere la stessa.

### 10.1.1 Moto oscillatorio armonico

Riconsideriamo l'equazione del moto Eq. (10.3), trovata per una molla oscillante, e riportiamola qui:

$$F_x = -kx \quad \left( \text{ovvero} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m} \cdot x \right) \quad (10.6)$$

Dimenticandoci della natura specifica del sistema (la molla), possiamo astrarre l'analisi dinamica parlando semplicemente di un sistema con le seguenti caratteristiche:

- esiste un punto di equilibrio in cui la forza è nulla;
- uno spostamento  $x$  dal punto di equilibrio produce una forza  $F_x$ , direttamente proporzionale allo spostamento, ma diretta nel verso opposto;
- è caratterizzato da due parametri: la massa  $m$  e la costante elastica  $k$ .

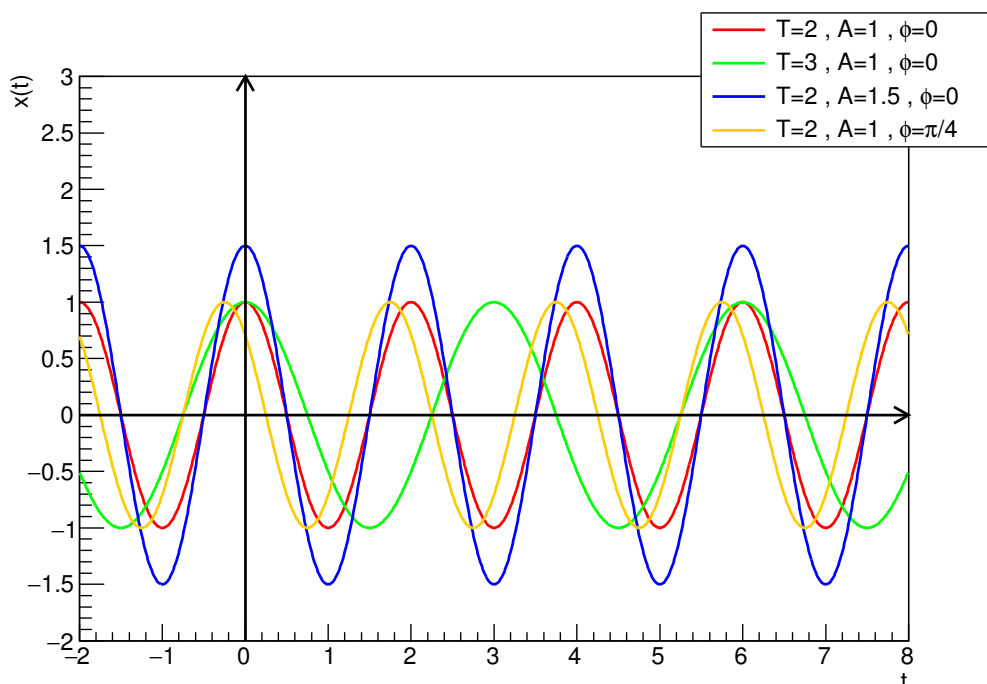


Figura 10.2: Esempi di moto oscillatorio armonico, per diversi valori di periodo  $T$ , ampiezza  $A$ , fase  $\phi$ .

Abbiamo già visto che la legge oraria del moto del sistema è

$$x(t) = A \cos(\Omega t + \phi) \quad ; \quad \Omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (10.7)$$

Quindi la forza  $F_x$  (a causa del segno  $-$ ) agisce da *forza di richiamo*, ovvero tende a riportare il sistema verso la posizione di equilibrio: in pratica, il sistema oscilla intorno ad essa.

Tale moto si chiama *moto oscillatorio armonico*. La sua rappresentazione grafica è mostrata in Fig. 10.2, per diversi valori di  $\Omega$ ,  $A$ ,  $\phi$ .

La quantità  $\Omega$  si chiama *frequenza angolare* (o anche *pulsazione*) e si misura in “radianti al secondo” (rad/s). Essa dipende dai parametri fisici del sistema ( $m$ ,  $k$ ) e non dalle condizioni iniziali.

La velocità si ricava derivando l’Eq. (10.7):

$$v(t) = -A\Omega \sin(\Omega t + \phi) \quad ; \quad \Omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (10.8)$$

Le funzioni trigonometriche hanno una periodicità di  $2\pi$ :  $\cos(\alpha) = \cos(\alpha + 2\pi)$  e  $\sin(\alpha) = \sin(\alpha + 2\pi)$ . Nel nostro caso, ciò significa che

$$\begin{aligned}\cos(\Omega t + \phi) &= \cos(\Omega t + \phi + 2\pi) = \cos\left(\Omega\left(t + \frac{2\pi}{\Omega}\right) + \phi\right) \\ x(t) &= x\left(t + \frac{2\pi}{\Omega}\right)\end{aligned}$$

Analogamente si può verificare che

$$v(t) = v\left(t + \frac{2\pi}{\Omega}\right)$$

Il moto oscillatorio armonico è dunque un *moto periodico*, nel senso che esiste un intervallo di tempo  $T$  tale che la posizione e la velocità all'istante  $t$  sono sempre uguali a quelle all'istante  $t + T$ :

$$\begin{aligned}x(t) &= x(t + T) \\ v(t) &= v(t + T)\end{aligned}\quad \text{per qualunque } t \quad (10.9)$$

In particolare, nel moto oscillatorio armonico il *periodo* è dato da

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} \quad (10.10)$$

Si introduce anche la *frequenza*  $\nu$  definita come il numero di oscillazioni effettuate in 1 secondo:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\Omega}{2\pi} \quad (10.11)$$

La frequenza, essendo reciproca del periodo, si misura in  $\text{s}^{-1}$ , chiamati anche Hertz:  $1 \text{ Hz} \equiv 1 \text{ s}^{-1}$ .

La legge oraria, Eq. (10.7), oltre alla frequenza angolare  $\Omega$ , contiene anche i parametri  $A, \phi$ .

Il parametro  $A$  si chiama *ampiezza* dell'oscillazione: poiché  $|\cos(\alpha)| \leq 1$ ,  $A$  rappresenta effettivamente il massimo spostamento possibile dal punto di equilibrio.

$A$  e  $\phi$  si ricavano dalle condizioni iniziali  $x_0, v_0$ :

$$\begin{aligned}x_0 = x(0) &= A \cos(\phi) \\ v_0 = v(0) &= -A\Omega \sin(\phi)\end{aligned}$$

Moltiplicando la prima equazione per  $\Omega$ , facendone il quadrato e sommandola al quadrato della seconda, si ottiene:

$$(x_0\Omega)^2 + v_0^2 = (A\Omega)^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)$$

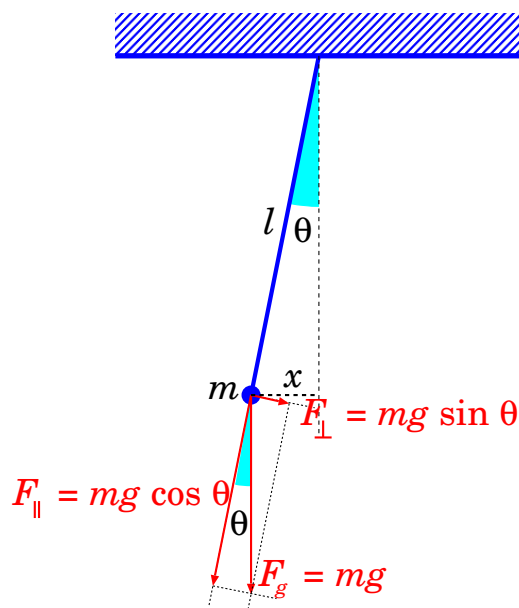


Figura 10.3: Schema del pendolo.

e sfruttando l'identità trigonometrica  $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$  si ottiene:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\Omega^2}} \quad (10.12)$$

## 10.2 Moto di un pendolo ideale

Un pendolo ideale è costituito da un filo inestensibile di lunghezza  $\ell$  e di massa trascurabile, fissato ad un ancoraggio immobile ad un estremo, e con una massa puntiforme  $m$  appesa all'altro estremo, il tutto in un campo gravitazionale  $g$  uniforme. La posizione del pendolo può essere descritta con l'angolo  $\theta$  che il filo forma con la verticale, come in Fig. 10.3.

Sappiamo per esperienza che un pendolo in posizione verticale sta fermo, mentre se viene spostato prende ad oscillare avanti e indietro intorno alla posizione verticale. In questa sezione studiamo il meccanismo fisico che ne governa il moto.

Sulla massa  $m$  agiscono la forza di gravità,  $F_g = mg$ , diretta verticalmente verso il basso, e la tensione del filo,  $F_T$ , diretta lungo il filo. Chiamiamo  $\theta$  l'angolo formato dal filo rispetto alla verticale, e scomponiamo il sistema di forze lungo due direzioni:

- lungo il filo agiscono la tensione  $F_T$  e la componente della forza-peso  $F_{g\parallel} = mg \cos \theta$ : il loro effetto combinato è quello di mantenere la traiettoria della massa  $m$  lungo la circonferenza <sup>[2]</sup>
- in direzione ortogonale al filo agisce solo la componente della forza-peso  $F_{g\perp} = mg \sin \theta$ , che produce sulla massa  $m$  un'accelerazione tangenziale

$$a_t = \frac{F_t}{m} = g \sin \theta \quad (10.13)$$

che determina il moto del pendolo.

Studiamo l'equazione del moto, per la variabile angolare  $\theta$ . Lo spostamento lineare del pendolo è  $ds = \ell d\theta$ , pertanto:

$$\begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt} = \frac{d(\ell\theta)}{dt} = \ell \frac{d\theta}{dt} \\ a_t &= \frac{dv}{dt} = \ell \frac{d^2\theta}{dt^2} \end{aligned}$$

Confrontando l'ultima equazione con l'Eq. (10.13) si trova:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g}{\ell} \sin \theta \quad (\text{da perfezionare})$$

dove le quantità sono per ora espresse tutte in modulo. Un'osservazione più attenta ci mostra che  $a_t$  ha sempre segno opposto rispetto allo spostamento angolare  $\theta$ , pertanto una formulazione più corretta è:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta \quad (10.14)$$

Questa equazione differenziale non ammette una soluzione analitica. Tuttavia, se ci limitiamo ad oscillazioni piccole, possiamo assumere  $\sin \theta \simeq \theta$  <sup>[3]</sup>. Con questa approssimazione, l'equazione del moto diventa

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \theta \quad (10.15)$$

---

<sup>2</sup> Si potrebbe anche impostare il calcolo della tensione del filo, partendo dalla forza centripeta:

$$m(\dot{\theta})^2 \ell \equiv F_n = F_T - mg \cos \theta \quad ; \quad \dot{\theta} \equiv \frac{d\theta}{dt}$$

ma per analizzare il moto del pendolo non ci serve...

<sup>3</sup> La funzione  $\sin \theta$  può essere espansa nel polinomio di Taylor  $\sin \theta \simeq \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \dots$ . Per  $\theta$  molto piccoli, tutti i termini a potenze di ordine più alto diventano trascurabili.



Questa è un'equazione del moto molto peculiare, che ricorre spesso in molti problemi fisici, quando si abbia a che fare con moti di oscillazione.

*La derivata seconda dello spostamento è direttamente proporzionale allo spostamento, e con segno opposto.*

Ora, noi conosciamo funzioni che possiedono proprio la proprietà che ci serve: una derivata seconda proporzionale alla funzione stessa, ma di segno opposto. Si tratta delle funzioni trigonometriche *seno* e *coseno*. In effetti:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} [\cos(\Omega t + \phi)] &= -\Omega \sin(\Omega t + \phi) \\ \frac{d^2}{dt^2} [\cos(\Omega t + \phi)] &= -\Omega \frac{d}{dt} [\sin(\Omega t + \phi)] = -\Omega^2 \cos(\Omega t + \phi)\end{aligned}$$

pertanto la forma più generale della soluzione del moto, per l'Eq. (10.15), è:

$$\theta(t) = A \cos(\Omega t + \phi) \quad (10.16)$$

purché si assuma:

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad (10.17)$$

La quantità  $\Omega$  si chiama *frequenza angolare* (o anche *pulsazione*) e si misura in “radianti al secondo” (rad/s). Essa dipende dai parametri fisici del sistema: la lunghezza del pendolo  $\ell$  e l'accelerazione di gravità  $g$ .

Il moto del pendolo è *periodico*: questo significa che esiste una durata temporale  $T$  — il *periodo* — tale che per ciascun istante  $t$  valgono:

$$\begin{aligned}\theta(t+T) &= \theta(t) \\ \dot{\theta}(t+T) &= \dot{\theta}(t) \quad \left( \dot{\theta} \equiv \frac{d\theta(t)}{dt} \right)\end{aligned}$$

In effetti le funzioni trigonometriche sono periodiche di  $2\pi$  nel loro argomento:  $\cos(\alpha) = \cos(\alpha + 2\pi)$ . Nel nostro caso, ciò si scrive

$$\begin{aligned}\theta(t) &= A \cos(\Omega t + \phi) = A \cos(\Omega t + \phi + 2\pi) \\ &= A \cos\left(\Omega \left(t + \frac{2\pi}{\Omega}\right) + \phi\right) \\ &= \theta\left(t + \frac{2\pi}{\Omega}\right)\end{aligned}$$

ovvero il periodo è:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (10.18)$$

Questa è la famosa *legge del pendolo*, per piccole oscillazioni. Il periodo del pendolo è determinato unicamente dalla sua lunghezza  $\ell$ , oltre che dall'accelerazione di gravità  $g$ . Questa legge permette di costruire un moto periodico con grande precisione: per questa ragione, per molto tempo gli orologi più precisi sono stati appunto quelli a pendolo.

Mentre  $\Omega$  (e quindi  $T$ ) sono collegati a grandezze fisiche del sistema ( $g, \ell$ ), i parametri  $A, \phi$  invece sono determinati dalle condizioni iniziali:  $\theta_0 = \theta(t=0)$  e  $\dot{\theta}_0 = \dot{\theta}(t=0)$ . In effetti, dall'Eq. (10.16) e dalla sua derivata, per  $t=0$  si trova:

$$\begin{aligned}\theta_0 &= \theta(t=0) = A \cos(\phi) \\ \dot{\theta}_0 &= \dot{\theta}(t=0) = -A\Omega \sin(\phi)\end{aligned}$$

Moltiplicando la prima condizione per  $\Omega$  si ottiene  $\Omega\theta_0 = \Omega A \cos(\phi)$ ; facendone il quadrato, e sommandovi il quadrato della seconda condizione (ricordando l'identità trigonometrica  $\cos^2 + \sin^2 = 1$ ) si ottiene  $(\Omega\theta_0)^2 + \dot{\theta}_0^2 = \Omega^2 A^2$ , ovvero

$$A = \sqrt{\theta_0^2 + \left(\frac{\dot{\theta}_0}{\Omega}\right)^2}$$

### 10.3 Oscillazioni forzate

Consideriamo un oggetto di massa  $m$ , sottoposto ad una forza elastica di costante  $k$  e contemporaneamente ad una forza esterna  $F_{est}$  che varia nel tempo, in modo armonico, con frequenza angolare  $\Omega$ . Per descrivere il problema, limitiamoci ad un caso unidimensionale. Chiamando  $x$  lo spostamento dal punto di equilibrio, la forza elastica può essere scritta come:

$$F_{el} = -kx \quad (10.19)$$

Invece la forza esterna ha una forma del tipo:

$$F_{est} = F_0 \cos(\Omega t) \quad (10.20)$$

L'equazione del moto del sistema è:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + F_0 \cos(\Omega t) \quad (10.21)$$

Un'equazione del genere si chiama *equazione differenziale lineare non omogenea*. L'incognita è la funzione  $x(t)$ . La “non omogeneità” deriva dalla presenza del termine  $F_0 \cos(\Omega t)$  che non contiene la funzione incognita  $x(t)$ .

### 10.3.1 Soluzione generale del moto

La teoria delle equazioni differenziali insegna che la soluzione generale dell'Eq. (10.21) è data dalla soluzione generale  $x_0(t)$  dell'equazione omogenea,  $m \frac{d^2 x_0}{dt^2} = -kx_0$ , sommata ad una soluzione particolare  $\bar{x}(t)$  dell'equazione non omogenea. La ragione è evidente: se

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x_0}{dt^2} &= -kx_0 \\ m \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} &= -k\bar{x} + F_0 \cos(\Omega t) \end{aligned}$$

sommando le due equazioni si ottiene

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x_0(t) + \bar{x}(t)) = -k(x_0(t) + \bar{x}(t)) + F_0 \cos(\Omega t)$$

ovvero  $x_0(t) + \bar{x}(t)$  soddisfa l'Eq. (10.21).

La soluzione generale dell'equazione omogenea è nota: si tratta del moto oscillatorio armonico, pertanto

$$x_0(t) = A_0 \cos(\Omega_0 t + \phi_0) \quad \left( \Omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \right) \quad (10.22)$$

dove  $\Omega_0$  dipende dalle caratteristiche del sistema  $(k, m)$ , mentre  $A_0, \phi_0$  verranno fissate imponendo le condizioni iniziali per  $x, v$ .

Per la soluzione particolare, è facile verificare che l'Eq. (10.21) può essere soddisfatta da una funzione della forma

$$\bar{x}(t) = \bar{A} \cos(\Omega t + \bar{\phi}) \quad (10.23)$$

dove  $\Omega$  è esattamente la frequenza angolare della forza esterna  $F_{est}$  — dunque, in generale diversa da  $\Omega_0$ . Per sostituzione diretta, si ottiene  $\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = -\Omega^2 \bar{x}$ , quindi:

$$(-m\Omega^2 + k)\bar{A} \cos(\Omega t + \bar{\phi}) = F_0 \cos(\Omega t)$$

che è automaticamente soddisfatta se

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \frac{F_0}{k - m\Omega^2} = \frac{F_0}{m(\Omega_0^2 - \Omega^2)} \\ \bar{\phi} &= 0 \end{aligned}$$

Riassumendo, la soluzione generale dell'Eq. (10.21) è data da  $x_0(t) + \bar{x}(t)$ , ovvero:

$$x(t) = A_0 \cos(\Omega_0 t + \phi_0) + \frac{F_0}{m(\Omega_0^2 - \Omega^2)} \cos(\Omega t) \quad \left( \Omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \right) \quad (10.24)$$

È da notare che il moto si compone di due moti armonici, con frequenze angolari  $\Omega_0$  e  $\Omega$ . Più la frequenza angolare forzante  $\Omega$  si avvicina alla frequenza angolare propria  $\Omega_0$ , maggiore risulta l'ampiezza della seconda componente del moto.

### 10.3.2 Condizioni iniziali

Consideriamo come condizione iniziale il sistema da fermo:

$$\begin{aligned} 0 = x(0) &= A_0 \cos(\phi_0) + \frac{F_0}{m(\Omega_0^2 - \Omega^2)} \\ 0 = v(0) &= \left[ \frac{dx}{dt} \right]_{t=0} = -A_0 \Omega_0 \sin(\phi_0) \end{aligned}$$

Dalla 2<sup>a</sup> equazione si deduce  $\phi_0 = 0$ , ovvero  $\cos(\phi_0) = 1$ , quindi la 1<sup>a</sup> equazione dà  $A_0 = -\frac{F_0}{m(\Omega_0^2 - \Omega^2)}$ . In questo caso, la legge oraria è dunque:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0}{m(\Omega_0^2 - \Omega^2)} [\cos(\Omega t) - \cos(\Omega_0 t)] \\ &= \frac{2F_0}{m(\Omega_0 + \Omega)(\Omega_0 - \Omega)} \sin\left(\frac{\Omega_0 + \Omega}{2}t\right) \sin\left(\frac{\Omega_0 - \Omega}{2}t\right) \end{aligned} \quad (10.25)$$

dove nell'ultima uguaglianza si è sfruttata l'identità trigonometrica  $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$ .

La rappresentazione grafica del moto armonico forzato è mostrata in Fig. 10.4, per diversi valori della frequenza angolare forzante.

Dall'Eq. (10.25) possiamo notare alcune caratteristiche generali:

- La parte  $\sin\left(\frac{\Omega_0 + \Omega}{2}t\right) \sin\left(\frac{\Omega_0 - \Omega}{2}t\right)$  oscilla fra  $-1$  e  $+1$ , quindi l'ampiezza massima che il moto oscillatorio può raggiungere è

$$A_{max} = \left| \frac{2F_0}{m(\Omega_0 + \Omega)(\Omega_0 - \Omega)} \right| = \frac{2F_0}{m|\Omega_0^2 - \Omega^2|} \quad (10.26)$$

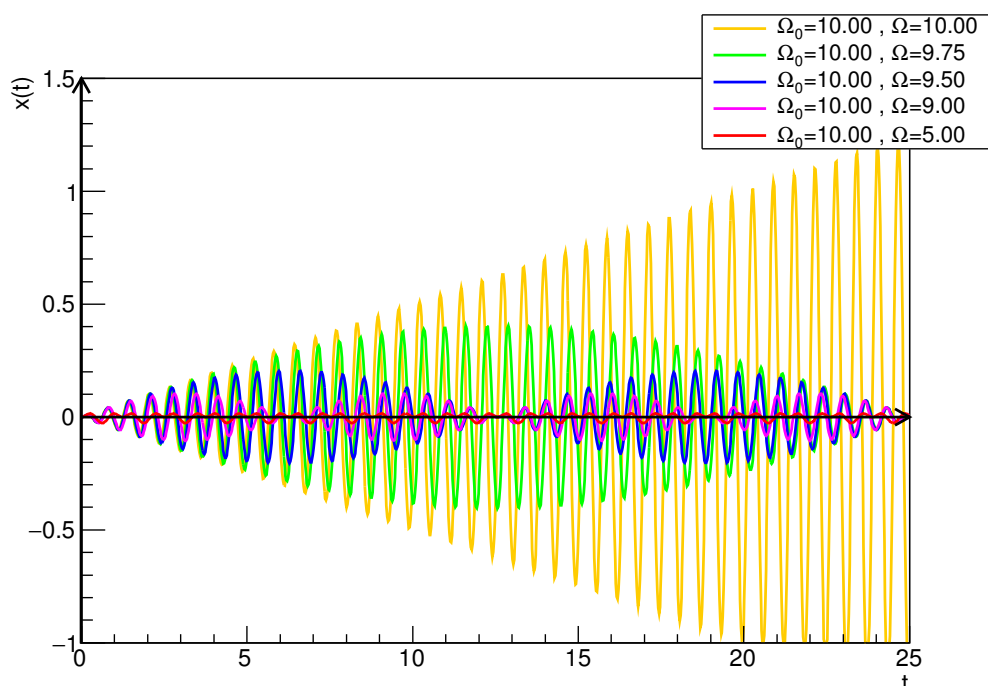


Figura 10.4: *Esempi di moto oscillatorio armonico forzato, con frequenza angolare propria  $\Omega_0$ , per diversi valori della frequenza angolare forzante  $\Omega$ . Si nota che per  $\Omega, \Omega_0$  molto differenti (curva rossa) il moto appare disordinato e con ampiezza piccola. Più  $\Omega$  si avvicina a  $\Omega_0$ , più appare il fenomeno del “battimento” (curve magenta, blu, verde), e più cresce l’ampiezza massima. Quando  $\Omega = \Omega_0$ , l’ampiezza cresce indefinitamente, linearmente con il tempo.*

- L’ampiezza massima è direttamente proporzionale alla forza massima applicata,  $F_0$  — il che è abbastanza intuitivo!
- L’ampiezza massima dipende dalla differenza  $|\Omega_0^2 - \Omega^2|$ : questa si trova al denominatore, quindi, più la frequenza angolare forzante  $\Omega$  si avvicina alla frequenza propria  $\Omega_0$ , maggiore diventa l’ampiezza dell’oscillazione.
- Il caso particolare  $\Omega = \Omega_0$  si chiama “risonanza” e va trattato a parte, vedi sezione successiva.

### 10.3.3 Battimenti e risonanza

Consideriamo in particolare il caso in cui  $\Omega$  sia vicino a  $\Omega_0$ , cosicché l'espressione  $(\Omega_0 - \Omega)$  al denominatore diventa “piccola” e l'ampiezza di oscillazione diventa “grande”. Il moto può essere visto come un'oscillazione con frequenza angolare

$$\Omega_{osc} = \frac{\Omega_0 + \Omega}{2}$$

(cioè la media aritmetica delle frequenze angolari propria e forzante) la cui ampiezza di oscillazione è *modulata* dal termine  $\sin\left(\frac{\Omega_0 - \Omega}{2}t\right)$ . La frequenza angolare ed il periodo della modulazione sono dati da

$$\begin{aligned}\Omega_{mod} &= \frac{\Omega_0 - \Omega}{2} \\ T_{mod} &= \frac{2\pi}{\Omega_{mod}} = \frac{4\pi}{\Omega_0 - \Omega}\end{aligned}$$

Essendo  $\Omega, \Omega_0$  “vicini”,  $\Omega_{mod} \ll \Omega_{osc}$ , e il periodo di modulazione è  $\gg$  del periodo di oscillazione.

Questo tipo di moto è chiamato *battimento*. L'effetto si può vedere il Fig. 10.4 (curve magenta, blu, verde).

Consideriamo ora il caso-limite in cui la frequenza angolare forzante si approssima sempre più alla frequenza angolare del moto libero:  $\Omega \rightarrow \Omega_0$ . In questo caso, possiamo approssimare

$$\sin\left(\frac{\Omega_0 - \Omega}{2}t\right) \xrightarrow{\Omega \rightarrow \Omega_0} \frac{\Omega_0 - \Omega}{2}t$$

e l'Eq. (10.25) diventa:

$$x(t) \xrightarrow{\Omega \rightarrow \Omega_0} \frac{F_0}{2m\Omega_0} \sin(\Omega_0 t) t \quad (10.27)$$

In questo caso, il moto è descritto da un'oscillazione di frequenza angolare  $\Omega_0$  e con ampiezza che *cresce linearmente con il tempo*  $t$ . L'effetto si può vedere il Fig. 10.4 (curva arancione). L'oscillazione diventa sempre più ampia... fino a che la forza elastica non ce la fa più e il sistema si rompe. Questo è il fenomeno della *risonanza*.

---

#### Applicazioni pratiche della risonanza

---

*La risonanza ha diverse applicazioni pratiche.*

Abbiamo visto che gli atomi o le molecole in un solido sono tenuti in posizione dalle interazioni microscopiche, che per piccoli spostamenti dalle posizioni di equilibrio possono essere approssimate con forze elastiche. Pertanto, gli atomi possiedono delle frequenze angolari “proprie”  $\Omega_i$  (possono essere anche più di una), con cui oscillano intorno ai propri punti di equilibrio. Se il solido viene eccitato dall'esterno con una frequenza angolare  $\Omega^{est}$  pari a una delle frequenze angolari  $\Omega_i$ , si verifica il fenomeno della risonanza, e il solido si può spezzare. Questa è la spiegazione per cui i vetri possono essere infranti con dei suoni, oppure in campo medico, i calcoli renali possono essere frantumati con gli ultrasuoni. I suoni sono vibrazioni dell'aria, si tratta di trovare quindi la frequenza di vibrazione giusta.

Anche passando ai casi macroscopici, una costruzione civile, come un ponte o un palazzo, è dotata di una sua elasticità, pertanto possiede frequenze proprie di vibrazione. Se un agente esterno (per esempio un terremoto) agisce sulla struttura con una sollecitazione di frequenza pari a una delle frequenze proprie, può provocarne il crollo.

Quando una colonna di militari (che marciano sempre al passo!) deve attraversare un ponte, usano “rompere il passo”, nel senso che ognuno cammina con il ritmo che vuole. La ragione è che si vuole evitare di avere tanti soldati che — accidentalmente — si trovino a marciare tutti con la frequenza di risonanza tipica del ponte.

## 10.4 Oscillatore armonico smorzato (\*)

In questa sezione si farà ampio uso dell'*esponenziale complesso*, descritto in Sezione 3.6.

### 10.4.1 Oscillatore armonico smorzato libero

Un oscillatore semplice unidimensionale, con massa  $m$ , costante elastica  $k$ , coefficiente di attrito viscoso  $\eta$ , è soggetto a una forza elastica  $F_{el} = -kx$  e una forza di attrito viscoso  $F_{visc} = -\eta v$ , pertanto obbedisce all'equazione del moto:

$$F = m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \eta \frac{dx}{dt} \quad (10.28)$$

ossia

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \Omega_0^2 x = 0$$

$$\gamma = \frac{\eta}{2m} \quad ; \quad \Omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (10.29)$$

La soluzione dell'Eq. (10.29) si trova con l'ansatz  $x(t) = Ae^{st}$ , essendo  $s$  una quantità complessa. Si ottiene quindi un'equazione algebrica in  $s$ :

$$s^2 + 2\gamma s + \Omega_0^2 = 0$$

$$s_{\pm} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \Omega_0^2}$$

La soluzione generale di  $x(t)$  è dunque una combinazione lineare che coinvolge entrambi i coefficienti  $s_{\pm}$ :

$$x_{\pm}(t) = e^{-(\gamma \mp \sqrt{\gamma^2 - \Omega_0^2})t}$$

$$x(t) = A_+ x_+(t) + A_- x_-(t) \quad (10.30)$$

### Condizioni iniziali

I coefficienti  $A_{\pm}$  sono complessi, e vanno fissati con le condizioni iniziali,  $x(0)$  e  $(dx/dt)_{(t=0)}$ . Per esempio, assumiamo  $x(0) = A_0$  e  $(dx/dt)_{(t=0)} = 0$ ; allora:

$$A_+ + A_- = A_0 \quad ; \quad A_+ s_+ + A_- s_- = 0$$

$$A_{\pm} = \mp A_0 \frac{s_{\mp}}{s_+ - s_-}$$

quindi, con un po' di algebra:

$$x(t) = A_+ e^{s_+ t} + A_- e^{s_- t}$$

$$= A_0 e^{-\gamma t} \left[ \cosh \left( \sqrt{\gamma^2 - \Omega_0^2} t \right) + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - \Omega_0^2}} \sinh \left( \sqrt{\gamma^2 - \Omega_0^2} t \right) \right]$$

### Moto completamente smorzato

Se l'attrito è molto forte,  $\gamma > \Omega_0$ ,  $s_{\pm} \in \mathbb{R}$  e  $(\gamma \mp \sqrt{\gamma^2 - \Omega_0^2}) > 0$ , quindi si ottiene il moto completamente smorzato:

$$x(t) = A_+ e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \Omega_0^2})t} + A_- e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \Omega_0^2})t}$$

$$(\gamma > \Omega_0; \text{ moto completamente smorzato}) \quad (10.31)$$

I coefficienti  $A_{\pm}$  sono reali. Il moto è la somma di due moti esponenziali, con tempi di smorzamento

$$\tau_{\pm} = \frac{1}{\gamma \mp \sqrt{\gamma^2 - \Omega_0^2}}$$



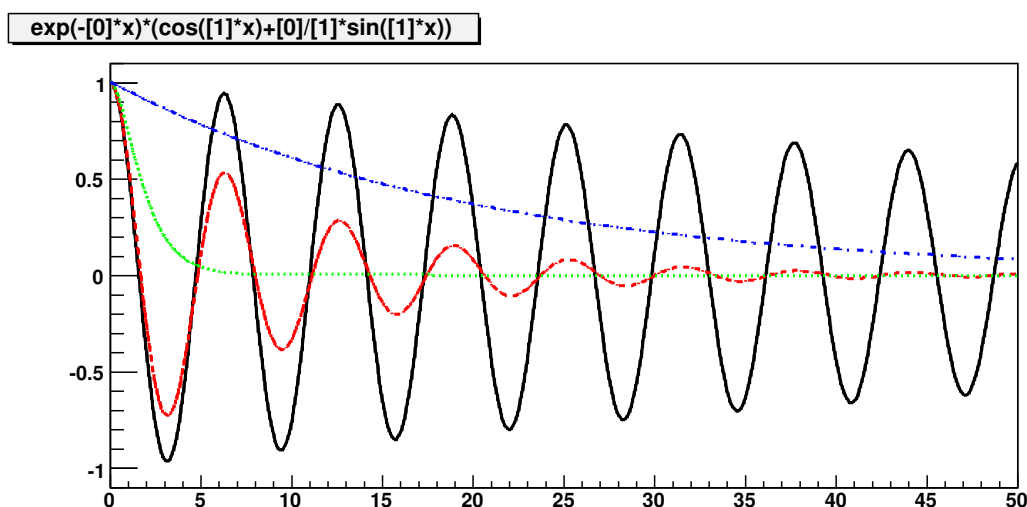


Figura 10.5: Andamenti dell'oscillatore con attrito per  $\Omega_0 = 1$  e diversi valori di  $\gamma$ : 0.01 (curva continua), 0.1 (curva tratteggiata), 1 (curva punteggiata, moto critico) e 10 (curva tratto-punto, moto smorzato).

### Moto oscillatorio smorzato

In caso di attrito debole,  $\gamma < \Omega_0$ , quindi  $s_{\pm}$  sono complessi coniugati:

$$s_{\pm} = -\gamma \pm i\sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left( A_+ e^{i\sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2} t} + A_- e^{-i\sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2} t} \right)$$

Per avere  $x(t) \in \mathbb{R}$  occorre che  $A_+ = (A_-)^* = \frac{1}{2} A e^{i\alpha}$ , cioè:

$$x(t) = e^{-\gamma t} \mathbf{Re} \left( A e^{i(\Omega' t + \alpha)} \right) = A e^{-\gamma t} \cos(\Omega' t + \alpha)$$

$$\left( \Omega' = \sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2}; \text{ moto oscillatorio smorzato} \right) \quad (10.32)$$

Le costanti  $A, \alpha$  si ottengono imponendo le condizioni iniziali  $x(0) = A_0, (dx/dt)_{(t=0)} = 0$ :

$$\alpha = -\tan^{-1} \left( \frac{\gamma}{\Omega'} \right) \quad ; \quad A = A_0 \frac{\Omega_0}{\Omega'}$$

quindi:

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \left[ \cos(\Omega' t) + \frac{\gamma}{\Omega'} \sin(\Omega' t) \right]$$

**Moto critico**

Un caso limite è quello di  $\gamma = \Omega_0$ ; in tal caso le due soluzioni coincidono,  $s_{\pm} = -\gamma$ ; allora l'equazione differenziale ammette due soluzioni  $e^{-\gamma t}$  e  $te^{-\gamma t}$ , quindi

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\gamma t} \quad (\Omega_0 = \gamma; \text{ moto critico}) \quad (10.33)$$

Le costanti  $A, B$  si ottengono imponendo le condizioni iniziali  $x(0) = A_0, (dx/dt)_{(t=0)} = 0$ , ottenendo:

$$x(t) = A_0(1 + \gamma t)e^{-\gamma t}$$

**10.4.2 Oscillatore armonico smorzato con forzante**

Ora applichiamo una forza esterna

$$F^{\text{est}}(t) = F_0 e^{i\Omega t} = m \cdot f e^{i\Omega t}$$

L'equazione del moto, Eq. (10.29), diventa:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \Omega_0^2 x = f e^{i\Omega t} \quad (10.34)$$

La soluzione generale è data da una soluzione particolare,  $\bar{x}(t)$ , dell'Eq. (10.34), più la soluzione generale del moto libero (Eq. (10.31), Eq. (10.32), Eq. (10.33) a seconda dei casi). Per la soluzione particolare proviamo l'ansatz:

$$\bar{x}(t) = \bar{A} e^{i\Omega t} = \rho e^{i(\Omega t + \phi)}$$

che, imposta nell'Eq. (10.34) dà:

$$(-\Omega^2 + 2i\Omega\gamma + \Omega_0^2)\bar{A}e^{i\Omega t} = f e^{i\Omega t}$$

da cui:

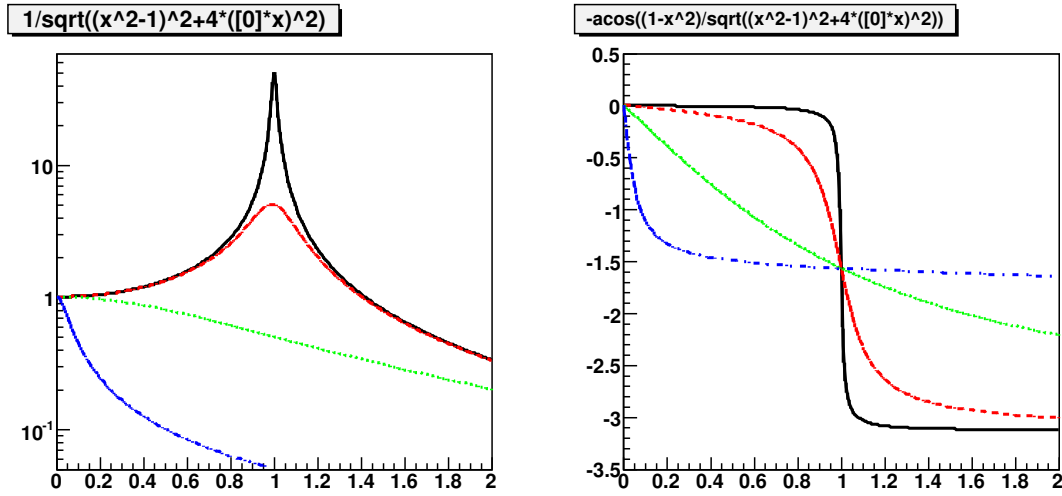


Figura 10.6: Curva di risonanza (a sinistra) e di fase (a destra) per  $\Omega_0 = 1$  e diversi valori di  $\gamma$ : 0.01, 0.1, 1, 10.

$$\begin{aligned}\bar{A} &\equiv \rho e^{i\phi} \cdot f = \frac{f}{\Omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega} \\ \rho &= \rho(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{(\Omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4(\gamma\Omega)^2}} \\ \phi &= \phi(\Omega) = -\cos^{-1} \left( \frac{\Omega_0^2 - \Omega^2}{\sqrt{(\Omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4(\gamma\Omega)^2}} \right) \quad (-\pi < \phi < 0)\end{aligned}\tag{10.35}$$

(la scelta di ricavare  $\phi$  attraverso il coseno è perché esso è invertibile con continuità nell'intervallo  $|\phi| \in [0; \pi]$ ; l'ambiguità di segno è risolta con il - davanti a  $\cos^{-1}$ , che deriva dal fatto che  $(\Omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega)$  ha fase positiva, quindi il suo reciproco ha fase negativa).

### Moto a regime, risonanza

Poiché le soluzioni del moto libero sono sempre di tipo smorzato, la soluzione particolare è anche quella che sopravvive dopo un tempo transitorio in cui quelle del moto libero vanno a zero.

A parità di forzante  $f$ , l'ampiezza del moto dipende dalla pulsazione della forzante,  $\Omega$ ; inoltre fra la forzante e il moto è presente una fase,  $\phi$ . Per

studiare la dipendenza, osserviamo che

$$\frac{\partial}{\partial(\Omega^2)} [(\Omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4(\gamma\Omega)^2] = 2(\Omega^2 - \Omega_0^2) + 4\gamma^2$$

quindi  $\rho(\Omega)$  è sempre decrescente per  $\Omega^2 > \Omega_0^2 - 2\gamma^2$ . Se  $\gamma < \frac{1}{2}\Omega_0$  (si noti che così siamo nel regime di moto oscillatorio smorzato) allora esiste un massimo di  $\rho(\Omega)$  alla *pulsazione di risonanza*:

$$\begin{aligned}\Omega_{\text{ris}} &= \sqrt{\Omega_0^2 - 2\gamma^2} \\ \rho_{\text{ris}} &= \frac{1}{2\gamma\sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2}}\end{aligned}\quad (10.36)$$

Quant'è largo questo massimo? Cerchiamo valori di  $\Omega$  tali che  $\rho(\Omega) = \rho_{\text{ris}}/\alpha$ ,  $\alpha > 1$  (per es.  $\alpha = 2$ ,  $\alpha = 10^n \dots$ ). È facile verificare che la soluzione è:

$$(\Omega_{1/\alpha})^2 = \Omega_{\text{ris}}^2 \pm 2\gamma\sqrt{(\alpha^2 - 1)(\Omega_0^2 - \gamma^2)}$$

cioè la larghezza è proporzionale a  $\gamma$ .

### Attrito debole, risonanza stretta

Un sistema fisico spesso si trova in una situazione di attrito debole, cioè  $\gamma \ll \Omega_0$ . In tal caso  $\Omega_{\text{ris}} \simeq \Omega_0$ , e i valori di  $\Omega^2$  per cui  $\rho$  è significativamente  $> 0$  sono vicini a  $\Omega_0^2$ , quindi possiamo porre  $\Omega^2 - \Omega_0^2 = (\Omega + \Omega_0)(\Omega - \Omega_0) \simeq 2\Omega_0(\Omega - \Omega_0)$ . Le formule per  $\rho, \phi$  nell'Eq. (10.35) possono essere semplificate:

$$\begin{aligned}\rho &= \rho(\Omega) = \frac{1}{2\Omega_0\sqrt{(\Omega - \Omega_0)^2 + \gamma^2}} \\ \phi &= \phi(\Omega) = -\cos^{-1}\left(\frac{\Omega_0 - \Omega}{\sqrt{(\Omega - \Omega_0)^2 + \gamma^2}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\gamma}{\Omega - \Omega_0}\right) \\ &(-\pi < \phi < 0)\end{aligned}\quad (10.37)$$

e la formula della larghezza diventa:

$$\Omega_{1/\alpha} - \Omega_{\text{ris}} = \pm\gamma\sqrt{\alpha^2 - 1}$$

In particolare la larghezza totale a metà altezza (FWHM) è:

$$\Delta\Omega = 2\sqrt{3}\gamma\quad (10.38)$$

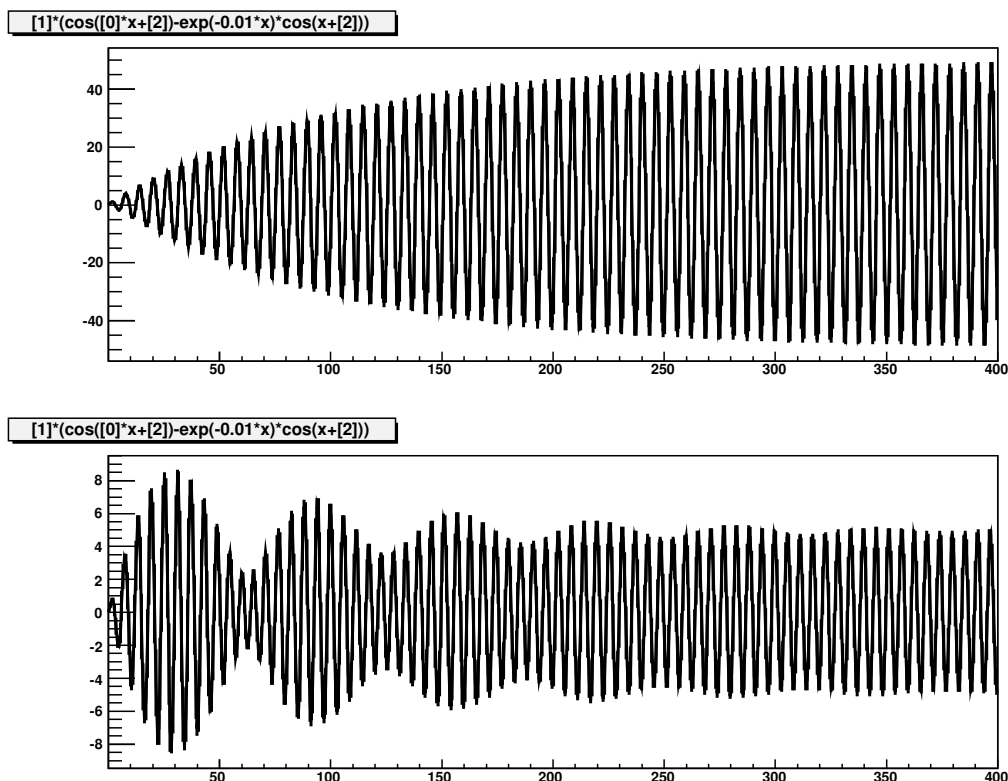


Figura 10.7: Moto dell'oscillatore forzato con attrito, per  $\Omega_0 = 1$ ,  $\gamma = 0.01$  e diversi valori della pulsazione forzante:  $\Omega = 1, 1.1$ .

### Transiente

Nel transiente, la soluzione è data dalla somma della soluzione particolare,  $f \rho e^{i(\Omega t + \phi)}$  e della soluzione generale omogenea, Eq. (10.32). Lavoriamo nel regime di piccoli attriti,  $\gamma \ll \Omega_0$ , cosicché poniamo  $\Omega' = \Omega_0$ :

$$x(t) = f \rho \cos(\Omega t + \phi) + A e^{-\gamma t} \cos(\Omega_0 t + \alpha)$$

Le costanti  $A, \alpha$  vanno fissate con le condizioni iniziali. Supponiamo di accendere la forzante a  $t = 0$ , e che per  $t < 0$  il sistema fosse in quiete,

cioè  $x(0) = 0$  e  $(dx/dt)_{(t=0)} = 0$ :

$$\begin{aligned} 0 &= f\rho \cos \phi + A \cos \alpha \\ 0 &= -f\rho\Omega \sin \phi - A(\gamma \cos \alpha + \Omega_0 \sin \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\rho\Omega \sin \phi &= -A \cos \alpha (\gamma + \Omega_0 \tan \alpha) = f\rho \cos \phi (\gamma + \Omega_0 \tan \alpha) \\ \gamma + \Omega_0 \tan \alpha &= \Omega \tan \phi = \frac{\Omega\gamma}{\Omega - \Omega_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{\gamma}{\Omega - \Omega_0} = \tan \phi \\ A &= -f\rho \end{aligned}$$

Quindi il moto nel regime transiente è:

$$x(t) = f\rho [\cos(\Omega t + \phi) - e^{-\gamma t} \cos(\Omega_0 t + \phi)] \quad (10.39)$$

# Capitolo 11

## Interazioni a distanza, campi di forza

### 11.1 Campi di forza

La forza  $\vec{F}$  agente su un oggetto dipende dall'ambiente in cui l'oggetto si trova. Abbiamo più volte detto che la forza su un oggetto è causata dagli altri oggetti che stanno intorno ad esso. Nel caso delle forze “di contatto”, trattate nel Capitolo 9, la situazione è relativamente semplice: la forza si manifesta solo al momento in cui c'è il contatto, altrimenti la forza non c'è.

Ora però consideriamo le forze che agiscono a distanza (per esempio, forza gravitazionale, forza elettrica, forza magnetica, ...). Il sistema di forze, che un oggetto sente, dipende dalla sua posizione e distanza relativa a tutto ciò che lo circonda. Non c'è da stupirsi, dunque, se ci si accorge, con diverse misure, che spostando il nostro oggetto nello spazio, la forza agente su di esso cambia. In generale, la forza dipende dunque dalla posizione:

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) \quad (11.1)$$

e si chiama per questo *forza posizionale*. In tal caso la funzione  $\vec{F}(\vec{r})$  si chiama *campo di forza*.

Per “esplorare” un campo di forze, il procedimento — applicato o concettuale che sia — è quello di porre un oggetto chiamato “sonda” in varie posizioni e misurare la forza che su di esso agisce, per esempio misurandone l'accelerazione.

Attribuiamo quindi al campo di forza un significato fisico. Siccome stiamo parlando di forze a distanza, non c'è contatto fra l'oggetto-sonda e gli oggetti che costituiscono l'ambiente circostante, quindi potremmo ingenuamente

chiederci: “come fa un oggetto-sonda a sapere che si trova in una certa posizione rispetto a tutti gli altri oggetti che lo circondano?” La meccanica classica non dà una risposta a questa domanda, però ne condensa la riflessione nel concetto di campo di forze: l’ambiente che circonda il nostro oggetto è influenzato da tanti altri oggetti, che contribuiscono a generare un campo di forze  $\vec{F}(\vec{r})$ , definito in ogni punto  $\vec{r}$  dello spazio. Questo campo è un attributo dello spazio, con proprietà fisiche ben precise, tali che l’oggetto-sonda, quando si trovi in una posizione  $\vec{r}$ , “sa che deve subire” una forza  $\vec{F}(\vec{r})$  <sup>[1]</sup>.

La nostra “sonda” in generale può subire azioni diverse, sia per ciò che le causa (i diversi oggetti circostanti) sia per la loro natura (effetti elettrici, magnetici, gravitazionali, ...). Ciascuna di queste è descrivibile con un campo di forza  $\vec{F}_k(\vec{r})$ . Ricordando che le forze si compongono secondo la somma vettoriale, anche il *campo di forze risultante* seguirà la stessa legge di composizione:

$$\vec{F}_{tot}(\vec{r}) = \sum_k \vec{F}_k(\vec{r}) \quad (11.2)$$

Qui di seguito introduciamo alcuni campi di forza notevoli, di cui faremo uso nel seguito.

## 11.2 Forze gravitazionali

La gravità è una forza che agisce su qualunque oggetto dotato di massa, ed è causata dalla presenza di altre masse. La gravità governa i moti dei pianeti nel Sistema Solare, il moto dei satelliti intorno al loro pianeta, il moto delle stelle in una galassia, ma anche il moto di un oggetto in prossimità della superficie di un pianeta: la forza-peso

$$\vec{F}_g = -mg\hat{z} \quad (\text{forza-peso})$$

---

<sup>1</sup> Se questo discorso vi sembra non spiegare niente, beh, non posso darvi torto. In effetti non fornisce una spiegazione più profonda della semplice presa d’atto che “esistono forze a distanza”. Tuttavia il concetto di campo è estremamente utile. La meccanica quantistica fornisce una spiegazione più profonda delle interazioni a distanza. Il “campo” è formato da “particelle virtuali” — i “quanti” — che vengono emesse e assorbite dalle particelle fondamentali: per esempio, tutte le particelle cariche possono emettere fotoni virtuali, che non si propagano all’infinito, ma vengono assorbiti da altre particelle cariche. I “quanti” dunque fanno da messaggeri delle interazioni, e in modo suggestivo potremmo dire che comunicano alla particella-sonda la presenza di tutte le altre particelle dell’ambiente circostante.



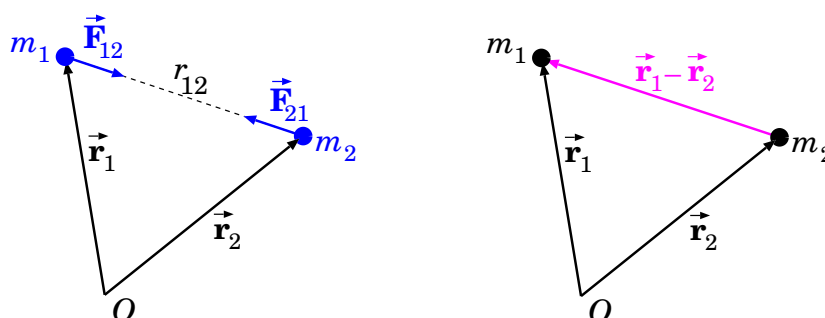


Figura 11.1: Forza gravitazionale fra due masse  $m_1$ ,  $m_2$  separate da una distanza  $r_{12}$ .

è un caso particolare di forza di gravità. Approfondiremo questi moti nel Capitolo 22: qui per ora ci limitiamo ad enunciare le principali proprietà della gravità.

### 11.2.1 Legge della gravitazione universale

Due oggetti di masse  $m_1, m_2$ , posti a distanza  $r_{12}$ , e di estensione molto minore rispetto alla loro distanza (“puntiformi”), subiscono un’attrazione reciproca descritta dalla *legge della gravitazione universale*:

$$F_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \quad (11.3)$$

essendo  $G$  la “costante di Newton”, o “costante di gravitazione universale”, il cui valore è:

$$G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2} \quad (11.4)$$

La forza  $\vec{F}_{12}$  applicata a  $m_1$  da  $m_2$ , e la forza  $\vec{F}_{21}$  applicata a  $m_2$  da  $m_1$ , sono dirette come in Fig. 11.1(sinistra). Aiutandosi con la Fig. 11.1(destra), possiamo scrivere in forma vettoriale:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ \vec{F}_{21} &= -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \end{aligned} \quad (11.5)$$

da cui è evidente che queste due forze rispettano il principio di azione-reazione: sono opposte ( $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ ) e dirette lungo la linea congiungente le masse  $m_1, m_2$  (linea definita dal vettore-differenza  $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ).

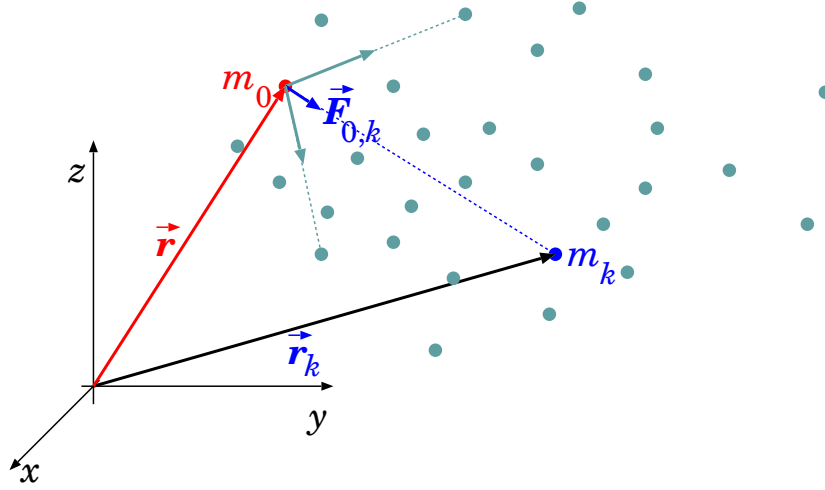


Figura 11.2: Forze gravitazionali su una massa-sonda  $m_0$ , prodotte da masse circostanti  $m_1, \dots, m_N$ . In evidenza, la  $k$ -esima massa  $m_k$  posta in posizione  $\vec{r}_k$ , che produce una forza  $\vec{F}_{0,k}$  sulla massa-sonda  $m_0$ .

### 11.2.2 Il campo gravitazionale

Una massa-sonda  $m_0$  posta in  $\vec{r}$ , in presenza di una massa  $m_k$  posta in  $\vec{r}_k$ , “sente” una forza gravitazionale data da

$$\vec{F}_{0,k} = -G \frac{m_0 m_k}{r_{k,0}^2} \hat{r}_{k0} = -G m_0 m_k \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^3} \quad (11.6)$$

La forza totale generata sulla sonda  $m_0$  da un sistema di  $N$  masse “puntiformi”  $m_1, m_2, \dots, m_N$  poste nelle posizioni  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$  è:

$$\vec{F}_0 = \sum_{k=1}^N \vec{F}_{0,k} = m_0 \left( -G \sum_k m_k \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^3} \right) \quad (11.7)$$

che ovviamente è funzione della posizione  $\vec{r}$  della sonda: quindi è un campo di forza.

La fattorizzazione di  $m_0$  fuori dalla sommatoria nell’Eq. (11.7), suggerisce di definire il *campo gravitazionale* in maniera indipendente dalla massa della sonda:

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G \sum_k m_k \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^3} \quad (11.8)$$

e tale che la forza gravitazionale su un oggetto di massa  $m_0$  nella posizione  $\vec{r}$  sia:

$$\vec{F}_g = m_0 \vec{g}(\vec{r}) \quad (11.9)$$

### 11.2.3 Gravità, massa e accelerazione

Abbiamo visto che  $\vec{F}_g = m\vec{g}$ , ovvero che la forza di gravità è sempre direttamente proporzionale alla massa che la subisce.

È importante sottolineare la differenza fra  $\vec{F} = m\vec{a}$  e  $\vec{F}_g = m\vec{g}$ : nel primo caso,  $\vec{a}$  è conseguenza di  $\vec{F}$ , nel secondo invece  $\vec{g}$  è la causa di  $\vec{F}_g$ .

$$\text{agisce una forza generica} \quad \Longrightarrow \quad \vec{F} \quad \Longrightarrow \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$$\text{agisce una forza gravitazionale} \quad \Longrightarrow \quad \vec{F}_g = m\vec{g} \quad \Longrightarrow \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}_g}{m} = \vec{g}$$

Se l'unica forza agente sull'oggetto è quella gravitazionale, l'accelerazione dell'oggetto è indipendente dall'oggetto stesso:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_g}{m} = \vec{g}(\vec{r}) \quad (11.10)$$

*Questa è una proprietà molto peculiare: l'accelerazione prodotta da un campo gravitazionale è indipendente dalla massa dell'oggetto accelerato. Solo il campo gravitazionale possiede questa proprietà.*

## 11.3 Forze elettromagnetiche (cenni)

L'elettromagnetismo è una vastissima branca della fisica classica: sarebbe fuori luogo affrontarlo qui. Tuttavia l'interazione elettromagnetica è una delle interazioni fondamentali, pertanto ci limitiamo ad introdurla qui, citando alcune sue proprietà — quelle più semplici!

Un oggetto dotato di carica elettrica  $q$  subisce una *forza elettrica* e una *forza magnetica*, descritte da:

$$\vec{F}_{em} = q \left[ \vec{E}(\vec{r}) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}) \right] \quad (11.11)$$

dove i campi vettoriali  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  sono rispettivamente il *campo elettrico* e il *campo magnetico*. Queste forze sono schematizzate in Fig. 11.3.

Si noti che la componente elettrica della forza,  $q\vec{E}(\vec{r})$ , dipende in generale dalla posizione dell'oggetto; invece la componente magnetica,  $q\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r})$ , dipende sia dalla posizione (attraverso  $\vec{B}(\vec{r})$ ) che dalla velocità  $\vec{v}$ .

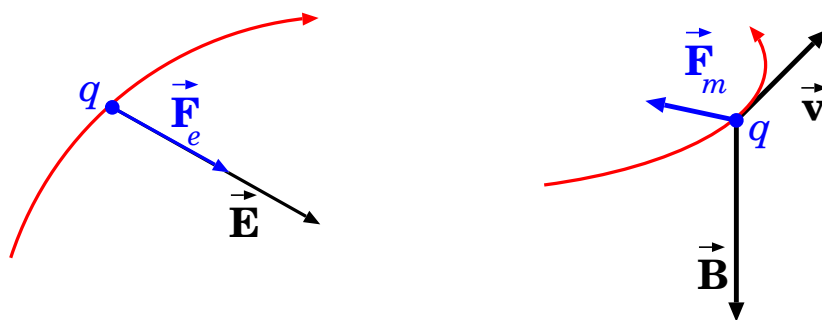


Figura 11.3: Forza elettrica  $\vec{F}_e = q\vec{E}$  e forza magnetica  $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$ , disegnate per  $q > 0$  (per  $q < 0$  occorre invertire gli orientamenti di  $\vec{F}_e$ ,  $\vec{F}_m$ ).

Un'altra peculiarità della forza magnetica è che essa è sempre ortogonale alla velocità — come conseguenza del prodotto vettoriale  $\vec{v} \times \vec{B}$ . Quindi non produce mai accelerazione tangenziale. Quindi non può mai alterare il modulo della velocità  $v = |\vec{v}|$ , mentre in generale produce deflessioni nella traiettoria. Possiamo inoltre osservare che *la forza magnetica non rispetta il principio di azione-reazione*, almeno per quel che riguarda l'allineamento con la linea congiungente la sonda con la sorgente: infatti, è sempre ortogonale a  $\vec{v}$ , a prescindere da dove sia la sorgente del campo  $\vec{B}$ .

L'accelerazione di un oggetto di massa  $m$  dotato di carica  $q$ , in presenza di un campo elettromagnetico, è:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{em}}{m} = \frac{q}{m} \left[ \vec{E}(\vec{r}) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}) \right] \quad (11.12)$$

### 11.3.1 Unità di misura elettromagnetiche

La carica elettrica si misura in Coulomb (C); il campo elettrico in “Newton su Coulomb” (N/C); il campo magnetico si misura in Tesla ( $T \equiv \text{NC}^{-1}\text{m}^{-1}\text{s}$ ).

### 11.3.2 Campo elettrico generato da cariche ferme

Due cariche elettriche “puntiformi”  $q_1, q_2$  *in quiete*, a distanza  $r_{12}$ , si scambiano una *forza elettrostatica*

- *repulsiva* se le cariche  $q_1, q_2$  hanno lo stesso segno (ovvero, entrambe positive, oppure entrambe negative);
- *attrattiva* se le cariche  $q_1, q_2$  hanno segno opposto (ovvero, una positiva e una negativa).

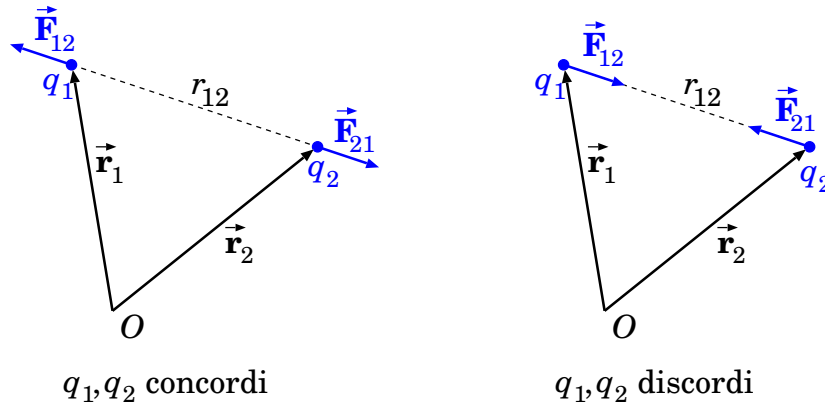


Figura 11.4: Forza elettrica “coulombiana”, fra due cariche elettriche  $q_1$ ,  $q_2$  separate da una distanza  $r_{12}$ . A sinistra: cariche dello stesso segno danno una forza repulsiva. A destra: cariche di segno opposto danno una forza repulsiva.

L'intensità di tale forza è data dalla *legge di Coulomb*:

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \quad (q_1, q_2 \text{ in quiete}) \quad (11.13)$$

essendo

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.98755179 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{C}^{-2} \simeq 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{C}^{-2} \quad (11.14)$$

(il che significa che  $\epsilon_0 = 8.85418782 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{N}^{-1} \text{m}^{-2}$  — ma l'Eq. (11.14) è più facile da ricordare, specialmente nella sua forma approssimata!)

Si noti la notevole similitudine fra forze elettriche e forze gravitazionali (vd Eq. (11.3)). Tuttavia vi è una differenza fondamentale: *la forza gravitazionale è sempre attrattiva*.

La forza  $\vec{F}_{12}$  applicata a  $q_1$  da  $q_2$ , e la forza  $\vec{F}_{21}$  applicata a  $q_2$  da  $q_1$ , sono dirette come in Fig. 11.4. Ragionando come per le forze gravitazionali, possiamo scrivere in forma vettoriale:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ \vec{F}_{21} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \end{aligned} \quad (11.15)$$

da cui è evidente che anche le forze coulombiane rispettano il principio di azione-reazione: sono opposte ( $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ ) e dirette lungo la linea congiungente le cariche  $q_1$ ,  $q_2$  (linea definita dal vettore-differenza  $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ).

Una carica-sonda  $q_0$  posta in  $\vec{r}$  “sente” la forza elettrica di una carica  $q_k$  posta in  $\vec{r}_k$ :

$$\vec{F}_{0,k} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_k}{r_{k,0}^2} \hat{r}_{k0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 q_k \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^3} \quad (11.16)$$

pertanto la carica  $q_k$  genera nello spazio circostante un campo elettrico:

$$\vec{E}_k(\vec{r}) = \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^3} \quad (q_k \text{ in quiete}) \quad (11.17)$$

che si chiama *campo elettrostatico*, perché l’espressione è valida a rigore solo per  $q_k$  ferma. In realtà è valida con buona approssimazione anche se  $q_k$  si muove con velocità  $v_k \ll c$  — essendo  $c = 300\,000 \text{ km/s} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$  la velocità della luce. Per cariche elettriche in moto rapido, le equazioni del campo diventano molto più complesse, e qui non vengono trattate: occorrerebbe fare uso delle *equazioni di Maxwell*.

### 11.3.3 Confronto fra forza di Coulomb e forza gravitazionale

La forza gravitazionale Eq. (11.3) è molto più debole della forza di Coulomb Eq. (11.13).

Come semplice esempio, consideriamo l’atomo di idrogeno. È formato da un protone (carica  $e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  e massa  $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ ) e da un elettrone (carica  $-e$  e massa  $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ). La distanza media dell’elettrone dal protone, nello stato più stabile dell’atomo di idrogeno, è il cosiddetto *raggio di Bohr*:  $r_B = 5.29 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ .

Come sono le intensità delle due forze (chiamiamole  $F_C$  e  $F_G$ )? Quale delle due è dominante, e di quanto?

$$\begin{aligned} F_C &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_B^2} = 8.24 \cdot 10^{-8} \text{ N} \\ F_G &= G \frac{m_e m_p}{r_B^2} = 3.63 \cdot 10^{-47} \text{ N} \end{aligned} \quad (11.18)$$

Su scala atomica, la forza di Coulomb è  $10^{39}$  volte (mille miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di volte) più forte di quella gravitazionale! Nessuna sorpresa, dunque, che nella fisica atomica la gravità non venga nemmeno considerata.

### 11.3.4 Sorgenti di campi elettromagnetici (cenni) (\*)

Abbiamo visto che la forza elettromagnetica su una carica  $q_0$ , dotata di velocità  $\vec{v}$ , in presenza di un campo elettrico  $\vec{E}$  e di un campo magnetico  $\vec{B}$  è

$$\vec{F}_{em} = q_0 \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (11.19)$$

Quindi:

- qualunque carica elettrica sente il campo elettrico;
- qualunque carica elettrica *in movimento* sente il campo magnetico.

In generale, in fisica vale una sorta di principio di reciprocità, per cui un oggetto che sente una interazione è anche in grado di produrla su altri oggetti. Nel caso elettromagnetico

- qualunque carica elettrica contribuisce a generare campo elettrico;
- qualunque carica elettrica *in movimento* contribuisce a generare campo magnetico.

Anche per i campi elettrico e magnetico vige la proprietà di composizione vettoriale. Il  $k$ -esimo oggetto carico produce nella posizione  $\vec{r}$  un campo elettrico  $\vec{E}_k(\vec{r})$  e un campo magnetico  $\vec{B}_k(\vec{r})$ : questi producono, su una carica-sonda  $q_0$  posta in  $\vec{r}$  e dotata di velocità  $\vec{v}$ , una forza:

$$\vec{F}_{0,k}(\vec{r}) = q_0 \left[ \vec{E}_k(\vec{r}) + \vec{v} \times \vec{B}_k(\vec{r}) \right]$$

Quindi la forza risultante sulla carica-sonda è:

$$\begin{aligned} \vec{F}_0(\vec{r}) &= \sum_k \vec{F}_{0,k}(\vec{r}) = q_0 \sum_k \left[ \vec{E}_k(\vec{r}) + \vec{v} \times \vec{B}_k(\vec{r}) \right] \\ &= q_0 \left[ \sum_k \vec{E}_k(\vec{r}) \right] + q_0 \vec{v} \times \left[ \sum_k \vec{B}_k(\vec{r}) \right] \end{aligned}$$

L'ultima scrittura è formalmente identica all'Eq. (11.19), purché si identifichino:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{tot}(\vec{r}) &= \sum_k \vec{E}_k(\vec{r}) \\ \vec{B}_{tot}(\vec{r}) &= \sum_k \vec{B}_k(\vec{r}) \end{aligned} \quad (11.20)$$

Abbiamo già visto nella Sezione 11.3.2 la forma del campo elettrico generato da cariche elettriche ferme

$$\vec{E}_k(\vec{r}) = \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^3} \quad (11.21)$$

Quando le cariche sono in moto, la forma di  $\vec{E}_k$ ,  $\vec{B}_k$  diventa estremamente complicata, ed è decisamente fuori scopo trattarla qui. Ricordiamo solo che si ricava dalle *equazioni di Maxwell*.

Ci limitiamo al caso di una carica  $q_k$  dotata di *moto lento e non accelerato o poco accelerato* rispetto alle distanze in gioco:

$$v_k \ll c \quad ; \quad |\vec{a}_k| \ll \frac{c^2}{\text{distanze}}$$

In tal caso, senza dimostrazioni, riportiamo che l'Eq. (11.21) è ancora valida, e il campo magnetico prende la forma:

$$\begin{aligned} \vec{B}_k(\vec{r}) &= \frac{1}{c^2} \vec{v}_k \times \vec{E}_k(\vec{r}) \\ &= \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{v}_k \times (\vec{r} - \vec{r}_k)}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^3} \\ &\quad (v_k \ll c ; \left| \frac{d\vec{v}_k}{dt} \right| \ll \frac{c^2}{|\vec{r} - \vec{r}_k|}) \end{aligned} \quad (11.22)$$

La costante  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}$  vale *esattamente*

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} = 10^{-7} \text{ TC}^{-1}\text{ms} = 10^{-7} \text{ NC}^{-2}\text{s}^2 \quad (11.23)$$

---

### Esempio: moto dell'elettrone nell'atomo di idrogeno

---

Nel “*modello di Bohr*”, l'atomo di idrogeno è costituito da un protone, con un elettrone che gli orbita intorno a distanza  $r_B = 5.29 \cdot 10^{-11}$  m, lungo una traiettoria circolare <sup>[2]</sup>. Vediamo se questo modello soddisfa le condizioni  $v \ll c$  e

<sup>2</sup> Una precisazione è doverosa: solo nell'ambito della meccanica quantistica è possibile dare una descrizione accurata dell'atomo di idrogeno. In essa, l'elettrone non segue una traiettoria nel senso classico, bensì è “delocalizzato”, ovvero la sua posizione è aleatoria, e la probabilità di osservarlo in un determinato punto (oppure, ad una data distanza  $r$  dal protone) è calcolabile dalla funzione d'onda. Qui stiamo considerando invece un modello semi-classico, in cui l'elettrone descrive un'orbita circolare intorno al protone, ma solo alcune distanze  $r$  sono possibili, corrispondenti a precisi livelli energetici “quantizzati”.



$$\left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right| \ll \frac{c^2}{|\Delta\vec{r}|}.$$

La forza coulombiana fra protone ed elettrone è  $F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_B^2}$ . Essa deve essere uguale alla forza centripeta sull'elettrone:  $F_n = \frac{m_e v_e^2}{r_B}$ .

Uguagliando le due espressioni si ricava

$$v_e = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e r_B}} = \sqrt{9 \cdot 10^9 \text{NC}^{-2} \text{m}^2 \frac{(1.602 \cdot 10^{-19} \text{C})^2}{(9.11 \cdot 10^{-31} \text{kg})(5.29 \cdot 10^{-11} \text{m})}} \simeq 2.2 \cdot 10^6 \text{ m/s}.$$

Sicuramente una velocità elevata, ma piccola rispetto alla velocità della luce:  $\frac{v_e}{c} \simeq 7 \cdot 10^{-3}$ .

L'accelerazione centripeta è  $a_n = \frac{v_e^2}{r_B}$ . Anche senza calcolarne il valore, vediamo già che all'interno dell'atomo, dunque per distanze  $\Delta r \approx r_B$ , abbiamo  $a_n = \frac{v_e^2}{r_B} \ll \frac{c^2}{\Delta r}$ . Quindi siamo nell'ambito di moto "poco accelerato".

Giusto per completezza di esercizio, calcoliamo l'accelerazione:  $a_n = \frac{(2.2 \cdot 10^6 \text{ m/s})^2}{5.29 \cdot 10^{-11} \text{ m}} \simeq 9 \cdot 10^{22} \text{ m/s}^2$ . Decisamente grande! Ma "piccola" nell'ambito delle dimensioni dell'atomo.

---

### Violazione del principio di azione-reazione (\*)

---

Consideriamo due cariche  $q_1, q_2$ , poste nelle posizioni  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  e dotate di velocità  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ . Proviamo a calcolare le forze magnetiche che esercitano l'una sull'altra.

La carica  $q_1$  produce nella posizione generica  $\vec{r}$  un campo magnetico:

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{v}_1 \times (\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}$$

il quale esercita una forza  $\vec{F}_{21}$  su  $q_2$  pari a

$$\vec{F}_{21} = q_2 \vec{v}_2 \times \vec{B}_1(\vec{r}_2)$$

Già qui possiamo notare qualcosa di inaspettato: per le proprietà del prodotto vettoriale,  $\vec{F}_{21}$  è sempre perpendicolare a  $\vec{v}_2$ , quindi la direzione della forza magnetica dipende dal moto della carica che la subisce. Viceversa, dal principio di azione-reazione, la forza fra  $q_1$  e  $q_2$  dovrebbe essere sempre diretta lungo la linea che congiunge le due cariche, indipendentemente da come queste si muovono!

Ma andiamo oltre e sviluppiamo ulteriormente i nostri calcoli. Ricordiamo a questo punto una identità vettoriale:  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ . Allora otteniamo:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{21} &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{v}_2 \times [\vec{v}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)]}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \\ &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[ \vec{v}_1 \frac{\vec{v}_2 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} - (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \right] \end{aligned}$$

Qui vediamo meglio quello che già abbiamo accennato: una componente della forza (la seconda) è allineata lungo la congiungente le due cariche (infatti è diretta come  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ ); un'altra componente invece è parallela alla velocità  $\vec{v}_1$  della sorgente del campo magnetico  $\vec{B}_1$ .

Non solo! Possiamo ripetere tutti i calcoli per ottenere  $\vec{F}_{12}$ , ovvero la forza che  $q_2$  produce su  $q_1$ . In verità, è sufficiente scambiare gli indici  $1 \leftrightarrow 2$  ovunque:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{12} &= q_1 \vec{v}_1 \times \vec{B}_2(\vec{r}_1) \\ &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{v}_1 \times [\vec{v}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)]}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \\ &= -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{v}_1 \times [\vec{v}_2 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)]}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}\end{aligned}$$

Ora sommiamo le due forze e usiamo ancora l'identità vettoriale di cui sopra:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{v}_2 \times [\vec{v}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)] - \vec{v}_1 \times [\vec{v}_2 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)]}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \\ &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}\end{aligned}$$

A meno di condizioni molto particolari, abbiamo trovato che  $\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} \neq 0$ .

Le forze magnetiche violano il principio di azione-reazione, sia per i valori delle forze che per le loro direzioni. In altre parole, realizzano sia la situazione (c) che la situazione (d) della Fig. 8.2.

## 11.4 Campi di forza centrali

Un campo di forza si chiama *centrale* se la sua dipendenza dalla posizione è esprimibile nella forma:

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\hat{r} \quad \left( r \equiv |\vec{r}| \quad ; \quad \hat{r} \equiv \frac{\vec{r}}{r} \right) \quad (11.24)$$

In un campo centrale, l'intensità della forza dipende solo dalla distanza  $r$  dalla sorgente della forza stessa. La direzione della forza è la stessa del raggio vettore,  $\hat{r}$ , inoltre il segno di  $F(r)$  dice se la forza è repulsiva o attrattiva:

$$\begin{aligned}F(r) > 0 &\iff \text{forza repulsiva} \\ F(r) < 0 &\iff \text{forza attrattiva}\end{aligned}$$

### 11.4.1 Il “problema dei due corpi”

I campi di forza centrali sono comuni in molti problemi di fisica. Questa è una conseguenza del principio di azione-reazione, e dell'*isotropia dello spazio* — ovvero, *tutte le direzioni sono equivalenti*.

Consideriamo due oggetti puntiformi (1) e (2) posti in  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$ , che interagiscono scambiandosi forze secondo il principio di azione-reazione. Chiamiamo  $\vec{F}_{12}$ ,  $\vec{F}_{21}$  rispettivamente la forza che (2) produce su (1) e quella che (1) produce su (2). Queste forze devono essere fra loro opposte

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

e dirette verso la linea congiungente i due oggetti:

$$\vec{F}_{12}, \vec{F}_{21} \text{ parallele a } (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

Inoltre, la loro intensità può dipendere (e in generale dipende!) dalla distanza fra i due oggetti, ma non deve dipendere dalla direzione di  $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ :

$$|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| = F(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|)$$

Se ci fosse una dipendenza dalla direzione, vorrebbe dire che gli stessi oggetti, ruotati nello spazio in modo da mantenere la distanza invariata, interagirebbero con diversa intensità, ovvero che lo spazio in cui si trovano avrebbe una “preferenza” intrinseca per certe direzioni piuttosto che altre, quindi non sarebbe isotropo.

Tutto ciò si può scrivere come:

$$\vec{F}_{21} = F(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \quad (11.25)$$

Analogamente, scambiando i ruoli dei due oggetti, ovvero invertendo gli indici 1, 2, possiamo scrivere:

$$\vec{F}_{12} = F(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad (11.26)$$

Ovviamente, le forze gravitazionali (Eq. (11.5)) hanno questa forma <sup>[3]</sup>

---

<sup>3</sup> Vedremo più avanti (Sezione 11.3) che anche le forze coulombiane fra cariche elettriche in quiete (Eq. (11.15)) hanno la stessa forma. Le forze magnetiche invece no — anzi, non rispettano la legge di azione-reazione.

### 11.4.2 Caso-limite: $m_1 \gg m_2$

Ora, supponiamo che l'oggetto (1) sia molto più massivo dell'oggetto (2):  $m_1 \gg m_2$ . In tal caso l'accelerazione di (1) è molto più piccola dell'accelerazione di (2): chiamando  $F = |\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}|$ ,  $|\vec{a}_1| = \frac{F}{m_1} = \frac{m_2}{m_1} \frac{F}{m_2} = \frac{m_2}{m_1} |\vec{a}_2|$  quindi  $|\vec{a}_1| \ll |\vec{a}_2|$ . In questo caso, con buona approssimazione, possiamo considerare l'oggetto (1) come *fermo*, e scegliere la sua posizione come origine del nostro sistema di riferimento. Indicando con  $\vec{r}$  la generica posizione dell'oggetto (2), l'espressione della forza prodotta da (1) su (2) prende la forma:  $\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\hat{r}$  quindi il campo di forza prodotto da (1) è appunto centrale. L'approssimazione  $m_1 \gg m_2$  si può incontrare in diversi casi. Per esempio, per satelliti artificiali ( $m_2 \approx 10^3 \sim 10^5$  kg) che orbitano intorno alla Terra ( $m_1 \simeq 6 \cdot 10^{24}$  kg), oppure per elettroni che si muovono intorno ad un nucleo atomico ( $m_e/m_{nucleo} \approx 10^{-4}$ ).

### 11.4.3 Caso generale

Vediamo ora come affrontare il caso generale. Per fissare le idee, supponiamo  $m_1 \geq m_2$  — anche se non è necessario. Definiamo per brevità la separazione fra i due oggetti:

$$\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad ; \quad r \equiv |\vec{r}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$$

Calcoliamo le accelerazioni dei due oggetti: dall'Eq. (11.25) e Eq. (11.26) otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} &= \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} = \frac{F(r)}{m_2} \frac{\vec{r}}{r} \\ \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} &= \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} = -\frac{F(r)}{m_1} \frac{\vec{r}}{r} \end{aligned}$$

Sottraendo la seconda equazione alla prima abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} - \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \left( \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) F(r) \frac{\vec{r}}{r} \\ &= \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} F(r) \frac{\vec{r}}{r} \end{aligned}$$

Possiamo definire la “massa ridotta”

$$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

e ottenere

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = F(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

Questo significa che, misurando la posizione di (2) rispetto a (1), questa evolve nel tempo secondo una legge fisica “efficace”: è come se l’oggetto (2) avesse una massa  $\mu$  e fosse soggetto ad un campo di forza centrale  $\vec{F} = F(r)\hat{r}$ .

Si noti che nel caso-limite  $m_1 \gg m_2$ ,  $\mu = \frac{m_2}{1 + m_2/m_1} \simeq m_2$ , cioè la massa ridotta diventa pari alla massa  $m_2$  e ci si riduce a quanto già ottenuto nella Sezione 11.4.2.

### Esempi di masse ridotte

Calcoliamo la massa ridotta per alcuni sistemi tipici.

- *Sistema protone-elettrone:*  $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$  kg ,  $m_p = 1.673 \cdot 10^{-27}$  kg ;  
quindi  $\mu_{pe} = \frac{m_p m_e}{m_p + m_e} = 9.105 \cdot 10^{-31}$  kg = (99.95%)  $m_e$  .
- *Sistema Sole-Terra:*  $m_{\oplus} = 6 \cdot 10^{24}$  kg ,  $m_{\odot} = 2 \cdot 10^{30}$  kg ; quindi  
 $\mu_{\odot\oplus} = \frac{m_{\odot} m_{\oplus}}{m_{\odot} + m_{\oplus}} = 5.99998 \cdot 10^{24}$  kg = (99.9997%)  $m_{\oplus}$  .
- *Sistema Sole-Giove:*  $m_{\Jup} = 2 \cdot 10^{27}$  kg ,  $m_{\odot} = 2 \cdot 10^{30}$  kg ; quindi  
 $\mu_{\odot\Jup} = \frac{m_{\odot} m_{\Jup}}{m_{\odot} + m_{\Jup}} = 1.998 \cdot 10^{27}$  kg = (99.9%)  $m_{\Jup}$  .
- *Sistema Terra-Luna:*  $m_{\L} = 7.35 \cdot 10^{22}$  kg ,  $m_{\oplus} = 6 \cdot 10^{24}$  kg ; quindi  
 $\mu_{\oplus\L} = \frac{m_{\oplus} m_{\L}}{m_{\oplus} + m_{\L}} = 7.28 \cdot 10^{22}$  kg = (98.8%)  $m_{\L}$  .

## 11.5 Sull’integrazione del moto

Nella Sezione 8.4.1 la forza era stata espressa come funzione del tempo,  $\vec{F} = \vec{F}(t)$ , ad indicare che in generale essa non è costante. Tuttavia, in molti problemi di fisica abbiamo a che fare con moti in campi di forza, dove la forza agente su un oggetto dipende dalla posizione in cui esso si trova:  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$  — in tal caso la dipendenza dal tempo è in realtà dovuta allo spostamento dell’oggetto:  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ , quindi  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}(t))$ .

In alcuni casi, la forza dipende anche dalla velocità dell’oggetto — è il caso delle *forze magnetiche*. Quindi potremmo scrivere  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v})$ . Infine, la dipendenza funzionale di  $\vec{F}$  da  $\vec{r}, \vec{v}$  potrebbe anche cambiare con il tempo: è il caso in cui l’ambiente esterno in cui l’oggetto si muove subisce variazioni

sostanzialmente indipendenti dal moto dell'oggetto stesso. Quindi, nella sua forma più generale, dovremmo scrivere

$$\vec{F} = \vec{F} \left( \vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t \right) \quad (11.27)$$

In presenza di campi di forza, la formulazione del problema della dinamica è la seguente:

$$\begin{cases} \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{1}{m} \vec{F} \left( \vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t \right) \\ \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 \\ \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0 \end{cases} \quad (11.28)$$

La prima equazione è una *equazione differenziale del secondo ordine nella funzione incognita  $\vec{r}(t)$* . Ciò significa anzitutto che l'incognita non è una grandezza numerica (come nelle equazioni algebriche per esempio), ma è appunto una funzione. Essa compare nell'equazione sia direttamente, che attraverso le sue derivate (da cui il nome "equazione differenziale"). In questo caso l'ordine massimo della derivata è il secondo.

Come già detto, per risolvere il problema, è necessario conoscere le condizioni iniziali, cioè i valori di  $\vec{r}$  e di  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$  all'istante iniziale  $t_0$ . Senza di queste non è possibile trovare la legge oraria.

L'analisi matematica fornisce teoremi che garantiscono l'esistenza e l'unicità della soluzione  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  del sistema Eq. (11.28) <sup>[4]</sup>, sotto condizioni molto generali, che nei problemi di fisica sono sempre soddisfatte.

In pratica, la capacità di trovare soluzioni esatte è limitata a poche categorie di problemi, che descriveremo nei prossimi capitoli.

### 11.5.1 Integrazione con il metodo iterativo (\*)

Nel caso non fossimo capaci di integrare in maniera analitica il sistema Eq. (11.28), ecco come potremmo idealmente procedere al computer:

- [0] Definiamo due quantità vettoriali per posizione e velocità, assegnando loro i valori iniziali:  $\vec{r} = \vec{r}_0$  e  $\vec{v} = \vec{v}_0$ . Definiamo inoltre la variabile-tempo assegnandole il suo valore iniziale:  $t = t_0$

---

<sup>4</sup> In analisi differenziale, un sistema come quello dell'Eq. (11.28), con un'equazione differenziale di ordine  $n$ , e le condizioni iniziali per la funzione incognita e le sue  $(n - 1)$  derivate, si chiama *problema di Cauchy*.

[1] Dalla legge fisica della forza,  $\vec{F} = \vec{F}\left(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t\right)$ , calcoliamo  $\vec{F}$  nella condizione attuale dell'oggetto, quindi calcoliamo l'accelerazione  $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$  cui l'oggetto è sottoposto.

[2] Calcoliamo i nuovi valori di  $\vec{v}$  e  $\vec{r}$  dopo un intervallino di tempo  $\delta t$  "molto piccolo" — idealmente dovrebbe essere infinitesimo, ma questo non è fattibile con il computer:

$$\begin{aligned}\vec{r} &\longleftarrow \vec{r} + \vec{v} \cdot \delta t \\ \vec{v} &\longleftarrow \vec{v} + \vec{a} \cdot \delta t\end{aligned}$$

[3] Aggiorniamo anche la variabile-tempo:

$$t \longleftarrow t + \delta t$$

e reiteriamo il processo dal punto [1].

In tal modo si può costruire una tabella di valori

$$\begin{array}{c|c|c} t_0 & \vec{r}(t_0) & \vec{v}(t_0) \\ t_0 + \delta t & \vec{r}(t_0 + \delta t) & \vec{v}(t_0 + \delta t) \\ t_0 + 2\delta t & \vec{r}(t_0 + 2\delta t) & \vec{v}(t_0 + 2\delta t) \\ t_0 + 3\delta t & \vec{r}(t_0 + 3\delta t) & \vec{v}(t_0 + 3\delta t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

per incrementi temporali  $\delta t$  arbitrariamente piccoli.

Questo approccio funzionerebbe bene solo se gli incrementi temporali  $\delta t$  fossero infinitesimi. In pratica ciò è irrealizzabile. L'effetto è che ad ogni iterazione la forza  $\vec{F}$  e la velocità  $\vec{v}$  calcolate all'istante  $t$  vengono utilizzate come se fossero costanti su un intervallino di tempo  $[t; t + \delta t]$ . L'errore che si commette ad ogni iterazione con questa approssimazione va ad accumularsi a quelli precedenti, ed il risultato spesso peggiora di precisione man mano che si procede nell'iterazione.

Quando si debba realizzare un simile approccio al computer, si ricorre a tecniche di calcolo che riducono gli errori. Qui non ne parliamo diffusamente, accenniamo solo l'idea che sta alla base. Essa consiste nel raffinare ciascuna delle iterazioni, calcolando dapprima i "nuovi" valori per  $\vec{v}$ ,  $\vec{r}$  con il metodo del punto [2], e poi mediandoli con i valori precedenti. Così si usano dei valori che dovrebbero essere validi in un punto intermedio fra  $t$  e  $t + \delta t$ : con

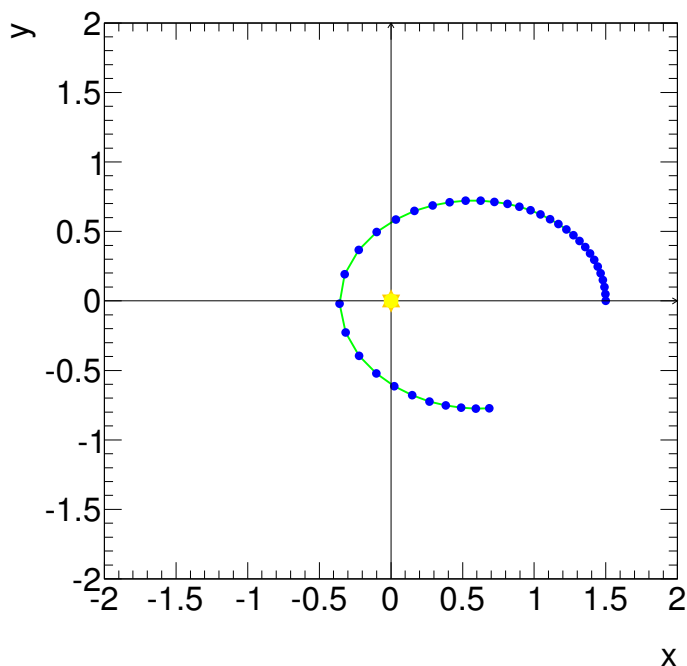


Figura 11.5: *Grafico ottenuto con l'integrazione numerica del moto.*

questi si ri-calcola la forza  $\vec{F}$  in un punto intermedio e si ripete il punto [2]. In generale i risultati sono molto più stabili.

Come esempio, consideriamo un campo di forza

$$F_x = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad ; \quad F_y = -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

agente su una massa  $m = 1$  con condizioni iniziali:

$$x_0 = 1.5 \quad ; \quad y_0 = 0 \quad ; \quad v_{x,0} = 0 \quad ; \quad v_{y,0} = 0.5$$

e incremento di tempo  $\delta t = 0.1$ . Le unità sono tutte arbitrarie.

Il risultato è mostrato nel grafico in Fig. 11.5. Come si può osservare, il risultato non è niente male! Questo è uno dei pochi moti in campi di forza che ammette una soluzione analitica: l'orbita è di forma ellittica, e quello che abbiamo ottenuto ha proprio la forma giusta. Poiché l'incremento temporale è tenuto fisso, si può intuire anche la velocità del moto: maggiore quando le posizioni successive sono più lontane fra loro.



# Capitolo 12

## Lavoro ed energia cinetica

L'energia è un concetto non facilmente definibile in fisica, perché essa prende molte forme... Nell'introduzione abbiamo parlato di energia di movimento (cinetica), di interazione (o potenziale), e poi di energia termica, chimica, radiante, etc.

In questa sezione introdurremo l'*energia cinetica*, che è strettamente legata al movimento. L'altro concetto che vedremo subito è il *lavoro di una forza*: anticipiamo subito che esso può essere visto come la capacità di una forza di modificare l'energia cinetica dell'oggetto su cui agisce.

E ora passiamo alle definizioni precise...

### 12.1 Lavoro di una forza

Consideriamo un oggetto puntiforme che si muove con una legge oraria

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

soggetto ad una forza  $\vec{F}$ .

In un intervallo di tempo molto piccolo (al limite, infinitesimo)  $dt$ , esso percorre uno spostamento

$$d\vec{r} = \vec{v} dt$$

Si definisce *lavoro elementare della forza  $\vec{F}$  lungo lo spostamento  $d\vec{r}$*  la quantità <sup>[1]</sup>:

$$\delta\mathcal{W} = \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{12.1}$$

---

<sup>1</sup> La notazione  $\delta\mathcal{W}$  è stata introdotta per ricordare che abbiamo a che fare con una quantità infinitesima (indicata con  $\delta$ ), ma che *non è una variazione di qualcosa*. Solitamente, data una qualunque quantità  $Q$ , una scrittura tipo  $\Delta Q$  indica una variazione

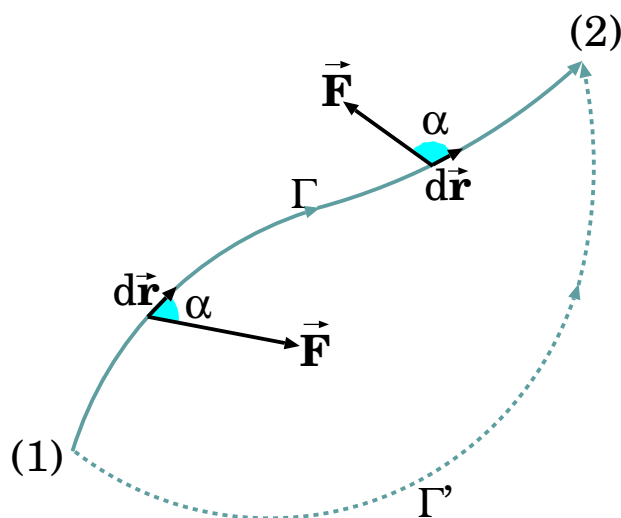


Figura 12.1: Lavoro elementare  $\delta\mathcal{W} = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F ds \cos \alpha$  fatto dalla forza  $\vec{F}$  lungo uno spostamento  $d\vec{r}$ . Il lavoro su un percorso  $\Gamma$  orientato, da (1) a (2), è calcolabile come  $\mathcal{W} = \int_{\Gamma} d\vec{r} \cdot \vec{F}$ . In generale il risultato dipende dal percorso, cioè  $\int_{\Gamma} d\vec{r} \cdot \vec{F} \neq \int_{\Gamma'} d\vec{r} \cdot \vec{F}$ .

(vd Fig. 12.1).

Per un oggetto puntiforme che si sposta da (1) a (2) lungo una linea  $\Gamma$  (Fig. 12.1), il lavoro della forza agente su di esso si scrive integrando l'Eq. (12.1):

$$\mathcal{W} = \int_{\Gamma} d\vec{r} \cdot \vec{F} \quad (12.2)$$

Nella formula gli estremi (1), (2) non sono indicati esplicitamente: sono impliciti nell'indicazione della linea  $\Gamma$ . Si noti che in generale il lavoro  $\mathcal{W}$  lungo una linea dipende dalla scelta della linea, anche a parità di estremi (1) e (2), cioè considerata una linea  $\Gamma'$  che va da (1) a (2) con percorso diverso (Fig. 12.1), in generale può essere

$$\int_{\Gamma} d\vec{r} \cdot \vec{F} \neq \int_{\Gamma'} d\vec{r} \cdot \vec{F}$$

Un esempio semplice: immaginate di dover spingere un grosso mobile, facendolo strisciare sul pavimento, da un punto  $A$  a un punto  $B$ . Secondo

---

finita di  $Q$ , mentre  $dQ$  indica una variazione infinitesima. Per esempio,  $d\vec{r}$  significa una variazione infinitesima della posizione  $\vec{r}$ . Viceversa, il lavoro non è una quantità che subisce variazioni, pertanto qui si preferisce non indicarlo con  $d\mathcal{W}$ .

voi fate più lavoro spingendolo in linea retta (cioè lungo la strada più breve), oppure facendo un ampio giro?

---

**Esempio: stessi estremi, ma cammini diversi**

---

Consideriamo un campo di forza  $\vec{F}(\vec{r})$  dato da:

$$\vec{F}(x, y, z) = \kappa z \hat{x}$$

e un oggetto che si sposta dal punto  $A \equiv (x_A, y_A, z_A)$  al punto  $B \equiv (x_B, y_B, z_B)$ . I percorsi possibili sono infiniti: consideriamo due possibilità.

- (1) Lo spostamento avviene prima lungo  $\hat{x}$ , poi lungo  $\hat{y}$ , infine lungo  $\hat{z}$ . Poiché la forza è parallela a  $\hat{x}$ , solo il primo tratto di spostamento produce lavoro:

$$\mathcal{W} = \int_{x_A}^{x_B} dx \kappa z = \kappa z_A (x_B - x_A)$$

(la forza dipende solo dalla coordinata  $z$ , quindi è costante in questo tratto,  $z = z_A$ , e l'integrazione è banale).

- (2) Lo spostamento avviene prima lungo  $\hat{z}$ , poi lungo  $\hat{x}$ , infine lungo  $\hat{y}$ . Anche qui l'unico tratto in cui si compie lavoro è quello lungo  $\hat{x}$ ; questa volta però lo spostamento lungo  $\hat{z}$  è già avvenuto, quindi  $z = z_B$ , e si ottiene

$$\mathcal{W} = \int_{x_A}^{x_B} dx \kappa z = \kappa z_B (x_B - x_A)$$

Ovviamente nei due casi il lavoro è diverso, anche se gli estremi del percorso coincidono.

### 12.1.1 Alcune riflessioni sul lavoro elementare

Si noti che il lavoro elementare è definito come un *prodotto scalare*. Data la proprietà del prodotto scalare (Eq. (6.6)) il lavoro si può anche scrivere come:

$$\delta\mathcal{W} = F ds \cos \alpha \quad (12.3)$$

essendo  $F = |\vec{F}|$  il modulo della forza,  $ds = |d\vec{r}|$  lo spostamento lungo la traiettoria, e  $\alpha$  l'angolo fra il vettore-forza  $\vec{F}$  e il vettore-spostamento  $d\vec{r}$ .

Ricordando la scomposizione di una forza in componenti tangenziale e centripeta — vd Eq. (8.11):

$$\vec{F} = \vec{F}_t + \vec{F}_n$$

notiamo che  $\vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F}_t \cdot d\vec{r} + \vec{F}_n \cdot d\vec{r}$ , dove  $\vec{F}_n \cdot d\vec{r} = 0$  poiché  $\vec{F}_n \perp d\vec{r}$ . Quindi si può anche scrivere:

$$\delta\mathcal{W} = \vec{F}_t \cdot d\vec{r} = F_t ds \quad (12.4)$$

Le tre equazioni Eq. (12.1), Eq. (12.3), Eq. (12.4), sono del tutto equivalenti: a seconda dei casi si sceglie quella più utile. In particolare, l'Eq. (12.4) ci dice che solo la componente tangenziale della forza compie lavoro.

*La componente centripeta di una forza non compie lavoro.*

A seconda che l'angolo  $\alpha$  sia acuto o ottuso (vd Fig. 12.1),  $\cos \alpha$  è positivo o negativo. Abbiamo le seguenti possibilità:

$$\alpha < \frac{\pi}{2} \iff \cos \alpha > 0 \iff \delta\mathcal{W} > 0$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \iff \cos \alpha = 0 \iff \delta\mathcal{W} = 0$$

$$\alpha > \frac{\pi}{2} \iff \cos \alpha < 0 \iff \delta\mathcal{W} < 0$$

### Alcuni esempi

*Immaginiamo un operaio che deve trasportare materiale su un vagone:*

- *inizialmente, l'operaio spinge il vagone in avanti su una rotaia: applica una forza  $\vec{F}$  che è parallela e concorde allo spostamento  $d\vec{r}$ , pertanto  $\alpha = 0$ ,  $\cos \alpha = 1$ , e il lavoro è positivo:  $\delta\mathcal{W} > 0$ ;*
- *l'operaio smette di spingere, il vagone continua ad avanzare; ovviamente qui  $\vec{F} = 0$  e  $\delta\mathcal{W} = 0$ ;*
- *la rotaia compie una curva di raggio  $\rho$ , pertanto il vagone descrive una traiettoria curvilinea, cioè è soggetto ad una accelerazione centripeta  $\vec{a}_n$ , di modulo  $a_n = \frac{v^2}{\rho}$  e perpendicolare alla velocità (vd Eq. (7.36), Sezione 7.6). Quindi deve esistere una forza centripeta  $\vec{F} = m\vec{a}_n$ , che viene esercitata dalla rotaia sul carrello. Poiché  $d\vec{r} = \vec{v}dt$ , allora  $d\vec{r} \perp \vec{F}$ , quindi  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos \alpha = 0$ , e il lavoro è nullo:  $\delta\mathcal{W} = 0$ ;*
- *l'operaio deve frenare il vagone in moto, pertanto lo trattiene da dietro, applicando una forza  $\vec{F}$  in direzione contraria allo spostamento  $d\vec{r}$ ; pertanto  $\alpha = \pi$ ,  $\cos \alpha = -1$ , e il lavoro è negativo:  $\delta\mathcal{W} < 0$ .*

*Vediamo altri esempi.*

- *Una carica elettrica  $q$ , in presenza di un campo magnetico  $\vec{B}$ , è soggetta ad una forza magnetica,  $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$ ; dal prodotto vettoriale nella formula, si capisce che  $\vec{F}_m$  è sempre perpendicolare alla velocità  $\vec{v}$ , dunque anche allo spostamento  $d\vec{r} = \vec{v}dt$ ; pertanto essa non compie mai lavoro — l'angolo  $\alpha$  è sempre  $\pi/2$ .*

- Le forze di attrito, in un ambiente statico, sono sempre dirette lungo il moto, ma con orientamento opposto:  $\vec{F}_{\text{attr}} \propto -d\vec{r}$ ; dunque  $\alpha = \pi$  e  $\delta\mathcal{W} = \vec{F}_{\text{attr}} \cdot d\vec{r} < 0$ , sempre.
- Consideriamo un attrito dinamico radente, su un piano orizzontale:  $\vec{F}_{\text{attr}} = -\mu_d mg \hat{v}$ . Il lavoro elementare è  $\delta\mathcal{W} = -\mu_d mg ds$ ; il lavoro lungo una linea  $\Gamma$ , di lunghezza  $L_\Gamma$ , è in questo caso  $\mathcal{W} = \int_\Gamma \delta\mathcal{W} = -\mu_d mg \int_\Gamma ds = -\mu_d mg L_\Gamma$ . Questo semplice risultato deriva dal fatto che  $|\vec{F}_{\text{attr}}|$  è costante e che  $\cos \alpha = -1$  ovunque lungo il percorso. In questo esempio appare evidente che il lavoro DIPENDE dalla scelta della linea  $\Gamma$  che congiunge i due estremi (1) e (2).
- Un oggetto che si muove nel campo gravitazionale terrestre, con velocità  $\vec{v} \equiv (v_x, v_y, v_z)$ , sente una forza verso il basso  $\vec{F}_g = -mg\hat{z}$ . Lo spostamento elementare è  $d\vec{r} = \vec{v} dt$ . Il lavoro elementare è  $\delta\mathcal{W} = \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = -mgv_z dt$ : può essere negativo, positivo, o nullo a seconda che l'oggetto stia salendo ( $v_z > 0$ ), stia scendendo ( $v_z < 0$ ), oppure sia nel punto di inversione (in cui istantaneamente  $v_z = 0$ ).

### Sul lavoro muscolare

Un operaio deve sollevare un grosso carico, quindi trasportarlo a braccia e poi deporlo più avanti. Il pavimento è orizzontale, dunque il punto iniziale e quello finale del carico si trovano alla stessa altezza — diciamo ad altezza nulla.

A lavoro finito, il datore di lavoro dice all'operaio: “Tu non hai lavorato, quindi non ti pago!” All'operaio, stupito (e anche parecchio “nervoso”) spiega: “Vedi, dovevi sollevare un carico di massa  $m$  fino a un'altezza  $h$ , applicando una forza verticale  $F$  che contrasti la forza-peso, quindi  $F = +mg$ : in questa fase hai compiuto un lavoro  $\mathcal{W}_1 = mgh$ . Quindi l'hai trasportato in orizzontale, applicando sempre una forza verticale: forza e spostamento sono ortogonali, quindi in questa fase  $\mathcal{W}_2 = 0$ . Infine hai posato il carico, compiendo uno spostamento  $-h$  verso il basso, e quindi facendo un lavoro  $\mathcal{W}_3 = -mgh$ . Come vedi,  $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3 = 0$ , quindi non ti pago, non hai fatto niente!”

Chi ha ragione?

**Risposta.** Ovviamente, ha ragione l'operaio. Ma dobbiamo dimostrarlo, evidenziando l'errore nel ragionamento del suo sfruttatore.

Nella prima fase, il lavoro c'è:  $\mathcal{W}_1 > 0$ , fuori di dubbio, l'operaio fa fatica! Nella terza fase,  $\mathcal{W}_3 < 0$ , ma questo non dà riposo all'operaio, né gli consente di “recuperare” la fatica fatta nel sollevamento. In effetti, per come funzionano i nostri muscoli, non recuperiamo dalla stanchezza quando applichiamo forze con orientamento opposto al movimento. In ogni caso, quando applichiamo una forza muscolare, le fibre dei nostri muscoli in generale si contraggono, ma in dettaglio alcune a turno si rilassano e si ricontraggono, lasciando che altre possano

*rilassarsi a loro volta, etc. Questo effetto è percepibile, per esempio quando lo sforzo è notevole, e i nostri muscoli “tremano”. Mentre la contrazione delle fibre produce un lavoro positivo, il temporaneo rilassamento non consente di “recuperare pienamente le forze”. Anche nel tratto di percorso orizzontale, l’operaio compie comunque uno sforzo, perché a rigore il moto del carico non sarà perfettamente orizzontale, ma piuttosto un susseguirsi di piccole oscillazioni in alto e in basso. Nuovamente, quelle in alto comportano lavoro, quelle in basso non danno riposo.*

### 12.1.2 Lavoro di un sistema di forze

Se sullo stesso punto materiale agiscono più forze  $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$ , per ciascuna di esse si può definire il lavoro elementare e quello lungo una linea  $\Gamma$ :

$$\delta\mathcal{W}_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r} \quad ; \quad \mathcal{W}_i = \int_{\Gamma} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}$$

Il lavoro totale fatto dal sistema di forze è ovviamente

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{W}_{tot} &= \left( \sum_i \vec{F}_i \right) \cdot d\vec{r} = \sum_i \delta\mathcal{W}_i \\ \mathcal{W}_{tot} &= \int_{\Gamma} \left( \sum_i \vec{F}_i \right) \cdot d\vec{r} = \sum_i \mathcal{W}_i \end{aligned} \tag{12.5}$$

## 12.2 Energia cinetica

Ora consideriamo un punto materiale, su cui agisce un sistema di forze di risultante  $\vec{F}_{tot}$ , che in un tempo  $dt$  si sposta di  $d\vec{r} = \vec{v}dt$ . Scomponiamo la forza risultante in componenti tangenziale e centripeta:

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_t + \vec{F}_n = F_t \hat{t} + F_n \hat{n}$$

Abbiamo visto — Eq. (12.4) — che solo la componente tangenziale  $\vec{F}_t$  del sistema di forze produce lavoro:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{W}_{tot} &= F_t ds = \left( m \frac{dv}{dt} \right) (v dt) \\ &= mv dv \end{aligned}$$

Ora osserviamo che  $\frac{d(v^2)}{dv} = 2v$ , quindi  $v dv = \frac{d(v^2)}{2}$ . Pertanto troviamo

$$\delta\mathcal{W}_{tot} = \frac{m}{2}d(v^2)$$

ovvero

$$\delta\mathcal{W}_{tot} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) \quad (12.6)$$

Questo suggerisce di definire una nuova quantità: l'*energia cinetica*  $\mathcal{E}$  di un oggetto puntiforme, come:

$$\mathcal{E} = \frac{mv^2}{2} \quad (12.7)$$

Il risultato che abbiamo appena trovato è che un lavoro elementare produce una variazione elementare di energia cinetica:

$$\delta\mathcal{W}_{tot} = d\mathcal{E} \quad (12.8)$$

Integrando lungo un percorso  $\Gamma$ , si ottiene che il lavoro totale è pari alla variazione totale di energia cinetica:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{tot} &= \Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{finale}} - \mathcal{E}_{\text{iniziale}} \\ &= \frac{m}{2} (v_{\text{finale}}^2 - v_{\text{iniziale}}^2) \end{aligned} \quad (12.9)$$

Insistiamo su due punti:

- nelle relazioni  $\delta\mathcal{W}_{tot} = d\mathcal{E}$  o  $\mathcal{W}_{tot} = \Delta\mathcal{E}$  il lavoro è inteso come quello della *totalità* delle forze agenti;
- osserviamo nuovamente le notazioni:

$$\delta\mathcal{W}_{tot} = d\mathcal{E} \quad ; \quad \mathcal{W}_{tot} = \Delta\mathcal{E}$$

$d\mathcal{E}$  e  $\Delta\mathcal{E}$  indicano *variazioni* (infinitesima e finita) della quantità “energia cinetica”  $\mathcal{E}$ ; viceversa, il lavoro *non* è variazione di qualcosa. L’energia cinetica  $\mathcal{E}$  è una proprietà dell’oggetto, che può subire variazione, mentre il lavoro è piuttosto l’effetto che la forza produce sull’energia cinetica.

L’Eq. (12.9) è spesso citato come *teorema dell’energia cinetica*, oppure anche *teorema delle forze vive* (nome storico...)

### 12.2.1 Derivazione alternativa

La relazione  $\delta\mathcal{W}_{tot} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$  può essere trovata anche in un altro modo, che è istruttivo vedere. Ricordiamoci che per una qualunque grandezza  $A$  vale l'identità  $A dA = d\left(\frac{A^2}{2}\right)$  — l'abbiamo ricavata per  $v$ , ma il ragionamento era del tutto generale. Allora:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{W}_{tot} &= \vec{\mathbf{F}}_{tot} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = m \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = m d\vec{\mathbf{v}} \cdot \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = m d\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}} \\ &= m (dv_x v_x + dv_y v_y + dv_z v_z) = m \left( d\left(\frac{v_x^2}{2}\right) + d\left(\frac{v_y^2}{2}\right) + d\left(\frac{v_z^2}{2}\right) \right) \\ &= \frac{m}{2} d(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{m}{2} d(v^2)\end{aligned}$$

## 12.3 Potenza di una forza

Consideriamo una forza  $\vec{\mathbf{F}}$  che compie un lavoro elementare  $\delta\mathcal{W}$  su uno spostamento infinitesimo  $d\vec{\mathbf{r}}$ , che ha luogo in un intervallino di tempo  $dt$  anch'esso infinitesimo.

Si definisce *potenza* il rapporto fra il lavoro elementare  $\delta\mathcal{W}$  e il tempo  $dt$  impiegato per compierlo:

$$\mathcal{P} = \frac{\delta\mathcal{W}}{dt} \quad (12.10)$$

Sviluppando l'espressione del lavoro elementare, Eq. (12.1), troviamo:

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \frac{\vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \\ &= \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}\end{aligned}$$

quindi

$$\mathcal{P} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}} \quad (12.11)$$

## 12.4 Unità di misura

L'unità di misura del lavoro è il Joule:  $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$ . Una forza di 1 N, applicata ad un oggetto che si sposta di 1 m nella stessa direzione della forza applicata, compie un lavoro di 1 J.

Siccome un lavoro produce una variazione di energia cinetica,  $\mathcal{W} = \Delta\mathcal{E}$ , anche l'energia cinetica si misura in Joule. Per esempio, una massa di 1 kg che si muove alla velocità di 1 m/s, possiede un'energia cinetica di 0.5 J.



L'unità di misura della potenza è il Watt:  $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$ . Una forza che compie un lavoro di 1 Joule in 1 secondo produce una potenza di 1 Watt.

## 12.5 Problemi su lavoro, energia, potenza

**Esercizio 12.1.** *Un oggetto di massa  $m$ , inizialmente fermo in una posizione  $x_A$ , è soggetto ad una forza costante*

$$\vec{F} = F \hat{x}$$

*comincia a muoversi fino a raggiungere la posizione  $x_B$ . Che velocità ha acquistato?*

**Soluzione 1.** *Risolviamo l'equazione del moto. L'oggetto parte da fermo e la forza (e quindi anche l'accelerazione) è costante e diretta verso  $\hat{x}$ . Quindi non c'è niente che produca movimento nelle direzioni  $\hat{y}, \hat{z}$ : possiamo trattare il problema come un moto uniformemente accelerato in una sola dimensione. L'accelerazione è:*

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m}$$

*Pertanto la velocità in funzione del tempo è:*

$$v(t) = v(0) + \int_0^t dt' \frac{F}{m} = \frac{F}{m}t$$

*( $a$  è costante e  $v(t=0) = 0$ ). La posizione in funzione del tempo è*

$$x(t) = x(0) + \int_0^t dt' v(t') = x_A + \frac{F}{2m}t^2$$

*Quindi l'oggetto raggiunge la posizione  $x_B$  ad un tempo  $t$  tale che  $x(t) = x_B$ , ovvero*

$$x_B - x_A = \frac{F}{2m}t^2 \quad \implies \quad t_B = \sqrt{\frac{2m(x_B - x_A)}{F}}$$

*La velocità in tale istante è:*

$$v(t_B) = \frac{F}{m}t_B = \sqrt{\frac{2F(x_B - x_A)}{m}}$$

**Soluzione 2.** *La forza è diretta lungo  $\hat{x}$  ed è costante, quindi il lavoro sul tratto  $A \rightarrow B$  è*

$$\mathcal{W} = \int_{x_A}^{x_B} dx F = F \cdot (x_B - x_A)$$

*che è uguale alla variazione di energia cinetica  $\Delta\mathcal{E}$ . Poiché inizialmente l'oggetto è fermo,  $\mathcal{E}_A = 0$ , dunque*

$$\frac{m}{2}v_B^2 = \mathcal{E}_B = \mathcal{W} = F(x_B - x_A) \quad \implies \quad v_B = \sqrt{\frac{2F(x_B - x_A)}{m}}$$

**Commento.** Ovviamente i due risultati sono identici. Però la soluzione 2 è più rapida. In problemi in cui non si debba risolvere la legge del moto, ma sia sufficiente ricavare le velocità, l'uso dell'energia cinetica può agevolare di molto i calcoli.

**Esercizio 12.2.** L'esempio precedente si complica, non appena si inserisca una forza che varia con la posizione:

$$\vec{F} = F(x) \hat{x}$$

Se l'oggetto di massa  $m$  si trova inizialmente in una posizione  $x_A$  con velocità  $v_A$ , con quale velocità  $v_B$  raggiunge la posizione  $x_B$ ?

**Soluzione 1.** Il lavoro fatto dalla forza lungo il percorso è

$$\mathcal{W} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x_A}^{x_B} F(x) dx$$

La variazione di energia cinetica è  $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{W}$ . Quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_B - \mathcal{E}_A &= \mathcal{W} \\ \frac{m}{2} (v_B^2 - v_A^2) &= \int_{x_A}^{x_B} F(x) dx \end{aligned}$$

Se la forma analitica di  $F(x)$  è nota, e se l'integrale si può risolvere in modo analitico, siamo a posto. Altrimenti si può comunque risolvere l'integrale con metodi numerici...

**Soluzione 2.** Si cerca di risolvere l'equazione del moto, per date condizioni iniziali. Le soluzioni formali sarebbero:

$$\begin{aligned} v(t) &= v_A + \int_0^t a(t') dt' = v_A + \frac{1}{m} \int_0^t F(x(t')) dt' \\ x(t) &= x_A + \int_0^t v(t') dt' \end{aligned}$$

dove appare chiara una difficoltà: ci servirebbe  $F(t')$ , ma il problema dà  $F(x)$ , e  $x(t)$  è da ricavare...

Si dovrebbe quindi partire direttamente dall'equazione del moto:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F(x)}{m}$$

e conoscere dei metodi matematici per risolverla. In ogni caso il problema è molto più complesso!

**Esercizio 12.3.** Riprendiamo l'esempio precedente, in un caso particolare:  $v_A = 0$  e

$$\vec{F} = \beta x \hat{x} \quad (\beta > 0)$$

Qual è la velocità  $v_B$  nella posizione  $x_B$ ?

**Soluzione 1.** Il lavoro fatto dalla forza lungo il percorso è

$$\mathcal{W} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x_A}^{x_B} \beta x dx = \frac{\beta}{2}(x_B^2 - x_A^2)$$

La variazione di energia cinetica è  $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{W}$ . Essendo  $v_A = 0$  deve essere  $\mathcal{E}_A = 0$ , quindi:

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} v_B^2 &= \frac{\beta}{2}(x_B^2 - x_A^2) \\ v_B &= \sqrt{\frac{\beta}{m}(x_B^2 - x_A^2)} \end{aligned}$$

**Soluzione 2.** Risolviamo l'equazione del moto. Il problema è unidimensionale, l'accelerazione è

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m} = \frac{\beta}{m} x$$

La derivata seconda di  $x$  è proporzionale a  $x$ . Ricordando che  $\frac{d}{dt}(e^{\alpha t}) = \alpha e^{\alpha t}$ , e quindi che  $\frac{d^2}{dt^2}(e^{\alpha t}) = \alpha^2 e^{\alpha t}$ , una possibile soluzione è proprio:

$$x(t) = A_+ e^{\alpha t} + A_- e^{-\alpha t} \quad \left( \alpha = \sqrt{\frac{\beta}{m}} \right)$$

Dunque  $\alpha$  è fissato dai parametri del problema ( $\beta$  della forza,  $m$  dell'oggetto) mentre  $A_{\pm}$  dipendono dalle condizioni iniziali. A  $t = 0$  deve essere  $x = x_A$ , dunque  $A_+ + A_- = x_A$ . Inoltre, a  $t = 0$ ,  $v = 0$ . Poiché  $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \alpha [A_+ e^{\alpha t} - A_- e^{-\alpha t}]$  deve essere  $\alpha(A_+ - A_-) = 0$ , ovvero  $A_+ = A_-$ . Con la condizione precedente troviamo  $A_+ = A_- = \frac{x_A}{2}$ , cosicché:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{x_A}{2} (e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}) \\ v(t) &= \frac{x_A}{2} \alpha (e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}) \end{aligned}$$

Ora occorre ricavare  $t$  (o meglio,  $e^{\alpha t}$ ) dalla prima equazione, imponendo  $x(t) = x_B$ , ed inserirlo nella seconda, per ricavare  $v_B$ . È possibile, anzi siete invitati a provare... Naturalmente il calcolo è molto più lungo che nella "Soluzione 1".

**Esercizio 12.4.** Un'automobile di massa  $m = 1.5$  ton accelera da ferma, con accelerazione costante, fino a raggiungere la velocità di 100 km/h in 5 s. Qual è il lavoro totale sull'automobile? Quanto vale la potenza applicata, ad un generico istante?

**Risposta.** Anzitutto convertiamo le grandezze in SI:  $1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$  e  $1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$ , quindi  $v = 100 \text{ km/h} = 100 \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 27.78 \text{ m/s}$ . Inoltre  $m = 1.5 \text{ ton} = 1500 \text{ kg}$ . L'energia cinetica iniziale è ovviamente nulla:  $\mathcal{E}_{in} = 0$ . L'energia cinetica finale è  $\mathcal{E}_{fin} = \frac{m}{2} v_{fin}^2 = 5.788 \cdot 10^5 \text{ J}$ . Quindi il lavoro è  $W = \Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_{fin} = 5.788 \cdot 10^5 \text{ J}$ .

La potenza istantanea quindi è  $\mathcal{P}(t) = ma^2 t = (4.630 \cdot 10^4 \text{ W/s}) t$ .

**Commento 1.** Al contrario di quel che uno si aspetterebbe intuitivamente, ad una accelerazione costante non corrisponde una potenza costante. La stessa accelerazione richiede più potenza se avviene a velocità più elevata.

**Commento 2.** Non ci siamo preoccupati di separare la forza del motore dalle forze di attrito con la strada, l'aria, etc. Abbiamo trattato  $F$  semplicemente come la risultante di queste forze; l'unico dato importante è che, in qualche modo, queste forze concorrono a produrre un'accelerazione costante.

**Esercizio 12.5.** Un'automobile di massa  $m = 1.5$  ton ha un motore di potenza  $\mathcal{P} = 50 \text{ kW}$ . Supponiamo — anche se è abbastanza irrealistico — che durante l'accelerazione il motore eroghi potenza costante. Se l'auto parte da ferma, quanto tempo impiega a raggiungere la velocità di  $v = 100 \text{ km/h}$ ? Qual è la legge oraria della velocità e dello spazio percorso? Nel trattare il problema si trascuri l'attrito dell'aria — anche questo è abbastanza irrealistico...

**Risposta.** L'energia cinetica dell'auto ferma è zero, quando l'auto va a 100 km/h la sua energia cinetica è  $\mathcal{E} = 5.788 \cdot 10^5 \text{ J}$ . Poiché la potenza è supposta costante, possiamo scrivere  $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{P} \cdot \Delta t$ , ovvero:

$$\Delta t = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{P}} = \frac{5.788 \cdot 10^5 \text{ J}}{5 \cdot 10^4 \text{ W}} = 11.6 \text{ s}$$

Poiché la potenza  $\mathcal{P}$  è costante, conviene ottenere la legge oraria della velocità da quella dell'energia cinetica. In un tempo  $dt$  il motore compie un lavoro  $\delta W = W dt = d\mathcal{E}$ , quindi  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{P}t$ . Allora,

$$v(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m}} = \sqrt{\frac{2\mathcal{P}t}{m}}$$

A dispetto di quello che si poteva pensare intuitivamente, la velocità non cresce linearmente con il tempo, dunque il moto NON è uniformemente accelerato. La ragione sta nell'espressione  $\mathcal{P} = Fv$  della potenza: a parità di potenza erogata, la

forza  $F$  (e quindi l'accelerazione) è maggiore per velocità più basse. Per trovare lo spazio percorso in un tempo  $t$ , si deve integrare la velocità. Ricordando che  $\int \sqrt{t} dt = \int dt t^{1/2} = \frac{1}{3/2} t^{3/2} = \frac{2}{3} t^{3/2}$ , otteniamo:

$$\Delta s(t) = \int v(t) dt = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2\mathcal{P}}{m}} t^{3/2}$$

## 12.6 Lavoro di forze macroscopiche

### 12.6.1 Lavoro della forza-peso

Calcoliamo il lavoro fatto dalla forza-peso  $\vec{F}_g = -mg\hat{z}$  lungo uno spostamento  $d\vec{r}$ :

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{W}_g &= \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = -mg\hat{z} \cdot d\vec{r} \\ &= -mg dz \end{aligned}$$

Quindi in uno spostamento totale da un punto iniziale (1), di coordinate  $(x_1, y_1, z_1)$ , ad un punto finale (2), di coordinate  $(x_2, y_2, z_2)$ , il lavoro della forza-peso è

$$\mathcal{W}_g^{(1) \rightarrow (2)} = -mg(z_2 - z_1) = -mg \Delta z \quad (12.12)$$

Non importa qual è il percorso per andare da (1) a (2), conta solo il dislivello  $\Delta z$ . Interessante, no?

Poiché la variazione di energia cinetica è  $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{W}$ , se agisce solo la forza peso abbiamo:

$$\Delta\mathcal{E} = -mg \Delta z \quad (\text{solo forza-peso}) \quad (12.13)$$

La ragione di questo *notevole* risultato è che *la forza di gravità è conservativa*. Questo argomento sarà trattato estesamente nel Capitolo 13, ma valeva la pena anticipare qualcosa qui...

### Alcune utili conseguenze

Se un oggetto puntiforme di massa  $m$  si muove, soggetto solo alla forza-peso, la sua variazione di velocità è ricavabile direttamente dal dislivello  $\Delta z$  effettuato. Infatti, dall'Eq. (12.13), si ricava:

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} (v_{fin}^2 - v_{in}^2) &= -mg (z_{fin} - z_{in}) \\ \frac{v_{fin}^2}{2} + gz_{fin} &= \frac{v_{in}^2}{2} + gz_{in} \end{aligned}$$

ovvero

$$\frac{v^2}{2} + gz = \left( \frac{v^2}{2} + gz \right)_{in} \quad (12.14)$$

La quantità  $\left( \frac{v^2}{2} + gz \right)$  è costante; quindi, se calcolata dalle condizioni iniziali, consente di ricavare  $v$  a qualunque  $z$ , o viceversa a quale  $z$  si ha una certa  $v$ , senza dover risolvere il moto.

Le stesse considerazioni valgono se, oltre alla forza-peso, agiscono altre forze che non compiono lavoro, perché sempre orientate perpendicolarmente al moto.

### 12.6.2 Lavoro delle forze vincolari — vincolo in quiete

Se il vincolo è fermo la reazione vincolare non compie lavoro. Questo perché  $\vec{F}_{vinc}$  esiste solo quando c'è contatto, d'altra parte per mantenere il contatto l'unico spostamento possibile è lungo il vincolo stesso, ovvero  $d\vec{r} \perp \vec{F}_{vinc}$ .

#### Forza-peso e vincolo in quiete

Se abbiamo un oggetto puntiforme che si muove, soggetto alla forza-peso e a vincoli *fermi*, l'unico lavoro viene compiuto dalla sola forza-peso. Pertanto possiamo utilizzare il risultato espresso nell'Eq. (12.14), che qui riportiamo:

$$\frac{v^2}{2} + gz = \left( \frac{v^2}{2} + gz \right)_{in}$$

È un risultato molto potente: immaginiamo di avere una pallina che scivola lungo una rotaia senza attriti, oppure un carrellino su una montagna russa. Il moto può essere estremamente complicato, dipende dalla forma della rotaia, che può salire o scendere in modo più o meno ripido, curvare, ... Tuttavia, conoscendo  $v$ ,  $z$  a un certo punto, possiamo calcolare  $v$  ad ogni altra quota.

Un notevole risultato, in particolare: se un oggetto parte da fermo ad un'altezza  $h$ , indipendentemente dal percorso che segue, arriva al suolo con velocità  $v_{fin} = \sqrt{2gh}$  — provate: basta mettere  $v_{in} = 0$  e  $z_{fin} - z_{in} = -h$ .

Oppure: la velocità iniziale necessaria affinché l'oggetto arrivi ad un'altezza  $h$  e lì si fermi è  $v_{in} = \sqrt{2gh}$  — questa volta,  $v_{fin} = 0$  e  $z_{fin} - z_{in} = h$ .

### 12.6.3 Lavoro delle forze di attrito — ambiente statico

Nel caso di ambiente in quiete, il lavoro fatto dalle forze di attrito si discute abbastanza semplicemente.

L'attrito statico non compie mai lavoro — ovvio: il punto di contatto è fermo. Però vale la pena ricordarlo...

$$\mathcal{W}_{attr.statico} = 0 \quad (\text{attrito statico}) \quad (12.15)$$

Invece, le forze degli attriti dinamici — sia radenti che viscosi — sono sempre orientate all'opposto degli spostamenti:

$$\vec{F}_{attr} \propto -\hat{v} \quad (\text{attriti radenti e viscosi})$$

pertanto compiono sempre lavoro negativo:

$$\mathcal{W}_{attr} < 0 \quad (\text{attriti radenti e viscosi}) \quad (12.16)$$

Si dice che le forze di attrito sono *dissipative*: producono sempre una diminuzione di energia cinetica.

D'altra parte, sappiamo che l'attrito provoca sempre surriscaldamento: i freni delle automobili e dei treni possono diventare roventi; i meteoriti che cadono sulla Terra, per la frizione con l'atmosfera terrestre, si scaldano fino a diventare incandescenti (stelle cadenti) e spesso si disintegrano prima di raggiungere la superficie terrestre.

In effetti, l'attrito trasforma l'energia cinetica in *energia termica*, che si manifesta con un surriscaldamento.

### 12.6.4 Lavoro delle forze di attrito — ambiente in movimento

Quando l'ambiente è in movimento, il discorso è più elaborato.

Nel caso di attrito statico, con ambiente accelerato, l'oggetto si muove mantenendo il contatto con l'ambiente, quindi è soggetto alla stessa accelerazione  $\vec{a}_{amb}$  dell'ambiente. Chiamando  $\vec{F}_{est}$  la totalità delle forze agenti sull'oggetto — escluso l'attrito — deve essere quindi  $m\vec{a}_{amb} = \vec{F}_{est} + \vec{F}_{attr}$ , cosicché:

$$\delta\mathcal{W}_{attr.statico} = \vec{F}_{attr} \cdot d\vec{r} = \left( m\vec{a}_{amb} - \vec{F}_{est} \right) \cdot \vec{v}_{amb} dt$$

può essere positivo o negativo, a seconda della presenza di forze esterne, e dell'orientamento di  $\vec{a}_{amb}$ ,  $\vec{v}_{amb}$ .

Analogamente, per gli attriti dinamici (radenti o viscosi), va considerata la *velocità relativa*  $\vec{v}_{rel} = \vec{v} - \vec{v}_{amb}$  fra oggetto e ambiente. Poiché in tale caso  $\vec{F}_{attr} \propto -\hat{v}_{rel}$ , abbiamo:

$$\delta\mathcal{W}_{attr} = \vec{F}_{attr} \cdot d\vec{r} \propto -\hat{v}_{rel} \cdot \vec{v} dt$$

e anche qui il segno dipende dall'orientamento relativo di  $\hat{v}_{rel}$  e  $\vec{v}$ .

In altre parole, gli attriti possono rallentare o accelerare l'oggetto, a seconda del moto dell'ambiente.

Come si concilia un  $\delta\mathcal{W}_{attr}$ , che può essere negativo o positivo, con una forza sempre dissipativa? Occorre considerare *tutto* il lavoro fatto dalle forze di attrito, sia sull'oggetto:

$$\delta\mathcal{W}_{attr} = \vec{F}_{attr} \cdot d\vec{r}$$

che sull'ambiente: quest'ultimo subisce una forza di attrito  $\vec{F}_{attr}^{amb} = -\vec{F}_{attr}$  — per il principio di azione-reazione — e uno spostamento  $d\vec{r}^{amb}$

$$\delta\mathcal{W}_{attr}^{amb} = \vec{F}_{attr}^{amb} \cdot d\vec{r}^{amb} = -\vec{F}_{attr} \cdot d\vec{r}^{amb}$$

Finora abbiamo sempre omesso  $\delta\mathcal{W}_{attr}^{amb}$ , poiché in caso di ambiente statico  $d\vec{r}^{amb} = 0$ . In generale però bisogna considerarlo.

$$\delta\mathcal{W}_{attr}^{tot} = \delta\mathcal{W}_{attr} + \delta\mathcal{W}_{attr}^{amb} = \vec{F}_{attr} \cdot (d\vec{r} - d\vec{r}^{amb})$$

Nel caso di attrito statico,  $d\vec{r} = d\vec{r}^{amb}$ , quindi  $\delta\mathcal{W}_{attr}^{tot} = 0$ . L'attrito statico in totale non compie lavoro, dunque non dissipa energia, anche nel caso di ambiente in moto.

Nei casi dinamici,  $d\vec{r} = \vec{v}dt$  e  $d\vec{r}^{amb} = \vec{v}^{amb}dt$ , quindi

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{W}_{attr}^{tot} &= \vec{F}_{attr} \cdot (\vec{v} - \vec{v}^{amb}) dt \\ &\propto -\hat{v}_{rel} \cdot \vec{v}_{rel} dt = -|v_{rel}| dt < 0 \end{aligned}$$

L'attrito dinamico produce sempre un lavoro totale negativo, anche nel caso di ambiente in moto, e questo è consistente con il fatto che sia una forza dissipativa.

---

### Attriti che aumentano l'energia cinetica?

---

*Finora abbiamo detto che gli attriti dinamici producono lavoro negativo ( $\mathcal{W}_{attr} < 0$ ) e dunque dissipano energia cinetica ( $\Delta\mathcal{E} < 0$ ). Si può però immaginare un contro-esempio: una valigia di massa  $m$ , inizialmente ferma, viene depositata su un nastro trasportatore che si muove a velocità costante  $v$ . Le forze di attrito*



*dinamico fra nastro e valigia accelerano quest'ultima finché essa non raggiunge la stessa velocità  $v$ : a quel punto l'attrito diventa statico e non compie più lavoro. Il risultato netto è che la valigia ha acquisito energia cinetica:  $\Delta\mathcal{E} = \frac{m}{2}v^2$ . Quindi, abbiamo un attrito che produce energia cinetica... Eppure, fra valigia e nastro c'è anche sfregamento, quindi surriscaldamento, quindi anche energia dissipata... Dov'è l'inghippo?*

*Analizziamo il problema da diversi punti di vista.*

- *Un osservatore che sta in piedi sul nastro trasportatore, inizialmente vede la valigia "andare all'indietro" con velocità  $v$ . Quando la valigia entra in contatto con il nastro, l'attrito radente la rallenta fino a fermarla, quindi l'energia cinetica subisce una variazione  $\Delta\mathcal{E} = -\frac{m}{2}v^2$ . Il lavoro della forza di attrito è*

$$W_{\text{attr}} = \Delta\mathcal{E} = -\frac{m}{2}v^2$$

*Chiamiamo l'energia dissipata  $\Delta Q = -\Delta\mathcal{E} = \frac{m}{2}v^2$ : questa è l'energia termica sviluppata dall'attrito, che in qualche modo produrrà un surriscaldamento delle superfici a contatto.*

- *Un osservatore che sta fermo per terra, vede la valigia accelerare, quindi acquistare energia cinetica,*

$$\Delta\mathcal{E} = +\frac{m}{2}v^2$$

*Nello stesso tempo, il surriscaldamento deve comunque esserci, in quantità indipendente dall'osservatore, quindi deve sempre esserci un'energia dissipata pari a quella calcolata nel caso precedente:*

$$\Delta Q = \frac{m}{2}v^2$$

*Quindi, in questo caso, il sistema riceve una quantità di energia*

$$\Delta\mathcal{E} + \Delta Q = mv^2$$

*Da dove viene?*

*Ovviamente, viene dal motore, che mantiene il nastro in movimento a velocità costante! Se il nastro trascina la valigia con forza  $F_{\text{attr}}$ , la valigia deve "frenare" il nastro con forza  $F_{fr} = -F_{\text{attr}}$ , ma siccome la velocità del nastro non cambia, il motore deve applicare una forza  $F_m = -F_{fr} = F_{\text{attr}}$ . Questa forza è parallela e concorde al movimento del nastro, dunque deve produrre un lavoro  $W_m > 0$ , che ora andiamo a calcolare.*

La valigia subisce un'accelerazione costante,  $a = \frac{F_{\text{attr}}}{m}$ , per un tempo

$$\Delta t = \frac{v}{a} = \frac{mv}{F_{\text{attr}}}$$

Questo è il tempo in cui valigia e nastro si scambiano forze. Il lavoro fatto dalla forza del motore sul nastro avviene a velocità  $v$  costante, per cui è semplicemente

$$\mathcal{W}_m = F_m \cdot v \cdot \Delta t = F_{\text{attr}} \cdot v \cdot \frac{mv}{F_{\text{attr}}} = mv^2$$

Quindi  $\mathcal{W}_m > \Delta\mathcal{E}$ . Evidentemente, il lavoro del motore non è l'unico ad agire sulla valigia. D'altronde, se consideriamo anche il lavoro dell'attrito,  $\mathcal{W}_{\text{attr}} = -\frac{mv^2}{2}$ , calcolato precedentemente, i conti tornano:

$$\mathcal{W}_m + \mathcal{W}_{\text{attr}} = \frac{mv^2}{2} = \Delta\mathcal{E}$$

In altre parole: l'energia fornita dal motore è maggiore di quella acquisita dalla valigia, quindi c'è una quantità di energia dissipata  $\Delta Q = \mathcal{W}_m - \Delta\mathcal{E} = mv^2 - \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}v^2$ , come calcolata rispetto all'osservatore in piedi sul nastro trasportatore.

**Riassumendo:** il lavoro erogato dal motore,  $\mathcal{W}_m = mv^2$ , va in parte ad aumentare l'energia cinetica,  $\Delta\mathcal{E} = \frac{m}{2}v^2$ , e la parte rimanente viene dissipata in energia termica,  $\Delta Q = \mathcal{W}_m - \Delta\mathcal{E} = \frac{m}{2}v^2$ . La parte  $\Delta Q$  è dovuta agli attriti, che producono un lavoro  $\mathcal{W}_{\text{attr}} = -\frac{mv^2}{2}$ .

### 12.6.5 Esercizi

**Esercizio 12.6.** Un carrellino delle montagne russe, di massa  $m = 200$  kg, partendo da fermo, scende da un'altezza  $h = 10$  m, arrivando nel punto più basso, dove la rotaia compie un "giro della morte" con raggio di curvatura  $\rho = 5$  m. Si calcolino: la velocità  $v_1$  del carrello e la reazione vincolare della rotaia,  $F_{\text{vinc},1}$  nel punto più basso; la velocità  $v_2$  e la reazione vincolare della rotaia,  $F_{\text{vinc},2}$  nel culmine del giro della morte. Qual è l'altezza iniziale minima,  $h_{\text{min}}$ , tale da consentire che il carrello completi il giro della morte?

**Risposta.** Sul carrello agiscono la forza-peso e la reazione vincolare. Quest'ultima non compie lavoro, perché il vincolo (rotaia) è fermo. Il lavoro della forza-peso, su un dislivello generico  $\Delta z$ , è pari a  $\mathcal{W}_g = -mg\Delta z$ . Poiché il carrello parte da fermo, la sua energia cinetica dopo una discesa  $-\Delta z$ , sarà  $\mathcal{E} = -mg\Delta z$

Nella prima discesa,  $\Delta z = -h = -20$  m, quindi l'energia cinetica nel punto più basso è  $\mathcal{E}_1 = \frac{m}{2}v_1^2 = mgh$ , da cui  $v_1 = \sqrt{2gh} = 19.81$  m/s. In questo punto, la forza totale sul carrello è  $F_{\text{tot},1} = -mg + F_{\text{vinc},1}$ , che deve essere uguale alla

forza centripeta  $F_{tot,1} = m \frac{v_1^2}{\rho}$ . Quindi  $F_{vinc,1} = m \frac{v_1^2}{\rho} + mg = 17\,651$  N. Abbiamo trovato  $F_{vinc,1} > mg$ , poiché la reazione vincolare, oltre a contrastare la forza-peso, deve imprimere un'accelerazione centripeta, diretta verso il centro di curvatura, cioè verso l'alto.

Nel punto di culmine, il dislivello dal punto di partenza è  $\Delta z = (2\rho) - h = -10$  m, pertanto, con ragionamento analogo si trova che al culmine  $v_2 = \sqrt{2g(h - 2\rho)} = 14.00$  m/s. In questo punto, la forza totale è  $F_{tot,2} = -mg + F_{vinc,2}$ . Nota: qui la reazione vincolare deve spingere verso il basso, quindi ci aspettiamo di trovare  $F_{vinc,2} < 0$  — ricordiamoci di verificarlo! La forza totale deve essere pari alla forza centripeta  $F_{tot,2} = -m \frac{v_2^2}{\rho}$  — il segno — indica che la forza centripeta è verso il basso. Quindi  $F_{vinc,2} = mg + F_{tot,2} = m \left( g - \frac{v_2^2}{\rho} \right) = -5884$  N. Effettivamente,  $F_{vinc,2} < 0$ .

Per rispondere all'ultima domanda, rivediamo il ragionamento: al culmine del giro della morte, la velocità  $v_2$  deve essere tale da richiedere una reazione vincolare che imprima la giusta accelerazione centripeta. Occorre che  $F_{vinc,2} = mg + F_{tot,2} = m \left( g - \frac{v_2^2}{\rho} \right) < 0$ , ovvero  $\frac{v_2^2}{\rho} > g$ . Ma  $v_2^2 = 2g(h - 2\rho)$ . Quindi  $\frac{2g(h - 2\rho)}{\rho} > g$ , ovvero  $h > \frac{5}{2}\rho$ . Con i dati del problema,  $h_{min} = 12.5$  m.

**Esercizio 12.7.** Un'automobile con potenza  $\mathcal{P} = 50$  kW accelera sull'autostrada, fino a raggiungere una velocità limite  $v_1 = 170$  km/h: non riesce ad andare più veloce perché l'attrito con l'aria contrasta la forza del motore. A queste velocità è ragionevole parametrizzare l'attrito come  $F_{attr} = -\eta'v^2$ , diretto in direzione opposta al movimento. Quanto vale  $\eta'$ ? Quanta energia impiega l'auto per percorrere 100 km alla velocità  $v_1$ ? Quanta energia impiegherebbe a percorrere la stessa distanza se viaggiasse a velocità  $v_2 = 130$  km/h?

**Risposta.** La potenza dissipata dalla forza di attrito è  $\mathcal{P}_{attr} = F_{attr}v = -\eta'v^3$ . Se l'auto non riesce ad aumentare la sua velocità vuol dire che la potenza del motore è esattamente contrastata dalla potenza dissipata per attrito:  $\mathcal{P} + \mathcal{P}_{attr} = 0$ , ovvero  $\eta' = \frac{\mathcal{P}}{v_1^3}$ . Convertiamo

la velocità in SI:  $v_1 = 170$  km/h =  $170 \frac{1000}{3600}$  m/s = 47.22 m/s. Otteniamo

$$\eta' = \frac{5 \cdot 10^4 \text{ W}}{(47.22 \text{ m/s})^3} = 0.475 \text{ N s}^2 \text{ m}^{-2}.$$

Per viaggiare a velocità costante, il motore deve erogare una forza che contrasti la forza di attrito:  $F_1 = +\eta'v_1^2 = (0.475 \text{ N s}^2 \text{ m}^{-2})(47.22 \text{ m/s})^2 = 1059$  N. Il lavoro della forza (e quindi l'energia necessaria) su  $\Delta\ell = 100$  km =  $10^5$  m è  $\mathcal{W}_1 = F_1\Delta\ell = 1.059 \cdot 10^8$  J — circa 100 milioni di Joule.

Se la velocità viene ridotta a  $v_2 = 130$  km/h = 36.11 m/s, la forza del motore deve essere  $F_2 = +\eta'v_2^2 = 619$  N. Anche il lavoro si riduce:

$W_2 = F_2 \Delta \ell = 6.19 \cdot 10^7$  J, cioè circa 60 milioni di Joule ... e si risparmia circa il 40% di carburante!

**Esercizio 12.8.** Su un piano inclinato di angolo  $\theta = 15^\circ$ , viene lanciato un oggetto in salita, con velocità iniziale  $v_0 = 1.35$  m/s. L'oggetto decelera fino ad arrestarsi istantaneamente, dopo una distanza  $\Delta \ell = 34$  cm. Quanto vale il coefficiente di attrito radente  $\mu_d$ ? Per quali valori del coefficiente di attrito statico,  $\mu_s$ , l'oggetto riprende a scivolare in discesa? Con quale velocità  $v_f$  ritorna al punto di partenza?

**Risposta.** Orientiamo per convenzione il segno positivo in salita. Le forze agenti sono la componente parallela della gravità,  $F_{g\parallel} = -mg \sin \theta$ , e la forza di attrito radente,  $F_{attr} = -\mu_d mg \cos \theta$  (entrambe con segno  $-$  poiché dirette in discesa). L'accelerazione totale è  $a = \frac{F_{g\parallel} + F_{attr}}{m} = -g(\sin \theta + \mu_d \cos \theta)$ .

Pertanto,  $\mu_d = -\frac{g \sin \theta + a}{g \cos \theta}$ . Ora, nel moto uniformemente decelerato (cioè

con  $a < 0$ ), sappiamo che la distanza di arresto è  $\Delta \ell = -\frac{v_0^2}{2a}$ , da cui

$a = -\frac{v_0^2}{2\Delta \ell} = -2.680$  m/s<sup>2</sup>. Quindi,  $\mu_d = 0.0150$ .

Nel punto in cui l'oggetto si arresta, entra in gioco l'attrito statico: se esso è sufficiente a contrastare  $F_{g\parallel}$ , l'oggetto resta fermo. Ciò avviene per  $\mu_s \geq \tan \theta = 0.268$ . Invece, per  $0.0150 \equiv \mu_d < \mu_s < 0.268$  l'oggetto scivola di nuovo in basso.

Il lavoro totale fatto dall'attrito radente è  $W_{attr} = -2 \Delta \ell (\mu_d mg \cos \theta)$ , ma  $\frac{m}{2}(v_f^2 - v_0^2) = W_{attr}$ , pertanto  $v_f^2 = v_0^2 - 4 \Delta \ell (\mu_d mg \cos \theta) = 1.6293$  m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>, ovvero  $v_f = 1.276$  m/s.

## Capitolo 13

# Forze conservative, energia potenziale

Abbiamo visto nella Sezione 12.2 che il lavoro  $\mathcal{W}$ , fatto su un oggetto da un sistema di forze di risultante  $\vec{\mathbf{F}}$ , produce una variazione di energia cinetica  $\Delta\mathcal{E}$ :

$$\mathcal{W} = \int \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \Delta\mathcal{E}$$

Ora immaginiamo di applicare dall'esterno una forza  $\vec{\mathbf{F}}^{est}$  su un sistema, contrastando una forza interna  $\vec{\mathbf{F}}^{int}$  del sistema, e producendo un lavoro  $\mathcal{W}^{est}$ . Facciamo alcuni esempi, per visualizzare la situazione:

- [1] una pallina si trova su una rotaia orizzontale, ferma, a contatto con una molla distesa orizzontalmente; applichiamo la forza  $\vec{\mathbf{F}}^{est}$  per spingere la pallina contro la molla, che quindi si comprime, e “resiste” alla nostra spinta con una forza elastica  $\vec{\mathbf{F}}^{int}$ ;
- [2] un'incudine si trova appoggiata sul pavimento, ferma; applichiamo una forza  $\vec{\mathbf{F}}^{est}$  per sollevarla ad una certa altezza, contrastando la forza  $\vec{\mathbf{F}}^{int}$  del sistema, che in questo caso è la forza di gravità;
- [3] uno scatolone di libri è appoggiato sul pavimento; lo spostiamo applicando una forza  $\vec{\mathbf{F}}^{est}$ , facendolo strisciare, e vincendo quindi la forza di attrito radente  $\vec{\mathbf{F}}^{int}$ .

In tutti e 3 i casi, la forza applicata  $\vec{\mathbf{F}}^{est}$  è associata ad uno spostamento, dunque compie un lavoro  $\mathcal{W}^{est}$ . Però, in tutti i casi, l'oggetto era fermo prima, ed è fermo dopo, dunque  $\Delta\mathcal{E} = 0$ : il lavoro esterno  $\mathcal{W}^{est}$  non ha prodotto variazione di energia cinetica. Ovviamente perché c'è anche il

lavoro  $\mathcal{W}^{int}$  della forza interna  $\vec{F}^{int}$ : se  $\Delta\mathcal{E} = 0$ , deve in qualche modo essere  $\mathcal{W}^{est} = -\mathcal{W}^{int}$ .

La domanda è: dov'è andata l'energia spesa per compiere il lavoro esterno  $\mathcal{W}^{est}$ ? È andata persa? O è stata immagazzinata, e può essere in qualche modo recuperata?

Nei casi [1] e [2], possiamo intuire che, non appena la forza esterna cessa di agire, quella interna non è più contrastata e quindi può mettere in moto l'oggetto. La molla si estende e spara la pallina; la gravità fa cadere l'incudine. In entrambi i casi, l'oggetto acquisisce energia cinetica  $\mathcal{E}$ . Se osservassimo che l'energia cinetica finale fosse pari al lavoro fatto dall'esterno ( $\mathcal{E} = \mathcal{W}^{est}$  ?) potremmo dire che l'energia spesa per fare il lavoro esterno, che non si manifestava subito in modo “visibile”, era in realtà immagazzinata nel sistema in una forma diversa, e si è poi manifestata non appena le condizioni lo hanno reso possibile. Questa forma di energia “immagazzinata” si chiama *energia potenziale*. L'energia dunque non è andata persa, *si è conservata*.

Nel caso [3] la situazione è molto diversa: sappiamo per esperienza che quando smettiamo di spingere, lo scatolone non comincia a muoversi da solo: rimane lì fermo. Dunque l'energia spesa per compiere il lavoro esterno non è più recuperabile. Non è stata immagazzinata da nessuna parte. Un esame attento mostrerebbe che per attrito le superfici a contatto dello scatolone e del pavimento si sono scaldate, e che l'aumento di temperatura è proporzionale al lavoro fatto dall'esterno. Dunque l'energia si è trasformata in un'altra forma, che chiameremmo energia termica. Ma questa non è più recuperabile in forma di energia cinetica <sup>[1]</sup>.

Questi esempi ci consentono di trarre alcune conclusioni. Non tutte le forze interne si comportano allo stesso modo. Alcune forze (nei nostri esempi, la gravità e la forza elastica di una molla) consentono di accumulare *energia potenziale*, e si chiamano dunque *forze conservative*. Altre forze (come l'attrito) non hanno questa proprietà e si chiamano *forze dissipative*.

E ora, formalizziamo il problema in maniera generale e quantitativa.

---

<sup>1</sup> Almeno non lo è completamente. Uno potrebbe immaginare di sfruttare l'aumento di temperatura per mettere in moto una qualche macchina termica da cui ricavare un lavoro che rimette in moto lo scatolone. Qui ci stiamo addentrando nella *Termodinamica*, che è un vasto capitolo della Fisica che non possiamo approfondire qui. A questo livello vale la pena solo anticipare che esiste una legge fisica, nota come *Secondo Principio della Termodinamica*, che può essere enunciata in varie forme equivalenti, una delle quali dice in sostanza che, mentre è possibile convertire completamente un lavoro meccanico in energia termica, il processo inverso è possibile solo in parte: ci sarà sempre una parte di energia termica che non verrà riconvertita in lavoro.

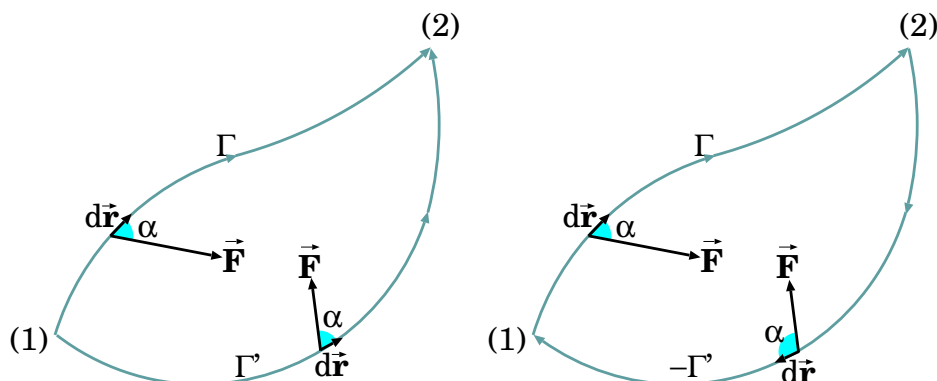


Figura 13.1: Il lavoro di una forza conservativa dipende dagli estremi (1) e (2) ma non dal percorso:  $\int_{\Gamma} d\vec{r} \cdot \vec{F} = \int_{\Gamma'} d\vec{r} \cdot \vec{F}$ . Invertendo l'orientamento di  $\Gamma'$  Otteniamo una linea chiusa  $\Gamma \cup (-\Gamma')$  lungo la quale il lavoro è nullo:  $\oint d\vec{r} \cdot \vec{F} = 0$ .

## 13.1 Forze conservative

Consideriamo un *campo di forza*

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$$

e calcoliamo il lavoro  $\mathcal{W} = \int d\vec{r} \cdot \vec{F}$  lungo un percorso da una posizione (1) a una posizione (2). Abbiamo già discusso (Sezione 12.1) che in generale il lavoro dipende dal percorso, ovvero  $\int_{\Gamma} d\vec{r} \cdot \vec{F} \neq \int_{\Gamma'} d\vec{r} \cdot \vec{F}$ .

Ci sono tuttavia importanti casi di campi di forze in cui il lavoro calcolato dalla posizione (1) alla posizione (2) non dipende dal cammino percorso  $\Gamma$ . In tal caso si parla di *forze conservative* — la ragione di questo nome sarà chiara a breve. In tal caso quindi

$$\int_{\Gamma} d\vec{r} \cdot \vec{F} = \int_{\Gamma'} d\vec{r} \cdot \vec{F} = \int_{(1)}^{(2)} d\vec{r} \cdot \vec{F} \quad (\text{forze conservative}) \quad (13.1)$$

(vd Fig. 13.1). Nell'ultimo membro dell'equazione il segno di integrale non viene scritto con la curva ( $\Gamma$  o  $\Gamma'$ ) bensì con gli estremi ( $\int_{(1)}^{(2)}$ ), ad indicare che sono l'unica informazione rilevante ai fini del calcolo.

Sempre con riferimento alla Fig. 13.1, notiamo che invertendo l'orientamento della curva  $\Gamma'$  lo spostamento  $d\vec{r}$  lungo di essa cambia segno,

per cui la stessa cosa succede anche al lavoro elementare:  $\delta\mathcal{W} \rightarrow -\delta\mathcal{W}$  <sup>[2]</sup>.  
Integrando su tutto il percorso:

$$\int_{-\Gamma'} d\vec{r} \cdot \vec{F} = - \int_{\Gamma} d\vec{r} \cdot \vec{F}$$

Ora l'unione delle due curve  $\Gamma$  e  $-\Gamma'$  forma un percorso chiuso  $\Gamma \cup (-\Gamma')$ :  
dall'Eq. (13.1) troviamo

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma} d\vec{r} \cdot \vec{F} - \int_{\Gamma'} d\vec{r} \cdot \vec{F} = \int_{\Gamma} d\vec{r} \cdot \vec{F} + \int_{-\Gamma'} d\vec{r} \cdot \vec{F} \\ &= \int_{\Gamma \cup (-\Gamma')} d\vec{r} \cdot \vec{F} \end{aligned}$$

*Il lavoro di una forza conservativa lungo un percorso chiuso è sempre nullo.*

L'integrale di un vettore lungo un percorso chiuso si chiama *circuitazione*,  
e si indica con  $\oint$ . Pertanto il risultato trovato si può scrivere come:

$$\oint d\vec{r} \cdot \vec{F} = 0 \quad (\text{forze conservative}) \quad (13.2)$$

L'argomento può essere anche rovesciato. Se una forza è tale che per ogni  
percorso chiuso  $\oint d\vec{r} \cdot \vec{F} = 0$ , allora lungo un qualunque percorso aperto  $\Gamma$  il  
suo lavoro  $\int_{\Gamma} d\vec{r} \cdot \vec{F}$  non dipende dal percorso, ma solo dagli estremi, dunque  
la forza è conservativa.

## 13.2 Definizione dell'energia potenziale

Dato un campo di forza  $\vec{F}(\vec{r})$  *conservativo*, e scelto un punto di riferimento  
 $Q$ , si definisce l'energia potenziale  $\mathcal{U}(A)$  di un generico punto  $A$  come “meno”  
il lavoro fatto da  $\vec{F}(\vec{r})$  lungo un percorso da  $Q$  ad  $A$  <sup>[3]</sup>:

$$\mathcal{U}(A) = - \int_Q^A d\vec{r} \cdot \vec{F} \quad (\text{forze conservative}) \quad (13.3)$$

<sup>2</sup> Questo discorso funziona solo se  $\vec{F}$  non dipende dal movimento. Per i campi di  
forze,  $\vec{F} \equiv \vec{F}(\vec{r})$ , che non dipende dall'orientamento di  $d\vec{r}$ . Per le forze magnetiche  $\vec{F}_L =$   
 $q\vec{v} \times \vec{B}$ , pertanto invertire il movimento produce un'inversione di  $\vec{F}_L$ , ma “fortunatamente”  
 $\vec{F}_L \cdot d\vec{r} = 0$  sempre, quindi il problema non si pone. Un altro contro-esempio: le forze di  
attrito sono sempre  $\vec{F}_{attr} \propto -d\vec{r}$ ; anche in questo caso, invertire il moto significa invertire  
la forza, e  $\vec{F}_{attr} \cdot d\vec{r} < 0$  sempre. Quindi in questo caso  $\int_{-\Gamma'} d\vec{r} \cdot \vec{F} \neq - \int_{\Gamma} d\vec{r} \cdot \vec{F}$ , e tutto  
il ragionamento salta!

<sup>3</sup> L'introduzione del segno “-” può apparire bizzarra, ma è lì per ottimi motivi, come  
vedremo...



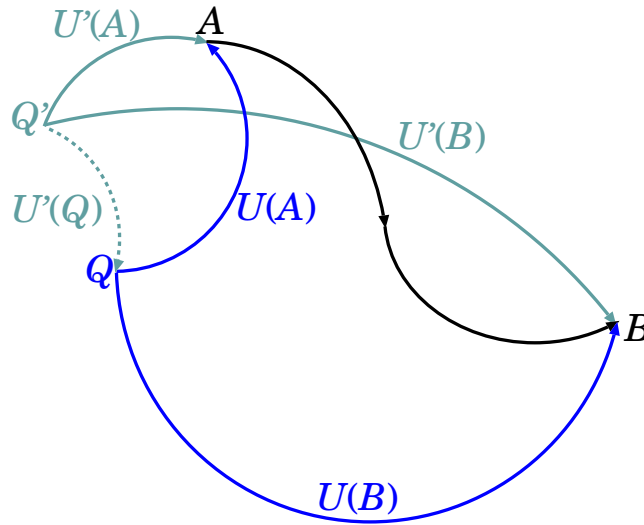


Figura 13.2: Definizione di energia potenziale: dato un punto di riferimento  $Q$  si definisce  $\mathcal{U}(A) = -\int_Q^A d\vec{r} \cdot \vec{F}$ . Cambiando riferimento in  $Q'$ , si ottiene una nuova definizione  $\mathcal{U}'(A) = -\int_{Q'}^A d\vec{r} \cdot \vec{F}$ , legata alla precedente da  $\mathcal{U}'(A) = \mathcal{U}(A) + \mathcal{U}'(Q)$ . Il lavoro da  $A$  a  $B$  si può scrivere come  $\mathcal{W}(A \rightarrow B) = \mathcal{U}(A) - \mathcal{U}(B)$ .

Nell'integrale solo gli estremi  $Q, A$  sono specificati, poiché il percorso è indifferente.

Il punto  $Q$  ha per convenzione energia potenziale nulla.

Date due generiche posizioni  $A, B$  nello spazio, il lavoro da  $A$  a  $B$  può essere calcolato lungo un qualunque percorso, poiché la forza  $\vec{F}$  è conservativa. Pertanto si può scegliere un percorso che passi per  $Q$  (vd Fig. 13.2):

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(A \rightarrow B) &= \int_A^Q d\vec{r} \cdot \vec{F} + \int_Q^B d\vec{r} \cdot \vec{F} \\ &= -\int_Q^A d\vec{r} \cdot \vec{F} + \int_Q^B d\vec{r} \cdot \vec{F} \\ &= \mathcal{U}(A) - \mathcal{U}(B) \end{aligned}$$

ovvero:

$$\mathcal{W}(A \rightarrow B) = \mathcal{U}(A) - \mathcal{U}(B) = -\Delta\mathcal{U} \quad (\text{forze conservative}) \quad (13.4)$$

### 13.2.1 Riferimento — o “zero” — dell’energia potenziale

La scelta del riferimento  $Q$  è arbitraria<sup>[4]</sup>. Modificando il punto di riferimento da  $Q$  a  $Q'$  (vd Fig. 13.2), ovviamente anche la definizione di energia potenziale cambia:

$$\mathcal{U}'(A) = - \int_{Q'}^A d\vec{r} \cdot \vec{F} \quad (13.5)$$

La relazione fra le due definizioni  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{U}'$  è però semplice: se consideriamo infatti un percorso da  $Q'$  a  $A$  che passi per  $Q$  troviamo:

$$\mathcal{U}'(A) = - \int_{Q'}^A d\vec{r} \cdot \vec{F} = - \int_{Q'}^Q d\vec{r} \cdot \vec{F} - \int_Q^A d\vec{r} \cdot \vec{F} = \mathcal{U}'(Q) + \mathcal{U}(A)$$

quindi una ridefinizione del riferimento modifica l’energia potenziale per una costante additiva:

$$\mathcal{U}'(A) = \mathcal{U}(A) + \mathcal{U}'(Q) \quad (13.6)$$

*L’energia potenziale è sempre definita a meno di una costante additiva arbitraria.*

Si noti che l’Eq. (13.4):

$$\mathcal{W}(A \rightarrow B) = \mathcal{U}(A) - \mathcal{U}(B)$$

è valida per qualunque scelta del riferimento: se usiamo un riferimento  $Q'$  e quindi una definizione  $\mathcal{U}'$  di energia potenziale, come in Eq. (13.5), i termini aggiuntivi  $\mathcal{U}'(Q)$  che compaiono in Eq. (13.6) si elidono per differenza. Questo risultato non è inatteso: il lavoro da  $A$  a  $B$  non deve dipendere dalla scelta di  $Q$ .

## 13.3 Energia meccanica

Per un oggetto che si muove soggetto a forze conservative si definisce l’*energia meccanica* come la *somma di energia cinetica ed energia potenziale*:

$$E = \mathcal{E} + \mathcal{U} = \frac{m}{2}v^2 + \mathcal{U}(\vec{r}) \quad (13.7)$$

dove l’ultima forma ci ricorda che l’energia cinetica  $\mathcal{E} = \frac{1}{2}mv^2$  dipende solo dal moto dell’oggetto, mentre l’energia potenziale  $\mathcal{U}(\vec{r})$  dipende solo dalla sua posizione.

<sup>4</sup> Una consuetudine, quando possibile, è di scegliere il riferimento  $Q$  in un punto dove la forza conservativa sia nulla. Non sempre ciò è fattibile. . .

Unendo i risultati di Eq. (12.9) e Eq. (13.4), che qui riportiamo insieme:

$$\mathcal{W} = \Delta\mathcal{E} \quad ; \quad \mathcal{W} = -\Delta\mathcal{U}$$

otteniamo la *legge di conservazione dell'energia meccanica*:

$$\Delta E = \Delta(\mathcal{E} + \mathcal{U}) = 0 \quad (13.8)$$

*Il moto di un oggetto su cui agiscono solo forze conservative è tale da conservare l'energia meccanica, pari alla somma di energia cinetica ed energia potenziale.* (Ora finalmente è chiaro il motivo del nome “forze conservative”).

## 13.4 Regione cinematicamente accessibile

Per campi di forze conservative l'energia meccanica  $E$  è una costante del moto. Inoltre sappiamo che  $\mathcal{E} \geq 0$  sempre, e  $\mathcal{E} = E - \mathcal{U}(\vec{r})$ . Quindi possiamo scrivere la seguente disuguaglianza:

$$\mathcal{U}(\vec{r}) \leq E \quad (13.9)$$

Questa disequazione, oltre che esprimere una relazione fra energia potenziale ed energia meccanica, può essere letta come una condizione che definisce la *regione accessibile cinematicamente*.

La situazione è illustrata in Fig. 13.3: tutti i punti  $\vec{r}$  in cui  $\mathcal{U}(\vec{r}) > E$  sono proibiti. Le regioni in cui  $\mathcal{U}(\vec{r}) \leq E$  sono tutte cinematicamente permesse. Nel caso a sinistra, solo una regione è effettivamente percorsa (quella con colore uniforme): se l'oggetto vi si trova all'istante iniziale, resta confinato lì per sempre. Altre regioni con  $\mathcal{U}(\vec{r}) \leq E$  (come quella tratteggiata) restano inaccessibili, perché separate da una “barriera di energia potenziale”. Nel caso a destra, si vede che il moto è confinato per valori bassi di energia meccanica, ma può deconfinarsi per valori più alti.

## 13.5 Lavoro di forze “esterne”

Ora consideriamo la nostra “sonda”, soggetta ad un campo di forze conservative  $\vec{F}^{cons}$ , e supponiamo di applicare anche una forza “esterna”  $\vec{F}^{est}$ . Quando la sonda si sposta da un punto  $A$  a un punto  $B$ , la sua energia potenziale subisce una variazione pari a:

$$\Delta\mathcal{U} = \mathcal{U}(B) - \mathcal{U}(A) = -\mathcal{W}^{cons}(A \rightarrow B) = -\int_A^B d\vec{r} \cdot \vec{F}^{cons}$$

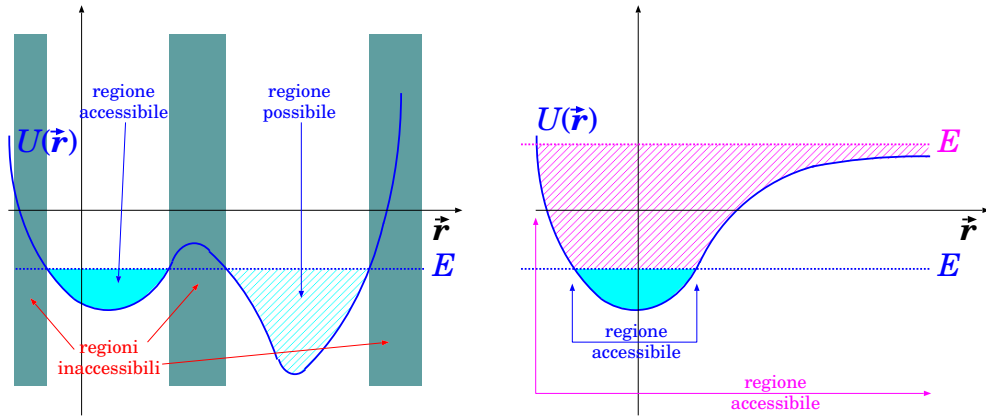


Figura 13.3: *Regione cinematicamente accessibile al moto: solo i valori di  $\vec{r}$  tali che  $U(\vec{r}) \leq E$  sono ammessi (in figura l'asse orizzontale rappresenta tutto lo spazio tri-dimensionale, anche se per esigenze grafiche appare come uni-dimensionale). A sinistra: due regioni sono cinematicamente permesse, ma non si può passare dall'una all'altra. A destra: per valori bassi dell'energia meccanica il moto è confinato (sistema legato); per valori più alti il moto può raggiungere distanze infinite (sistema non legato).*

(vd Eq. (13.4)). Invece, la variazione dell'energia cinetica è data dal lavoro *totale*, delle forze conservative e di quelle esterne:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E} &= \mathcal{W} \\ &= \int (\vec{F}^{cons} + \vec{F}^{est}) \cdot d\vec{r} = \int \vec{F}^{cons} \cdot d\vec{r} + \int \vec{F}^{est} \cdot d\vec{r} \\ &= \mathcal{W}^{cons} + \mathcal{W}^{est} \end{aligned} \quad (13.10)$$

Per cominciare, possiamo pensare di regolare  $\vec{F}^{est}$  in modo che la sonda in  $A$  sia ferma, e che arrivata in  $B$  sia di nuovo ferma. Pertanto la sua energia cinetica alla fine non è cambiata:  $\Delta \mathcal{E} = 0$ . Il lavoro totale di tutte le forze ( $\vec{F}^{cons}$  e  $\vec{F}^{est}$ ) deve quindi essere nullo, ovvero

$$\mathcal{W}^{est}(A \rightarrow B) = -\mathcal{W}^{cons}(A \rightarrow B) \quad (\text{se } \Delta \mathcal{E} = 0) \quad (13.11)$$

Dov'è andato il lavoro  $\mathcal{W}^{est}$  fatto dalle forze esterne? È stato “speso” per contrastare le forze conservative, ok... Può essere “recuperato”?

L'Eq. (13.11) ci fornisce la risposta. Infatti essa dà:

$$\mathcal{W}^{est}(A \rightarrow B) = \Delta \mathcal{U} = U(B) - U(A) \quad (\text{se } \Delta \mathcal{E} = 0) \quad (13.12)$$

Quindi il lavoro delle forze esterne è stato “immagazzinato nel campo di forze” in forma di energia potenziale,  $\Delta\mathcal{U}$ . Successivamente questa può essere restituita in forma di energia cinetica, dalle forze conservative,  $\Delta\mathcal{E} = -\Delta\mathcal{U}$ .

Analizziamo ora il caso generale, di una sonda su cui agiscono sia forze conservative, con risultante  $\vec{\mathbf{F}}^{cons}$ , sia altre forze “esterne”, con risultante  $\vec{\mathbf{F}}^{est}$ , non necessariamente conservative. Per le forze conservative possiamo scrivere il lavoro come variazione di energia potenziale:  $\mathcal{W}^{cons} = -\Delta\mathcal{U}$ . Pertanto:

$$\mathcal{W} = -\Delta\mathcal{U} + \mathcal{W}^{est} \quad (13.13)$$

L’energia cinetica subisce una variazione

$$\Delta\mathcal{E} = \mathcal{W} = -\Delta\mathcal{U} + \mathcal{W}^{est} \quad (13.14)$$

La variazione di energia meccanica  $E = \mathcal{E} + \mathcal{U}$  è quindi esprimibile come  $\Delta E = \Delta\mathcal{E} + \Delta\mathcal{U}$ , ovvero:

$$\Delta E = \mathcal{W}^{est} = \int \vec{\mathbf{F}}^{est} \cdot d\vec{\mathbf{r}} \quad (13.15)$$

Riassumendo: *il lavoro di forze “esterne” — ovvero non associabili all’energia potenziale — produce una variazione dell’energia meccanica.*

## 13.6 Energia potenziale di un campo di forza uniforme

L’esempio più semplice di campo di forza conservativo è il campo di forza uniforme:  $\vec{\mathbf{F}}$  è uguale in direzione ed intensità in tutti i punti dello spazio.

In questo caso, il lavoro da un punto  $A$  a un punto  $B$  è semplicemente

$$\mathcal{W}(A \rightarrow B) = \int_A^B \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \left( \int_A^B d\vec{\mathbf{r}} \right) = \vec{\mathbf{F}} \cdot (\vec{\mathbf{r}}_B - \vec{\mathbf{r}}_A)$$

(spiegazione: essendo  $\vec{\mathbf{F}}$  indipendente da  $\vec{\mathbf{r}}$ , può essere fattorizzato al di fuori dell’integrale; poi,  $\int_A^B d\vec{\mathbf{r}}$  è semplicemente una successione di spostamenti infinitesimi contigui  $d\vec{\mathbf{r}}$  da  $A$  fino a  $B$ , il cui effetto totale è lo spostamento da  $A$  a  $B$ , descritto dal vettore  $\vec{\mathbf{r}}_B - \vec{\mathbf{r}}_A$ ).

Una possibile scelta di energia potenziale può semplicemente essere:

$$\mathcal{U}(\vec{\mathbf{r}}) = -\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{r}} \quad (\text{campo di forza uniforme}) \quad (13.16)$$

che soddisfa la relazione  $\mathcal{W}(A \rightarrow B) = \mathcal{U}(\vec{\mathbf{r}}_A) - \mathcal{U}(\vec{\mathbf{r}}_B)$ .

### 13.6.1 Energia potenziale della forza-peso

In prossimità della superficie terrestre, una massa  $m$  sente un'attrazione gravitazionale

$$\vec{F}_g = -mg\hat{z} \quad (\text{forza-peso})$$

uniforme, con buona approssimazione. Applicando quanto detto nella sezione precedente (Eq. (13.16)), possiamo quindi introdurre l'*energia gravitazionale*:  $\mathcal{U}_g = -\vec{F}_g \cdot \vec{r} = mg\hat{z} \cdot \vec{r} = mgz$ , quindi

$$\mathcal{U}(\vec{r}) = mgz \quad (\text{forza-peso}) \quad (13.17)$$

Spesso si indica con  $h$  la quota (altezza) rispetto ad un dato riferimento, per cui la stessa formula si trova in molti testi nella forma

$$\mathcal{U}(\vec{r}) = mgh \quad (\text{forza-peso}) \quad (13.18)$$

## 13.7 Campi di forza centrali

Un campo di forza  $\vec{F}(\vec{r})$  si dice *centrale* se la sua dipendenza dalla posizione spaziale ha la forma:

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\hat{r} \quad \left( r \equiv |\vec{r}| \ ; \ \hat{r} \equiv \frac{\vec{r}}{r} \right) \quad (13.19)$$

*I campi di forza centrali sono sempre conservativi.*

Dimostriamolo. Anzitutto, cominciamo con il calcolo del lavoro elementare  $\delta\mathcal{W}$  per uno spostamento da  $\vec{r}$  a  $\vec{r} + d\vec{r}$ :

$$\delta\mathcal{W} = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F(r)\hat{r} \cdot d\vec{r} = \frac{F(r)}{r} \vec{r} \cdot d\vec{r}$$

Trattiamo il termine  $\vec{r} \cdot d\vec{r}$ :

$$\vec{r} \cdot d\vec{r} = x dx + y dy + z dz$$

Nella Sezione 12.2 abbiamo già visto come trattare forme differenziali del tipo  $A dA$ : sappiamo che  $A dA = \frac{1}{2}d(A^2)$  <sup>[5]</sup>. Quindi

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot d\vec{r} &= \frac{1}{2} (d(x^2) + d(y^2) + d(z^2)) \\ &= \frac{1}{2} d(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2} d(r^2) = r dr \end{aligned}$$

---

<sup>5</sup> Ricordiamo:  $\frac{d(A^2)}{dA} = 2A \implies A dA = \frac{1}{2}d(A^2)$

Pertanto si trova:

$$\delta\mathcal{W} = F(r)dr$$

È un risultato notevole! Il lavoro elementare dipende solo dalla distanza radiale  $r$  e dalla sua variazione  $dr$ , *non dalla direzione di  $d\vec{r}$* . La ragione sta proprio nella forma radiale del campo di forza. In effetti, il prodotto scalare  $\hat{r} \cdot d\vec{r}$  ha come effetto quello di proiettare lo spostamento vettoriale  $d\vec{r}$  sulla direzione radiale  $\hat{r}$ : la componente radiale di  $d\vec{r}$  è precisamente  $dr$ .

Pertanto, il calcolo del lavoro da (1) a (2) è:

$$\mathcal{W} = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} F(r)dr$$

che ovviamente non dipende dalla linea  $\Gamma$  ma solo dagli estremi (1) e (2) — anzi, solo dalle loro distanze radiali  $r_1, r_2$  dal centro.

Pertanto il campo di forza centrale è conservativo. L'energia potenziale può essere descritta partendo da una distanza di riferimento  $r_0$  dal centro, alla quale essa è convenzionalmente nulla. Allora, alla generica distanza  $r$  dal centro, essa deve valere:

$$\mathcal{U}(r) = - \int_{r_0}^r F(r')dr' \quad (13.20)$$

Si tratta di un integrale in una sola variabile: che sia calcolabile con una formula analitica o in maniera numerica dipende dalla forma di  $F(r)$ , poco importa: l'importante è che sia ben definito in modo non ambiguo.

### 13.7.1 Campi centrali $\propto \frac{1}{r^2}$

Un campo di forza gravitazionale generato da una massa puntiforme, oppure un campo di forza coulombiano generato da una carica puntiforme ferma, sono ottimi e notevoli esempi di campi di forza centrali: la loro forma è:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{K}{r^2} \hat{r} \quad (13.21)$$

(se si tratta di forza gravitazionale fra due masse  $m_1, m_2$ , allora  $K \equiv -Gm_1m_2$ ; se invece si tratta di forza elettrica coulombiana fra due cariche  $q_1, q_2$ , allora  $K \equiv \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0}$ ).

Per campi centrali  $\propto \frac{1}{r^2}$ , come quelli dell'Eq. (13.21), il riferimento dove  $\mathcal{U}(r_0) = 0$  viene scelto per  $r_0 \rightarrow +\infty$ . Allora

$$\mathcal{U}(r) = \int_r^{+\infty} \frac{K}{(r')^2} dr' = \left[ -\frac{K}{r'} \right]_r^{+\infty} = \frac{K}{r}$$

quindi:

$$\mathcal{U}(r) = \frac{K}{r} \quad (\text{campo centrale con } F(r) = \frac{K}{r^2}) \quad (13.22)$$

In particolare, l'energia potenziale fra due masse  $m_1$ ,  $m_2$  che si attraggono per gravità è:

$$\mathcal{U}_g(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r} \quad (\text{energia gravitazionale fra } m_1, m_2) \quad (13.23)$$

## 13.8 Combinazione di campi di forze conservative

Supponiamo che su un oggetto agiscano molti campi di forze conservative,  $\vec{F}_1(\vec{r}), \dots, \vec{F}_n(\vec{r})$ . La risultante delle forze sull'oggetto è  $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ . Vogliamo mostrare che

- anche il campo di forza risultante è conservativo;
- l'energia potenziale del campo di forza risultante è la somma delle energie potenziali dei singoli campi.

Infatti: essendo tutti i campi  $\vec{F}_i$  conservativi,  $\oint d\vec{r} \cdot \vec{F}_i = 0$  per qualunque  $i$ , pertanto:

$$\oint d\vec{r} \cdot \vec{F} = \oint d\vec{r} \cdot \left( \sum_i \vec{F}_i \right) = \sum_i \oint d\vec{r} \cdot \vec{F}_i = 0$$

Quindi anche  $\vec{F}$  è conservativo. Questo ci consente di definire in modo non ambiguo la sua energia potenziale rispetto a un riferimento  $Q$ :

$$\mathcal{U}(A) = - \int_Q^A \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Espandendo:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(A) &= - \int_Q^A \left( \sum_i \vec{F}_i(\vec{r}) \right) \cdot d\vec{r} \\ &= \sum_i \left( - \int_Q^A \vec{F}_i(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \right) = \sum_i \mathcal{U}_i(A) \end{aligned}$$



(come volevasi dimostrare) [6].

### 13.8.1 Energia potenziale gravitazionale

Abbiamo visto in Sezione 11.2.2 che una configurazione di  $N$  masse  $m_1, m_2, \dots, m_N$  poste in posizioni  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$  produce nello spazio un campo gravitazionale

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G \sum_k m_k \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^3}$$

Per quanto detto finora, una massa-sonda  $m_0$  in posizione  $\vec{r}$  sente una forza gravitazionale

$$\vec{F}_0 = m_0 \vec{g}(\vec{r}) = \sum_{k=1}^N \left[ -\frac{G m_0 m_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^3} (\vec{r} - \vec{r}_k) \right]$$

che deve essere conservativa, in quanto somma di forze conservative. L'energia potenziale è la somma di tutte le energie potenziali associate a ciascuna delle masse  $m_k$ . Ciascuna di queste vale:

$$\mathcal{U}_{0,k}(\vec{r}) = -G \frac{m_0 m_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|}$$

(vedi Eq. (13.23)), quindi

$$\mathcal{U}_0(\vec{r}) = -G m_0 \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \quad (13.24)$$

L'energia potenziale gravitazionale della massa-sonda è sempre proporzionale a  $m_0$ . Questo suggerisce di definire il *potenziale gravitazionale*  $\Phi_g(\vec{r})$

$$\Phi_g(\vec{r}) = -G \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \quad (13.25)$$

---

<sup>6</sup> Si poteva anche assumere che ciascun campo  $\vec{F}_i$  avesse un proprio riferimento  $Q_i$  per l'energia potenziale associata, cioè  $\mathcal{U}_i(A) = -\int_{Q_i}^A \vec{F}_i(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ . Il calcolo sarebbe stato solo leggermente più lungo, e sarebbe risultato in un'espressione:

$$\mathcal{U}(A) = \sum_i \mathcal{U}_i(A) - \underbrace{\sum_i \mathcal{U}_i(Q)}_{\text{costante}}$$

equivalente a quella trovata, a meno di una costante additiva.

in modo che per una qualunque massa-sonda  $m_0$  si abbia:

$$\mathcal{U}_0(\vec{r}) = m_0 \Phi_g(\vec{r}) \quad (13.26)$$

### 13.8.2 Energia potenziale elettrostatica

Possiamo ripetere il ragionamento tale e quale per le forze elettrostatiche. Una configurazione di  $N$  cariche  $q_1, q_2, \dots, q_N$ , ferme o in moto lento, poste in posizioni  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ , produce nello spazio un campo elettrostatico

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_k q_k \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^3}$$

Una carica-sonda  $q_0$  in posizione  $\vec{r}$  sente una forza elettrostatica

$$\vec{F}_0 = q_0 \vec{E}(\vec{r}) = \sum_{k=1}^N \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^3} (\vec{r} - \vec{r}_k) \right]$$

che deve essere conservativa, in quanto somma di forze conservative. L'energia potenziale è la somma di tutte le energie potenziali associate a ciascuna delle cariche  $q_k$ . Ciascuna di queste vale:

$$\mathcal{U}_{0,k}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|}$$

quindi

$$\mathcal{U}_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \quad (13.27)$$

L'energia potenziale elettrostatica della carica-sonda è sempre proporzionale a  $q_0$ . Questo suggerisce di definire il *potenziale elettrostatico*  $\Phi_e(\vec{r})$

$$\Phi_e(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \quad (13.28)$$

in modo che per una qualunque carica-sonda  $q_0$  si abbia:

$$\mathcal{U}_0(\vec{r}) = q_0 \Phi_e(\vec{r}) \quad (13.29)$$

## 13.9 Forza come “meno” gradiente dell’energia potenziale

Consideriamo un campo di forza conservativo  $\vec{F}(\vec{r})$  e due posizioni molto vicine,  $\vec{r}$  e  $\vec{r} + d\vec{r}$ . Il lavoro elementare fatto dalla forza nel percorso da  $\vec{r}$  a  $\vec{r} + d\vec{r}$  è

$$\delta\mathcal{W} = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \mathcal{U}(\vec{r}) - \mathcal{U}(\vec{r} + d\vec{r})$$

Lavoriamo su  $\mathcal{U}(\vec{r} + d\vec{r}) - \mathcal{U}(\vec{r})$ , scomponendo  $\vec{r}$  e  $d\vec{r}$  in componenti cartesiane:

$$\mathcal{U}(\vec{r} + d\vec{r}) - \mathcal{U}(\vec{r}) = \mathcal{U}(x + dx, y + dy, z + dz) - \mathcal{U}(x, y, z)$$

Ora sottraiamo e ri-aggiungiamo termini uguali, in modo da non modificare il valore dell’espressione:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\vec{r} + d\vec{r}) - \mathcal{U}(\vec{r}) &= [\mathcal{U}(x + dx, y + dy, z + dz) - \mathcal{U}(x + dx, y + dy, z)] \\ &+ [\mathcal{U}(x + dx, y + dy, z) - \mathcal{U}(x + dx, y, z)] \\ &+ [\mathcal{U}(x + dx, y, z) - \mathcal{U}(x, y, z)] \end{aligned}$$

Infine sfruttiamo la definizione di derivata:  $\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}$  applicata rispettivamente alle tre coordinate  $x, y, z$ . Poiché la funzione  $\mathcal{U}$  dipende da più variabili, si introduce il simbolo di *derivata parziale*  $\partial$ , per indicare che la variazione di  $\mathcal{U}$  avviene variando una sola delle coordinate alla volta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} &\equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\mathcal{U}(x + \Delta x, y, z) - \mathcal{U}(x, y, z)}{\Delta x} \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} &\equiv \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\mathcal{U}(x, y + \Delta y, z) - \mathcal{U}(x, y, z)}{\Delta y} \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z} &\equiv \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\mathcal{U}(x, y, z + \Delta z) - \mathcal{U}(x, y, z)}{\Delta z} \end{aligned} \tag{13.30}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(x + dx, y, z) - \mathcal{U}(x, y, z) &= \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} dx \\ \mathcal{U}(x + dx, y + dy, z) - \mathcal{U}(x + dx, y, z) &= \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} dy \\ \mathcal{U}(x + dx, y + dy, z + dz) - \mathcal{U}(x + dx, y + dy, z) &= \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z} dz \end{aligned}$$

e quindi

$$\mathcal{U}(\vec{r} + d\vec{r}) - \mathcal{U}(\vec{r}) = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z} dz$$

Le tre derivate parziali appena introdotte possono essere combinate in una quantità vettoriale, che si chiama *gradiente*:

$$\vec{\nabla} \mathcal{U} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z} \hat{z} \quad (13.31)$$

Ricapitolando quanto abbiamo trovato:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{W} &= \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ -\delta \mathcal{W} &= \mathcal{U}(\vec{r} + d\vec{r}) - \mathcal{U}(\vec{r}) \\ &= \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z} dz \\ &= \vec{\nabla} \mathcal{U} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

e per confronto:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} \mathcal{U} \quad (13.32)$$

Riassumendo: se la forza  $\vec{F}$  è conservativa, si può definire un'energia potenziale  $\mathcal{U}(\vec{r})$ , che è funzione della posizione. Il gradiente dell'energia potenziale, cambiato di segno, è pari alla forza.

Un esempio della relazione fra forza e energia potenziale è illustrato in Fig. 13.4 — per esigenza grafica lo spazio è supposto bidimensionale, e le coordinate sono  $x, y$ . Come si vede, la forza è sempre orientata verso energie potenziali decrescenti, lungo la massima pendenza; maggiore è la pendenza, più fitte sono le curve di livello dell'energia potenziale, più grande è l'intensità della forza.

**Esercizio 13.1.** Calcolare il campo di forza per ciascuna delle seguenti energie potenziali:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1(x, y, z) &= \alpha x + \beta y + \gamma z \\ \mathcal{U}_2(x, y, z) &= Ax^2 + Bxy + Cy^2 \\ \mathcal{U}_3(x, y, z) &= \frac{K}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{aligned}$$

**Soluzione.** Usiamo le formule  $F_x = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}$ ;  $F_y = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}$ ;  $F_z = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z}$ . Il primo caso è immediato:

$$F_{1,x} = -\alpha \quad ; \quad F_{1,y} = -\beta \quad ; \quad F_{1,z} = -\gamma \quad (\text{campo di forza uniforme})$$

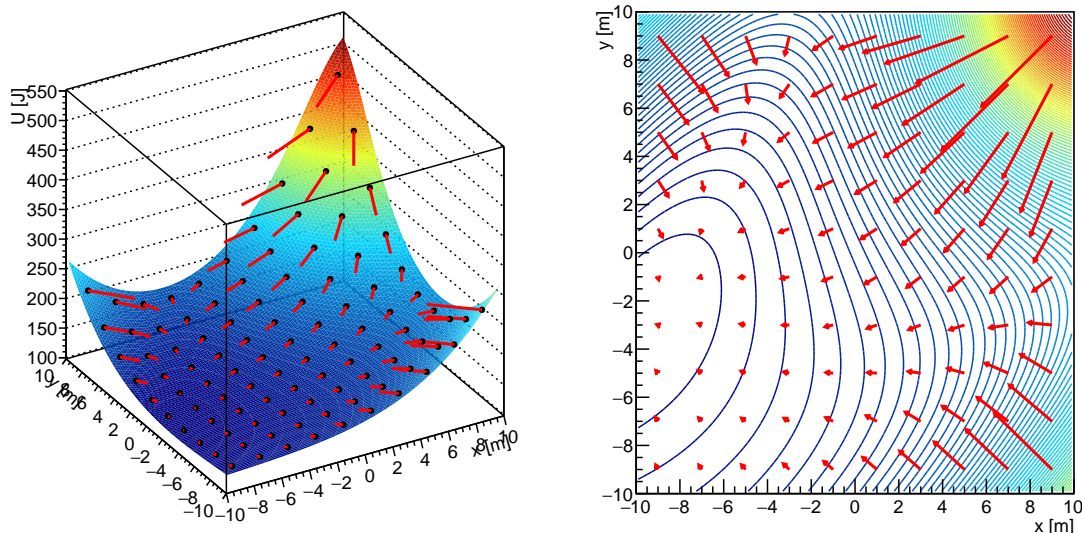


Figura 13.4: Esempio di grafico di un’energia potenziale  $U(x, y)$  e del campo di forza  $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ . L’energia potenziale è una quantità numerica, pertanto può essere rappresentata come “quota” in un grafico 3-dimensionale (a sinistra), o come mappa con curve di livello e “colori geografici” (a destra). Le curve di livello sono linee equipotenziali. La forza è un vettore, quindi ha un’intensità e una direzione, che vengono rappresentate in ogni punto da segmenti rossi.

Anche il secondo è semplice

$$F_{2,x} = -(2Ax + By) \quad ; \quad F_{2,y} = -(Bx + 2Cy) \quad ; \quad F_{2,z} = 0$$

Per calcolare il terzo inseriamo la variabile ausiliaria  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  — che altro non è se non la distanza dall’origine — cosicché  $U_3 = \frac{K}{r}$ . Ora calcoliamo

$$F_{3,x} = -\frac{\partial U_3}{\partial x} = -\frac{\partial U_3}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x}. \quad \text{Poi,} \quad \frac{\partial U_3}{\partial r} = -\frac{K}{r^2}; \quad \text{inoltre}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} 2x = \frac{x}{r}. \quad \text{Per le altre due coordinate si}$$

procede in modo analogo. Il risultato è

$$F_{3,x} = K \frac{x}{r^3} \quad ; \quad F_{3,y} = K \frac{y}{r^3} \quad ; \quad F_{3,z} = K \frac{z}{r^3}$$

Questa forma di campo di forza è MOLTO IMPORTANTE: è quella dei campi gravitazionali e dei campi elettrostatici.

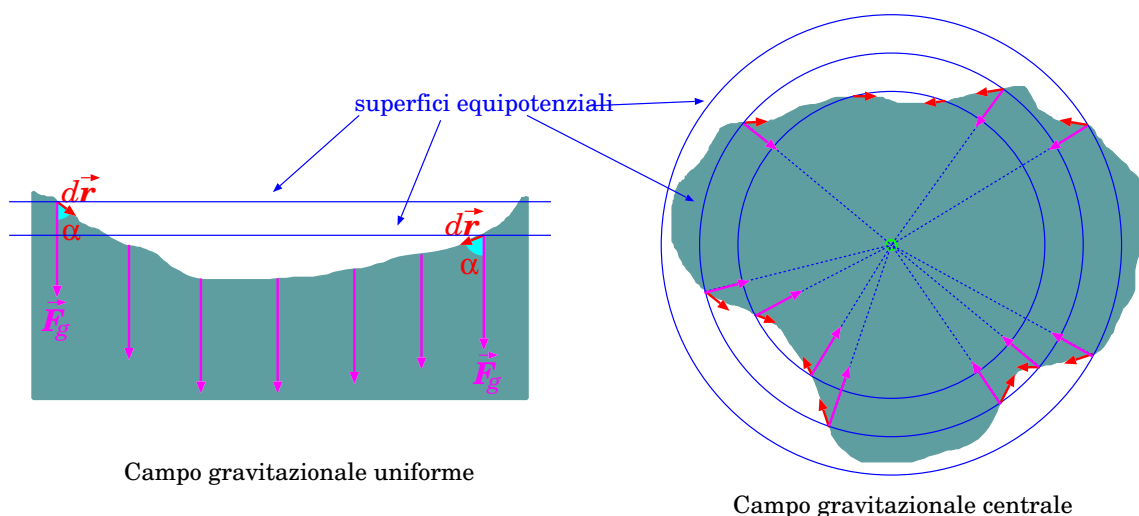


Figura 13.5: *Linee di forza e superfici equipotenziali per un campo gravitazionale uniforme (a sinistra) e centrale (a destra).*

## 13.10 Superfici equipotenziali

La condizione

$$U(\vec{r}) = K \quad (\text{costante})$$

individua una superficie nello spazio, detta *superficie equipotenziale*. In Fig. 13.4 (destra), le superfici equipotenziali sono rappresentate dalle curve di livello — la figura rappresenta uno spazio 2-D, pertanto le equipotenziali sono curve; in 3-D ovviamente sono superfici.

Alcune caratteristiche delle superfici equipotenziali:

- il lavoro fra due punti di una stessa superficie equipotenziale è nullo;
- il lavoro fra due punti appartenenti a due superfici equipotenziali distinte dipende solo da tali superfici — non dai punti specifici;
- la forza  $\vec{F}$  è sempre ortogonale a tutte le superfici equipotenziali — infatti qualunque spostamento  $d\vec{r}$  che giace su una superficie equipotenziale deve essere tale che  $0 = \delta\mathcal{W} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ .

### Forma degli oggetti astrofisici

*Perché gli oggetti astrofisici sono (approssimativamente) sferici? In breve: per la stessa ragione per cui i rilievi sulla Terra tendono ad appiattirsi.*

Se la forza dominante è quella gravitazionale, il suo effetto tende a far diminuire l'energia potenziale. Infatti,  $d\mathcal{U} = -\vec{F}_g \cdot d\vec{r}$ . Un qualunque oggetto, posto in quiete su una superficie, tende a franare tirato dalla gravità. Detto  $d\vec{r}$  il suo spostamento,  $\vec{F}_g \cdot d\vec{r} = F_g ds \cos \alpha$ . Nella frana,  $\alpha < \pi/2$  (vd Fig. 13.5), quindi  $\cos \alpha > 0$ . Ne segue che  $d\mathcal{U} < 0$  per qualunque oggetto che frani. La condizione più stabile è quella in cui la superficie è ovunque ortogonale alle linee di forza, per cui  $\alpha = \pi/2$ ,  $d\mathcal{U} = 0$ , e non è più possibile franare ulteriormente. Una superficie ovunque ortogonale alle linee di forza è una superficie equipotenziale.

In prossimità della superficie terrestre,  $\vec{F}_g$  è verticale e diretto verso il basso, mentre le superfici equipotenziali sono piani orizzontali, come in Fig. 13.5 (sinistra). Pertanto, le “frane” tendono a livellare il terreno, rendendolo orizzontale.

Un oggetto astrofisico, per fissare le idee di dimensioni planetarie o maggiori, genera un campo gravitazionale sostanzialmente centrale, quindi le superfici equipotenziali sono sostanzialmente sferiche, come in Fig. 13.5 (destra). In questo caso le “frane” tendono ad abbassare le parti più prominenti (montagne), trasferendo materiale negli avvallamenti. Il processo si stabilizza quando l'oggetto astrofisico ha assunto una forma approssimativamente sferica.

In oggetti di dimensioni sub-planetarie, le forze di coesione sono competitive con la gravità. Se la massa dell'oggetto non è sufficientemente grande, e i materiali sono molto coesi, la gravità risulta troppo debole per sfericizzare l'oggetto — è quello che succede per esempio per gli asteroidi. Tipicamente, un oggetto celeste assume forma sferica quando il suo diametro è alcune centinaia di km. L'oggetto celeste sferico più piccolo, osservato nel Sistema Solare, è Mimas, un satellite di Saturno, con un diametro di 396 km. Esistono tuttavia oggetti più grandi ma non sferici: per esempio Vesta, nella fascia di asteroidi, ha una forma irregolare, con l'asse massimo di 580 km e quello minimo di 460 km. Cerere, l'oggetto più grande della fascia di asteroidi, è l'unico di forma sferica, con un diametro di 946 km. Altri oggetti sferici relativamente “piccoli” nel Sistema Solare sono Plutone (diametro 2376 km), il suo satellite principale Caronte (diametro 1212 km), la nostra Luna (diametro 3474 km).

### 13.10.1 Un criterio per stabilire se una forza è conservativa (\*)

Per concludere questo argomento, diamo infine un criterio per verificare se un campo di forza  $\vec{F}(\vec{r})$  è conservativo.

Se lo è, allora è possibile definire un'energia potenziale  $\mathcal{U}(\vec{r})$  tale che

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\mathcal{U}$$

Se ciò è vero, allora, sfruttando la proprietà di commutazione delle derivate parziali:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{U} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{U} \implies \frac{\partial}{\partial x} F_y = \frac{\partial}{\partial y} F_x \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{U} &= \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{U} \implies \frac{\partial}{\partial y} F_z = \frac{\partial}{\partial z} F_y \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{U} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{U} \implies \frac{\partial}{\partial z} F_x = \frac{\partial}{\partial x} F_z\end{aligned}$$

Quindi:

$$\vec{F} \text{ conservativa} \quad \begin{matrix} \implies \\ (\iff) \end{matrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y} \\ \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \end{array} \right. \quad (13.33)$$

Nota: l'implicazione  $\implies$  è sempre valida. A rigore, l'implicazione logica inversa  $\impliedby$  non è vera in generale: occorre che lo spazio 3-dimensionale (“dominio”) in cui è definito  $\vec{F}(\vec{r})$  sia *semplicemente connesso* (vd Fig. 13.6), ovvero tale che:

- ogni coppia di punti del dominio deve potersi connettere con una linea continua interamente contenuta nel dominio;
- qualunque linea chiusa contenuta nel dominio, e passante per un punto fissato, deve potersi ridurre con continuità ad un punto, rimanendo sempre contenuta nel dominio.

(Per esempio, lo spazio 3-dimensionale è semplicemente connesso; lo spazio 3-dimensionale privato di alcuni punti isolati è semplicemente connesso; lo spazio 3-dimensionale privato di una o più linee rette *non* è semplicemente connesso, perché qualunque linea chiusa che circonda la linea retta esclusa non può essere ridotta ad un punto senza “attraversare” la retta esclusa.)

**Esercizio 13.2.** Consideriamo un campo di forze della forma  $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r} \times \vec{A}$ , dove  $\vec{A}$  è una quantità vettoriale che non dipende da  $\vec{r}$ . È un campo di forza conservativo?

**Risposta.** Scegliamo un riferimento cartesiano con l'asse  $\hat{z}$  parallelo ad  $\vec{A}$ . Così facendo, in coordinate cartesiane  $\vec{A} \equiv (0, 0, A)$ . Le componenti cartesiane di



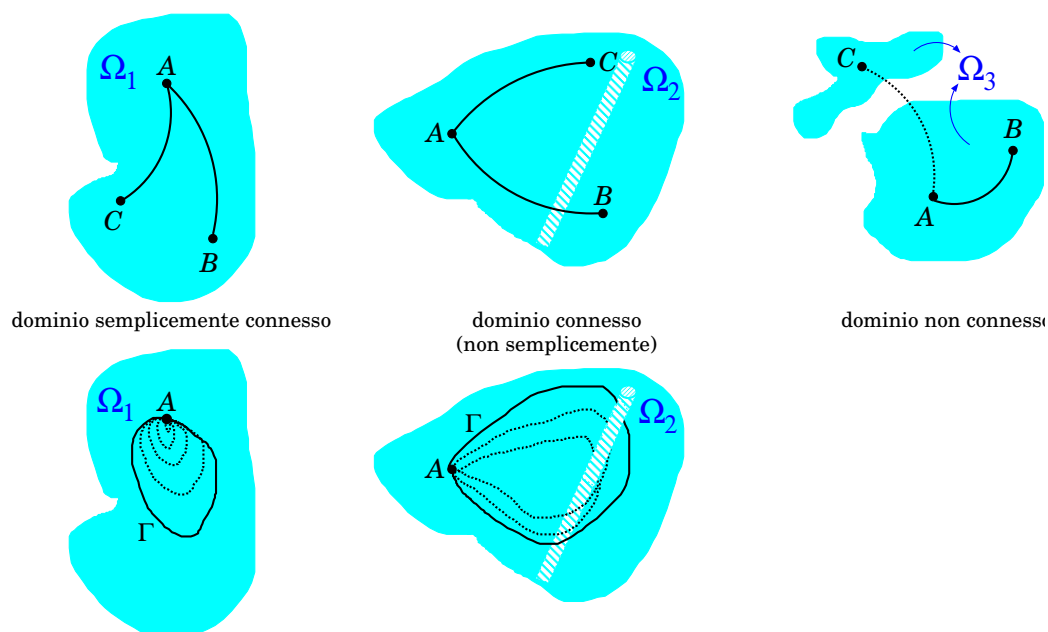


Figura 13.6: Esempi di domini connessi e semplicemente connessi. I domini  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  sono connessi, mentre  $\Omega_3$  non è connesso. Inoltre,  $\Omega_1$  è semplicemente connesso, mentre  $\Omega_2$  non lo è (a causa del “carotaggio” che impedisce di ridurre la linea chiusa  $\Gamma$  a un punto senza uscire dal dominio stesso).

$\vec{F}$  sono

$$\begin{aligned} F_x &= A_y z - A_z y = -Ay \\ F_y &= A_z x - A_x z = Ax \\ F_z &= A_x y - A_y x = 0 \end{aligned}$$

Allora:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_y}{\partial x} &= A & ; & & \frac{\partial F_x}{\partial y} &= -A \\ \frac{\partial F_z}{\partial y} &= 0 & ; & & \frac{\partial F_y}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} &= 0 & ; & & \frac{\partial F_z}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

quindi una delle tre condizioni dell'Eq. (13.33) (la prima) non è soddisfatta: il campo pertanto non è conservativo.

**Esercizio 13.3.** *Un campo di forza*

$$\begin{aligned} F_x &= -A \frac{y}{\rho^2} \\ F_y &= A \frac{x}{\rho^2} & ; & \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ F_z &= B \end{aligned}$$

*è conservativo?*

**Risposta.** *La risposta è NO. Vediamo perché. Anzitutto,  $\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0$  e  $\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} = 0$ . Poi:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_x}{\partial y} &= -A \left( \frac{1}{\rho^2} - \frac{y}{\rho^4} \frac{\partial \rho^2}{\partial y} \right) = -A \left( \frac{1}{\rho^2} - \frac{y}{\rho^4} 2y \right) = -A \frac{x^2 - y^2}{\rho^4} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} &= A \left( \frac{1}{\rho^2} - \frac{x}{\rho^4} \frac{\partial \rho^2}{\partial x} \right) = A \left( \frac{1}{\rho^2} - \frac{x}{\rho^4} 2x \right) = A \frac{y^2 - x^2}{\rho^4} \end{aligned}$$

*Quindi anche  $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$ .*

*Però, il dominio NON è semplicemente connesso: infatti la retta  $x = 0; y = 0$  (cioè l'asse  $z$ ) è esclusa dal dominio, essendo  $\vec{F}$  non definibile su di essa.*

*Per mostrare in modo diverso che  $\vec{F}$  non è conservativa si può procedere calcolando  $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$  su una circonferenza di raggio  $\rho$  intorno all'asse  $z$ . Allora  $\vec{r} \equiv (x, y) \equiv \rho(\cos \phi, \sin \phi)$ ; facendo la variazione infinitesima,  $d\vec{r} \equiv \rho(-\sin \phi, \cos \phi)d\phi$ . Quindi*

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= F_x dx + F_y dy = \left( -A \frac{y}{\rho^2} \right) (-\rho \sin \phi d\phi) + \left( A \frac{x}{\rho^2} \right) (\rho \cos \phi d\phi) \\ &= A(\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) d\phi = A d\phi \\ \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} &= 2\pi A \neq 0 \end{aligned}$$

**Esercizio 13.4.** *Consideriamo un campo di forza le cui componenti cartesiane sono*

$$\begin{aligned} F_x &= k(x - y) \\ F_y &= k(y - x) \\ F_z &= -2kz \end{aligned}$$

*È conservativo? Se sì costruire un'energia potenziale.*

**Risposta.** Calcoliamo le derivate parziali:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_y}{\partial x} &= -k & ; & & \frac{\partial F_x}{\partial y} &= -k \\ \frac{\partial F_z}{\partial y} &= 0 & ; & & \frac{\partial F_y}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} &= 0 & ; & & \frac{\partial F_z}{\partial x} &= 0\end{aligned}$$

Le condizioni dell'Eq. (13.33) sono tutte soddisfatte, inoltre il dominio è semplicemente connesso, dunque il campo di forza è conservativo. Costruiamo l'energia potenziale. Scegliamo come riferimento l'origine,  $(0, 0, 0)$ . Ricordiamo che  $\mathcal{U}(x, y, z) = - \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r})$ . Il cammino da  $(0, 0, 0)$  a  $(x, y, z)$  può essere scelto a piacere. Scegliamo dunque un cammino del tipo

$$(0, 0, 0) \rightarrow (0, 0, z) \rightarrow (x, 0, z) \rightarrow (x, y, z)$$

Ora:

$$\begin{aligned}\int_{(0,0,0)}^{(0,0,z)} d\vec{r} \cdot \vec{F} &= \int_0^z F_z(0, 0, z') dz' = -2k \int_0^z z' dz' = -kz^2 \\ \int_{(0,0,z)}^{(x,0,z)} d\vec{r} \cdot \vec{F} &= \int_0^x F_x(x', 0, z) dx' = k \int_0^x x' dx' = \frac{k}{2} x^2 \\ \int_{(x,0,z)}^{(x,y,z)} d\vec{r} \cdot \vec{F} &= \int_0^y F_y(x, y', z) dy' = k \int_0^y (y' - x) dy' = \frac{k}{2} y^2 - kxy\end{aligned}$$

dunque

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(x, y, z) &= - \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} d\vec{r} \cdot \vec{F} = - \left( \int_{(0,0,0)}^{(0,0,z)} d\vec{r} \cdot \vec{F} + \int_{(0,0,z)}^{(x,0,z)} d\vec{r} \cdot \vec{F} + \int_{(x,0,z)}^{(x,y,z)} d\vec{r} \cdot \vec{F} \right) \\ &= - \left( -kz^2 + \frac{k}{2}(x^2 + y^2 - 2xy) \right) = k \left[ z^2 - \frac{(x-y)^2}{2} \right]\end{aligned}$$

## 13.11 Esercizi sull'energia meccanica

**Esercizio 13.5.** Quanta energia è necessaria per sollevare di 100 m una massa di una tonnellata, nel campo gravitazionale alla superficie terrestre?

**Risposta.** La variazione dell'energia gravitazionale è  $\Delta\mathcal{U}_g = mg\Delta h = (1000 \text{ kg})(9.806 \text{ m/s}^2)(100 \text{ m}) = 9.806 \cdot 10^5 \text{ J}$  — quasi un MegaJoule. Il lavoro fatto dalla forza gravitazionale è  $\mathcal{W}_g = -\Delta\mathcal{U}_g$ . Il meccanismo che solleva applica una forza esterna che si oppone alla forza di gravità:  $\vec{F}^{est} = -\vec{F}_g$ , pertanto compie anche lavoro di segno opposto:  $\mathcal{W}^{est} = -\mathcal{W}_g = \Delta\mathcal{U}_g$ .

**Esercizio 13.6.** Un trattore di massa  $m_0 = 1$  ton traina un rimorchio carico di tronchi di massa  $m_1 = 5$  ton su per una strada di montagna, con una pendenza di  $15^\circ$  rispetto all'orizzontale. La potenza del trattore è  $\mathcal{P} = 80$  kW. Qual è la velocità (supposta costante) con cui il trattore riesce a salire?

**Risposta.** Abbiamo due forze in gioco: la forza gravitazionale, che è conservativa, e quindi ammette un'energia potenziale; inoltre, la forza del motore del trattore, che ha la funzione di forza esterna. La potenza fa variare l'energia meccanica:  $\mathcal{P} = \frac{dE}{dt} = \frac{d\mathcal{E}}{dt} + \frac{d\mathcal{U}_g}{dt}$ , essendo  $\mathcal{U}_g = (m_0 + m_1)gh$  l'energia gravitazionale. Se la velocità è costante, l'energia cinetica non cambia,  $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0$ , quindi tutta la potenza del motore va a modificare solo l'energia gravitazionale:  $\mathcal{P} = \frac{d\mathcal{U}_g}{dt} = (m_0 + m_1)g \frac{dh}{dt}$ . Si deduce che  $\frac{dh}{dt} = \frac{\mathcal{P}}{(m_0 + m_1)g} = \frac{8 \cdot 10^4 \text{ J}}{(6 \cdot 10^3 \text{ kg})(9.806 \text{ m/s}^2)} = 1.360 \text{ m/s}$ . Poiché la strada ha una pendenza di  $\theta = 15^\circ = 15 \frac{\pi}{180} \text{ rad} = 0.2618 \text{ rad}$ , ad una variazione  $\Delta h$  di quota corrisponde una lunghezza  $\Delta \ell$  tale che  $\Delta h = \Delta \ell \sin \theta$ , ovvero  $\Delta \ell = \frac{\Delta h}{\sin \theta} = 3.864 \Delta h$ . Si deduce che la velocità del trattore sulla strada è  $v = \frac{1}{\sin \theta} \frac{dh}{dt} = 3.864 \cdot 1.360 \text{ m/s} = 5.254 \text{ m/s}$ . Per esprimere la velocità in km/h, moltiplichiamo per 3.6:  $v = 18.9 \text{ km/h}$ .

**Esercizio 13.7.** Un atomo di  $^{12}_6\text{C}$  viene completamente ionizzato, quindi immerso in un campo elettrico uniforme  $E = 10^5 \text{ N/C}$  che lo accelera per la lunghezza di 1 cm. Se inizialmente era fermo, che velocità raggiunge?

**Risposta.** Si potrebbe affrontare il problema in vari modi. Un approccio potrebbe essere risolvere l'equazione del moto e trovare la legge oraria — il che è facile, perché la forza è costante.

Invece, osserviamo che l'unica forza è quella elettrica, che è conservativa. Quindi possiamo utilizzare la conservazione dell'energia meccanica. Chiamiamo  $x$  la distanza percorsa dallo ione. L'energia potenziale (elettrostatica) è  $\mathcal{U}_e(x) = -\int_0^x dx' qE = -qEx$ . L'energia meccanica,  $E = \mathcal{E} + \mathcal{U}_e(x)$  deve conservarsi, ed il suo valore iniziale è nullo, poiché lo ione è fermo e abbiamo scelto il riferimento dell'energia potenziale in modo che  $\mathcal{U}_e$  sia nullo per  $x = 0$ . Quindi alla fine dell'accelerazione deve essere  $\mathcal{E} = -\mathcal{U}_e(\ell) = qE\ell$ . La velocità finale si ricava da  $\mathcal{E} = \frac{m}{2}v^2$ , quindi  $v = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m}} = \sqrt{\frac{2qE\ell}{m}}$ .

Ora inseriamo i valori numerici. La massa dell'atomo di  $^{12}_6\text{C}$  è  $m = 12 \cdot (1.6605 \cdot 10^{-27} \text{ kg}) = 1.9926 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$ . L'atomo viene completamente ionizzato, quindi perde 6 elettroni ed acquista una carica elettrica  $q = +6e = 6 \cdot (1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}) = 9.612 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ . Quindi la velocità vale

$$v = \sqrt{\frac{2(9.612 \cdot 10^{-19} \text{ C})(10^5 \text{ N/C})(0.01 \text{ m})}{1.9926 \cdot 10^{-26} \text{ kg}}} = 3.106 \cdot 10^5 \text{ m/s.}$$

**Esercizio 13.8.** Un oggetto di massa  $m = 5 \text{ kg}$  scivola giù per un piano inclinato di pendenza  $\theta = 35^\circ$ , partendo da fermo da un'altezza di  $h_1 = 5 \text{ m}$ . Questo piano è raccordato in fondo con un altro piano inclinato di uguale pendenza, in salita. L'oggetto risale su questo piano fino a raggiungere un'altezza  $h_2 = 4 \text{ m}$ . Calcolare il lavoro fatto dalle forze di attrito durante tutto il percorso. Calcolare la forza di attrito, assumendo che sia costante lungo il percorso. Perché questa assunzione è ragionevole?

**Risposta.** Sono in azione due forze: quella gravitazionale (conservativa) e quella di attrito, che trattiamo come forza esterna. Pertanto la variazione totale di energia meccanica è esprimibile come lavoro dell'attrito:  $\mathcal{W}_{\text{attr}} = \Delta E$ . Siccome all'inizio e alla fine la velocità è nulla, l'energia cinetica non ha subito variazioni:  $\Delta \mathcal{E} = 0$ .

Quindi  $\mathcal{W}_{\text{attr}} = \Delta \mathcal{U}_g$ , essendo  $\mathcal{U}_g = mgh$  l'energia potenziale gravitazionale. Troviamo quindi  $\mathcal{W}_{\text{attr}} = mg(h_2 - h_1) = (5 \text{ kg})(9.806 \text{ m/s}^2)(-1 \text{ m}) = -49.03 \text{ J}$ ; è negativo, come c'era da aspettarsi.

Il percorso fatto dalla massa sul primo piano è  $\ell_1 = \frac{h_1}{\sin \theta} = \frac{5 \text{ m}}{\sin(0.6109 \text{ rad})} = 8.717 \text{ m}$ . Analogamente, il percorso sul secondo piano è  $\ell_2 = \frac{h_2}{\sin \theta} = \frac{4 \text{ m}}{\sin(0.6109 \text{ rad})} = 6.974 \text{ m}$ . Il percorso totale è  $\ell = \ell_1 + \ell_2 = 15.69 \text{ m}$ , quindi la forza di attrito deve valere  $F_{\text{attr}} = \frac{\mathcal{W}_{\text{attr}}}{\ell} = \frac{-49.03 \text{ J}}{15.69 \text{ m}} = -3.125 \text{ N}$ . Il segno  $-$  indica che è diretta in verso opposto allo spostamento.

L'assunzione che  $F_{\text{attr}}$  sia costante lungo il percorso è ragionevole, perché si tratta di attrito radente su una superficie di inclinazione costante: ricordiamo infatti che  $F_{\text{attr}} = \mu_d F_{\text{vinc}} = \mu_d mg \cos \theta$ .

**Esercizio 13.9.** Un paracadutista di massa  $m = 80 \text{ kg}$  (compresa l'attrezzatura), scende col paracadute aperto alla velocità costante  $v = 20 \text{ km/h}$ . Qual è la potenza dissipata dall'attrito con l'aria?

**Risposta.** Abbiamo due forze agenti: quella gravitazionale, che è conservativa, e quella dell'attrito, che trattiamo come forza esterna. L'energia gravitazionale è  $\mathcal{U}_g = mgh$ . La potenza dissipata dall'attrito fa variare l'energia meccanica:  $\mathcal{P}_{\text{attr}} = \frac{dE}{dt} = \frac{d\mathcal{E}}{dt} + \frac{d\mathcal{U}_g}{dt}$ . Poiché la velocità è costante,  $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0$ . Quindi  $\mathcal{P}_{\text{attr}} = \frac{d\mathcal{U}_g}{dt} = mg \frac{dh}{dt} = -mgv$  (il segno  $-$  esprime il fatto che il paracadutista sta scendendo, quindi  $h$  diminuisce col tempo). Inserendo i valori numerici, con  $v = 20 \text{ km/h} = 5.555 \text{ m/s}$ , troviamo  $\mathcal{P}_{\text{attr}} = -(80 \text{ kg})(9.806 \text{ m/s}^2)(5.555 \text{ m/s}) = -4358 \text{ W} = -4.358 \text{ kW}$ . Il segno  $-$

*nella potenza indica che si tratta appunto di potenza dissipata, ovvero sottratta al sistema meccanico.*

# Capitolo 14

## Energia nelle forze elastiche

Ricordiamo la definizione di forza elastica per una molla — vd Sezione 9.5. Una molla di lunghezza a riposo  $\ell_0$  è *elastica* se è costruita in modo che, modificando la sua lunghezza a  $\ell$ , essa tende a ripristinare la lunghezza  $\ell_0$  producendo una forza data da:

$$F_{el} = -k(\ell - \ell_0) \quad (14.1)$$

In questa sezione vedremo che le forze elastiche sono conservative, pertanto è possibile definire un'energia potenziale elastica  $\mathcal{U}_{el}$ . Questo risultato, tra l'altro, consente di trattare una vasta casistica di fenomeni fisici, caratterizzati da moti con piccoli spostamenti intorno a un punto di equilibrio stabile.

### 14.1 Energia elastica

La forza elastica è conservativa <sup>[1]</sup>. Per calcolare l'energia potenziale scegliamo una coordinata

$$x \equiv (\ell - \ell_0) \quad (14.2)$$

il che equivale a scegliere il riferimento  $Q$  coincidente con il punto di equilibrio. Assumiamo inoltre questo punto anche come “zero” dell'energia potenziale.

La forza elastica quindi vale

$$F_{el} = -kx \quad (14.3)$$

---

<sup>1</sup> In effetti, qualunque problema unidimensionale con forze posizionali è conservativo, per definizione: l'integrale del lavoro,  $\int_A^B dx \cdot F(x)$  non può che dipendere solo dagli estremi, visto che il percorso da  $A$  a  $B$  in una sola dimensione è obbligato.

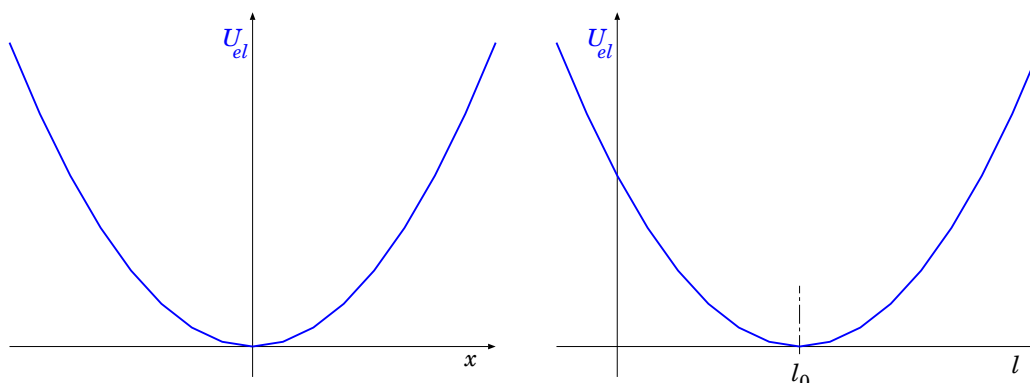


Figura 14.1: *Energia potenziale elastica.* A sinistra, l'origine ( $x = 0$ ) è scelta nel punto in cui la forza elastica è nulla; a destra, il punto di equilibrio  $\ell_0$  è posizionato in un punto qualunque. In entrambi i grafici, il punto di equilibrio è scelto come “zero” dell'energia potenziale. I due grafici sono equivalenti: differiscono solo per un cambiamento della coordinata-spostamento:  $x \equiv (\ell - \ell_0)$ .

e l'energia potenziale nel punto  $x$  si calcola come:

$$\mathcal{U}_{el}(x) = - \int_0^x F_{el}(x') dx' = \int_0^x kx' dx' = k \left[ \frac{(x')^2}{2} \right]_0^x = \frac{k}{2} x^2$$

In conclusione, l'energia potenziale elastica si scrive:

$$\mathcal{U}_{el}(x) = \frac{k}{2} x^2 \quad (14.4)$$

Questa si può esprimere anche attraverso  $\ell$ ,  $\ell_0$ :

$$\mathcal{U}_{el}(x) = \frac{k}{2} (\ell - \ell_0)^2 \quad (14.5)$$

In entrambi i casi, il grafico è una parabola, come illustrato in Fig. 14.1.

### 14.1.1 Energia meccanica nel moto armonico

Vediamo la situazione anche in modo complementare: nella Sezione 10.1.1 abbiamo visto che il moto è di tipo oscillatorio armonico:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\Omega t + \phi) \\ v(t) &= -A\Omega \sin(\Omega t + \phi) \end{aligned} \quad \Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



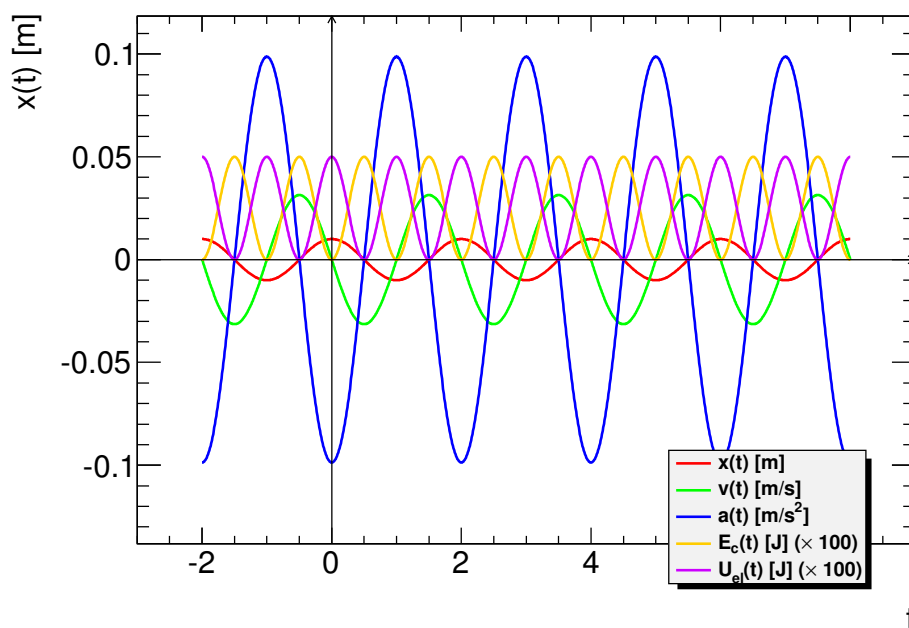


Figura 14.2: Moto oscillatorio armonico: evoluzione nel tempo di posizione, velocità, accelerazione, energia cinetica, energia potenziale (rispettivamente  $x(t)$ ,  $v(t)$ ,  $a(t)$ ,  $E_c(t)$ ,  $U_{el}(t)$ ). I parametri usati per questo esempio sono  $A_0 = 1$  cm,  $T = 2$  s,  $k = 10$  N/m. Attenzione: le energie sono molto piccole, nel grafico sono state moltiplicate per 100 per renderle più visibili.

(vd Eq. (10.7), Eq. (10.8)), quindi l'energia cinetica e potenziale valgono

$$\mathcal{E} = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}A^2\Omega^2 \sin^2(\Omega t + \phi)$$

$$\mathcal{U} = \frac{k}{2}x^2 = \frac{k}{2}A^2 \cos^2(\Omega t + \phi)$$

e ricordando che  $m\Omega^2 = k$  e che  $\sin^2 + \cos^2 = 1$  la conservazione dell'energia meccanica è manifesta.

Un esempio di moto armonico, con l'evoluzione temporale di tutte le quantità cinematiche, è mostrato nel grafico della Fig. 14.2.

## 14.2 Esercizi sulle forze elastiche

**Esercizio 14.1.** Per mantenere una molla compressa di 1 cm, rispetto alla sua posizione di equilibrio, è necessaria una forza di 0.2 N. Calcolare la costante elastica della molla e l'energia elastica in essa immagazzinata.

**Risposta.** La forza applicata  $F_{\text{appl}} = 0.2 \text{ N}$  si oppone alla forza elastica per mantenere la molla ferma:  $F_{\text{el}} = F_{\text{appl}}$ . Quindi la costante elastica si può calcolare come  $k = \frac{F_{\text{appl}}}{\Delta\ell} = \frac{0.2 \text{ N}}{0.01 \text{ m}} = 20 \text{ N/m}$ .

L'energia elastica è  $\mathcal{U}_{\text{el}} = \frac{k}{2}(\Delta\ell)^2 = \frac{20 \text{ N/m}}{2}(0.01 \text{ m})^2 = 0.002 \text{ J}$ .

**Osservazione:** calcolare l'energia elastica come  $F_{\text{appl}}\Delta\ell$  sarebbe errato, poiché nel processo di compressione la forza elastica, e quindi la forza applicata, aumentano man mano che la molla si schiaccia.

**Esercizio 14.2.** Ad una molla di costante elastica  $k = 10 \text{ N/m}$  viene appesa una massa  $m$ , quindi questa viene spostata di 1 cm dalla sua posizione di equilibrio e lasciata oscillare. Il periodo di oscillazione osservato è  $T = 2 \text{ s}$ . Determinare la frequenza angolare  $\Omega$  e il valore di  $m$ . Determinare inoltre i valori massimi di velocità, accelerazione, energia cinetica e energia potenziale.

**Risposta.**

Anzitutto,  $\Omega = \frac{2\pi}{T} = 3.1416 \text{ rad/s}$ ; quindi  $m = \frac{k}{\Omega^2} = \frac{10 \text{ N/m}}{(3.1416 \text{ rad/s})^2} = 1.013 \text{ kg}$ .

La velocità massima è  $v_{\text{max}} = A_0\Omega = 0.031416 \text{ m/s}$ , mentre l'accelerazione massima è  $a_{\text{max}} = A_0\Omega^2 = 0.0987 \text{ m/s}^2$ . L'energia

potenziale massima è  $\mathcal{U}_{\text{max}} = \frac{k}{2}A_0^2 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ J}$ . L'energia cinetica massima è  $\mathcal{E}_{\text{max}} = \frac{m}{2}v_{\text{max}}^2 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ J}$ , ovviamente uguale all'energia potenziale massima.

I parametri di questo esercizio sono gli stessi del grafico in Fig. 14.2: potete confrontare i valori numerici ottenuti con quelli che compaiono nel grafico.

**Esercizio 14.3.** Un oggetto di massa  $m = 1 \text{ kg}$  viene appoggiato ad una molla di costante elastica  $k = 15 \text{ N/m}$ , disposta orizzontalmente; quindi la molla viene compressa di  $\Delta\ell = 20 \text{ cm}$ , e poi lasciata andare. L'oggetto subisce la spinta della molla finché questa si distende, poi quando la molla è tornata in equilibrio l'oggetto se ne separa e continua a muoversi lungo una rotaia orizzontale. Quanto lavoro occorre fare per comprimere la molla come descritto? Con che velocità viene "sparato" l'oggetto?

**Risposta.** L'energia potenziale elastica della molla, inizialmente nulla, viene aumentata durante la fase di compressione, fino ad un valore

$$\mathcal{U}_0 = \frac{k}{2}(\Delta\ell)^2 = 0.5 \cdot 15 \text{ N/m} \cdot (0.2 \text{ m})^2 = 0.3 \text{ J}$$

pertanto tale è anche il lavoro fatto dall'esterno. Durante l'espansione della molla, l'energia meccanica  $E = \mathcal{E} + \mathcal{U}$  si conserva, pertanto l'energia potenziale si converte man mano in energia cinetica. Quando la molla torna in equilibrio  $\mathcal{U} = 0$ , pertanto l'energia cinetica del proiettile sparato è

$$\mathcal{E} = \frac{m}{2}v^2 = 0.3 \text{ J}$$

da cui la velocità risulta

$$v = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.3 \text{ J}}{1 \text{ kg}}} = 0.77 \text{ m/s}$$

**Esercizio 14.4.** Un oggetto di 10 kg è dotato di una molla di massa trascurabile attaccata alla parte inferiore. L'oggetto viene lasciato cadere dall'altezza di 1 m (misurata dall'estremo inferiore della molla al suolo). Quando raggiunge il suolo, la molla si comprime di 10 cm, quindi si estende e rilancia l'oggetto in alto. Calcolare la costante  $k$  della molla.

**Risposta.** Le forze agenti sono la gravità e l'elasticità della molla: entrambe sono conservative, pertanto  $E = \mathcal{E} + \mathcal{U}_g + \mathcal{U}_{el}$  è costante. Inizialmente l'oggetto è fermo ( $\mathcal{E} = 0$ ) e la molla è libera ( $\mathcal{U}_{el} = 0$ ), pertanto  $E = \mathcal{U}_g^{in}$ . Alla fine, l'oggetto è di nuovo fermo ( $\mathcal{E} = 0$ ) e la molla è compressa, quindi  $E = \mathcal{U}_g^{fin} + \mathcal{U}_{el}^{fin}$ . Pertanto  $\mathcal{U}_{el}^{fin} = \mathcal{U}_g^{in} - \mathcal{U}_g^{fin} = mg(h^{in} - h^{fin})$ . Ora, nella caduta l'oggetto scende di 1 m fino a quando la molla tocca il suolo, poi questa si comprime di  $\delta = 10$  cm, pertanto la discesa totale è  $\Delta h = h^{fin} - h^{in} = -1.1$  m, e la variazione di energia potenziale è  $\Delta \mathcal{U} = \mathcal{U}^{fin} - \mathcal{U}^{in} = mg\Delta h = (10 \text{ kg})(9.806 \text{ m/s}^2)(-1.02 \text{ m}) = -1.079 \text{ J}$ . Quindi  $\mathcal{U}_{el}^{fin} = 1.079 \text{ J}$ . Inoltre  $\mathcal{U}_{el}^{fin} = \frac{k}{2}\delta^2$ , quindi  $k = \frac{2\mathcal{U}_{el}^{fin}}{\delta^2} = \frac{2(1.079 \text{ J})}{(0.1 \text{ m})^2} = 216 \text{ N/m}$

## 14.3 Oscillazioni intorno ad un punto di equilibrio

Le forze elastiche possono essere utilizzate in una grande varietà di problemi fisici: quelli caratterizzati da oscillazioni intorno ad un punto di equilibrio.

Consideriamo un oggetto puntiforme soggetto a campi di forze conservative, con risultante  $\vec{F}(\vec{r})$ .

Si definisce *punto di equilibrio* del sistema di forze come una posizione  $\vec{r}_{eq}$  tale che l'oggetto, posizionato lì in quiete, lì rimanga. Perché ciò accada, occorre che in  $\vec{r} = \vec{r}_{eq}$  sia  $\vec{F}(\vec{r}_{eq}) = 0$ : infatti se così è, non c'è accelerazione, la velocità resta nulla come era inizialmente, quindi l'oggetto non si muove.

Un punto di equilibrio si definisce *stabile* se l'oggetto, in seguito ad un piccolo spostamento dal punto di equilibrio, tende a muoversi intorno ad esso.

Facciamo alcuni esempi: una pallina sferica, posta in fondo ad una ciotola, inizialmente sta ferma nel punto più fondo: quello è il suo punto di equilibrio. Se uno la perturba, spostandola o urtandola, essa acquista un moto intorno al punto di equilibrio: si tratta quindi di un equilibrio stabile.

Se la stessa pallina viene posta in quiete su di un piano orizzontale, oppure (con molta attenzione!) appoggiata in cima ad un pallone, essa resta lì: quindi anche in questi casi si trova nel suo punto di equilibrio. Tuttavia, in questi casi non si tratta di un equilibrio stabile. Se viene urtata, nel caso del piano prosegue con un moto rettilineo uniforme (almeno finché non viene frenata...) mentre nell'altro caso rotola lontano dal punto di equilibrio.

Teniamo presente che la stabilità dell'equilibrio è sempre relativa alle perturbazioni applicate: anche la pallina nella ciotola, se urtata troppo violentemente, può saltare fuori dal bordo della medesima!

L'equilibrio stabile può essere compreso ricorrendo all'energia potenziale  $\mathcal{U}(\vec{r})$ . Qualunque punto  $\vec{r}_{eq}$  che costituisca un *minimo locale* della funzione  $\mathcal{U}(\vec{r})$  è un punto di equilibrio stabile. Infatti, se  $\vec{r}_{eq}$  è un punto di minimo per  $\mathcal{U}$ , vuol dire che tutte le derivate di  $\mathcal{U}(\vec{r})$  sono nulle in  $\vec{r}_{eq}$ :

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} \right]_{\vec{r}=\vec{r}_{eq}} = 0 \quad ; \quad \left[ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} \right]_{\vec{r}=\vec{r}_{eq}} = 0 \quad ; \quad \left[ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z} \right]_{\vec{r}=\vec{r}_{eq}} = 0$$

e quindi, poiché  $\vec{F} = -\vec{\nabla}\mathcal{U}$  (vedi Sezione 13.9 e Eq. (13.32)), la forza in  $\vec{r}_{eq}$  è nulla. Cioè, un oggetto posto in quiete in  $\vec{r}_{eq}$  resta lì.

L'oggetto, in quiete nel punto di equilibrio, possiede energia meccanica pari alla sua energia potenziale  $\mathcal{U}(\vec{r}_{eq})$ , visto che la sua energia cinetica è nulla. Quando viene perturbato, acquista energia meccanica:

- se viene spostato da  $\vec{r}_{eq}$ , la sua energia potenziale  $\mathcal{U}$  aumenta (altro non può fare, visto che era al minimo);
- se viene messo in movimento, acquista energia cinetica  $\mathcal{E}$  (che prima era nulla).

In ogni caso si trova ad avere un'energia meccanica

$$E = \mathcal{E} + \mathcal{U}(\vec{r}) > \mathcal{U}(\vec{r}_{eq})$$

Chiamiamo  $\Delta E = E - \mathcal{U}(\vec{r}_{eq})$  l'energia che abbiamo ceduto all'oggetto per perturbarlo da suo stato di equilibrio. Poiché l'energia meccanica si conserva e  $\mathcal{E} = E - \mathcal{U}(\vec{r})$  non può mai essere negativa, la regione di spazio accessibile è limitata dalla condizione:

$$\mathcal{U}(\vec{r}) \leq E \quad \text{oppure} \quad \mathcal{U}(\vec{r}) \leq \mathcal{U}(\vec{r}_{eq}) + \Delta E$$

ed il moto è dunque confinato in tale regione.

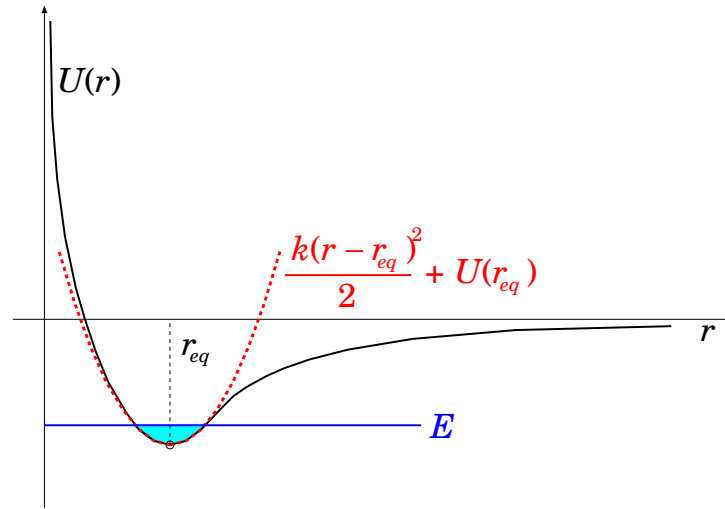


Figura 14.3: *Energia potenziale di legami fra due atomi che formano una molecola, in funzione della distanza interatomica  $r$ . Intorno al punto di equilibrio  $r_{eq}$  l'energia potenziale può essere approssimata come un paraboloido (disegnato come parabola, per esigenze grafiche).*

Come esempio, consideriamo l'energia potenziale raffigurata in Fig. 14.3: è la tipica “energia di legame” fra due atomi che formano una molecola. C'è un minimo per una distanza interatomica  $r = r_{eq}$ , che rappresenta il punto di equilibrio della molecola. Per  $r < r_{eq}$  l'energia potenziale sale molto rapidamente: significa che avvicinare i due atomi oltre la loro distanza di equilibrio è sempre più faticoso. Viceversa, per  $r > r_{eq}$  l'energia potenziale sale fino a raggiungere un livello-limite: significa che allontanare i due atomi dalla loro distanza di equilibrio richiede energia, ma con un'energia sufficiente si possono allontanare all'infinito, ovvero si spezza la molecola.

Scegliamo un sistema di riferimento cartesiano con l'origine  $O$  centrata in  $\vec{r}_{eq}$ . Con un opportuno orientamento degli assi, in un piccolo intorno di  $\vec{r}_{eq}$  la forma dell'energia potenziale può sempre essere approssimata come un paraboloido:

$$\begin{aligned} U(\vec{r}) &\simeq U(\vec{r}_{eq}) + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) x^2 + \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) y^2 + \left( \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) z^2 \right] + \mathcal{O}(3) \\ &= U(\vec{r}_{eq}) + \frac{k_x}{2} x^2 + \frac{k_y}{2} y^2 + \frac{k_z}{2} z^2 + \mathcal{O}(3) \end{aligned} \quad (14.6)$$

(tutte le derivate seconde sono calcolate al punto di equilibrio, e  $\mathcal{O}(3)$  indica

ulteriori termini dello sviluppo in serie, che sono almeno di ordine 3 negli esponenti di  $x, y, z$ ). L'approssimazione parabolica è rappresentata dalla linea tratteggiata in Fig. 14.3.

Quindi, la forza per componenti cartesiane, in prossimità dell'equilibrio, diventa:

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} = -k_x x \\ F_y &= -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} = -k_y y \\ F_z &= -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z} = -k_z z \end{aligned} \quad (14.7)$$

Abbiamo appena trovato che *in prossimità di un punto di equilibrio stabile la forza agente ha la forma di una forza elastica.*

Le equazioni del moto prendono la forma:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{k_x}{m} x \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= -\frac{k_y}{m} y \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= -\frac{k_z}{m} z \end{aligned} \quad (14.8)$$

Ogni componente del moto può essere integrata indipendentemente, ottenendo:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_x \cos(\Omega_x t + \phi_x) & \left( \Omega_x = \sqrt{\frac{k_x}{m}} \right) \\ y(t) &= A_y \cos(\Omega_y t + \phi_y) & \left( \Omega_y = \sqrt{\frac{k_y}{m}} \right) \\ z(t) &= A_z \cos(\Omega_z t + \phi_z) & \left( \Omega_z = \sqrt{\frac{k_z}{m}} \right) \end{aligned} \quad (14.9)$$

Il moto tridimensionale è una composizione di tre moti oscillatori armonici. Ciascuno di questi ha però una frequenza angolare propria:  $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ , dovuta al fatto che le tre “costanti elastiche”  $k_x, k_y, k_z$  sono diverse.

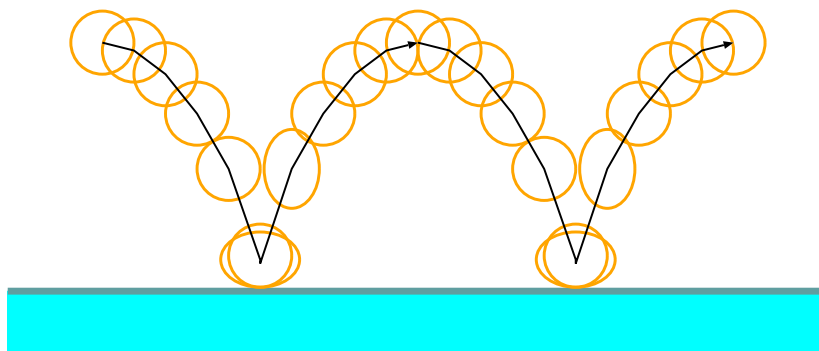


Figura 14.4: *Fotogrammi di un pallone che rimbalza: quando raggiunge il suolo, a contatto con esso si schiaccia. Poi, per le sue proprietà elastiche, si deforma in maniera opposta, allungandosi, e quindi spingendosi via dal terreno. In volo riacquista la forma sferica.*

Naturalmente, tutto quanto detto sinora è valido solo finché l'approssimazione parabolica descrive bene l'energia potenziale, ovvero in prossimità del punto di equilibrio. Aumentando l'energia meccanica  $E$ , la zona cinematicamente accessibile si allarga, e l'approssimazione dell'Eq. (14.6) non sussiste più, come si può vedere anche graficamente nella Fig. 14.3.

## 14.4 Forze elastiche nei materiali

*La capacità di reagire alle deformazioni con una forza proporzionale ed opposta ad esse si chiama elasticità.*

L'elasticità non è una caratteristica delle sole molle. Anzi, caratterizza tutti i fenomeni in cui ci sia un "rimbalzo". Per esempio, un pallone che cade al suolo (Fig. 14.4), durante l'urto si deforma, ma a causa della sua elasticità riacquista velocemente la sua forma: la parte che si era schiacciata ritorna in posizione, "spingendo via" il terreno. Per il principio di azione-reazione, riceve dal terreno una spinta uguale e contraria che lo fa rimbalzare. Normalmente la durata temporale del rimbalzo è molto breve, ma filmando il rimbalzo del pallone con una videocamera e riguardandolo in moviola rallentata, il comportamento diventa evidente. Anche nell'urto fra palle da biliardo succede la stessa cosa. Ovviamente le palle da biliardo sono molto più rigide di un pallone, quindi la loro deformazione è molto minore.

In generale, parlando di oggetti *solidi*, intendiamo oggetti in cui gli atomi

costituenti siano fra loro strettamente legati, in modo tale che le distanze reciproche fra qualunque coppia di essi siano immutabili. La situazione è analoga a quella di un traliccio o di una impalcatura: si tratta sempre di strutture che devono la loro rigidità al fatto che i giunti sono connessi da sbarre indeformabili, che li tengono a distanze ben definite. Tuttavia, il concetto di “indeformabile” è sempre relativo alle forze che vengono applicate. Tralicci ed impalcature possono oscillare in balia di un forte vento: evidentemente non sono “assolutamente rigidi”. Però la loro struttura fa sì che, cessato il vento, ritornino alla loro posizione originale — un po’ come una molla: la resistenza dei tralicci è appunto di natura elastica. Se le forze diventano più intense, la struttura può non riuscire più a resistere e si può rompere: è ciò che a volte succede ai tralicci in seguito ad una abbondante nevicata: le forze elastiche del traliccio reggono la spinta del vento ma non riescono a sopportare il peso della troppa neve accumulatasi.

Tutto questo accade anche ai legami atomici (o molecolari) che danno rigidità ad un solido. La palla da biliardo ci appare solida: sicuramente non riusciamo a schiacciarla fra le dita come faremmo con una palla da tennis. Tuttavia, quando essa urta un ostacolo solido, gli atomi vicini alla sua superficie vengono schiacciati un po’ all’interno: le distanze interatomiche vengono leggermente compresse. Poiché gli atomi sono tutti tenuti in posizione da una complessa rete di forze elastiche, appena possono essi tornano in posizione. La palla da biliardo, nella zona dove aveva subito lo schiacciamento, ripristina la sua forma originaria e così facendo si spinge via dall’ostacolo, ovvero rimbalza. Anche l’ostacolo ha gli stessi comportamenti: dove la palla lo urta, esso viene temporaneamente compresso: le forze che tengono in posizione gli atomi che lo compongono, appena possono tendono a ripristinare la sua forma iniziale.

Se l’urto avviene troppo forte la palla si può spaccare: in questo caso le forze in gioco — quelle con cui l’ostacolo ha deformato la palla — sono troppo forti e i legami atomici non hanno resistito. Quest’ultimo caso può essere compreso guardando di nuovo alla Fig. 14.3: se l’urto è molto forte, l’energia meccanica  $E$  aumenta, e per l’energia potenziale non è più valida l’approssimazione parabolica. Se l’energia meccanica diventa troppo grande ( $E > 0$ ), gli atomi si liberano dal legame molecolare.

#### 14.4.1 Modello delle reazioni vincolari (\*)

Le forze elastiche possono essere presenti anche in assenza di urti e rimbalzi. Se appoggiamo un oggetto pesante su un piano orizzontale, esso sta fermo: evidentemente la risultante delle forze agenti su di esso è nulla. D’altra parte, su di esso agisce sicuramente la forza di gravità. Quindi, deve esserci una



forza uguale ed opposta che la contrasta: essa è ovviamente prodotta dal piano su cui l'oggetto appoggia, e si chiama *reazione del vincolo* — il vincolo è ciò che “vincola” appunto l'oggetto ad una data posizione: ovviamente il piano stesso in questo caso.

Anche la reazione del vincolo è di natura elastica. In effetti, il peso dell'oggetto appoggiato, produce uno schiacciamento locale del piano, cioè le distanze interatomiche vengono compresse. Le forze elastiche che tengono in posizione gli atomi del piano tendono ad opporsi a questo schiacciamento: il risultato collettivo è che producono la reazione vincolare, che tiene l'oggetto in equilibrio.

Le reazioni vincolari prodotte da oggetti solidi sono modellabili in termini di campi di forza,  $\vec{F}(\vec{r})$ , con le seguenti caratteristiche:

- al di fuori dall'oggetto-vincolo la forza deve essere nulla;
- a contatto con l'oggetto-vincolo la forza deve essere repulsiva, ortogonale alla superficie del vincolo, e con caratteristiche elastiche;
- la parte di spazio all'interno dell'oggetto-vincolo deve essere inaccessibile — quest'ultimo requisito va inteso in senso lato: essendo la reazione vincolare di natura elastica, è possibile una piccola deformazione che renda accessibile una piccola porzione della zona “proibita”, durante il contatto.

Consideriamo un vincolo costituito da un piano (idealmente indefinito...). Orientiamo gli assi cartesiani in modo che il piano  $Oxy$  giaccia sul vincolo e che la zona  $z < 0$  sia inaccessibile. Se introduciamo un'energia potenziale della forma:

$$\mathcal{U}(x, y, z) = \begin{cases} 0 & (\text{per } z > 0) \\ \frac{k}{2}z^2 & (\text{per } z < 0) \end{cases} \quad (14.10)$$

La forza si ricava come  $\vec{F} = -\vec{\nabla}\mathcal{U}$ , quindi per componenti:

$$\begin{aligned} F_x &= 0 \\ F_y &= 0 \\ F_z &= \begin{cases} 0 & (\text{per } z > 0) \\ -kz & (\text{per } z < 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (14.11)$$

La forza agisce solo lungo la direzione ortogonale al piano, inoltre “entra in funzione” solo quando si entra in contatto con il vincolo ( $z \leq 0$ ) ed è

repulsiva ( $F_z > 0$ ). Inoltre, più rigido è l'ostacolo, maggiore è la costante di elasticità  $k$ .

Una forza siffatta è ovviamente conservativa. La penetrazione nella "zona inaccessibile" dipende dall'energia dell'oggetto incidente e dalla sua direzione iniziale. Supponiamo che esso abbia massa  $m$  e velocità incidente  $\vec{v}_i \equiv (v_{ix}, v_{iy}, v_{iz})$ , con  $v_{iz} < 0$  perché è in avvicinamento. Durante l'urto le componenti  $v_x, v_y$  non subiscono variazioni perché la forza vincolare non ha componenti lungo il piano. Invece la velocità  $v_z$  subisce una variazione data da:

$$\frac{dv_z}{dt} = a_z = \frac{F_z}{m} = -\frac{kz}{m} \quad (z < 0) \quad (14.12)$$

Poiché inizialmente  $v_{iz} < 0$  e invece  $a_z > 0$ , ad un certo punto deve essere  $v_z = 0$ . In tali condizioni l'energia cinetica dell'oggetto incidente deve essere minima. La variazione di energia cinetica è dunque:

$$\Delta\mathcal{E} = \underbrace{\frac{m}{2}(v_{ix}^2 + v_{iy}^2)}_{\mathcal{E}_0} - \underbrace{\frac{m}{2}(v_{ix}^2 + v_{iy}^2 + v_{iz}^2)}_{\mathcal{E}_i} = -\frac{m}{2}v_{iz}^2$$

L'energia totale  $E = \mathcal{E} + \mathcal{U}$  prima dell'urto vale semplicemente  $E = \mathcal{E}_i$ . Al momento di massima penetrazione essa vale  $E = \mathcal{E}_0 + \frac{k}{2}z_0^2$ , quindi deve essere

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &= \mathcal{E}_0 + \frac{k}{2}z_0^2 \\ \frac{k}{2}z_0^2 &= -\Delta\mathcal{E} = \frac{m}{2}v_{iz}^2 \\ z_0 &= -\sqrt{\frac{m}{k}}|v_{iz}| \end{aligned}$$

È evidente che per valori di  $k$  sempre più grandi la penetrazione massima  $z_0$  diminuisce: quindi un maggiore  $k$  corrisponde ad un vincolo più rigido.

Alla fine dell'urto, le componenti della velocità parallele al piano non sono cambiate, mentre quella ortogonale ha cambiato segno ma è in valore assoluto pari alla componente iniziale, per la conservazione dell'energia. Quindi:

$$\begin{aligned} v_{fx} &= v_{ix} \\ v_{fy} &= v_{iy} \\ v_{fz} &= -v_{iz} \end{aligned}$$

Durante l'urto, il moto lungo la direzione  $z$  è descritto dalla soluzione dell'Eq. (14.12). Trattandosi di un moto armonico sappiamo già che essa è

della forma:

$$z(t) = z_0 \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi \right)$$

La durata  $\Delta t$  dell'urto è calcolabile come la differenza fra gli istanti  $t_i$  e  $t_f$  in cui l'oggetto incidente entra in contatto e si stacca con il vincolo. In entrambi i casi deve essere  $z(t) = 0$ , quindi l'argomento del coseno deve essere variato di  $\pi$ :  $\pi = \Delta \left[ \sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi \right] = \sqrt{\frac{k}{m}} \Delta t$  quindi

$$\Delta t = \pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Nel caso di vincoli più rigidi,  $k$  è più grande e quindi la durata dell'urto è minore. Incidentalmente, questo fatto cade sotto l'esperienza quotidiana, anche se non siamo dotati di apparecchiature sofisticate per misurare la durata dell'urto. Il rumore di una pallina di acciaio che rimbalza sul pavimento ("tic-tic-tic") è più acuto di quello che farebbe un pallone da basket ("ponf-ponf-ponf"). In effetti la frequenza  $\nu$  del suono emesso è inversamente proporzionale alla durata temporale dell'urto:  $\nu \propto \frac{1}{\Delta t}$ . La pallina di acciaio è più rigida, dunque ha un  $k$  maggiore e quindi un  $\Delta t$  minore, pertanto emette suoni a frequenza più alta — più acuti, appunto.

## 14.5 Moto oscillatorio smorzato, considerazioni energetiche (\*)

In Sezione 10.4 abbiamo trattato l'oscillatore armonico smorzato:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \eta \frac{dx}{dt}$$

la cui soluzione, per condizioni iniziali  $x(0) = A_0$  e  $v(0) = 0$  — vd Eq. (10.32) — è

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \left[ \cos(\Omega' t) + \frac{\gamma}{\Omega'} \sin(\Omega' t) \right]$$

$$\left( \begin{array}{l} \gamma = \frac{\eta}{2m} ; \quad \Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} ; \quad \Omega' = \sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2} \end{array} \right)$$

Per  $\gamma \ll \Omega_0, \Omega'$  questo appare come un moto oscillatorio armonico, con ampiezza decrescente

$$A(t) = A_0 e^{-\gamma t}$$

La ragione può essere trovata anche da considerazioni energetiche. Nella condizione  $\gamma \ll \Omega_0, \Omega'$  possiamo approssimare:

$$\begin{aligned} x(t) &\simeq A_0 e^{-\gamma t} \cos(\Omega_0 t) \\ v(t) &\simeq -A_0 \Omega_0 e^{-\gamma t} \sin(\Omega_0 t) \end{aligned}$$

L'attrito dissipa una potenza:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{attr} &= F_{attr} v = -\eta v^2 \simeq -\eta [A(t) \Omega_0 \sin(\Omega_0 t)]^2 \\ &\simeq -\eta \frac{k}{m} A^2 \sin^2(\Omega_0 t) \end{aligned}$$

che, mediato su un periodo di oscillazione — e ricordando che  $\langle \sin^2 \rangle = \frac{1}{2}$  — dà:

$$\langle \mathcal{P}_{attr} \rangle = -\frac{\eta k}{2m} A^2$$

D'altra parte l'energia meccanica è

$$E = \frac{k (A(t))^2}{2}$$

quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{attr} &= \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{kA^2}{2} \right) \\ &= kA \frac{dA}{dt} \end{aligned}$$

Mettendo insieme si trova:

$$\begin{aligned} -\frac{\eta k}{2m} A^2 &= kA \frac{dA}{dt} \\ \frac{dA}{dt} &= -\frac{\eta}{2m} A \equiv \gamma A \end{aligned}$$

la cui soluzione è, appunto,  $A(t) = A_0 e^{-\gamma t}$ .

**14.5.1 Attrito**  $\propto v^2$ 

Ora consideriamo una forza viscosa  $F_{attr} = -\text{sgn}(v)\eta'v^2 = -\eta'v|v|$ , cosicch  l'equazione del moto diventa:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \eta' \left| \frac{dx}{dt} \right| \left( \frac{dx}{dt} \right)$$

In questo caso non esiste una soluzione analitica. Per  possiamo ugualmente fare considerazioni energetiche: prendiamo sempre il prototipo di moto oscillatorio smorzato:

$$x(t) = A(t) \cos \Omega t \quad \left( \Omega \simeq \sqrt{\frac{k}{m}} \right)$$

dove vogliamo determinare come si attenua l'ampiezza di oscillazione  $A(t)$ .

Assumendo che  $A(t)$  varii nel tempo molto pi  lentamente di  $\cos(\Omega t)$ , possiamo approssimare:

$$v(t) \simeq -A(t) \Omega \sin(\Omega t)$$

Ora la potenza dissipata dall'attrito  :

$$\mathcal{P}_{attr} = (-\eta'v|v|) \cdot v = -\eta' |v^3| \simeq -\eta' A^3 \Omega^3 |\sin^3(\Omega t)|$$

Mediando su un periodo,  $\langle |\sin^3| \rangle = \frac{4}{3\pi}$  [2], quindi

$$\langle \mathcal{P}_{attr} \rangle = -\eta' A^3 \Omega^3 \frac{4}{3\pi}$$

D'altronde vale sempre

$$E = \frac{k}{2} A^2$$

$$\mathcal{P}_{attr} = \frac{dE}{dt} = k A \frac{dA}{dt}$$

---

<sup>2</sup> Infatti:

$$\langle |\sin^3| \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi |\sin^3(\phi)| = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \sin^3 \phi$$

Ora si pone  $\xi = \cos \phi$ , cosicch   $d\xi = -\sin \phi d\phi$  e  $\sin^2 \phi = 1 - \xi^2$ :

$$\begin{aligned} \langle |\sin^3| \rangle &= \frac{2}{\pi} \int_1^0 (-d\xi)(1 - \xi^2) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 d\xi(1 - \xi^2) = \frac{2}{\pi} \left( 1 - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{4}{3\pi} \end{aligned}$$

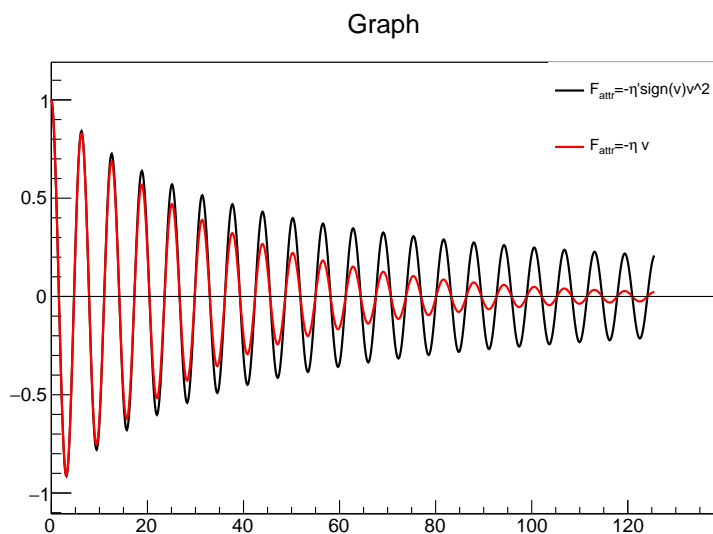


Figura 14.5: *Andamento delle oscillazioni smorzate, con l'attrito viscoso  $\propto v$  e  $\propto v^2$ . I valori di  $\eta$ ,  $\eta'$  sono stati scelti in modo da rendere confrontabile l'attrito nella prima oscillazione:  $\eta'v^2 \simeq \eta v$ ; questo è stato realizzato scegliendo  $\eta'(A_0\Omega) = \eta$ .*

Mettendo insieme le equazioni troviamo (ricordiamo  $\Omega^2 = \frac{k}{m}$ )

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= -\frac{4}{3\pi} \frac{\eta'}{k} \Omega^3 A^2 = -\underbrace{\frac{4}{3\pi} \frac{\eta' \Omega}{m}}_{\alpha} A^2 \\ &= -\alpha A^2 \\ \frac{dA}{A^2} &= -\alpha dt \\ \int_{A_0}^A \frac{dA'}{(A')^2} &= -\alpha \int_0^t dt' \\ \frac{1}{A_0} - \frac{1}{A} &= -\alpha t \\ A(t) &= \frac{A_0}{1 + A_0 \alpha t} \end{aligned}$$

Questa volta l'attenuazione non è esponenziale, ma segue una legge di potenza.

Gli andamenti delle oscillazioni smorzate, con l'attrito viscoso  $\propto v$  e  $\propto v^2$ , sono confrontati in Fig. 14.5.

# Capitolo 15

## Momento angolare

### 15.1 Momento angolare, momento torcente

Per un oggetto puntiforme situato nella posizione  $\vec{r}$  e dotato di quantità di moto  $\vec{p}$  — vd Fig. 15.1 (sinistra) — si definisce il *momento angolare*  $\vec{L}$  come:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (15.1)$$

(spesso chiamato anche “momento della quantità di moto”).

Vediamo come questa quantità dinamica varia nel tempo:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \\ &= \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} \end{aligned}$$

Nell’ultima espressione, il primo termine è identicamente nullo: infatti si tratta del prodotto vettoriale di due vettori paralleli ( $\vec{v}$  e  $\vec{p}$ ). Invece, il secondo termine viene definito come *momento torcente* (o anche “momento meccanico”, o ancora “momento della forza” <sup>[1]</sup>):

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (15.2)$$

— vd Fig. 15.1 (destra). Quindi l’equazione che regola l’evoluzione del momento angolare diventa:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad (15.3)$$

---

<sup>1</sup> In inglese si chiama “torque” — molto suggestivo!

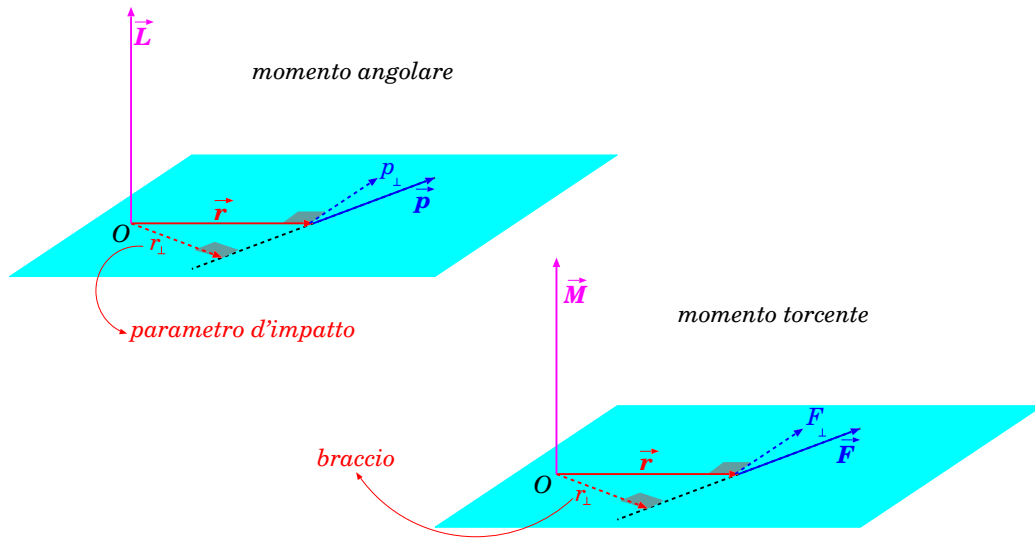


Figura 15.1: *Momento angolare (a sinistra) e momento torcente (a destra). Il punto  $O$  è il “polo”, rispetto al quale si misura la posizione  $\vec{r}$ . La componente  $\vec{r}_\perp$  si chiama rispettivamente “parametro di impatto” nel caso del momento angolare, oppure “braccio” nel caso del momento torcente.*

### 15.1.1 Alcune proprietà

Mentre le quantità dinamiche  $\vec{v}$ ,  $\vec{p}$ ,  $\vec{F}$  esprimono proprietà di un punto materiale, il momento angolare e il momento torcente

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad ; \quad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

esprimono proprietà di un punto materiale *rispetto ad un punto, detto “polo”, dal quale si misura la posizione  $\vec{r}$*  — vd Fig. 15.1.

A causa delle proprietà del prodotto vettoriale, il momento angolare è sempre ortogonale al piano contenente  $\vec{r}$ ,  $\vec{p}$ . Inoltre, ciò che conta è la componente di  $\vec{p}$  ortogonale a  $\vec{r}$  (quantità di moto trasversa,  $\vec{p}_\perp$ ), o viceversa la componente di  $\vec{r}$  ortogonale a  $\vec{p}$  (“parametro d’impatto”,  $\vec{r}_\perp$ ):

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}_\perp = \vec{r}_\perp \times \vec{p} \quad (15.4)$$

In particolare, un moto radiale ( $\vec{p} \parallel \vec{r}$ ,  $\vec{r}_\perp = 0$ ) è privo di momento angolare.

Analogamente, il momento torcente è sempre ortogonale al piano contenente  $\vec{r}$ ,  $\vec{F}$ . Inoltre, ciò che conta è la componente di  $\vec{F}$  ortogonale a  $\vec{r}$  (forza trasversa,  $\vec{F}_\perp$ ), o viceversa la componente di  $\vec{r}$  ortogonale a  $\vec{F}$



(“braccio”,  $\vec{r}_\perp$ ):

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_\perp = \vec{r}_\perp \times \vec{F} \quad (15.5)$$

In particolare, una forza radiale ( $\vec{F} \parallel \vec{r}$ ) non produce momento torcente.

## 15.2 Alcuni casi notevoli

### 15.2.1 Moto libero

In questo caso  $\vec{F} = 0$ , e quindi anche  $\vec{M} = 0$ . Quindi  $\vec{L}$  deve essere costante. Questo è verificato, come è facile vedere dalla scrittura  $\vec{L} = \vec{r}_\perp \times \vec{p}$ : ovviamente  $\vec{p}$  deve essere costante; inoltre,  $\vec{r}$  cambia nel tempo, ma  $\vec{r}_\perp$  è costante; dunque tutto ok.

### 15.2.2 Moto su un piano

Consideriamo il caso particolare in cui il moto è su un piano. In tal caso, scegliamo l'origine  $O$  nel polo, e gli assi  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  sul piano del moto.

Questo ci consente di lavorare con le coordinate polari  $r, \phi$ , introdotte nella Sezione 4.5.1, Eq. (4.16)

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \\ y &= r \sin \phi \end{aligned} \quad (15.6)$$

Introduciamo la *velocità angolare*  $\omega$  e la *velocità radiale*  $v_r$ :

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} \quad ; \quad v_r = \frac{dr}{dt}$$

e calcoliamo le componenti  $v_x, v_y$  della velocità in coordinate polari:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{d(r \cos \phi)}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos \phi + r \frac{d(\cos \phi)}{dt} \\ &= v_r \cos \phi - r \sin \phi \frac{d\phi}{dt} \\ &= v_r \cos \phi - \omega r \sin \phi \\ v_y &= \frac{d(r \sin \phi)}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin \phi + r \frac{d(\sin \phi)}{dt} \\ &= v_r \sin \phi + r \cos \phi \frac{d\phi}{dt} \\ &= v_r \sin \phi + \omega r \cos \phi \end{aligned} \quad (15.7)$$

Il momento angolare deve essere diretto lungo  $\hat{z}$ , e deve essere tale che:

$$L_z = m(xv_y - yv_x) \quad (\text{moto piano}) \quad (15.8)$$

In coordinate polari

$$\begin{aligned} xv_y - yv_x &= (r \cos \phi)(v_r \sin \phi + \omega r \cos \phi) - (r \sin \phi)(v_r \cos \phi - \omega r \sin \phi) \\ &= \omega r^2 \end{aligned}$$

(le parti in  $rv_r$  hanno segni opposti e si cancellano, le parti in  $\omega r^2$  si sommano — si ricordi  $\cos^2 + \sin^2 = 1$ ). Quindi:

$$L_z = mr^2 \omega \quad (\text{moto piano}) \quad (15.9)$$

Se il moto deve restare sul piano, vuol dire che  $\vec{F}$  non deve avere componente lungo  $\hat{z}$ . Quindi anche  $\vec{M}$  è lungo  $\hat{z}$  e tale che:

$$M_z = m(xa_y - ya_x) \quad (\text{moto piano}) \quad (15.10)$$

Si può calcolare  $M_z$  derivando l'Eq. (15.9):

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = mr^2 \frac{d\omega}{dt} + 2m\omega rv_r \quad (\text{moto piano}) \quad (15.11)$$

La quantità  $\frac{d\omega}{dt}$  è la *accelerazione angolare*.

### 15.2.3 Forza radiale

Una forza radiale è parallela a  $\vec{r}$ <sup>[2]</sup>:

$$\vec{F} \parallel \vec{r}$$

quindi  $\vec{F}_\perp = 0$ ,  $\vec{M} = 0$ , e  $\vec{L}$  deve essere costante.

La conservazione del momento angolare ha importanti conseguenze sul moto, che aiutano ad integrare le equazioni e trovare la legge oraria. Anzitutto *la traiettoria giace sempre su un piano*. Infatti, scegliamo gli assi cartesiani in modo che l'asse  $z$  sia diretto lungo  $\vec{L}$ , cosicché  $L_x = L_y = 0$ . Poiché

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} \quad (15.12)$$

<sup>2</sup> Si noti: una forza radiale, in generale, non è un campo di forza centrale.

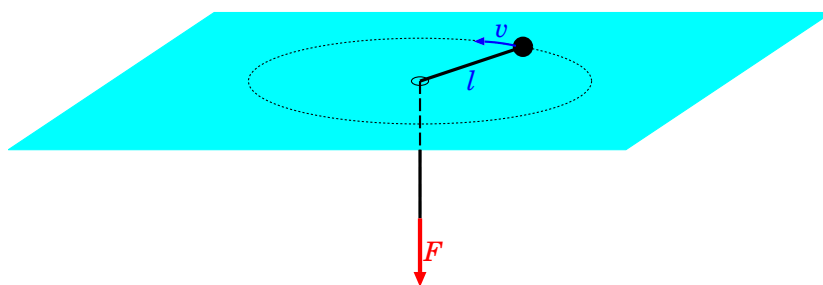


Figura 15.2:

$\vec{L}$  deve essere ortogonale a  $\vec{r}$ , quindi  $\vec{r}$  deve giacere sul piano  $Oxy$ , ovvero  $z = 0$ . D'altra parte anche la velocità  $\vec{v}$  deve essere ortogonale a  $\vec{L}$ , quindi  $v_z = 0$ .

In conclusione, l'oggetto non può uscire dal piano  $Oxy$ , pertanto la sua traiettoria sarà sempre contenuta su questo piano. Quindi possiamo usare tutti i risultati ottenuti nella precedente Sezione 15.2.2.

La conservazione del momento angolare implica che  $L$  è costante. Utilizzando l'Eq. (15.9), significa che:

$$\omega r^2 = \frac{L}{m} = \text{costante} \quad (\text{forza radiale}) \quad (15.13)$$

Riassumiamo quanto trovato finora. *Il moto soggetto a forza radiale è caratterizzato dalla conservazione del momento angolare. Di conseguenza la traiettoria giace su un piano. Inoltre la velocità angolare  $\omega$  è sempre inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal centro della forza:*  
 $\omega \propto \frac{1}{r^2}$ .

---

### Esempio: moto rotatorio di una massa vincolata da una corda

---

Una massa  $m$  è trattenuta da una corda di lunghezza  $\ell$ , che viene tesa con una forza  $F$ , come in Fig. 15.2. Per compiere una traiettoria circolare, a velocità  $v$ , quanto deve valere  $F$ ? Che succede se la corda viene tirata, in modo da accorciarsi, oppure rilasciata in modo da allungarsi? Come cambia la velocità?

Anzitutto, per lunghezza  $\ell$  fissata, la forza che trattiene la corda deve produrre la forza centripeta, quindi  $F = m\omega^2\ell = m\frac{v^2}{\ell}$ . Se  $F$  è maggiore di questo valore, la corda si accorcia; viceversa, se  $F$  è minore la corda si allunga.

La forza, in ogni caso, è radiale, quindi non produce momento torcente. Di conseguenza, il momento angolare  $L = mv_{\perp}\ell$  è costante. Qui,  $v_{\perp}$  è la componente della velocità perpendicolare alla corda. Nel caso di traiettoria circolare  $v_{\perp} = v$ ,

ma nelle fasi in cui la corda si accorcia o si allunga esiste anche una componente radiale  $v_r = \frac{d\ell}{dt}$  della velocità, che però non entra nel calcolo di  $L$ . In ogni caso,  $v_\perp \ell$  è una costante. Per  $\ell$  che non varia,  $v\ell$  è costante.

Quindi, se la corda viene accorciata  $v$  aumenta, se viene allungata  $v$  diminuisce. La stessa cosa avviene all'energia cinetica,  $\mathcal{E} = \frac{m}{2}v^2$ : questo è dovuto al lavoro fatto dalla forza applicata alla corda. Il lavoro elementare è  $\delta\mathcal{W} = -F d\ell$ : il segno “-” è dovuto al fatto che  $F$  è diretta verso il centro, mentre  $d\ell > 0$  si riferisce ad uno spostamento verso l'esterno. Se la corda si accorcia, fa lavoro positivo, dunque fa aumentare  $\mathcal{E}$ ; viceversa, allungandosi, fa lavoro negativo e fa diminuire  $\mathcal{E}$ .

### 15.2.4 Moti in un campo di forza centrale

Il campo di forza centrale:

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r) \hat{r}$$

produce (ovviamente) una *forza radiale*. In questo caso, il momento angolare  $\vec{L}$  si conserva, e il moto è sul piano ortogonale a  $\vec{L}$ . Si può scegliere l'asse  $z$  lungo  $\vec{L}$  e usare le coordinate  $(x, y)$ , o equivalentemente  $(r, \phi)$ , per descrivere il moto:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \\ y &= r \sin \phi \end{aligned} \tag{15.14}$$

Inoltre, la velocità angolare  $\omega$  e la distanza  $r$  dal centro di forza sono nella relazione:

$$\omega r^2 = \frac{L}{m} = \text{costante} \quad (\text{campo centrale}) \tag{15.15}$$

Per fare un esempio notevole, queste proprietà sono riscontrabili nelle orbite dei pianeti intorno al Sole.

### 15.2.5 Orbite circolari in un campo di forza centrale

In un campo centrale *attrattivo* ( $F(r) < 0$ ), possono esistere traiettorie (“orbite”) circolari. Prima di procedere nella spiegazione, mettiamo in chiaro che *in generale, le orbite non sono circolari*, lo sono in condizioni molto particolari, che ora andiamo a discutere.

Un'orbita circolare mantiene sempre la stessa distanza  $r$  dal centro. Grazie alla conservazione del momento angolare, Eq. (15.15), anche  $\omega$  è

costante. Quindi  $v = \omega r$  è costante, e l'accelerazione tangenziale è nulla. Si tratta dunque di un *moto circolare uniforme*, in cui esiste solo accelerazione centripeta,  $\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{r}$ . Uguagliando la forza radiale alla forza centripeta, e utilizzando l'Eq. (15.15), si trova:

$$\begin{aligned} F(r)\hat{r} &= \vec{F}_n = -m\omega^2\vec{r} \\ -F(r) &= m\omega^2 r \\ -F(r) &= \frac{L^2}{mr^3} \end{aligned}$$

L'ultima forma è utile per verificare che  $F(r)$  effettivamente dipende solo da  $r$  — cosa non palese nella forma che contiene  $\omega$ . Quest'ultima invece è utile per calcolare il *periodo dell'orbita*  $T$ , ovvero quanto tempo l'oggetto impiega per compiere un giro completo,  $\Delta\phi = 2\pi$ . Deve essere  $\omega T = 2\pi$ , ovvero:

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{-F(r)}{mr}} \\ T &= \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{mr}{-F(r)}} \end{aligned} \quad (15.16)$$

Analogamente, si può calcolare la velocità orbitale:

$$v = \omega r = \sqrt{\frac{-r F(r)}{m}} \quad (15.17)$$

Se l'oggetto viene lanciato con questa velocità  $v$ , a distanza  $r$  nel campo  $F(r)$ , l'orbita è sicuramente circolare.

Un esempio: se l'oggetto di massa  $m$  è un pianeta nel campo gravitazionale del Sole (massa  $M$ ), abbiamo  $F(r) = -\frac{GMm}{r^2}$ . Il periodo orbitale del pianeta è

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

### ————— L'orbita circolare è “stabile”? (\*) —————

*Se  $v$  e  $r$  non soddisfano esattamente l'Eq. (15.17), l'orbita non è più circolare. Che succede se le condizioni iniziali sono leggermente discoste da quelle ideali? L'orbita rimane “approssimativamente circolare” o devia rapidamente? Nel primo caso, si dice che l'orbita circolare è “stabile”.*

Per un dato valore di  $L$ , chiamiamo  $r_0$  il raggio dell'orbita circolare, cosicché  $-F(r_0) = \frac{L^2}{mr_0^3}$ , e studiamo che cosa succede per una piccola deviazione,  $r = r_0 + \delta r$ . Abbiamo due casi:

- $|F(r)| = -F(r) > \frac{L^2}{mr^3}$ : la forza centrale è più forte del necessario e tende a far diminuire  $r$ ;
- $|F(r)| = -F(r) < \frac{L^2}{mr^3}$ : la forza centrale è più debole del necessario e tende a far aumentare  $r$ ;

Definiamo

$$f(r) = \frac{L^2}{mr^3} + F(r)$$

cosicché

- $f(r) < 0 \implies r$  tende a diminuire;
- $f(r) > 0 \implies r$  tende ad aumentare.

La condizione di orbita stabile si realizza se, per  $\delta r > 0$ ,  $f(r) < 0$ , e viceversa — ovvero, se  $f(r)$  e  $\delta r$  sono discordi.

Calcoliamo  $f(r)$ , per piccola deviazione  $\delta r$ , ricordando che  $f(r_0) = 0$  per definizione.

$$\begin{aligned} f(r) &\simeq f(r_0) + \left[ \frac{d}{dr} \left( \frac{L^2}{mr^3} + F(r) \right) \right]_{r=r_0} \cdot \delta r \\ &= \left[ -3 \frac{L^2}{mr_0^4} + \left( \frac{dF}{dr} \right)_{r=r_0} \right] \cdot \delta r \\ &= \left[ 3 \frac{F(r_0)}{r_0} + \left( \frac{dF}{dr} \right)_{r=r_0} \right] \cdot \delta r \end{aligned}$$

Per avere orbita stabile occorre quindi che il termine in [ ] sia  $< 0$ , ovvero:

$$\left( \frac{dF}{dr} \right)_{r=r_0} < 3 \frac{L^2}{mr_0^4} = -3 \frac{F(r_0)}{r_0} \quad (\text{stabilità dell'orbita circolare})$$

cioè la condizione di stabilità per l'orbita circolare dipende da come varia  $F(r)$  al variare del raggio  $r$ .

Per forze gravitazionali e coulombiane attrattive,  $F(r) = -\frac{K}{r^2}$ , cosicché  $\frac{dF}{dr} = \frac{2K}{r^3}$ , mentre  $-3 \frac{F}{r} = \frac{3K}{r^3}$ , quindi la condizione di stabilità è sempre realizzata.

### 15.3 Forza impulsiva

Ricordiamo che una forza impulsiva  $\vec{F}_{imp}$ , agente in un breve intervallo di tempo  $\Delta t$ , è caratterizzata da un *impulso*

$$\vec{\mathcal{I}} = \int_t^{t+\Delta t} \vec{F}_{imp}(t') dt'$$

(vd Sezione 8.6.1). L'effetto di una forza impulsiva sul momento angolare può essere calcolato come:

$$\Delta \vec{L} = \int_t^{t+\Delta t} \vec{r}(t') \times \vec{F}_{imp}(t') dt'$$

Ora, assumendo che  $\Delta t$  sia molto breve, la variazione di  $\vec{r}(t')$  nell'intervallo di tempo  $[t; t + \Delta t]$ , deve essere molto piccola,  $\Delta \vec{r} \simeq \vec{v} \Delta t$ , pertanto si può considerare  $\vec{r}$  costante sull'intervallo di integrazione, ottenendo quindi:

$$\Delta \vec{L} \simeq \vec{r} \times \left[ \int_t^{t+\Delta t} \vec{F}_{imp}(t') dt' \right] = \vec{r} \times \vec{\mathcal{I}}$$

### 15.4 Lavoro del momento torcente

Consideriamo un punto materiale in  $\vec{r}$ , su cui agisce una forza  $\vec{F}$ . La sua velocità può essere scomposta in una componente radiale,  $v_r$ , e in una trasversa: infatti, scrivendo  $\vec{r} = r \hat{r}$ , abbiamo:

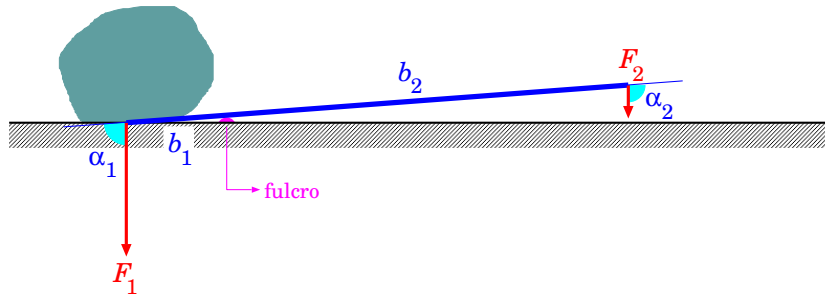
$$\vec{v} = \frac{d}{dt} (r \hat{r}) = \frac{dr}{dt} \hat{r} + r \frac{d\hat{r}}{dt}$$

Ora, il versore  $\hat{r}$  non può che subire variazioni di direzione, pertanto può essere descritto come un vettore di modulo costante che ruota attorno a un asse con velocità angolare  $\omega$ . Il problema è analogo a quello trattato in Sezione 7.6.4, quindi  $\frac{d\hat{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{r}$ . In conclusione possiamo scrivere che:

$$\vec{v} = v_r \hat{r} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Ora, la potenza prodotta dalla forza si può scrivere come:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \vec{F} \cdot \vec{v} \\ &= \vec{F} \cdot (v_r \hat{r} + \vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{F} \cdot \hat{r} v_r + \vec{F} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= F_r v_r + \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) = F_r v_r + \vec{\omega} \cdot \vec{M} \end{aligned}$$

Figura 15.3: *Leva meccanica*

(abbiamo sfruttato l'identità vettoriale  $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$ ).

Quindi la potenza ha due contributi: uno dalla forza radiale,  $\mathcal{P}_r = F_r v_r$ , l'altro che viene dal momento torcente e dalla rotazione,  $\mathcal{P}_M = \vec{\omega} \cdot \vec{M}$ . Nei problemi di moto circolare,  $v_r = 0$ , quindi resta la potenza sviluppata dal momento torcente.

## 15.5 Leve meccaniche

Un'applicazione pratica del momento torcente è nelle *leve meccaniche*. È noto che, dovendo sollevare o spostare una grossa massa, è conveniente utilizzare una sbarra rigida appoggiata in un punto — il “fulcro” — vd Fig. 15.3. Le due parti in cui il fulcro divide la sbarra si chiamano “bracci”. La massa da sollevare esercita una forza  $\vec{F}_1$  sul braccio  $\vec{b}_1$ , pertanto produce un momento torcente

$$\vec{M}_1 = \vec{b}_1 \times \vec{F}_1$$

All'altro estremo della leva viene applicata una forza  $\vec{F}_2$  sul braccio  $\vec{b}_2$ , producendo un momento torcente

$$\vec{M}_2 = \vec{b}_2 \times \vec{F}_2$$

Guardando la figura, ci si rende conto che  $\vec{M}_1$ ,  $\vec{M}_2$  hanno entrambi la stessa direzione, ortogonale al piano del disegno, con  $\vec{M}_1$  “uscente” dal disegno e  $\vec{M}_2$  “entrante”. Pertanto ragioniamo senza i vettori, e per tenere conto dell'orientamento opposto dei due momenti, diamo per convenzione segno + a  $M_1$  e segno - a  $M_2$ , cosicché:

$$\begin{aligned} M_1 &= b_1 F_1 \sin \alpha_1 \\ M_2 &= -b_2 F_2 \sin \alpha_2 \end{aligned}$$



Notiamo dalla figura che, essendo  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  parallele,  $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$ , quindi  $\sin \alpha_2 = \sin \alpha_1$ . Per tenere la leva in equilibrio, deve essere

$$0 = M_{tot} = M_1 + M_2 = b_1 F_1 \sin \alpha_1 - b_2 F_2 \sin \alpha_2$$

ovvero

$$b_1 F_1 = b_2 F_2 \quad (\text{equilibrio})$$

Un piccolo eccesso in  $F_2$  consente di sollevare il peso:

$$F_2 > \frac{b_1}{b_2} F_1 \quad (\text{sollevamento})$$

Con una opportuna scelta dei bracci, ovvero con  $b_2$  molto più lungo di  $b_1$ , è possibile sollevare un grosso peso ( $F_1$ ) applicando una forza  $F_2$  relativamente piccola. La leva è un “amplificatore di forza”.

È interessante fare anche una considerazione sul lavoro fatto dalle forze. Che lavoro deve fare  $F_2$  per sollevare il peso di uno spostamento  $\Delta s_1$ ? Se la leva compie una rotazione intorno al fulcro di un angolo  $\Delta \alpha$ , gli estremi dei bracci  $b_1$ ,  $b_2$  compiono spostamenti:

$$\Delta s_1 = b_1 \Delta \alpha \quad ; \quad \Delta s_2 = b_2 \Delta \alpha$$

quindi  $\Delta s_2 = \frac{b_2}{b_1} \Delta s_1$ . Pertanto il lavoro di  $F_2$  è

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_2 &= F_2 \Delta s_2 = \underbrace{F_2}_{> \frac{b_1}{b_2} F_1} \cdot \frac{b_2}{b_1} \Delta s_1 > F_1 \Delta s_1 \end{aligned}$$

Senza l’uso della leva, per sollevare il peso dovremmo applicarvi direttamente una forza  $F'_2 > F_1$ . Per compiere uno spostamento  $\Delta s_1$  dovremmo fare un lavoro

$$\mathcal{W}'_2 = F'_2 \Delta s_1 > F_1 \Delta s_1$$

In entrambi i casi, il lavoro applicato ( $\mathcal{W}_2$  con la leva,  $\mathcal{W}'_2$  senza leva) deve essere  $> F_1 \Delta s_1$ .

La leva *non è un amplificatore di lavoro!!* Se un essere umano, o animale, o anche una macchina, è in grado di fornire una certa quantità di lavoro, questa non può essere aumentata.

## 15.6 Principio di azione-reazione e conservazione del momento angolare

Consideriamo due oggetti (1) e (2) che si scambiano forze  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  ciascuno sull'altro, e supponiamo che non esistano altre forze esterne. Le due forze soddisfano il principio di azione-reazione:  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ , inoltre entrambe sono dirette lungo la direzione congiungente i due oggetti. Le variazioni dei momenti angolari dei due oggetti sono:

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

(con  $i = 1, 2$  per indicare ciascuno dei due oggetti), pertanto la variazione del momento angolare *totale*  $\vec{L}_1 + \vec{L}_2$  è:

$$\frac{d(\vec{L}_1 + \vec{L}_2)}{dt} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 = 0$$

Nella seconda uguaglianza abbiamo introdotto  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ . La terza uguaglianza si ottiene sfruttando la proprietà che  $\vec{F}_1$  è parallela alla direzione congiungente i due oggetti, che è lungo il vettore  $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ : pertanto abbiamo un prodotto vettoriale fra due vettori paralleli, che è sempre nullo.

Riassumendo: *quando due oggetti sono sottoposti solo alle reciproche forze — cioè senza ulteriori forze esterne — il loro momento angolare totale si conserva, ovvero è una costante del moto.*

Nella dimostrazione abbiamo usato la legge di azione-reazione, in particolare il fatto che la forza fra (1) e (2) sia parallela alla linea congiungente i due oggetti. Se ciò non è vero, per esempio come in Fig. 8.2(d), la conservazione del momento angolare viene violata.

# Capitolo 16

## Sistemi di riferimento, forze fittizie

### 16.1 Alcune considerazioni preliminari

Abbiamo già detto che per definire posizione, velocità, accelerazione (rispettivamente  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{a}$ ) nello spazio 3-dimensionale, è necessario anzitutto introdurre un sistema di riferimento, rispetto al quale si definiscono le posizioni.

Riprendendo questi concetti, un sistema di riferimento è specificato una volta che si definisce l'*origine*  $O$  e tre versori  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$  che danno l'orientamento dei tre assi cartesiani. Pertanto, d'ora in poi indicheremo un sistema di riferimento come  $(O; \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  — questa notazione contiene tutte le informazioni necessarie a definirlo.

Stabilito il sistema di riferimento, qualunque posizione  $\vec{r}$  è individuabile con le tre coordinate cartesiane  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{r} \equiv (x, y, z) \quad (16.1)$$

Le due scritture sono equivalenti, quando il sistema di riferimento  $(O; \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  sia specificato.

Ora si pone la questione: come si sceglie un sistema di riferimento? In generale c'è arbitrarietà: quindi si sceglie quello “più conveniente”, nel senso che ci permette di descrivere in maniera più agevole le posizioni e i moti degli oggetti che stiamo esaminando. In prima istanza, un *osservatore* sceglierà un sistema di riferimento nel quale esso si trovi “fermo”, e possibilmente nell'origine, cosicché tutte le posizioni sono misurate rispetto alla sua. Non è

detto però che questa scelta sia la più conveniente per descrivere la dinamica degli oggetti osservati <sup>[1]</sup>. Vediamo alcuni esempi.

- [1] Un osservatore  $O$  è fermo sulla superficie della Terra, e fa esperimenti lanciando in aria oggetti con velocità e angoli diversi. Come sistema di riferimento sceglie quello in cui l'origine  $O$  si trova nel luogo dell'osservatore, l'asse  $\hat{z}$  punta verso l'alto, gli assi  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  sono orizzontali e ortogonali fra loro. I moti che osserva soddisfano tutti le caratteristiche studiate nella Sezione 7.5.4: sono rettilinei uniformemente accelerati se la velocità iniziale è nulla o verticale, altrimenti moti parabolici. Fin qui, niente di strano...
- [2] Su un'auto in moto rettilineo uniforme, un osservatore  $O'$  “vede il paesaggio muoversi all'indietro”. Fin dai primi anni di vita, ci convinciamo che si tratta di un'illusione: la ragione è che l'auto si sta muovendo in avanti. Anche qui, niente di nuovo... Se l'auto passa velocemente vicino all'osservatore  $O$  dell'esempio precedente, l'osservatore  $O'$  vede che anche  $O$  si muove, ma capisce che la causa è nel proprio movimento, per cui sarebbe portato a dedurre che il sistema di riferimento scelto da  $O$  sia migliore, in quanto “fermo”.
- [3] Sul ponte di una grossa nave, che si muove su un mare calmo a velocità  $\vec{w}$  costante e sempre nella stessa direzione, un osservatore  $O''$  si mette a fare esperimenti di caduta degli oggetti simili a quelli che l'osservatore  $O$  compie a terra. Si accorge che le caratteristiche dei moti sono le stesse che ha osservato  $O$ , però  $O''$  le sta riferendo al *proprio* sistema di riferimento.  $O''$  usa un sistema di riferimento che si muove con la nave: per lui/lei il ponte della nave è *fermo*. Se lancia un oggetto esattamente in verticale, questo ricade esattamente dove è stato lanciato: l'osservatore riesce ad afferrarlo senza spostarsi sul ponte, *anche se nel frattempo la nave è andata avanti*.

Soffermiamoci un attimo su questo punto. L'osservatore  $O''$  potrebbe dimenticarsi che la nave è in moto. Lancia l'oggetto in alto, la velocità iniziale,  $\vec{v}_0 = v_0\hat{z}$ , è diretta lungo la stessa linea della accelerazione di gravità,

---

<sup>1</sup> Pensate al “sistema tolemaico”, in cui la Terra era il riferimento e l'origine, e il moto della Luna, del Sole, dei pianeti e delle stelle erano tutti descritti rispetto alla Terra. Con la Luna, il Sole e le stelle la descrizione funzionava abbastanza bene, ma con i pianeti... era decisamente complicata! Copernico, Keplero e Galileo capirono che scegliere la Terra come sistema di riferimento non era una scelta conveniente, e trovarono un riferimento migliore: il Sole. Viceversa, per studiare il moto di oggetti che percorrono pochi metri, per tempi di pochi secondi o minuti, scegliere un riferimento solidale con la Terra va benissimo.

$\vec{a} = -g\hat{z}$ , quindi per quanto studiato nella Sezione 7.5.2, il moto è *rettilineo* uniformemente accelerato. Questo è esattamente ciò che  $O''$  rileva.

Un eventuale osservatore  $O$  posto a terra, che osserva con un binocolo gli esperimenti di  $O''$ , darebbe una descrizione diversa. La nave si muove con velocità costante  $\vec{w}$ . Quindi, anche l'osservatore  $O''$  ha la stessa velocità: da quando ha lanciato l'oggetto a quando lo ha ripreso,  $O''$  si è mosso in avanti insieme alla nave. D'altronde, per  $O$ , anche l'oggetto lanciato non si muove solo in verticale: al momento del lancio, esso possiede una componente orizzontale di velocità pari a  $\vec{w}$ . Perché? Quando, sulla nave,  $O''$  lancia l'oggetto "verso l'alto", imprime ad esso una forza verticale, quindi ne altera lo stato di moto (prima era "fermo") lungo la verticale. Non applica forze in orizzontale, quindi la componente orizzontale della velocità non cambia: vista dalla nave, essa resta nulla; vista da terra, essa resta pari a  $\vec{w}$ . Quindi, per l'osservatore  $O$ , la situazione è comprensibile:  $O''$  si muove con velocità  $\vec{w}$ , l'oggetto lanciato compie una traiettoria parabolica (non più rettilinea — vd sempre Sezione 7.5.2: in questo caso,  $\vec{v}_0$  non è più allineato con  $\vec{a}$ ), ma siccome la componente orizzontale della velocità dell'oggetto lanciato è sempre  $\vec{w}$ , invariata, alla fine quando l'oggetto cade ha percorso in orizzontale la stessa distanza di  $O''$ , quindi  $O''$  lo può riprendere senza spostarsi sul ponte della nave.

Da questo esempio si conclude una cosa importante: gli osservatori  $O$  e  $O''$  non possono concludere, sulla base di esperimenti fisici, quale sistema di riferimento è migliore: in entrambi, le *stesse* leggi della caduta degli oggetti sono rispettate. Ricordiamo che  $O''$  si muove rispetto a  $O$  a *velocità costante*. Anche l'osservatore  $O'$  sull'auto arriverebbe alle stesse conclusioni, se avesse abbastanza spazio per lanciare oggetti... Si potrebbe obiettare che, comunque, l'osservatore  $O$  ha un sistema di riferimento migliore, perché è "fermo sulla terra". Ma la Terra è ferma???? Sappiamo di no...

Ora consideriamo altri esempi.

- [4] L'auto su cui si trova  $O'$  deve frenare improvvisamente, oppure deve curvare in velocità. L'osservatore  $O'$ , che stava bevendo da un bicchiere colmo, rischia di rovesciarselo addosso.
- [5] La nave su cui si trova  $O''$  incontra un tratto di mare mosso e comincia a sobbalzare. Non solo  $O''$  non riesce più a fare gli esperimenti come si deve, ma anche i suoi amici che giocavano a scacchi devono interrompere e raccogliere tutti i pezzi prima che rotolino ovunque. Che cosa è successo?

Un osservatore da terra descriverebbe la situazione così: sull'auto, o sulla nave, stanno agendo forze che ne alterano il moto, cosicché esso non è più rettilineo uniforme: l'auto frena o curva, la nave sobbalza... Queste forze però non agiscono direttamente sull'acqua nel bicchiere e sugli scacchi, che continuano il loro moto rettilineo uniforme (almeno per un po', finché per contatto non vengono trascinati dall'ambiente). Per esempio, se l'auto frena, l'osservatore  $O'$ , trattenuto dal sedile e dalla cintura di sicurezza, e anche il bicchiere, trattenuto dalla mano, rallentano, ma l'acqua nel bicchiere tende ad andare avanti come prima, quindi esce dal bicchiere.

Invece, gli osservatori  $O'$ ,  $O''$ , dal loro punto di vista, vedono oggetti che si muovono in balia di "forze" inspiegate. L'unico modo che hanno per comprendere ciò che accade è ammettere che i loro sistemi di riferimento non sono buoni per descrivere le leggi fisiche.

Che cosa dobbiamo concludere? Negli esempi [2] e [3], sembrava che  $O'$ ,  $O''$  avessero dei sistemi di riferimento tanto buoni quanto  $O$ , mentre dagli esempi [4] e [5] si direbbe il contrario. Ciò che è successo è che nei primi esempi, la velocità di  $O'$ ,  $O''$  rispetto a  $O$  era *costante*, mentre negli ultimi esempi non lo era più.

Fin qui abbiamo esposto il problema in maniera qualitativa: le prossime sezioni sono dedicate alla formalizzazione quantitativa.

## 16.2 Sistemi di riferimento in moto traslatorio relativo

Consideriamo due sistemi di riferimento ("SR") ( $O; \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ ) e ( $O'; \hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$ ). Nel caso più generale, essi potranno avere origini collocate in luoghi diversi, che si muovono diversamente. Pertanto ciascuno dei SR appare in moto, se visto dall'altro.

In linea di principio, anche gli assi cartesiani  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  e  $\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$  possono essere orientati diversamente, e addirittura possono ruotare.

Di SR in rotazione ci occuperemo nella Sezione 16.5. Qui consideriamo il caso di *assi cartesiani paralleli fra i due sistemi*, come in Fig. 16.1, cosicché

$$\hat{x} \equiv \hat{x}' \quad ; \quad \hat{y} \equiv \hat{y}' \quad ; \quad \hat{z} \equiv \hat{z}'$$

Ciò che cambia dunque è la posizione relativa di  $O$  e  $O'$ . Conviene scegliere uno dei due SR per definire anche il moto relativo dell'altro. Quindi definiamo

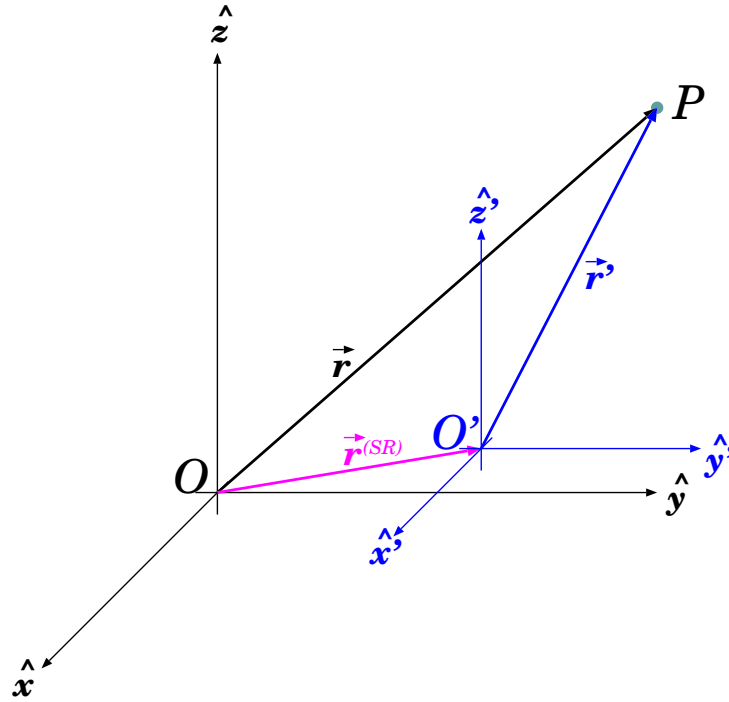


Figura 16.1: Due sistemi di riferimento,  $(O; \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  e  $(O'; \hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$ , che traslano l'uno rispetto all'altro, mantenendo gli assi cartesiani paralleli.

la posizione di  $O'$  rispetto a  $O$ :

$$\vec{r}^{(SR)} \equiv \vec{OO}' \quad (16.2)$$

Possiamo facilmente definire anche la *velocità*  $\vec{v}^{(SR)}$  e l'*accelerazione*  $\vec{a}^{(SR)}$  di  $O'$  rispetto a  $O$ :

$$\vec{v}^{(SR)} = \frac{d\vec{r}^{(SR)}}{dt} \quad (16.3)$$

$$\vec{a}^{(SR)} = \frac{d\vec{v}^{(SR)}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}^{(SR)}}{dt^2} \quad (16.4)$$

Come si trasformano le coordinate  $(x, y, z)$  di un oggetto  $P$ , quando passiamo dal SR  $(O; \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  al SR  $(O'; \hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$ ?

Chiamiamo rispettivamente  $\vec{r}$  e  $\vec{r}'$  i vettori-posizione di  $P$  in ciascuno dei due riferimenti, come in Fig. 16.1. Possiamo ragionare sulla composizione degli spostamenti. Il vettore  $\vec{r}$  descrive uno spostamento  $O \rightarrow P$ . Esso può essere scomposto in uno spostamento  $O \rightarrow O'$ , descritto dal vettore  $\vec{r}^{(SR)}$ , seguito da uno spostamento  $O' \rightarrow P$ , descritto dal vettore  $\vec{r}'$ . Pertanto:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}^{(SR)} \quad (16.5)$$

Ora, ricordiamo che

$$\begin{aligned}
 \vec{r} &= x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \\
 \vec{r}' &= x'\hat{x}' + y'\hat{y}' + z'\hat{z}' \\
 &\equiv x'\hat{x} + y'\hat{y} + z'\hat{z} \\
 \vec{r}^{(SR)} &= x^{(SR)}\hat{x} + y^{(SR)}\hat{y} + z^{(SR)}\hat{z}
 \end{aligned} \tag{16.6}$$

Poiché gli assi cartesiani nei due SR coincidono, il passaggio alle coordinate cartesiane è immediato:

$$\begin{aligned}
 x &= x' + x^{(SR)} \\
 y &= y' + y^{(SR)} \\
 z &= z' + z^{(SR)}
 \end{aligned} \tag{16.7}$$

Possiamo ora ricavare le trasformazioni della velocità di  $P$ , ovvero che relazione esiste fra la velocità  $\vec{v}$ , come vista dal SR  $(O; x, y, z)$ , e la velocità  $\vec{v}'$ , come vista dal SR  $(O'; x', y', z')$ . Tali velocità sono definite come:

$$\begin{aligned}
 \vec{v} &= \frac{dx}{dt}\hat{x} + \frac{dy}{dt}\hat{y} + \frac{dz}{dt}\hat{z} \\
 \vec{v}' &= \frac{dx'}{dt}\hat{x}' + \frac{dy'}{dt}\hat{y}' + \frac{dz'}{dt}\hat{z}' \\
 &\equiv \frac{dx'}{dt}\hat{x} + y'\hat{y} + z'\hat{z} \\
 \vec{v}^{(SR)} &= \frac{dx^{(SR)}}{dt}\hat{x} + \frac{dy^{(SR)}}{dt}\hat{y} + \frac{dz^{(SR)}}{dt}\hat{z}
 \end{aligned} \tag{16.8}$$

Derivando rispetto a  $t$  le Eq. (16.6), ricordando che i versori sono costanti, e usando le Eq. (16.8), si ottiene:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}^{(SR)} \tag{16.9}$$

che in coordinate cartesiane si scrive:



$$\begin{aligned}
v_x &= v'_x + v_x^{(SR)} \\
v_y &= v'_y + v_y^{(SR)} \\
v_z &= v'_z + v_z^{(SR)}
\end{aligned}
\tag{16.10}$$

Un discorso analogo si può fare con l'accelerazione, ottenendo:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}^{(SR)} \tag{16.11}$$

e per coordinate cartesiane:

$$\begin{aligned}
a_x &= a'_x + a_x^{(SR)} \\
a_y &= a'_y + a_y^{(SR)} \\
a_z &= a'_z + a_z^{(SR)}
\end{aligned}
\tag{16.12}$$

### 16.2.1 Una riflessione sulle trasformazioni di velocità (\*)

Nella derivazione delle trasformazioni

$$\vec{r} = \vec{r}^{(SR)} + \vec{r}' \quad ; \quad \vec{v} = \vec{v}^{(SR)} + \vec{v}' \quad ; \quad \vec{a} = \vec{a}^{(SR)} + \vec{a}'$$

sono “nascoste” due ipotesi. La prima è contenuta nella scrittura  $\vec{r} = \vec{r}^{(SR)} + \vec{r}'$ : dobbiamo infatti ricordare che  $\vec{r}$ ,  $\vec{r}^{(SR)}$  sono definiti nel SR  $(O; x, y, z)$ , mentre  $\vec{r}'$  è definito nel SR  $(O'; x', y', z')$ . Quando facciamo la somma vettoriale, stiamo implicitamente assumendo che

- (i) un vettore-spostamento definito in un SR è uguale anche se visto nell'altro SR.

Inoltre, quando facciamo le derivate rispetto a  $t$ , stiamo assumendo che il tempo sia “universale”, ovvero che

- (ii) il tempo  $t$  può essere definito in modo identico per i due SR.

Queste due ipotesi appaiono molto ragionevoli, ma non sono dimostrabili: vengono in realtà postulate! Effettivamente la loro validità è ben verificata, sperimentalmente, nell'ambito della meccanica newtoniana:

- (i) una qualunque asta rigida ha sempre la stessa lunghezza, se osservata in quiete o in moto, pertanto le stesse unità di misura di lunghezza sono universali, non dipendono dal SR;
- (ii) un orologio segna il tempo con lo stesso ritmo, sia che si trovi in quiete o in moto, pertanto anche le unità di misura del tempo non dipendono dal SR.

Solo per anticipare dove emerge il problema: la regola di composizione delle velocità,  $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}^{(SR)}$ , implica che non esistono velocità assolute: la velocità dipende dal SR in cui si osserva. Ebbene: la velocità di propagazione della luce nel vuoto,  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s, è assoluta! Cioè, uguale in qualunque SR, indipendentemente dal moto della sorgente di luce e dell'osservatore che la riceve. Questa peculiarità, che è alla base della Relatività Ristretta, ci indurrà ad una ridiscussione di quanto visto finora, come vedremo nel Capitolo 23.

Il problema si presenta quando le velocità diventano confrontabili con  $c$ .

## 16.2.2 Esercizi sulla trasformazione delle velocità

**Esercizio 16.1.** *Un treno viaggia su una rotaia rettilinea alla velocità  $v^{(SR)} = 260$  km/h. Due passeggeri (1) e (2), agli estremi dello stesso vagone, camminano l'uno verso l'altro, rispettivamente verso la testa e verso la coda del treno, e si incontrano a metà del vagone. Se il vagone è lungo  $\ell = 30$  m e i due passeggeri si incontrano dopo  $t = 10$  s, calcolare le velocità  $v'_1$ ,  $v'_2$  dei passeggeri rispetto al vagone. Quindi calcolare le velocità  $v_1$ ,  $v_2$  dei passeggeri, come appaiono se osservati da terra.*

**Risposta.** *Ciascun passeggero percorre una distanza  $\ell/2$  nel tempo  $t$ . Quindi,  $v'_1 = \frac{\ell/2}{t} = 1.5$  m/s e  $v'_2 = -\frac{\ell/2}{t} = -1.5$  m/s — i segni indicano che (1) cammina verso la testa del treno, direzione presa come positiva, mentre (2) cammina verso la coda.*

*Le velocità dei passeggeri, viste da terra, sono  $v_{1,2} = v'_{1,2} + v^{(SR)}$ . Conviene convertire  $v^{(SR)}$  in unità S.I.:  $v^{(SR)} = \frac{260 \text{ km/h}}{3.6} = 72.22$  m/s. Quindi  $v_1 = 73.72$  m/s e  $v_2 = 70.72$  m/s.*

**Esercizio 16.2.** *Un'automobile di lunghezza  $\ell_1 = 4.5$  m, che viaggia a velocità  $v_1 = 130$  km/h, deve sorpassare un autotreno di lunghezza  $\ell_2 = 23$  m che viaggia a velocità  $v_2 = 125$  km/h. Per motivi di sicurezza, l'auto non deve avvicinarsi all'autotreno più di  $\delta = 10$  m prima del sorpasso, e anche al rientro deve lasciare la stessa distanza. Quanto è lungo il sorpasso? (sia nel tempo, che nello spazio)*

**Risposta.** *Conviene risolvere il problema nel SR in cui l'autotreno è in quiete. La macchina ha velocità  $v'_1 = v_1 - v_2 = 5$  km/h = 1.389 m/s. La lunghezza del sorpasso è  $\Delta s' = \ell_1 + \ell_2 + 2\delta = 47.5$  m — infatti, se poniamo  $s' = 0$  sul retro dell'autotreno, il “muso” della macchina all'inizio del sorpasso si trova in  $s'_{in} = -\delta$ , mentre alla fine si trova in  $s'_{fin} = \ell_2 + \delta + \ell_1$ . Quindi il tempo impiegato è  $\Delta t = \frac{\Delta s'}{v'_1} = 34.2$  s. La distanza percorsa dalla macchina in questo tempo (misurata rispetto al SR dell'autostrada, quindi a velocità  $v_1 = 36.111$  m/s) è  $\Delta s = v_1 \Delta t = 1235$  m = 1.235 km.*

**Esercizio 16.3.** *Un nuotatore, in acqua ferma, riesce a nuotare alla velocità  $v_0 = 4$  km/h. L'acqua di un fiume scorre con velocità  $w = 2.5$  km/h. Quanto tempo impiega il nuotatore a percorrere 100 m nuotando nel fiume verso valle? E quanto impiega a percorrere la stessa distanza nuotando verso monte?*

**Risposta.** *Anche qui si devono trasformare le velocità dal SR del fiume a quello della terra. Il problema è unidimensionale (tutti i moti sono nella direzione del fiume). Quindi, dette  $v'$  e  $v$  le velocità del nuotatore rispetto al fiume e rispetto alla terra, e definendo positive le velocità verso valle, abbiamo:  $v = v' + w$ .*

*Quando il nuotatore va verso valle,  $v' = v_0$ , quindi  $v = (4 + 2.5)$  km/h = 6.5 km/h. Per percorrere 100 m impiega  $\frac{0.1 \text{ km}}{6.5 \text{ km/h}} = 0.01538$  h = 55.38 s.*

*Quando invece nuota verso monte,  $v' = -v_0$ , quindi  $v = (-4 + 2.5)$  km/h = -1.5 km/h. Per percorrere 100 m impiega  $\frac{-0.1 \text{ km}}{-1.5 \text{ km/h}} = 0.06667$  h = 240 s = 4 min.*

**Esercizio 16.4.** *Lo stesso nuotatore vuole attraversare lo stesso fiume, da una sponda all'altra, in modo da raggiungere la riva opposta nel punto di fronte a quello da cui è partito. Ovviamente sa che se nuotasse in direzione trasversale, la corrente del fiume lo sposterebbe a valle. Quindi dovrà nuotare obliquamente, parzialmente orientato verso monte. Qual è l'angolo  $\alpha$  che deve tenere rispetto alla direzione trasversale? Se il fiume è largo 12 m, quanto impiega il nuotatore ad attraversarlo?*

**Risposta.** *Qui il problema è bidimensionale. C'è la direzione in cui scorre il fiume, che chiamiamo  $x$ , e quella trasversale, che chiamiamo  $y$ . La velocità del nuotatore, rispetto all'acqua, ha componenti  $v'_x = -v_0 \sin \alpha$  e  $v'_y = v_0 \cos \alpha$ . La velocità del fiume ha componenti  $v_x^{(SR)} = w$  e  $v_y^{(SR)} = 0$ . La velocità del nuotatore rispetto a terra quindi ha componenti:*

$$v_x = v'_x + v_x^{(SR)} = -v_0 \sin \alpha + w \quad ; \quad v_y = v'_y + v_y^{(SR)} = v_0 \cos \alpha$$

*Poiché il nuotatore deve raggiungere la riva opposta senza spostarsi lungo il fiume, deve essere  $v_x = 0$ , ovvero  $v_0 \sin \alpha = w$ . Si deduce che  $\sin \alpha = \frac{w}{v_0} = 0.625$ , cioè  $\alpha = \sin^{-1}(0.625) = 0.675$  rad = 38.68°.*

Quindi la velocità trasversale è  $v_y = v_0 \cos \alpha = 3.122 \text{ km/h}$ . Il tempo per attraversare il fiume è  $\frac{0.012 \text{ km}}{3.122 \text{ km/h}} = 0.003844 \text{ h} = 13.84 \text{ s}$ .

**Esercizio 16.5.** Un viaggiatore seduto in treno in una giornata piovosa osserva la pioggia, che riga il finestrino. All'esterno non c'è vento, dunque la pioggia dovrebbe cadere verticale. Eppure, l'angolo di caduta della pioggia, dal treno in movimento, appare obliquo, di  $82^\circ$  rispetto alla verticale. Il treno viaggia alla velocità di  $150 \text{ km/h}$ . A che velocità cade la pioggia?

**Risposta:** La velocità della pioggia, rispetto a terra, è  $\vec{v} \equiv (0, 0, -v)$ , verticale e diretta verso il basso. La velocità del treno rispetto a terra è  $\vec{v}^{(SR)} = (v^{(SR)}, 0, 0)$ . Pertanto, la velocità della pioggia rispetto al treno è  $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}^{(SR)} = (-v^{(SR)}, 0, -v)$ . L'angolo  $\alpha$  che forma con la verticale è tale che  $\tan \alpha = \frac{v'_x}{v'_z} = \frac{v^{(SR)}}{v}$ . Quindi,  $v = \frac{v^{(SR)}}{\tan \alpha} = 21.08 \text{ km/h}$ .

### La formica sul filo elastico (\*)

(Esercizio impegnativo).

Un filo elastico, di lunghezza iniziale  $\ell_0$ , è ancorato ad un punto fisso ad una estremità, e viene teso sempre di più dall'altra estremità, in modo che all'istante  $t$  la sua lunghezza è  $\ell = \ell_0 + ut$  ( $u$  costante). Una formica, inizialmente situata all'estremità ancorata del filo, cammina sul filo a velocità  $v_0$  costante, rispetto al suo punto di contatto con il filo, dirigendosi verso l'altra estremità. Detta  $x$  la posizione della formica, misurata dall'estremità ancorata, qual è la legge oraria  $x(t)$ ? Quanto tempo impiega la formica a raggiungere l'altra estremità del filo? Quanta strada deve fare?

#### Soluzione

L'estremo mobile del filo, posto in posizione  $\ell$ , si sposta con velocità  $u$ ; assumendo che tutte le parti di filo si allungano in modo proporzionale, un generico punto  $P$  di filo in posizione  $x$  si deve spostare con velocità  $v_P = u \cdot \frac{x}{\ell}$ . Quindi la velocità della formica nel punto  $x$  è  $v = v_0 + v_P = v_0 + u \cdot \frac{x}{\ell}$ . Quindi:

$$\begin{aligned} v &= v_0 + u \cdot \frac{x}{\ell_0 + ut} \\ (\ell_0 + ut)v &= (\ell_0 + ut)v_0 + ux \end{aligned}$$

Derivando entrambi i membri, e ricordando che  $\frac{dx}{dt} = v$ ,

$$\begin{aligned} uv + (\ell_0 + ut) \frac{dv}{dt} &= uv_0 + uv \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{uv_0}{\ell_0 + ut} \\ dv &= uv_0 \frac{dt}{\ell_0 + ut} \\ v - v_0 &= \int_{v_0}^v dv' = v_0 \int_0^t dt' \frac{u}{\ell_0 + ut} = v_0 \ln \left( \frac{\ell_0 + ut}{\ell_0} \right) \\ v &= v_0 \left[ 1 + \ln \left( \frac{\ell_0 + ut}{\ell_0} \right) \right] \end{aligned}$$

Dall'equazione iniziale:

$$x = (\ell_0 + ut) \frac{v - v_0}{u} = (\ell_0 + ut) \frac{v_0}{u} \ln \left( \frac{\ell_0 + ut}{\ell_0} \right)$$

La formica raggiunge l'altra estremità quando  $x = \ell$ , ovvero:

$$\begin{aligned} \frac{u}{v_0} &= \ln \left( \frac{\ell_0 + ut}{\ell_0} \right) \\ \ell_0 + ut &= \ell_0 e^{(u/v_0)} \\ t &= \frac{\ell_0}{u} \left( e^{(u/v_0)} - 1 \right) \end{aligned}$$

Lo spazio totale percorso è ovviamente  $\ell$ , che al tempo  $t$  vale:

$$\ell = \ell_0 + ut = \ell_0 e^{(u/v_0)}$$

**Osservazioni.** Anzitutto, la formica arriva sempre in fondo: non importa quanto grande sia  $u$  rispetto a  $v_0$ . Ovviamente, se  $u \gg v_0$  il tempo e lo spazio percorsi crescono esponenzialmente! Viceversa, nel limite  $u \rightarrow 0$  (il filo è quasi costante) si può approssimare  $e^{(u/v_0)} \simeq 1 + \frac{u}{v_0}$ , cosicché il tempo diventa  $t \simeq \frac{\ell_0}{v_0}$  e  $\ell = \ell_0 \left( 1 + \frac{u}{v_0} \right)$ .

### 16.2.3 L'aberrazione stellare

L'aberrazione stellare è un fenomeno noto dal 1728, quando l'astronomo James Bradley si accorse che la posizione angolare di tutte le stelle nel cielo sembra descrivere, nel tempo di un anno, una piccola ellisse di diametro angolare  $\sim (40.5)''$  (secondi d'arco). Si noti: non è un movimento apparente

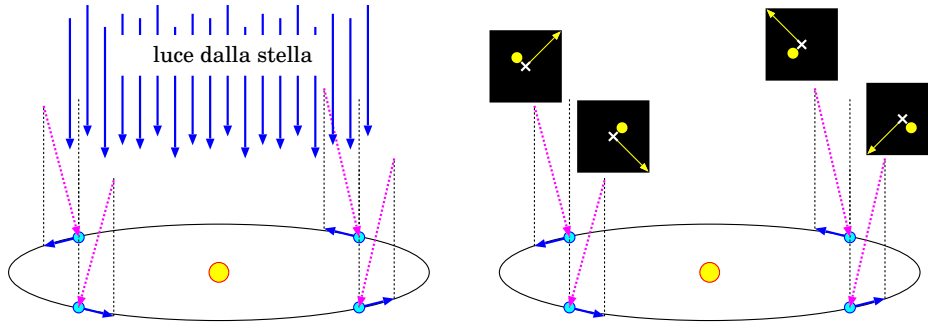


Figura 16.2: *Spiegazione dell'aberrazione stellare. A sinistra: la luce proveniente da una stella lontana arriva perpendicolare al piano orbitale della Terra (freccette blu); a causa del moto intorno al Sole, la stessa luce appare obliqua (freccette viola). A destra: i riquadri neri indicano la posizione vera della stella (crocette bianche), la posizione apparente (pallini gialli), e la direzione del Sole (freccette gialle). In tutti i casi si nota che lo spostamento apparente della stella è sempre a  $90^\circ$  dalla direzione del Sole: questo significa che l'effetto non può essere dovuto a parallasse.*

di stelle vicine su uno sfondo di stelle lontane: è comune a *tutte* le stelle — dunque non è parallasse (vd Sezione 4.7.4).

Il fenomeno è spiegato considerando che la Terra si muove intorno al Sole con una velocità di circa  $v^{(SR)} \simeq 29.8$  km/s. Immaginiamo una stella che si trova in direzione ortogonale al piano dell'orbita terrestre (vd Fig. 16.2): definiamo un SR  $(O; x, y, z)$  in cui il piano orbitale stia su  $(O; x, y)$  e la stella lungo l'asse  $z$ . I raggi di luce della stella raggiungono la Terra con velocità  $\vec{v} = -c \hat{z}$ . La Terra ad un certo istante si muove con velocità orbitale  $\vec{v}^{(SR)} = v^{(SR)} \hat{x}$  pertanto la velocità della luce dalla stella viene vista come

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}^{(SR)} \equiv (-v^{(SR)}, 0, -c)$$

e quindi appare deviata di un angolo  $\alpha$  pari a

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{v'_x}{v'_z} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{v^{(SR)}}{c} \right)$$

Dopo 6 mesi, la Terra ha invertito il suo moto, pertanto si muove con velocità  $\vec{v}^{(SR)} = -v^{(SR)} \hat{x}$  e quindi l'angolo di deviazione diventa  $-\alpha$ . Quindi l'angolo di aberrazione è  $2\alpha$ . Se proviamo a calcolarlo, con  $v^{(SR)} = 29.8$  km/s e  $c = 3 \cdot 10^5$  km/s, si ottiene

$$2\alpha = 0.0001987 \text{ rad} = 41''$$

dunque in buon accordo con le osservazioni di Bradley <sup>[2]</sup>.

## 16.3 SR in moto traslatorio rettilineo uniforme

### 16.3.1 Trasformazioni di Galileo

Consideriamo un caso particolare: il SR ( $O'; x', y', z'$ ) si muove di moto traslatorio rettilineo uniforme con velocità costante  $\vec{v}^{(SR)}$  rispetto al SR ( $O; x, y, z$ ). Possiamo anche assumere che all'istante  $t = 0$  le due origini coincidano:  $O' \equiv O$ . In tal caso il vettore  $\vec{r}^{(SR)}$  è semplicemente:

$$\vec{r}^{(SR)} = \vec{v}^{(SR)} t \quad (\text{trasformazioni di Galileo}) \quad (16.13)$$

Quindi la trasformazione delle coordinate è:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}^{(SR)} t \quad (\text{trasformazioni di Galileo}) \quad (16.14)$$

e quella per le velocità:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}^{(SR)} \quad (\text{trasformazioni di Galileo}) \quad (16.15)$$

Le accelerazioni infine appaiono uguali nei due SR:

$$\vec{a} = \vec{a}' \quad (\text{trasformazioni di Galileo}) \quad (16.16)$$

Le trasformazioni viste finora — Eq. (16.14), Eq. (16.15), e Eq. (16.16) — si chiamano *trasformazioni di Galileo*.

### 16.3.2 Dinamica in SR in moto relativo rettilineo uniforme

Il risultato  $\vec{a} = \vec{a}'$ , per due SR in moto relativo rettilineo uniforme, è di notevole importanza.

---

<sup>2</sup> Per completezza, vale la pena ricordare che la velocità della luce,  $c$ , deve essere *assoluta*, ovvero uguale in qualunque SR. Possiamo valutare qual è l'impatto sull'angolo di aberrazione. Basti considerare che la velocità della luce proveniente dalla stella deve essere pari a  $c$  anche se vista dalla Terra, però apparirà inclinata di un angolo  $\alpha$ . In questo caso,  $v^{(SR)}$  e  $c$  costituiscono cateto e ipotenusa di un triangolo rettangolo — prima erano i due cateti — pertanto il calcolo dà  $\alpha = \sin^{-1} \left( \frac{v^{(SR)}}{c} \right)$ . Essendo  $v^{(SR)} \ll c$ , la correzione relativa è molto piccola, dell'ordine di  $0.5 \cdot 10^{-4}$  — provare per credere.

Consideriamo un punto  $P$  di massa  $m_P$  soggetto a un sistema di forze di risultante  $\vec{F}_P$ . Nel SR  $(O; x, y, z)$ , l'osservatore misura una accelerazione  $\vec{a}_P$  e pertanto deduce che la risultante delle forze è:

$$\vec{F}_P = m_P \vec{a}_P$$

Allora, in qualunque SR  $(O'; x', y', z')$  che si muova di moto rettilineo uniforme rispetto a  $(O; x, y, z)$ , essendo  $\vec{a}' = \vec{a}$ , si deve osservare:

$$m_P \vec{a}'_P = \vec{F}_P$$

ovvero, la legge di Newton sarà ancora verificata, assumendo *lo stesso sistema di forze*.

È per questo che, negli esempi [2] e [3] fatti nella Sezione 16.1, gli osservatori posti sull'auto e sulla nave potevano rilevare con esperimenti le stesse leggi del moto rilevabili a terra.

Ma c'è di più. Supponiamo che nel SR  $(O; x, y, z)$  siamo in grado di caratterizzare e calcolare tutte le forze agenti su  $P$ , cosicché si possa scrivere

$$\vec{F}_P = \sum_k \vec{F}_k^{fis}$$

in cui ciascuna  $\vec{F}_k^{fis}$  sia calcolabile da principi fisici (per esempio da interazioni gravitazionali o elettromagnetiche con altri oggetti noti, oppure da forze elastiche, tensioni, reazioni vincolari, ...). Allora, questo calcolo consente di predire il moto di  $P$ , sia nel SR  $(O; x, y, z)$ , che in qualunque SR  $(O'; x', y', z')$  che si muova di moto rettilineo uniforme rispetto a  $(O; x, y, z)$ .

### 16.3.3 Principio di relatività

Quanto visto alla fine della sezione precedente, si suole enunciare così: “*le leggi della dinamica sono invarianti, per cambiamenti di sistemi di riferimento che siano dotati di moto relativo rettilineo uniforme*”. Questo enunciato è il *principio di relatività*.

Si può anche formulare l'enunciato equivalente: “*basandosi su esperimenti dinamici, è impossibile distinguere due sistemi di riferimento che si muovano di moto relativo rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro*”.

Questo principio è strettamente collegato alla “legge di inerzia”. Se un punto materiale  $P$  appare in moto rettilineo uniforme con velocità  $\vec{w}$  in un SR  $(O; x, y, z)$ , esso può essere visto in quiete in un SR  $(O'; x', y', z')$  che si muove con la stessa velocità uniforme  $\vec{w}$  rispetto a  $(O; x, y, z)$ . Poiché, per



il principio di relatività, i due SR sono del tutto equivalenti, di conseguenza il moto rettilineo uniforme è equivalente ad uno stato di quiete: la differenza fra i due stati è solo una questione di scelta di SR.

## 16.4 Dinamica in SR in moto traslatorio accelerato

Ora affrontiamo la dinamica in SR in moto relativo traslatorio *accelerato*.

Ciascun osservatore, nel proprio SR  $(O; \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  oppure  $(O'; \hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$ , può misurare l'accelerazione di un oggetto  $P$ , quindi può “definire” la forza totale agente su un oggetto  $P$  usando la seconda legge di Newton:

$$\vec{F}_P = m_P \vec{a}_P \quad ; \quad \vec{F}'_P = m_P \vec{a}'_P$$

Siccome sappiamo come si trasformano le accelerazioni fra i due SR — vd Eq. (16.11):

$$\vec{a}_P = \vec{a}'_P + \vec{a}^{(SR)}$$

ricaviamo subito che

$$\vec{F}_P = \vec{F}'_P + m_P \vec{a}^{(SR)} \quad (16.17)$$

Supponiamo che nel SR  $(O; x, y, z)$  siamo in grado di calcolare da principi fisici tutte le forze  $\vec{F}_k^{fis}$  agenti su  $P$ :

$$\vec{F}_P = \sum_k \vec{F}_k^{fis}$$

Allora, mentre nel SR  $O$  la legge del moto di  $P$  diventa semplicemente

$$m_P \vec{a}_P = m_P \frac{d^2 \vec{r}_P}{dt^2} = \sum_k \vec{F}_k^{fis}$$

nel SR  $O'$  essa prende la forma:

$$m_P \vec{a}'_P = m_P \frac{d^2 \vec{r}'_P}{dt^2} = \sum_k \vec{F}_k^{fis} - \underbrace{m_P \vec{a}^{(SR)}}_{\text{fittizia}} \quad (16.18)$$

È comparso un termine in più,  $-m_P \vec{a}^{(SR)}$ , che non è spiegabile con azioni “fisiche”: per questo spesso lo si chiama “forza fittizia”. Esso dipende dalla massa  $m_P$  dell'oggetto e dall'accelerazione  $\vec{a}^{(SR)}$  del SR  $O'$  rispetto al SR  $O$ .

Possiamo renderci conto del motivo di  $-m_P \vec{a}^{(SR)}$ . Supponiamo che non ci siano forze “fisiche”,  $\sum_k \vec{F}_k^{fis} = 0$ , quindi nel SR  $O$  non c’è accelerazione, e  $P$  si muove di moto rettilineo uniforme. Questa situazione, vista nel SR  $O'$ , appare molto diversa: l’oggetto  $P$  manterrebbe la sua velocità, ma il SR accelera, per esempio diventando più veloce, e per confronto l’oggetto  $P$  appare più lento. Potremmo anche dire che  $P$  non è soggetto a forze fisiche, quindi segue la legge di inerzia, e l’accelerazione del SR  $O'$  non lo può distogliere da questa condizione, perché non viene da una forza direttamente applicata a  $P$ . Quindi l’effetto fittizio dell’accelerazione di  $O'$ , che appare come una forza, si chiama anche “forza di inerzia”.

### 16.4.1 Esercizi sulle forze fittizie

Si potrebbe pensare di risolvere sempre i problemi di dinamica in SR non accelerati, cosicché da non avere mai a che fare con le forze fittizie... In realtà, in molti casi conviene lavorare nel SR accelerato: la forza fittizia non è difficile da calcolare — è banalmente  $-m\vec{a}^{(SR)}$  — come possiamo vedere nei seguenti esempi.

**Esercizio 16.6.** *Una persona di massa  $m = 73$  kg si trova in un ascensore, con i piedi su una bilancia. L’ascensore, inizialmente fermo, parte verso l’alto, impiega 2 s per raggiungere la sua velocità  $v_{fin} = 5$  m/s, con accelerazione costante. Quanto “pesa” la persona: (i) prima della partenza, (ii) durante l’accelerazione, (iii) quando l’ascensore ha raggiunto la velocità finale? Inoltre: (iv) come si modifica la risposta a (ii) se l’ascensore parte verso il basso?*

**Risposta.** *Sulla persona agisce una forza fisica, la gravità, pertanto  $F^{fis} = -mg$  — l’orientamento per convenzione è positivo se verso l’alto. Quindi:*

(i) *Il peso della persona ad ascensore fermo è ovviamente  $F_{peso}^{(i)} = F^{fis} = -mg = -715.8$  N — negativo perché diretto verso il basso.*

(ii) *Quando l’ascensore parte verso l’alto, assume un’accelerazione costante  $a^{(SR)} = \frac{v_{fin} - v_{in}}{\Delta t} = \frac{5 \text{ m/s}}{2 \text{ s}} = 2.5 \text{ m/s}^2$ , verso l’alto. Pertanto sulla persona agisce anche una forza fittizia  $-ma^{(SR)} = -182.5$  N — anch’essa diretta verso il basso. Il “peso” della persona — cioè la forza totale su di essa — è  $F_{peso}^{(ii)} = F^{fis} - ma^{(SR)} = -898.3$  N. Essa è sempre diretta verso il basso, ma in valore assoluto è maggiore che nel caso precedente, quindi la persona in ascensore ha la sensazione di pesare di più. L’avrete notato sicuramente anche voi...*

(iii) *Quando l’ascensore ha finito di accelerare, è in moto a velocità  $v_{fin}$ , ma questo non ha importanza. Ciò che conta qui, è che  $a^{(SR)} = 0$ , quindi non*

16.4. DINAMICA IN SR IN MOTO TRASLATORIO ACCELERATO 363

ci sono forze fittizie. Di nuovo quindi il peso è  $F_{\text{peso}}^{(iii)} = F^{fis} = -mg = -715.8 \text{ N}$ .

(iv) Se l'ascensore va verso il basso, la velocità finale e la sua accelerazione in partenza cambiano segno. In particolare  $a^{(SR)} = -2.5 \text{ m/s}^2$ . Quindi la forza fittizia ora è  $-ma^{(SR)} = +182.5 \text{ N}$ , questa volta diretta verso l'alto. Il peso della persona quindi diventa  $F_{\text{peso}}^{(iv)} = F^{fis} - ma^{(SR)} = -533.3 \text{ N}$ . La persona si sente più leggera.

**Esercizio 16.7.** Un treno frena con decelerazione costante, passando da  $v_0 = 100 \text{ km/h}$  a fermo in  $\Delta t = 10 \text{ s}$ . Su un tavolino del treno è appoggiato un bicchiere pieno a metà di acqua. Di quanti gradi si inclina la superficie dell'acqua durante la frenata?

**Risposta.** Sull'acqua agisce la forza di gravità, che è una forza fisica. Su ogni elementino di massa  $\delta m$  di acqua, quindi agisce una forza verticale  $\delta F_z^{fis} = -\delta m g$ .

L'accelerazione del treno (negativa, perché frena) è  $a^{(SR)} = \frac{v_{fin} - v_0}{\Delta t} = \frac{-27.78 \text{ m/s}}{10 \text{ s}} = -2.778 \text{ m/s}^2$ . Nel SR del treno quindi esiste anche una forza fittizia, orizzontale, che sull'elementino  $\delta m$  vale  $\delta F_x^{fitt} = -\delta m a^{(SR)}$ . Quindi la forza totale agente sull'elementino di acqua è (in coordinate cartesiane)  $\delta \vec{F}' \equiv \delta m (-a^{(SR)}, 0, -g)$ . L'angolo  $\alpha$  formato da tale forza rispetto alla verticale è tale che  $\tan \alpha = \frac{\delta F'_x}{\delta F'_z} = \frac{-a^{(SR)}}{g} = \frac{2.778 \text{ m/s}^2}{9.806 \text{ m/s}^2} = 0.2833$ . Quindi  $\alpha = 0.276 \text{ rad} = 15.8^\circ$ .

Poiché la superficie dell'acqua si dispone sempre perpendicolare alla forza agente su di essa, l'angolo  $\alpha$  trovato è anche quello formato dalla superficie rispetto al piano orizzontale.

**Esercizio 16.8.**

Un aereo che viaggia alla velocità  $v = 800 \text{ km/h}$  deve descrivere una curva di raggio  $\rho = 3.5 \text{ km}$ . Di che angolo deve inclinare il piano delle ali? Trattare il caso sia nel SR dell'aria che in quello dell'aereo. Se, durante la virata, un passeggero ha posto un bicchiere pieno d'acqua sul tavolino, l'acqua si rovescia?

**Risposta.** Consideriamo la Fig. 16.3. Sull'aereo agiscono 2 forze: la forza-peso,  $\vec{F}_g = -mg\hat{z}$ , e la "portanza"  $\vec{F}_p$ , data dalla spinta dell'aria sotto le ali, che è sempre ortogonale al piano delle ali:  $\vec{F}_p = F_p \hat{n}$ , essendo  $\hat{n}$  il versore ortogonale al piano delle ali e diretto verso l'alto. Quando l'aereo procede in linea retta, forza-peso e portanza si bilanciano:  $\vec{F}_g + \vec{F}_p = 0$ , quindi  $\hat{n} = \hat{z}$ .

Quando l'aereo curva, la risultante di forza-peso e portanza deve produrre una forza centripeta:  $\vec{F}_g + \vec{F}_p = -m \frac{v^2}{\rho} \hat{\rho}$ , essendo  $\hat{\rho}$  il versore del raggio di curvatura. Possiamo separare le forze nelle loro componenti verticale ( $v$ ) e orizzontale ( $h$ ). Le componenti della portanza sono:

$$\vec{F}_p = F_{p,v} \hat{z} + F_{p,h} \hat{\rho} = F_p (\cos \alpha \hat{z} + \sin \alpha \hat{\rho})$$



Figura 16.3: *Esercizio dell'aereo in curva. A sinistra, la portanza  $\vec{F}_p$  bilancia esattamente la forza-peso  $\vec{F}_g$ . A destra, la risultante di portanza e forza-peso produce l'accelerazione centripeta necessaria a far curvare l'aereo:  $\vec{F}_g + \vec{F}_p = -m\frac{v^2}{\rho}\hat{\rho}$ .*

Quindi l'equazione per la risultante delle forze si scrive:

$$\begin{aligned} -mg + F_p \cos \alpha &= 0 \\ F_p \sin \alpha &= -m\frac{v^2}{\rho} \end{aligned}$$

da cui:

$$\tan \alpha = -\frac{v^2}{g\rho}$$

Il segno  $-$  indica che  $\hat{n}$  è "piegato" verso l'interno della curva. Convertendo le quantità in S.I.,  $v = 222.22$  m/s e  $\rho = 3500$  m. Si ottiene dunque  $\tan \alpha = 1.439$ , ovvero  $\alpha = 0.963$  rad =  $52.2^\circ$ .

Possiamo risolvere il problema anche nel SR dell'aereo: si tratta ovviamente di un sistema accelerato, con  $\vec{a}^{(SR)} = -\frac{v^2}{\rho}\hat{\rho}$ , pertanto sull'aereo agiscono la forza-peso  $\vec{F}_g = -mg\hat{z}$ , la portanza  $\vec{F}_p = F_p(\cos \alpha \hat{z} + \sin \alpha \hat{\rho})$ , e una forza fittizia  $\vec{F}_{fitt} = -m\vec{a}^{(SR)} = +m\frac{v^2}{\rho}\hat{\rho}$ . L'aereo è ovviamente fermo, nel proprio SR, pertanto la risultante delle forze deve essere nulla:

$$\begin{aligned} \vec{F}_g + \vec{F}_p + \vec{F}_{fitt} &= 0 \\ & \text{(ovvero)} \\ -mg + F_p \cos \alpha &= 0 \\ F_p \sin \alpha + m\frac{v^2}{\rho} &= 0 \end{aligned}$$

Le equazioni e la soluzione sono ovviamente identiche a quanto trovato prima.

L'ultima domanda si risolve bene nel SR dell'aereo. La risultante delle forze "esterne", agenti su un qualunque oggetto di massa  $m_0$  presente sull'aereo, è

$$\vec{F}_0^{est} = -m_0 g \hat{z} + m_0 \frac{v^2}{\rho} \hat{\rho} = -m_0 \left( g \hat{z} - \frac{v^2}{\rho} \hat{\rho} \right)$$

Abbiamo visto anche che la portanza deve essere

$$\vec{F}_p = F_p \hat{n} = m \left( g \hat{z} - \frac{v^2}{\rho} \hat{\rho} \right)$$

Per confronto,  $\hat{n}$  ha orientamento opposto a  $\vec{F}_0^{est}$ , quindi il tavolino è perpendicolare a  $\vec{F}_0^{est}$ . La superficie dell'acqua si dispone sempre perpendicolare a  $\vec{F}_0^{est}$ , quindi rimane parallela al tavolino, e non si rovescia.

## 16.5 Dinamica in sistemi di riferimento rotanti

Ora consideriamo una situazione in cui gli assi del SR ( $O'$ ;  $\hat{x}'$ ,  $\hat{y}'$ ,  $\hat{z}'$ ) ruotano rispetto al SR ( $O$ ;  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$ ), con velocità angolare  $\vec{\omega}$ . Per semplicità, supponiamo che  $O \equiv O'$ , come in Fig. 16.4, cosicché le due origini coincidano, e non ci sia nessun moto traslatorio relativo fra i due SR.

### 16.5.1 Derivata di un vettore in un SR rotante

Consideriamo un qualunque vettore  $\vec{A}$ . Scomponiamolo nelle sue componenti cartesiane rispetto al SR "fisso" ( $O$ ;  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$ ):

$$\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z} \quad (16.19)$$

e rispetto al SR rotante ( $O$ ;  $\hat{x}'$ ,  $\hat{y}'$ ,  $\hat{z}'$ ):

$$\vec{A} = A'_x \hat{x}' + A'_y \hat{y}' + A'_z \hat{z}' \quad (16.20)$$

Analizziamo come questo vettore evolve nel tempo.

Nel SR fisso, i versori  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$  sono costanti, mentre possono cambiare solo le componenti cartesiane  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_z$ . Pertanto, derivando l'Eq. (16.19), si trova:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt} \hat{x} + \frac{dA_y}{dt} \hat{y} + \frac{dA_z}{dt} \hat{z} \quad (16.21)$$

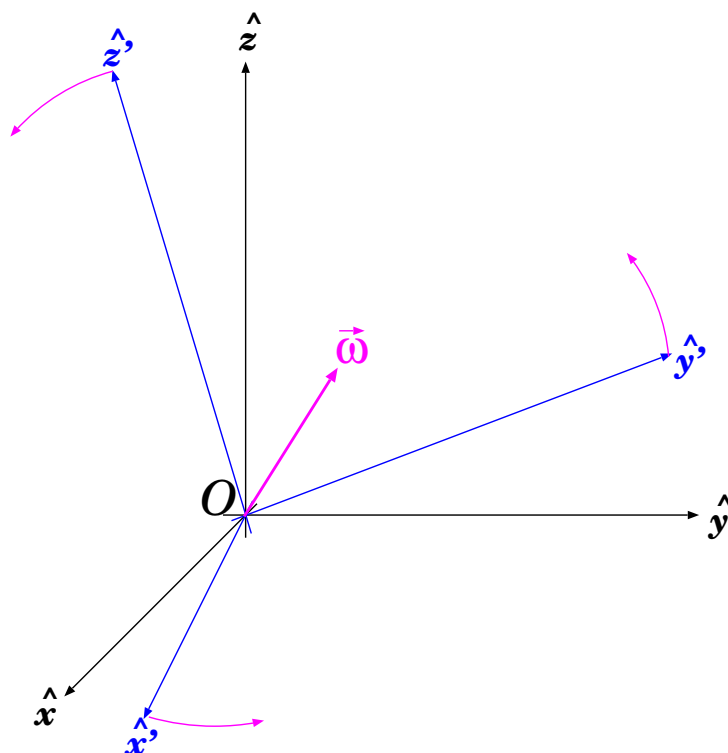


Figura 16.4: Due sistemi di riferimento,  $(O; \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  e  $(O'; \hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$ , con origine comune ( $O \equiv O'$ ), che ruotano l'uno rispetto all'altro, con velocità angolare  $\vec{\omega}$ .

Nel SR rotante dobbiamo considerare anche la variazione dei versori  $\hat{x}'$ ,  $\hat{y}'$ ,  $\hat{z}'$ , pertanto:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{A}}{dt} &= \frac{dA'_x}{dt} \hat{x}' + \frac{dA'_y}{dt} \hat{y}' + \frac{dA'_z}{dt} \hat{z}' \\ &\quad + A'_x \frac{d\hat{x}'}{dt} + A'_y \frac{d\hat{y}'}{dt} + A'_z \frac{d\hat{z}'}{dt} \end{aligned} \quad (16.22)$$

Tuttavia, un osservatore solidale con il SR rotante considera i versori  $\hat{x}'$ ,  $\hat{y}'$ ,  $\hat{z}'$  costanti, e quindi “vede” solo le variazioni di  $A'_x$ ,  $A'_y$ ,  $A'_z$ . Pertanto scriverà la derivata di  $\vec{A}$  solo come:

$$\left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)' \equiv \frac{dA'_x}{dt} \hat{x}' + \frac{dA'_y}{dt} \hat{y}' + \frac{dA'_z}{dt} \hat{z}' \quad (16.23)$$

Le derivate dei versori  $\hat{x}'$ ,  $\hat{y}'$ ,  $\hat{z}'$  sono esprimibile secondo l'Eq. (7.46)

(Sezione 7.6.5):

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\mathbf{x}}'}{dt} &= \vec{\omega} \times \hat{\mathbf{x}}' \\ \frac{d\hat{\mathbf{y}}'}{dt} &= \vec{\omega} \times \hat{\mathbf{y}}' \\ \frac{d\hat{\mathbf{z}}'}{dt} &= \vec{\omega} \times \hat{\mathbf{z}}'\end{aligned}\tag{16.24}$$

pertanto

$$\begin{aligned}A'_x \frac{d\hat{\mathbf{x}}'}{dt} + A'_y \frac{d\hat{\mathbf{y}}'}{dt} + A'_z \frac{d\hat{\mathbf{z}}'}{dt} &= A'_x \vec{\omega} \times \hat{\mathbf{x}}' + A'_y \vec{\omega} \times \hat{\mathbf{y}}' + A'_z \vec{\omega} \times \hat{\mathbf{z}}' \\ &= \vec{\omega} \times \vec{\mathbf{A}}\end{aligned}$$

Quindi l'Eq. (16.22) si può scrivere come:

$$\frac{d\vec{\mathbf{A}}}{dt} = \left( \frac{d\vec{\mathbf{A}}}{dt} \right)' + \vec{\omega} \times \vec{\mathbf{A}}\tag{16.25}$$

### 16.5.2 Trasformazione delle velocità

Poiché i due SR hanno origini coincidenti, il vettore-posizione di un generico punto  $P$  è lo stesso nei due SR. Cambiano solo le componenti cartesiane:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{r}} &= x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}} && \text{rispetto a } (O; \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}) \\ \vec{\mathbf{r}} &= x'\hat{\mathbf{x}}' + y'\hat{\mathbf{y}}' + z'\hat{\mathbf{z}}' && \text{rispetto a } (O'; \hat{\mathbf{x}}', \hat{\mathbf{y}}', \hat{\mathbf{z}}')\end{aligned}\tag{16.26}$$

Per calcolare la velocità nei due SR occorre derivare rispetto al tempo. Ricordiamo che un osservatore solidale con il SR fisso definisce la velocità come:

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{x}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{y}} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{z}}\tag{16.27}$$

mentre l'osservatore solidale con il SR rotante definisce:

$$\vec{\mathbf{v}}' = \frac{dx'}{dt}\hat{\mathbf{x}}' + \frac{dy'}{dt}\hat{\mathbf{y}}' + \frac{dz'}{dt}\hat{\mathbf{z}}'\tag{16.28}$$

Possiamo quindi applicare il risultato Eq. (16.25), e ottenere:

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}' + \vec{\omega} \times \vec{\mathbf{r}}\tag{16.29}$$

Questo risultato può apparire sorprendente a prima vista. Ricordiamo l'Eq. (16.9):  $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}^{(SR)}$ ; se  $O \equiv O'$ , allora sembrerebbe che  $\vec{v}^{(SR)} = 0$ , dunque perché le velocità nei due SR sono diverse? In effetti, a pensarci bene il risultato è consistente. Infatti,  $O'$  è fermo rispetto a  $O$ , ma il SR  $(O; \hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$  è dotato di moto rotatorio, perciò ogni punto  $Q$  (esclusa l'origine) che sia fermo in  $(O; \hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$  è dotato di moto rispetto al SR  $(O; \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ . Precisamente, se la posizione di  $Q$  è  $\vec{r}_Q$ , il moto di  $Q$  è dotato di velocità  $\vec{v}_Q^{(SR)} = \vec{\omega} \times \vec{r}_Q$  relativamente a  $(O; \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ . Ora, applichiamo l'Eq. (16.9) ad un oggetto  $P$ , che si trovi sovrapposto a  $Q$  e abbia velocità  $\vec{v}'_P$  rispetto a  $(O'; \hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$ : nel SR  $(O; \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  la composizione delle velocità darebbe

$$\vec{v}_P = \vec{v}'_P + \vec{v}_Q^{(SR)} = \vec{v}'_P + \vec{\omega} \times \vec{r}_Q$$

che è precisamente quanto trovato nell'Eq. (16.29).

### 16.5.3 Trasformazione delle accelerazioni

Ora calcoliamo come si trasformano le accelerazioni. Ricordiamo che nel SR fisso

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt} \hat{x} + \frac{dv_y}{dt} \hat{y} + \frac{dv_z}{dt} \hat{z} \quad (16.30)$$

mentre nel SR rotante:

$$\vec{a}' = \frac{dv'_x}{dt} \hat{x}' + \frac{dv'_y}{dt} \hat{y}' + \frac{dv'_z}{dt} \hat{z}' \quad (16.31)$$

Derivando rispetto al tempo l'Eq. (16.29) e applicando la regola dell'Eq. (16.25) si trova:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= \left( \frac{d\vec{v}'}{dt} \right)' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= \left( \frac{d\vec{v}'}{dt} \right)' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \end{aligned}$$

Ricordiamo che  $\vec{v}' \equiv \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)'$  è la velocità come “vista” dal SR rotante, dunque non contiene derivate dei versori. Analogamente,  $\left( \frac{d\vec{v}'}{dt} \right)'$



rappresenta la derivata di  $\vec{v}'$ , sempre senza considerare le derivate dei versori. Pertanto,  $\left(\frac{d\vec{v}'}{dt}\right)' \equiv \vec{a}'$  rappresenta l'accelerazione, come osservata nel SR rotante. Quindi possiamo concludere che:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v}'}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{centrifuga}} + \overbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}}^{\text{accelerazione di trascinamento}} \quad (16.32)$$

Come fatto per le velocità, possiamo cercare di interpretare questa relazione sotto forma di un qualcosa che assomigli a  $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}^{(SR)}$ : vedremo che in questo caso non è possibile. Consideriamo dunque un punto  $Q$ , fermo rispetto al SR rotante, e istantaneamente sovrapposto ad un punto  $P$ . La velocità di  $Q$ , vista rispetto al SR fisso, è  $\vec{v}_Q^{(SR)} = \vec{\omega} \times \vec{r}_Q$ , come già visto. Quindi l'accelerazione di  $Q$  è

$$\begin{aligned} \vec{a}_Q^{(SR)} &= \frac{d\vec{v}_Q^{(SR)}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{r}_Q) \\ &= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_Q + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_Q}{dt} \\ &= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_Q + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_Q) \end{aligned}$$

Potremmo dire che, localmente, il SR rotante è dotato di una accelerazione  $\vec{a}^{(SR)} \equiv \vec{a}_Q$  relativa al SR fisso. Quindi ci si aspetterebbe che

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{a}' + \vec{a}_Q^{(SR)} \\ &= \vec{a}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_Q + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_Q) \quad (\text{sbagliato}) \end{aligned}$$

ma come si vede, quest'ultima scrittura è incompleta: se confrontata con l'Eq. (16.32), essa descrive solo l'accelerazione “di trascinamento”, dovuta all'accelerazione *locale* del SR rotante, ma manca l'accelerazione di Coriolis,  $-2\vec{\omega} \times \vec{v}'$ . Quest'ultima rappresenta dunque un termine “nuovo”.

#### 16.5.4 Forze fittizie in sistemi rotanti

Consideriamo quanto trovato in termini di forze fittizie. Assumiamo che nel SR  $(O; \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  l'accelerazione osservata su un oggetto  $P$  sia completamente spiegabile con il calcolo delle forze fisiche  $\vec{F}_P^{fis}$  agenti su di esso:

$$m_P \vec{a}_P = \vec{F}_P^{fis}$$

e riscriviamo l'Eq. (16.32) esplicitando  $\vec{a}'$ .

La forza vista nel SR ( $O; \hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$ ) risulta:

$$\begin{aligned} \vec{F}'_P &= m_P \vec{a}'_P = m_P [\vec{a} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}'_P - \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_P)}_{\text{forze fittizie}}] \\ &= \vec{F}'_{P, \text{fis}} \underbrace{-2m_P \vec{\omega} \times \vec{v}'_P}_{\text{Coriolis}} \underbrace{-m_P \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_P)}_{\text{centrifuga}} - m_P \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'_P \end{aligned} \quad (16.33)$$

Anche nel caso di SR rotante, compaiono “forze fittizie”.

Il termine dipendente da  $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$  esiste solo in presenza di accelerazioni angolari — in caso di velocità angolare costante, è ovviamente nullo.

Analizziamo il termine “centrifugo”. È utile scomporre la posizione  $\vec{r}'$  in due componenti, parallela e perpendicolare all'asse di rotazione — quindi a  $\vec{\omega}$ :  $\vec{r}' = \vec{r}'_{\parallel} + \vec{r}'_{\perp}$ . Nel prodotto vettoriale  $(\vec{\omega} \times \vec{r}')$ ,  $\vec{r}'_{\parallel}$  non dà contributo. Inoltre, ricordando l'identità vettoriale  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ , otteniamo

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_{\perp}) = -\omega^2 \vec{r}'_{\perp}$$

quindi la forza centrifuga vale:

$$\vec{F}'_{P, \text{centrif}} = m_P \omega^2 \vec{r}'_{P, \perp} \quad (16.34)$$

Come si vede, è diretta perpendicolarmente all'asse di rotazione e tende ad allontanare da esso — da cui il nome “centrifuga”.

Il termine

$$\vec{F}'_{P, \text{Coriolis}} = -2m_P \vec{\omega} \times \vec{v}'_P \quad (16.35)$$

si chiama “forza fittizia di Coriolis”. Essa si manifesta solo quando l'oggetto  $P$  è in moto nel SR ( $O; \hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$ ), ed è diretta perpendicolarmente a  $\vec{v}'_P$ , dunque non produce variazione della velocità scalare, ma solo della direzione del moto.

### 16.5.5 Le centrifughe

La forza centrifuga è largamente utilizzata in molte applicazioni pratiche. Qualunque oggetto, posto in un contenitore in rapida rotazione intorno ad un asse con velocità angolare  $\omega$ , è soggetto ad una forza centrifuga che tende

ad allontanarlo dall'asse di rotazione:  $F_{centrif} = m\omega^2\rho$ , essendo  $\rho$  la sua distanza dall'asse di rotazione.

Questi apparati si chiamano “centrifughe”.

L'esempio ovvio è la centrifuga della lavatrice. Dopo il lavaggio, il tamburo della lavatrice viene posto in rapida rotazione (circa 1000 giri al minuto) cosicché l'acqua che impregna i panni è soggetta alla forza centrifuga che la “tira” verso l'esterno, cioè verso la superficie del tamburo, che è bucherellata in modo da fare uscire l'acqua.

La centrifuga è anche usata in chimica e in biologia per separare le componenti di una sospensione. Una sospensione è formata da un miscuglio di sostanze immerse in un liquido. Lasciata a riposo, le varie sostanze tendono a separarsi, con le più leggere che vanno a galla e le più pesanti che precipitano verso il fondo: è un effetto della gravità, naturalmente. Per accelerare la separazione, si può imprimere un'accelerazione maggiore di quella gravitazionale, e ancora una volta si ricorre alle centrifughe. Le sospensioni vengono messe in provette che poi vengono appese a supporti montati su un asse centrale. Il sistema viene messo in rapida rotazione e la forza centrifuga produce la separazione.

### Esempi di centrifuga

*Una moderna lavatrice ha un tamburo di raggio 25 cm che può compiere 1200 giri al minuto: quanto vale l'accelerazione centrifuga? In modo analogo, si calcoli l'accelerazione centrifuga per una centrifuga per esami ematici: può compiere 6000 giri al minuto; le provette, durante la rotazione, si dispongono orizzontalmente, con il fondo a una distanza di 10 cm dall'asse. I valori ottenuti sono grandi o piccoli? Per rendersi conto, vengono paragonati all'accelerazione di gravità media alla superficie terrestre:  $g = 9.806 \text{ m/s}^2$ .*

**Risposta.** In entrambi i casi, si calcola  $a^{centrif} = \omega^2\rho$ .

Per la lavatrice:  $\omega = 2\pi \frac{1200 \text{ giri}}{60 \text{ s}} = 125.67 \text{ rad/s}$ . Pertanto,  
 $a^{centrif} = 3948 \text{ m/s}^2 = 403 g$ . *Decisamente potente!*

Per la centrifuga ematica:  $\omega = 2\pi \frac{6000 \text{ giri}}{60 \text{ s}} = 628.32 \text{ rad/s}$ . Pertanto,  
 $a^{centrif} = 39480 \text{ m/s}^2 = 4030 g$ . *Quindi 10 volte più forte che per la lavatrice.*

## 16.6 Forze fittizie e sistemi inerziali

Riassumendo: se riferiamo i moti ad un SR che è accelerato e/o rotante — con accelerazione  $\vec{a}^{(SR)}$  e velocità angolare  $\vec{\omega}$  — su una massa  $m$  si manifesta una *forza fittizia totale* <sup>[3]</sup>:

<sup>3</sup> Per semplicità qui omettiamo gli apicetti ( $'$ ): le quantità cinematiche sono tutte riferite al SR accelerato e/o rotante.

$$\vec{F}^{\text{fitt}} = -m \left[ \vec{a}^{(SR)} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v} \right] \quad (16.36)$$

Se sull'oggetto agiscono forze "fisiche"  $\vec{F}_i^{\text{fis}}$ , la forza totale osservata nel SR accelerato e/o rotante è:

$$\vec{F}^{\text{tot}} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{fis}} + \vec{F}^{\text{fitt}} \quad (16.37)$$

In generale, si presume che tutte le forze "fisiche"  $\vec{F}_i^{\text{fis}}$  presenti possano essere attribuite a cause evidenti, vale a dire a interazioni note con altri oggetti esistenti. L'unica forza che fa eccezione a questo è la forza fittizia,  $\vec{F}^{\text{fitt}}$ . Quando questa distinzione è effettivamente possibile, allora ha senso dare la seguente definizione:

*Un SR si dice "inerziale" se in esso non sono presenti forze fittizie.*

Spesso nei testi si trova la definizione (equivalente):

*Un SR si dice "inerziale" se in esso vale la legge di inerzia di Galileo.*

### Identificazione delle forze fittizie

*Identificare le forze fittizie, per uno sperimentatore che non sa se il suo SR sia o meno inerziale, non è sempre banale. Nel caso di sistemi rotanti è più facile: studiando moti vari si può individuare la forza di Coriolis, sempre proporzionale alla massa, presente solo per oggetti in moto, e con la peculiare struttura  $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}$ . Da essa si può dedurre  $\vec{\omega}$ . Poi, "mappando" il sistema di forze in più punti si può individuare l'asse di rotazione, come quello per cui esiste un "campo di forza centrifuga"  $m\omega^2 \vec{\rho}$ .*

*Individuare la forza fittizia  $-m\vec{a}^{(SR)}$ , dovuta ad un'eventuale accelerazione del SR, è più difficile, perché essa dà luogo ad un campo di forza uniforme e proporzionale alla massa, esattamente come la forza-peso,  $m\vec{g}$ , quindi sperimentalmente non separabile. Solo avendo un'informazione indipendente del valore di  $\vec{g}$  si può ricavare  $\vec{a}^{(SR)}$ .*

## 16.7 Gravità e forze fittizie

Si può notare che tutte le forze fittizie sono proporzionali alla massa  $m$ , vedi Eq. (16.36). Questa caratteristica è dovuta al fatto che le trasformazioni fra SR coinvolgono le accelerazioni.

Tuttavia, c'è in natura una forza che è intrinsecamente proporzionale alla massa su cui agisce: la *forza di gravità*. Un oggetto di massa  $m$  è soggetto agli effetti gravitazionali di tutti gli oggetti massivi  $m_k$  circostanti:

$$\begin{aligned}\vec{F}_g &= \sum_k \left[ -\frac{Gm_k m}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^3} (\vec{r} - \vec{r}_k) \right] \\ &= m \left[ -G \sum_k \frac{m_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^3} (\vec{r} - \vec{r}_k) \right] \\ &\equiv m \vec{g}(\vec{r})\end{aligned}$$

essendo  $\vec{g} \equiv \vec{g}(\vec{r})$  il *campo gravitazionale*.

Se le uniche forze fisiche sulla massa  $m$  fossero solo quelle gravitazionali, allora la forza totale sarebbe:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \vec{F}_g + \vec{F}^{\text{fitt}} \\ &= m \left[ \vec{g} - \vec{a}^{(SR)} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\omega} \times \vec{v} \right]\end{aligned}\quad (16.38)$$

Per un osservatore, localmente, non sarebbe possibile distinguere con esperimenti la componente gravitazionale da quelle fittizie, salvo per la forza di Coriolis, che è l'unica che dipende dalla velocità  $\vec{v}$  dell'oggetto. Quindi si potrebbero riassorbire le altre forze fittizie in una ridefinizione del campo gravitazionale:

$$\vec{g}^{\text{eff}} = \vec{g} - \vec{a}^{(SR)} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (16.39)$$

e l'Eq. (16.38) diventerebbe semplicemente:

$$\vec{F} = m (\vec{g}^{\text{eff}} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}) \quad (16.40)$$

### ————— Superficie dell'acqua in rotazione —————

*Immaginiamo di avere un secchio contenente acqua, inizialmente in quiete: la superficie dell'acqua è ovviamente orizzontale. Ora mettiamo il secchio in rotazione, attorno al suo asse, con velocità angolare  $\omega$ . Pian piano l'acqua si mette a ruotare, seguendo il moto del secchio, e dopo un transiente ruoterà uniformemente, con velocità angolare  $\omega$ , attorno all'asse di rotazione del secchio. A questo punto la superficie dell'acqua non sarà più orizzontale, bensì concava: la forza centrifuga tende a portare l'acqua più vicina al bordo del secchio. Qual è la forma della superficie?*

**Risposta.** Ogni elementino di acqua, di massa  $\delta m$ , è soggetto alla forza-peso  $\delta \vec{F}_g = -\delta m g \hat{z}$ , e alla forza centrifuga,  $\delta \vec{F}_c = \delta m \omega^2 \vec{\rho}$  — essendo  $\vec{\rho} \equiv (x, y, 0)$  il vettore orizzontale che va dall'asse di rotazione alla massa  $\delta m$ . Quindi abbiamo un campo efficace

$$\vec{g}^{\text{eff}} = -g \hat{z} + \omega^2 \vec{\rho} \equiv (\omega^2 x, \omega^2 y, -g)$$

È facile verificare che, se introduciamo un potenziale efficace

$$\Phi^{\text{eff}} = gz - \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2)$$

esso descrive il campo, nel senso che  $\vec{g}^{\text{eff}} = -\vec{\nabla} \Phi^{\text{eff}}$ .

La superficie dell'acqua deve essere tale che su di essa  $\Phi^{\text{eff}}$  è costante:

$$gz - \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) = k$$

ovvero

$$z = \frac{\omega^2}{2g} (x^2 + y^2) + \frac{k}{g}$$

Quindi si tratta di un paraboloide di rotazione, con la concavità verso l'alto.

### 16.7.1 Caduta libera

Si suole pensare che nello spazio gli astronauti “galleggino” perché privi di peso. Forse avrete visto i filmati degli astronauti a bordo della ISS (International Space Station), che fluttuano nell'aria, fanno volteggiare biro, goccioline d'acqua e altri oggetti... Eppure, loro sono in orbita intorno alla Terra: quindi *la gravità c'è!* Altrimenti la ISS con tutto l'equipaggio se ne partirebbe per la tangente e si disperderebbe nello spazio siderale. Quindi, perché gli astronauti “galleggiano”?

Questo fenomeno si chiama “caduta libera”. La ISS (o qualunque astronave che segue una traiettoria sotto l'influenza di campi gravitazionali) è soggetta a un campo gravitazionale  $\vec{g}$ . Quindi costituisce un SR accelerato, precisamente con  $\vec{a}^{(SR)} = \vec{g}$ . Trascurando la rotazione dell'astronave (di solito lenta!), l'Eq. (16.38) ci dice che  $\vec{F} = m(\vec{g} - \vec{a}^{(SR)}) = 0$ : gli astronauti sentono una forza totale *nulla*. Possiamo anche usare l'Eq. (16.39), che ci dice che il campo gravitazionale efficace è nullo:  $\vec{g}^{\text{eff}} = 0$ .

A parole, potremmo dire che astronave e astronauti “cadono” con la stessa accelerazione, pertanto gli astronauti non se ne accorgono. Naturalmente per “cadere” non intendiamo che precipitano sulla Terra! Ma che le loro traiettorie deviano da quella rettilinea.

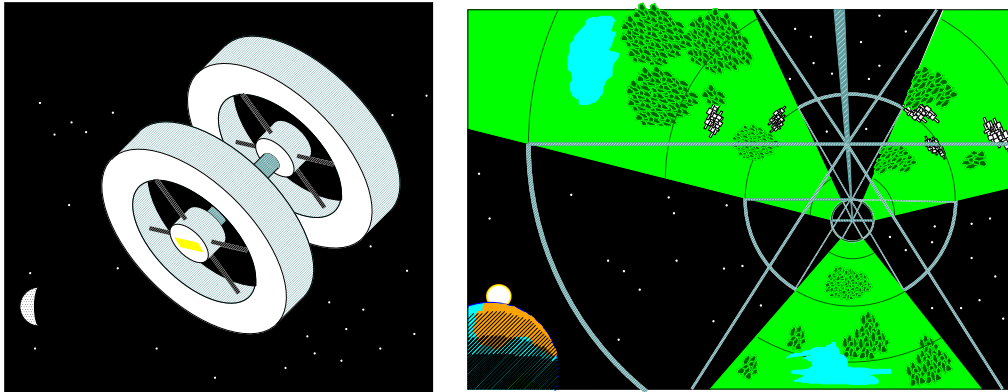


Figura 16.5: *Due esempi di ipotetiche stazioni spaziali rotanti: a sinistra, una stazione orbitale simile a quella di “2001, Odissea nello Spazio” (romanzo di A.C. Clarke, film di S. Kubrick); a destra, il cilindro di O’Neill, in cui tutto il volume del cilindro costituisce un habitat, con atmosfera e clima, e la superficie interna fa da terreno, per coltivazioni e abitazioni. In entrambi i casi, la forza centrifuga prodotta dalla rotazione genera un effetto di gravità artificiale.*

### 16.7.2 Gravità artificiale

In numerosi romanzi e/o film di fantascienza, sono presenti astronavi o stazioni spaziali dotate di gravità artificiale. Un modo relativamente semplice per generare una gravità artificiale è quello di porre l’astronave — o una parte di essa — in rotazione (vd Fig. 16.5). Si produce una forza centrifuga, diretta lontano dall’asse di rotazione, che emula la gravità. Finché equipaggio e oggetti sono solidali con la rotazione dell’astronave, hanno velocità nulla rispetto ad essa, quindi non sentono accelerazioni di Coriolis. Naturalmente, qualora si mettessero a fare salti... avrebbero più difficoltà ad atterrare nel posto voluto.

#### Esempio: una stazione spaziale rotante

*Immaginiamo una stazione spaziale costituita da un cilindro rotante con velocità angolare  $\omega$ . Gli ambienti abitabili sono formati da diversi “gusci” cilindrici concentrici. Nel guscio più esterno si vuole realizzare una gravità artificiale pari a  $g^{art} = 0.5g$  (essendo per riferimento  $g = 9.806 \text{ m/s}^2$  l’accelerazione di gravità alla superficie terrestre). Inoltre, si vuole che nel guscio più esterno un essere umano (altezza entro i 2 m) senta una differenza di gravità (artificiale!) fra la sua testa e i suoi piedi non superiore del 5%. Quanto devono valere  $\omega$  e la distanza  $\rho_{est}$  del pavimento del guscio più esterno dall’asse di rotazione? Come cambiano  $g^{art}$  e la differenza percentuale testa-piedi a una distanza dimezzata dall’asse di rotazione?*

**Risposta.** Ad una generica distanza  $\rho$  dall'asse di rotazione, la gravità artificiale vale  $g^{art} = \omega^2 \rho$ . Il valore voluto di  $g^{art}$  ci impone solo una relazione fra  $\rho$  e  $\omega$  — si potrebbe ingenuamente pensare di realizzare una stazione piccola e farla ruotare in fretta, ma il buon senso ci suggerisce che i poveri astronauti potrebbero avere un po' di "sickness". Questa è la ragione della seconda richiesta. Chiamando  $h = 2$  m la distanza massima testa-piedi (ovviamente un po' sovrastimata...), la differenza relativa della gravità artificiale è  $\frac{\Delta g^{art}}{g^{art}} = \frac{\omega^2 \rho - \omega^2(\rho - h)}{\omega^2 \rho} = \frac{h}{\rho}$ . Questa relazione già ci impone che  $\frac{h}{\rho_{est}} \leq 5\%$  — prendiamo l'uguaglianza e troviamo  $\rho_{est} = \frac{h}{0.05} = 40$  m. Ora determiniamo  $\omega$ :  $g_{est}^{art} = \omega^2 \rho_{est} = 0.5 g$  quindi  $\omega = \sqrt{\frac{0.5 g}{\rho_{est}}} = 0.35$  rad/s. Il periodo di rotazione è  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 17.95$  s.

A distanza dimezzata,  $\rho = \frac{\rho_{est}}{2}$ , ovviamente  $g^{art} = \frac{g_{est}^{art}}{2} = 0.025 g$  e  $\frac{\Delta g^{art}}{g^{art}} = \frac{h}{\rho} = 2 \frac{h}{\rho_{est}} = 10\%$ .

### Esempio: il cilindro di O'Neill

Il "cilindro di O'Neill" è un'idea di habitat spaziale cilindrico, proposto da G.K.O'Neill (fisico all'Università di Princeton) nel 1969, che deve essere sufficientemente grande da ospitare una società autonoma in un ecosistema autosufficiente. Per questo c'è bisogno di un volume di aria sufficiente per gli abitanti e l'agricoltura. Le dimensioni proposte erano 30 km di lunghezza e 3 km di raggio. Per simulare una gravità pari a quella terrestre, quanto devono valere  $\omega$  e  $T$ ? Per mezzi di trasporto che si muovono sulla superficie (interna) del cilindro, con velocità inferiori a 50 km/h, quanto vale al massimo l'accelerazione di Coriolis? Può influenzare significativamente i moti sulla superficie abitata?

**Risposta.** Si vuole che  $\omega^2 \rho = g$ , con  $g = 9.806$  m/s<sup>2</sup> e  $\rho = 3$  km. Il risultato è  $\omega = \sqrt{\frac{g}{\rho}} = 0.05717$  rad/s. Il periodo  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 109.905$  s = 1<sup>min</sup>49<sup>s</sup>90<sup>"</sup>.

L'accelerazione di Coriolis, in modulo, è  $a_{Coriolis} = |2\vec{\omega} \times \vec{v}| \leq 2\omega v_{max}$ . Questa va confrontata con l'accelerazione centrifuga  $a_{centrif} = \omega^2 \rho$ . In generale, perché l'accelerazione di Coriolis sia trascurabile, occorre che  $a_{Coriolis} \ll a_{centrif}$ , ovvero che  $v_{max} \ll \frac{\omega \rho}{2}$ . Con i nostri parametri,  $\frac{\omega \rho}{2} \simeq 85.75$  m/s = 308.7 km/h. Quindi per  $v_{max} = 50$  km/h abbiamo che  $a_{Coriolis} < \frac{v_{max}}{\omega \rho / 2} a_{centrif} = 0.162 a_{centrif}$ . Non è proprio trascurabile: in termini di forza può arrivare fino a circa il 16% del peso! Tuttavia,  $\vec{F}_{Coriolis} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}$ . Se il moto è sulla superficie abitata, scomponiamo  $\vec{v}$  in una componente  $\vec{v}_{\parallel}$  parallela all'asse del cilindro, e una  $\vec{v}_{\perp}$  ad essa perpendicolare, e troviamo  $\vec{F}_{Coriolis} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{\perp}$ : quindi  $\vec{F}_{Coriolis}$  è sempre diretta radialmente. Non avendo componenti parallele alla superficie,



non sottopone il moto superficiale a deviazioni. Il suo effetto è di “aumentare o diminuire il peso” a seconda che il moto sia concorde o discorde rispetto alla rotazione del cilindro.

## 16.8 Moti sulla superficie della Terra

Come è noto, la Terra *non è un sistema inerziale*: essa infatti ruota intorno al suo asse, con un periodo  $T = 23^h 56^{min}$  [4]. Quindi la velocità angolare è  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 7.29211 \cdot 10^{-5}$  rad/s. Ci aspettiamo quindi forze fittizie, precisamente centrifughe e di Coriolis.

Conviene adottare un SR [5] in cui l'origine  $O$  è sulla superficie terrestre, vicino al luogo dove ci troviamo; orientiamo gli assi in modo che  $\hat{z}$  punti verso l'alto (“zenith”) e  $\hat{y}$  sia orizzontale, lungo il meridiano locale e diretto verso il Nord geografico; per conseguenza  $\hat{x}$  sarà orizzontale, lungo il parallelo locale e diretto verso Est. Questo SR è schematizzato in Fig. 16.6.

Chiamiamo  $\lambda$  la *latitudine*, ovvero la distanza angolare dall'equatore [6]. Il vettore velocità angolare, per componenti cartesiane è:

$$\vec{\omega} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \cos \lambda \\ \omega \sin \lambda \end{pmatrix} \quad (16.41)$$

Inoltre, l'asse di rotazione passa per il centro della Terra, non per l'origine  $O$  che abbiamo scelto. Rispetto al centro della Terra,  $O$  è posizionata in  $R\hat{z}$ , essendo  $R$  la distanza dal centro della Terra. Quindi, nell'Eq. (16.33), occorre sostituire

$$\begin{aligned} \vec{r}' &\rightarrow R\hat{z} + \vec{r} \\ &\simeq R\hat{z} \end{aligned}$$

(l'approssimazione è motivata assumendo che gli spostamenti locali  $\vec{r}$  rispetto a  $O$  siano piccoli rispetto al raggio medio della Terra  $R = 6370$  km).

<sup>4</sup> Stupiti? Non erano 24 ore? Allora: effettivamente da un mezzogiorno al successivo passano 24 ore. Però in quel lasso di tempo la Terra si è anche mossa lungo la sua orbita intorno al Sole, quindi da un mezzogiorno al successivo la linea Sole-Terra è un po' cambiata, di un angolo  $2\pi \frac{1 \text{ giorno}}{365.25 \text{ giorni}}$ . In un anno (365.25 giorni) la Terra compie un giro intero intorno al Sole, quindi compie  $365.25 + 1$  giri su sé stessa. Quindi il periodo di rotazione della Terra è  $T = \frac{365.25 \text{ giorni}}{366.25 \text{ giri}} = 0.9973 \text{ giorni} = 23.93 \text{ h}$ .

<sup>5</sup> Siccome qui useremo solo il sistema solidale con la Terra, ometteremo gli apicetti '.

<sup>6</sup> Ovviamente  $\lambda$  è complementare all'angolo polare, misurato dal polo Nord:  $\lambda + \theta = \frac{\pi}{2}$ .

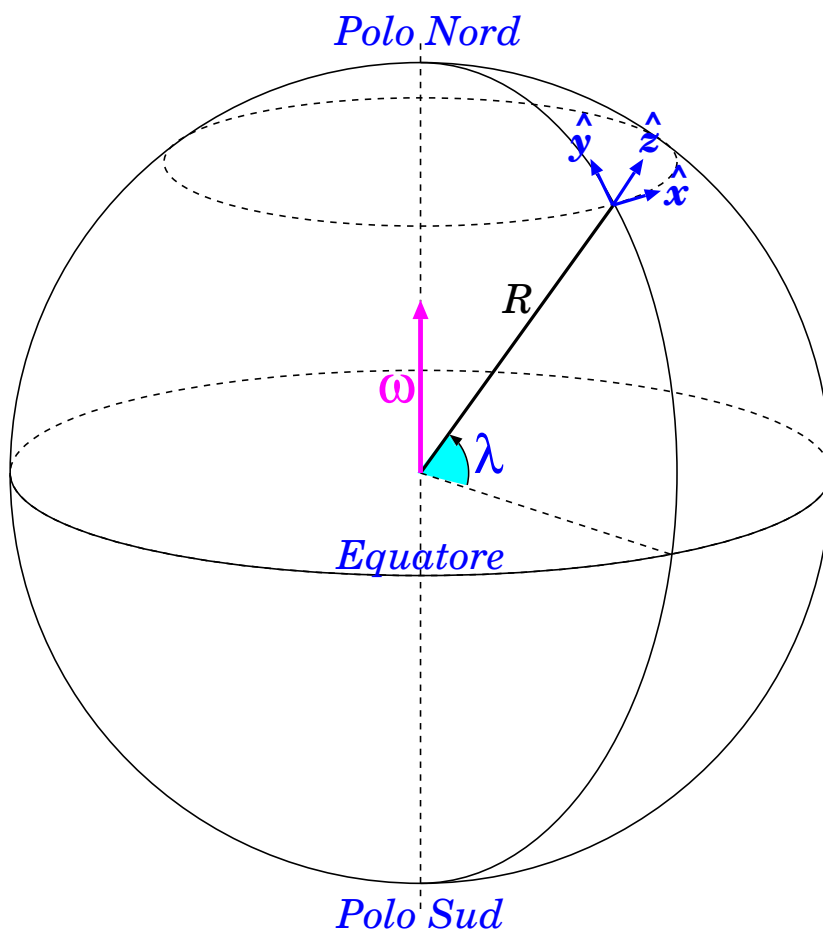


Figura 16.6: Sistema di riferimento per lo studio dei moti alla superficie terrestre.

### 16.8.1 Forze centrifughe, ridefinizione della verticale, campo gravitazionale efficace

Un oggetto di massa  $m$  fermo rispetto alla Terra è soggetto alla forza di gravità:

$$\vec{F}_g = -mg\hat{z} \quad (16.42)$$

e alla forza centrifuga:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{centrif} &= -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \\ &= -m\vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}') + m\omega^2\vec{r}' \\ &\simeq -m(R\vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \hat{z}) - \omega^2 R\hat{z}) \end{aligned}$$

Ora,  $\vec{\omega} \cdot \hat{z} = \omega \sin \lambda$ , e ricordando l'Eq. (16.41), la forza centrifuga sulla massa  $m$  in componenti cartesiane è:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{centrif} &= m \omega^2 R \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \lambda \cos \lambda \\ 1 - \sin^2 \lambda \end{pmatrix} \\ &= m \omega^2 R \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \sin(2\lambda) \\ \cos^2 \lambda \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (16.43)$$

Quindi la forza *totale* è:

$$\vec{F}^{eff} = \vec{F}_g + \vec{F}_{centrif} = m \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\omega^2 R}{2} \sin(2\lambda) \\ -g + \omega^2 R \cos^2 \lambda \end{pmatrix}\quad (16.44)$$

Vediamo l'effetto per ciascun asse cartesiano. Anzitutto, lungo  $\hat{x}$  (direzione Ovest-Est) non c'è nessun effetto. Invece lungo  $\hat{y}$  (direzione Sud-Nord) c'è un effetto che dipende dalla latitudine  $\lambda$ : nell'emisfero Nord ( $\lambda > 0$ ) la forza fittizia  $F_y^{eff}$  tira in direzione Sud, e viceversa — in ogni caso tira verso l'Equatore; inoltre l'intensità dell'effetto è massima alle latitudini  $\pm 45^\circ$ , mentre si annulla ai poli ( $\lambda = \pm 90^\circ$ ) e all'Equatore ( $\lambda = 0^\circ$ ).

Infine, lungo la verticale, abbiamo come effetto un'attenuazione del peso, dato dal termine  $\omega^2 R \cos^2 \lambda$ : l'effetto è massimo all'Equatore e nullo ai Poli.

Tutti questi effetti non sono in realtà facilmente osservabili, poiché è difficile conoscere la vera direzione di  $\hat{z}$  (cioè dov'è esattamente il centro della Terra). Pertanto, quel che si fa solitamente è definire una “verticale efficace” che punta verso  $\vec{F}^{eff}$ . Qualunque strumento tipo filo a piombo la individua immediatamente. A questo punto, l'accelerazione di gravità efficace si calcola semplicemente come

$$\begin{aligned}g^{eff} &= \frac{|\vec{F}^{eff}|}{m} = \sqrt{(g - \omega^2 R \cos^2 \lambda)^2 + \left(\frac{\omega^2 R}{2} \sin(2\lambda)\right)^2} \\ &= g \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2 R}{g} \cos^2 \lambda\right)^2 + \left(\frac{\omega^2 R}{2g} \sin(2\lambda)\right)^2}\end{aligned}$$

Prima di proseguire, osserviamo che  $\omega^2 R \simeq 0.03 \text{ m/s}^2$ , mentre  $g \simeq 9.8 \text{ m/s}^2$  — i valori vanno considerati approssimativi, poiché  $R$  non è uguale ovunque sulla Terra. In ogni caso, essendo  $\omega^2 R \ll g$ , possiamo trascurare i termini  $\mathcal{O}((\omega^2 R)^2)$  sotto la radice, e quindi:

$$g^{\text{eff}} = g - \omega^2 R \cos^2 \lambda \quad (16.45)$$

L'effetto è ben noto a tutti i geofisici. In effetti, all'Equatore  $g^{\text{eff}} = 9.789 \text{ m/s}^2$ , mentre ai poli  $g^{\text{eff}} = 9.823 \text{ m/s}^2$ .

Una osservazione: il fatto che si possano “riassorbire” gli effetti delle forze fittizie in una “ridefinizione” di  $g$  è possibile solo perché *sia le forze gravitazionali che quelle fittizie sono direttamente proporzionali alla massa  $m$  su cui agiscono.*

### 16.8.2 Forze di Coriolis

Ora passiamo allo studio di oggetti in moto. Questi subiscono anche le forze di Coriolis.

Facciamo alcune semplificazioni:

- come discusso nella sezione precedente, “riassorbiamo” la forza centrifuga in un campo gravitazionale efficace  $\vec{g}^{\text{eff}} = -g^{\text{eff}} \hat{z}$  — quindi anche la verticale è ridefinita coerentemente; in questo modo l'unica forza fittizia che rimane è quella di Coriolis;
- supponiamo che il moto sia prevalentemente orizzontale: quindi ci interessano solo le coordinate  $x$ ,  $y$ , le velocità  $v_x \equiv \frac{dx}{dt}$ ;  $v_y \equiv \frac{dy}{dt}$ , e le accelerazioni  $a_x \equiv \frac{dv_x}{dt}$ ;  $a_y \equiv \frac{dv_y}{dt}$ .

L'accelerazione di Coriolis si ricava dall'Eq. (16.32):

$$\vec{a}^{\text{Coriolis}} = -2\vec{\omega} \times \vec{v}$$

Scritta per le componenti  $x$ ,  $y$  e ricordando la scomposizione di  $\vec{\omega}$ , Eq. (16.41), essa diventa:

$$\begin{aligned} a_x^{\text{Coriolis}} &= -2(\omega_y v_z - \omega_z v_y) = (2\omega \sin \lambda) v_y \\ a_y^{\text{Coriolis}} &= -2(\omega_z v_x - \omega_x v_z) = -(2\omega \sin \lambda) v_x \end{aligned} \quad (16.46)$$

*NOTA BENE:* in generale esiste anche la componente  $a_z^{\text{Coriolis}}$ : qui non la stiamo trattando perché, come già detto, stiamo considerando moti

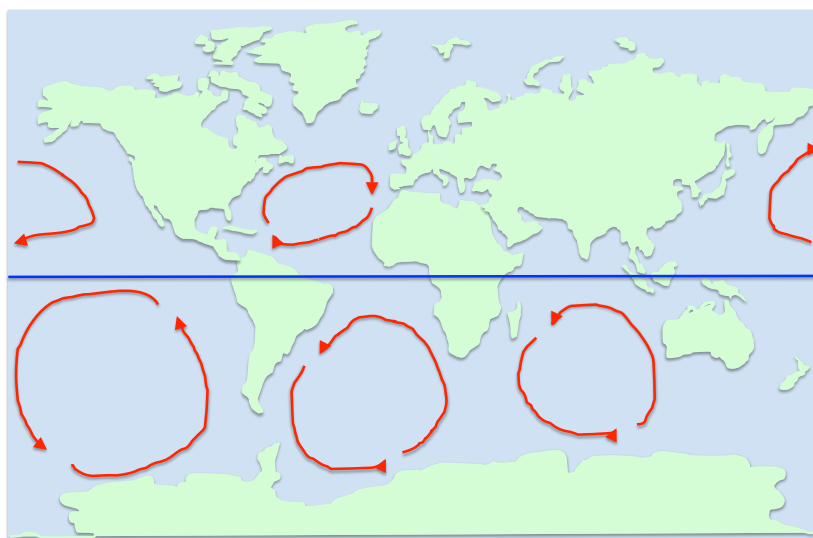


Figura 16.7: *Mappa delle principali correnti marine: per effetto della forza di Coriolis, la circolazione è in senso orario nell'emisfero Nord, antiorario nell'emisfero Sud.*

prevalentemente orizzontali. In moti verticali — tipo caduta di un oggetto da una torre — essa invece dà effetti osservabili come deviazioni dalla verticale.

Dalle Eq. (16.46) si possono fare alcune considerazioni preliminari. Anzitutto, l'effetto è minore vicino all'Equatore e più marcato alle grandi latitudini.

Inoltre, consideriamo gli orientamenti. Una corrente (aerea o marina) nell'emisfero boreale ( $\lambda > 0$ ), se si muove verso Est ( $v_x > 0$ ) subisce un effetto verso Sud ( $a_y < 0$ ); questo le conferisce una componente  $v_y < 0$ , che le dà un'accelerazione  $a_x < 0$  verso Ovest; quindi la sua velocità prima o poi si inverte e si dirige a Ovest ( $v_x < 0$ ), subendo allora un effetto verso Nord ( $a_y > 0$ ); quando anche la sua velocità punterà verso Nord ( $v_y > 0$ ) subirà un'accelerazione verso Est ( $a_x > 0$ ). L'effetto netto è che nell'emisfero Nord le correnti hanno moti in senso orario (“cicloni”). Nell'emisfero australe ( $\lambda < 0$ ) tutti i segni cambiano, quindi le correnti hanno moti in senso anti-orario. Questo fenomeno è ben noto, ed è illustrato nella Fig. 16.7.

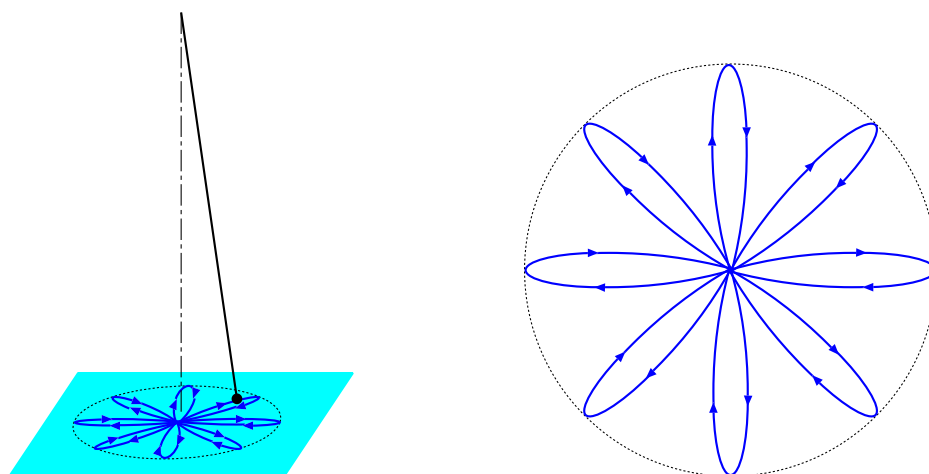


Figura 16.8: *Moto del pendolo di Foucault. La forma “a rosetta” è molto esagerata, per motivi grafici — vd esempio di calcolo nel testo.*

### 16.8.3 Il pendolo di Foucault

Abbiamo studiato che un pendolo semplice oscilla su un piano verticale... Quando abbiamo trattato questo problema abbiamo dato per scontato che le uniche forze agenti fossero la gravità e la tensione del filo. Quindi, implicitamente, abbiamo ammesso che il moto venisse osservato da un sistema inerziale, in cui non vi fossero forze fittizie.

Bene, sappiamo che un sistema di riferimento terrestre *non è inerziale*. In effetti, si osserva che un pendolo semplice, posto in oscillazione per un tempo abbastanza lungo, subisce una *rotazione* del piano di oscillazione, dovuta alla forza di Coriolis. Il moto della massa appesa in fondo al pendolo appare come disegnato in Fig. 16.8: non è lungo un segmento di retta, bensì descrive una “rosetta”.

Precisamente, ai poli, il piano di oscillazione compie una rotazione completa in  $23^h56^{min}$ !. Questo fatto è abbastanza intuitivo: il pendolo mantiene il suo piano di oscillazione invariato rispetto ad un riferimento inerziale, il pianeta Terra gli ruota sotto, quindi... All’Equatore non si osserva rotazione del piano, e anche questo è ovvio dalle Eq. (16.46): all’Equatore la forza di Coriolis si annulla.

A latitudini intermedie la velocità angolare  $\omega_{Foucault}$  di rotazione del piano di oscillazione è inferiore che al polo, e precisamente vale

$$\omega_{Foucault} = -\omega \sin \lambda \quad (16.47)$$

**Esempio di calcolo**

Consideriamo un pendolo di Foucault, lungo  $\ell = 10$  m, posto alla latitudine  $\lambda = 45^\circ$ . Calcoliamo il periodo di una oscillazione  $T_{osc}$ , e il periodo  $T_{Foucault}$  necessario a compiere una rotazione completa del piano di oscillazione — cioè a completare la “rosetta” della Fig. 16.8. Quante oscillazioni sono necessarie a completare la rosetta? La rosetta rappresentata nella figura è realistica?

**Risposte.** Il periodo dell'oscillazione è  $T_{osc} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 6.345$  s. Il periodo della rosetta è  $T_{Foucault} = \frac{2\pi}{\omega_{Foucault}} = \frac{2\pi}{\omega \sin \lambda}$ . Ora,  $\omega$  è la velocità angolare della Terra, quindi  $\frac{2\pi}{\omega} = 23^h 56^{min} = 86160$  s, quindi  $T_{Foucault} = 121849$  s. Per compiere l'intera rosetta, occorrono  $\frac{121849}{6.345} = 19203$  oscillazioni.

Per compiere una rosetta come nella figura, sono necessari 4 periodi (attenzione: se contate i “lobi”, sono 8, ma una oscillazione completa descrive 2 lobi). Dunque il disegno non è realistico: l'effetto della forza di Coriolis è esagerato!

**Dimostrazione (\*)**

La legge della precessione di Foucault, Eq. (16.47), può essere ricavata analiticamente, con un artificio matematico.

Anzitutto, ricordiamo che, omettendo la forza di Coriolis, le altre forze agenti sul pendolo sono la gravità, la tensione del filo, e la forza centrifuga: quest'ultima viene incorporata nella “gravità efficace”  $g^{eff}$ . L'effetto complessivo di tutte queste forze, lo sappiamo, è di creare un moto armonico con frequenza angolare  $\Omega$  tale che

$$\Omega^2 = \frac{g^{eff}}{\ell}$$

Quindi, sempre omettendo la forza di Coriolis, le equazioni del moto del pendolo, sul piano orizzontale  $(x, y)$ , sono:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{g^{eff}}{\ell}x \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{g^{eff}}{\ell}y \end{aligned}$$

Ora reintroduciamo anche l'accelerazione di Coriolis, Eq. (16.46):

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= (2\omega \sin \lambda) \frac{dy}{dt} - \frac{g^{\text{eff}}}{\ell} x \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -(2\omega \sin \lambda) \frac{dx}{dt} - \frac{g^{\text{eff}}}{\ell} y\end{aligned}\quad (16.48)$$

Questo è un sistema di due equazioni differenziali lineari, ciascuna di secondo ordine. In generale si può risolvere, nessun problema... Però la sua struttura peculiare:

$$\begin{aligned}a_x &\propto v_y + \dots \\ a_y &\propto -v_x + \dots\end{aligned}$$

suggerisce una scorciatoia. Compattiamo entrambe le coordinate  $x$ ,  $y$  in una *coordinata complessa*:

$$\xi = x + iy$$

Ovviamente, la stessa cosa si può fare per velocità e accelerazione:

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= v_x + i v_y \\ \frac{d^2\xi}{dt^2} &= a_x + i a_y\end{aligned}$$

Osserviamo poi che  $-i \frac{d\xi}{dt} = v_y - i v_x$ . Bene, allora le Eq. (16.48) possono essere scritte come:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -2\omega \sin \lambda i \frac{d\xi}{dt} - \frac{g}{\ell} \xi \quad (16.49)$$

Questa è una *singola* equazione differenziale, di secondo ordine, nella funzione incognita complessa  $\xi(t)$ . La soluzione si può trovare per sostituzione: si assume una forma  $\xi(t) = Ae^{st}$ , in cui  $A$ ,  $s$  sono costanti complesse da determinare. Per le proprietà della funzione esponenziale,  $\frac{d\xi}{dt} = sAe^{st} = s\xi$  e analogamente  $\frac{d^2\xi}{dt^2} = s^2Ae^{st} = s^2\xi$ . Sostituendo nell'Eq. (16.49) si ottiene:

$$s^2 \xi(t) = -2\omega \sin \lambda i s \xi(t) - \frac{g}{\ell} \xi(t)$$

Siccome  $\xi(t)$  non si può mai annullare (è un esponenziale!), può essere eliminato dall'equazione, che diventa puramente algebrica:

$$s^2 + 2\omega \sin \lambda i s + \frac{g}{\ell} = 0$$



È un'equazione di secondo grado, le cui soluzioni sono:

$$\begin{aligned} s_{\pm} &= -i\omega \sin \lambda \pm \sqrt{-(\omega \sin \lambda)^2 - \frac{g}{\ell}} \\ &\simeq i \left( -\omega \sin \lambda \pm \sqrt{\frac{g}{\ell}} \right) \end{aligned}$$

(l'ultima approssimazione deriva dal fatto che per pendoli di lunghezze tipiche,  $\frac{g}{\ell} \gg \omega^2$ ).

Ora, siccome entrambe le soluzioni  $s_{\pm}$  sono valide, la soluzione generale dell'Eq. (16.49) è del tipo:

$$\begin{aligned} \xi(t) &= A_+ e^{s_+ t} + A_- e^{s_- t} \\ &= \left( A_+ e^{+i\sqrt{\frac{g}{\ell}}t} + A_- e^{-i\sqrt{\frac{g}{\ell}}t} \right) e^{-i\omega(\sin \lambda)t} \end{aligned} \quad (16.50)$$

e le costanti complesse  $A_+$ ,  $A_-$  vanno determinate dalle condizioni iniziali. Assumiamo che a  $t = 0$  il pendolo si trovi sulla verticale, cosicché  $x(0) = 0$  e  $y(0) = 0$ , vale a dire  $\xi(0) = 0$ . Questa condizione, inserita nell'Eq. (16.50), implica che  $A_+ = -A_-$ . Chiamiamo  $A_+ = Ae^{i\phi}$ . La soluzione diventa quindi:

$$\begin{aligned} \xi(t) &= Ae^{i\phi} e^{-i\omega(\sin \lambda)t} \left( e^{+i\sqrt{\frac{g}{\ell}}t} - e^{-i\sqrt{\frac{g}{\ell}}t} \right) \\ &= 2iAe^{i(\phi - \omega(\sin \lambda)t)} \sin \left( \sqrt{\frac{g}{\ell}}t \right) \\ &= 2Ae^{i\left(\frac{\pi}{2} + \phi - \omega(\sin \lambda)t\right)} \sin \left( \sqrt{\frac{g}{\ell}}t \right) \end{aligned} \quad (16.51)$$

(abbiamo usato l'identità  $e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = 2i \sin \alpha$ ). Ora ricordiamo che  $x = \mathbf{Re}(\xi)$  e  $y = \mathbf{Im}(\xi)$ :

$$\begin{aligned} x(t) &= 2A \cos \left( \frac{\pi}{2} + \phi - \omega(\sin \lambda)t \right) \sin \left( \sqrt{\frac{g}{\ell}}t \right) \\ y(t) &= 2A \sin \left( \frac{\pi}{2} + \phi - \omega(\sin \lambda)t \right) \sin \left( \sqrt{\frac{g}{\ell}}t \right) \end{aligned} \quad (16.52)$$

Osserviamo che sia  $x(t)$  che  $y(t)$  hanno una componente oscillante  $\sin\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right)$ , come un normale pendolo. Però le ampiezze a loro volta evolvono nel tempo come:

$$\begin{aligned}x_{\max}(t) &= 2A \cos(-\omega(\sin \lambda)t + \dots) \\y_{\max}(t) &= 2A \sin(-\omega(\sin \lambda)t + \dots)\end{aligned}$$

ovvero come le componenti  $x$ ,  $y$  di un vettore che ruota nel piano  $(x, y)$  con una velocità angolare  $-\omega \sin \lambda$ . *Quod erat demonstrandum.*

#### 16.8.4 Caduta di un grave da una torre

Finora abbiamo considerato moti “orizzontali” sulla superficie terrestre, ignorando quindi gli spostamenti lungo  $z$ . Ora vediamo un esempio diverso.

Consideriamo una torre verticale di altezza  $h$  — per semplicità posta all’equatore. Se lasciamo cadere una massa  $m$  dalla cima della torre, dove atterra?

Anche senza fare i conti, ci aspettiamo che cada spostata a Est rispetto alla base della torre. Infatti, immaginiamo la situazione vista da un sistema inerziale, in cui la Terra ruota con velocità angolare  $\omega$  — vd Fig. 16.9 (sinistra); il raggio della Terra è  $R$ ; la velocità della massa, all’inizio, è pari a quella dell’estremità della torre, dunque è  $\omega(R + h)$ , diretta verso Est; la velocità della base della torre è solo  $\omega R$ , quindi minore della velocità della massa; in conclusione, la massa deve “precedere” la torre durante la sua caduta.

##### Trattazione nel sistema di riferimento inerziale

Si sarebbe tentati di ragionare (erroneamente) così: il tempo  $\Delta t$  di caduta dalla torre è tale che  $h = \frac{g(\Delta t)^2}{2}$ , quindi  $\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ ; la differenza di velocità fra cima e base della torre è  $\omega h$ ; quindi lo spostamento (rispetto alla torre) è  $\Delta x' = (\omega h)\Delta t = \sqrt{\frac{2\omega^2 h^3}{g}}$ .

Il problema è che, durante la caduta, l’oggetto subisce uno spostamento orizzontale  $x$ , per cui la sua posizione angolare rispetto al centro della Terra

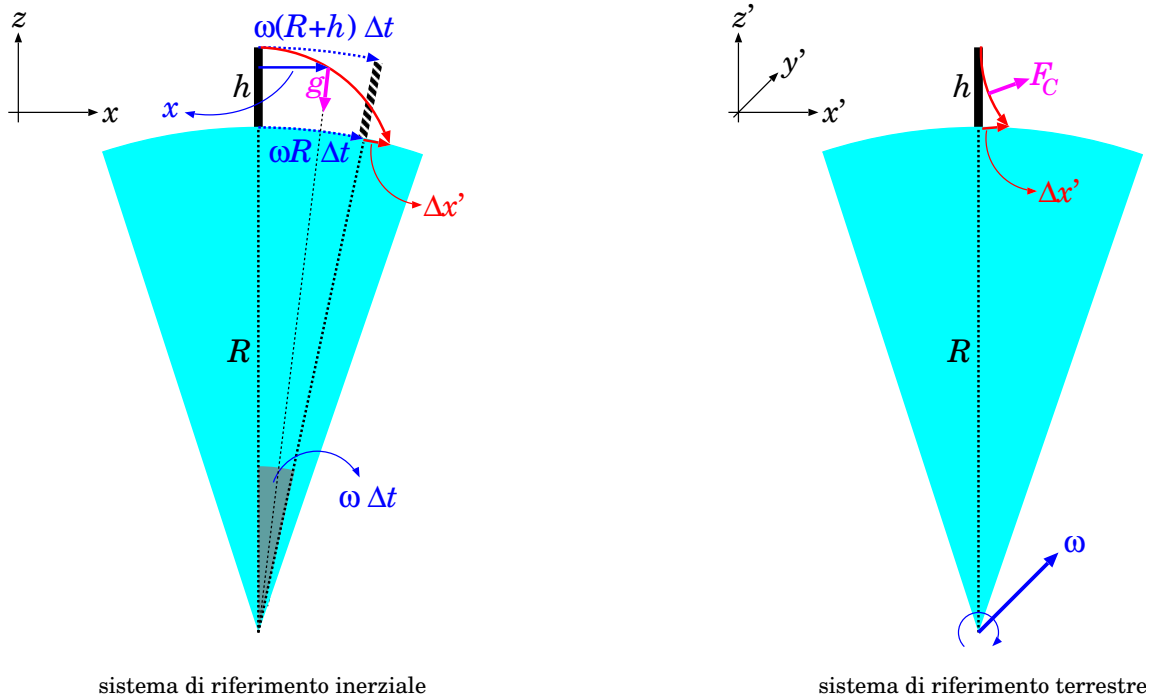


Figura 16.9: Moto di un grave in caduta da una torre di altezza  $h$ : a sinistra, visto da un sistema inerziale; a destra, visto da un sistema co-rotante con la Terra. La Terra ha raggio  $R$  e ruota con velocità angolare  $\omega$ ;  $\Delta t$  è il tempo di caduta;  $\Delta x'$  è lo spostamento del punto di caduta del grave, rispetto alla base della torre;  $F_C$  è la forza di Coriolis che appare nel sistema di riferimento terrestre.

si modifica di una quantità  $\alpha = \frac{x}{R+z} \simeq \frac{x}{R}$ . Per conseguenza, anche la forza-peso diventa obliqua, acquisendo quindi due componenti:

$$F_{g,x} = -mg \frac{x}{R}$$

$$F_{g,z} = -mg \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2} \simeq -mg$$

Quindi le equazioni del moto diventano:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{R} x$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g$$

La seconda si integra banalmente:

$$z(t) = h - \frac{g}{2}t^2$$

Il tempo di caduta  $\Delta t$  si ottiene imponendo  $z(\Delta t) = 0$ :

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Invece l'equazione in  $x$  descrive un moto oscillatorio armonico <sup>[7]</sup>, con pulsazione  $\Omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$ . La soluzione generale è  $x(t) = A \cos(\Omega t + \phi)$ , dove  $A$ ,  $\phi$  si ricavano dalle condizioni iniziali. Imponendo  $x(0) = 0$  si trova  $\cos \phi = 0$ , ovvero  $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$ . Poi,  $v(t) = -A\Omega \sin(\Omega t + \phi)$ ; imponendo  $v(0) = \omega(R+h)$  si trova  $\phi = -\frac{\pi}{2}$  e  $A\Omega = \omega(R+h)$ . Infine,  $\cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\Omega t)$ . Riassumendo:

$$x(t) = A \sin(\Omega t) \quad \begin{cases} \Omega = \sqrt{\frac{g}{R}} \\ A = \frac{\omega}{\Omega}(R+h) \end{cases}$$

Ora,  $g \simeq 9.8 \text{ m/s}^2$  e  $R = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$ , pertanto  $\Omega \simeq 1.2 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$ ; inoltre, per una torre di altezza  $h = 100 \text{ m}$ ,  $t \leq \Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \simeq 4.5 \text{ s}$ ; quindi  $\Omega t \lesssim 5 \cdot 10^{-3}$ . Si potrebbe pensare di approssimare  $\sin(\Omega t) \simeq \Omega t$ ; ma facendo così descriveremmo  $x(t)$  come un moto a velocità uniforme, ovvero trascureremmo la componente orizzontale dell'accelerazione,  $-\frac{g}{R}x$ : pertanto è necessario fare un'approssimazione migliore:

$$\sin(\Omega t) \simeq \Omega t - \frac{(\Omega t)^3}{3!} = \Omega t \left(1 - \frac{(\Omega t)^2}{6}\right)$$

Lo spostamento totale  $\Delta x$  alla fine della caduta è quindi:

$$\Delta x = x(\Delta t) = A\Omega\Delta t \left(1 - \frac{(\Omega\Delta t)^2}{6}\right)$$

---

<sup>7</sup> Attenzione: non è che l'oggetto in caduta oscilla di qua e di là dalla torre: vedremo che la pulsazione  $\Omega$  è molto piccola, cosicché nel tempo dato può avere luogo solo una piccola parte del moto.

Ora,  $A\Omega = \omega(R+h)$ ,  $\Omega\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{R}}$ , quindi:

$$\begin{aligned}\Delta x &= \omega(R+h) \sqrt{\frac{2h}{g}} \left(1 - \frac{h}{3R}\right) \\ &= \omega R \sqrt{\frac{2h}{g}} \left(1 + \frac{h}{R}\right) \left(1 - \frac{h}{3R}\right) = \omega R \sqrt{\frac{2h}{g}} \left(1 + \frac{h}{R} - \frac{h}{3R}\right) \\ &\simeq \omega R \sqrt{\frac{2h}{g}} \left(1 + \frac{2h}{3R}\right)\end{aligned}$$

Nel frattempo, la base della torre si è spostata di  $(\omega R)\Delta t$ , pertanto lo spostamento della massa dalla base della torre è:

$$\begin{aligned}\Delta x' &= \Delta x - \omega R \Delta t = \omega R \sqrt{\frac{2h}{g}} \frac{2h}{3R} \\ &= \frac{\omega}{3} \sqrt{\frac{8h^3}{g}}\end{aligned}$$

Per una torre di  $h = 100$  m, gli spostamenti sono  $\Delta x = 2.08$  km e  $\Delta x' = 2.2$  cm.

### Trattazione nel sistema di riferimento terrestre

Per quanto visto sopra, nel SR solidale con la Terra, lo spostamento orizzontale è piccolo:  $x' \leq \Delta x' \approx$  cm, pertanto possiamo considerare la forza-peso come sempre verticale:

$$\begin{aligned}F_{g,z} &= -mg \\ F_{g,x} &= 0\end{aligned}$$

D'altra parte, essendo in un SR rotante, dobbiamo aggiungere la forza di Coriolis,  $\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$ . Con riferimento alla Fig. 16.9 (destra),  $\vec{\omega} = \omega\hat{y}$ , quindi, per componenti cartesiane:

$$\begin{aligned}F_{C,z} &= -2m(\omega_x v'_y - \omega_y v'_x) = 2m\omega v'_x \\ F_{C,x} &= -2m(\omega_y v'_z - \omega_z v'_y) = -2m\omega v'_z\end{aligned}$$

Ora le equazioni del moto diventano:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 z'}{dt^2} &= -g + 2\omega v'_x \simeq -g \\ \frac{d^2 x'}{dt^2} &= -2\omega v'_z\end{aligned}$$

L'approssimazione sulla prima equazione si può motivare così: anche senza risolvere il moto, sappiamo che  $\Delta x' < \omega h \Delta t$  e quindi che  $v'_x \lesssim \omega h$ ; quindi  $2\omega v'_x \lesssim 2\omega^2 h$ ; per  $h = 100$  m,  $2\omega^2 v'_x \lesssim 10^{-6} \text{m/s}^2$  — decisamente trascurabile rispetto a  $g$ .

L'equazione in  $z'$  si integra immediatamente:

$$v'_z = -gt \quad ; \quad z' = h - \frac{g}{2}t^2$$

cosicché anche l'equazione in  $x'$  diventa banale:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x'}{dt^2} &= 2\omega g t \\ \frac{dx'}{dt} &= \omega g t^2 \\ x'(t) &= \frac{\omega}{3} g t^3 \\ \Delta x' \equiv x'(\Delta t) &= \frac{\omega}{3} g \left( \frac{2h}{g} \right)^{3/2} \\ &= \frac{\omega}{3} \sqrt{\frac{(2h)^3}{g}} \end{aligned}$$

(ovviamente, uguale a quanto trovato nel sistema inerziale)

# Capitolo 17

## Dinamica dei sistemi di punti materiali

In questo capitolo studiamo la dinamica di sistemi di punti materiali che interagiscono fra di loro scambiandosi forze, ed eventualmente soggetti a forze esterne al sistema. Possiamo individuare diversi esempi di sistemi di questo genere.

- Un gas è costituito da molecole, che occasionalmente si urtano, quindi interagiscono fra loro; inoltre possono essere soggette a forze esterne, per esempio la gravità.
- Un oggetto solido è formato da atomi o molecole, tenuti saldamente in posizione dalle interazioni reciproche. Anche in questo caso, ci possono essere forze esterne, come la gravità, o altre azioni meccaniche esercitate sul solido.
- Un sistema planetario è costituito da una stella (o più di una, in molti casi...) e diversi pianeti che orbitano intorno ad essa. Attorno ai pianeti orbitano satelliti. Inoltre ci sono diversi oggetti minori (asteroidi, comete, ...) Tutti questi oggetti interagiscono fra loro attraverso forze gravitazionali. Anche il sistema planetario non è isolato: fa parte di una galassia che esercita su di esso la propria attrazione gravitazionale, che va pensata come un insieme di forze esterne.
- La stessa galassia è un insieme di oggetti (le stelle) interagenti fra loro. La galassia poi risente dell'attrazione gravitazionale di altre galassie del gruppo.

In tutti questi esempi, gli oggetti che costituiscono il sistema possono essere considerati puntiformi. A rigore, sappiamo che un atomo non è puntiforme (è composto!), e tanto meno lo è un pianeta o una stella. Il significato di “puntiformi”, anche in questo caso, è che le estensioni spaziali degli oggetti sono molto più piccole, addirittura trascurabili, rispetto alle distanze che li separano. Pertanto ogni oggetto può essere descritto dalla sua posizione,  $\vec{r}_i$ , e dalla sua velocità,  $\vec{v}_i$ , senza per esempio entrare nel merito di come sia orientato.

Vedremo che le caratteristiche cinematiche di un sistema complesso di punti possono essere “separate” in due componenti:

- una componente di “moto collettivo”: essa si descrive mediante il moto di un punto immaginario, il *centro di massa* o *baricentro*, che si muove come se tutto il sistema fosse condensato in esso, ed è influenzato dalle forze esterne;
- un'altra componente che descrive invece i moti “interni” del sistema, come osservati da un osservatore solidale con il centro di massa.

Un esempio: il Sistema Solare è dotato di un moto collettivo attorno al centro galattico, con una velocità di circa 220 km/s e un periodo orbitale di circa 200-250 milioni di anni. Tale moto è descritto dal centro di massa del Sistema Solare, che si trova molto vicino al Sole, ed è governato dalla forza gravitazionale complessiva della Galassia. Viceversa, i moti dei pianeti sono meglio descritti se riferiti al centro di massa.

## 17.1 Notazione

Conviene fin da subito definire le notazioni che useremo. Facciamo riferimento alla Fig. 17.1. In generale abbiamo  $n$  punti che occupano le posizioni  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ . Il punto  $i$ -esimo è dotato di massa  $m_i$ , velocità  $\vec{v}_i$ , pertanto ha una quantità di moto

$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i \quad (17.1)$$

e un momento angolare rispetto all'origine

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \quad (17.2)$$

Inoltre, il punto  $i$ -esimo è soggetto ad un'accelerazione  $\vec{a}_i$ , dovuta ad un sistema di forze di risultante  $\vec{F}_i$ , tale che:

$$\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i \quad (17.3)$$



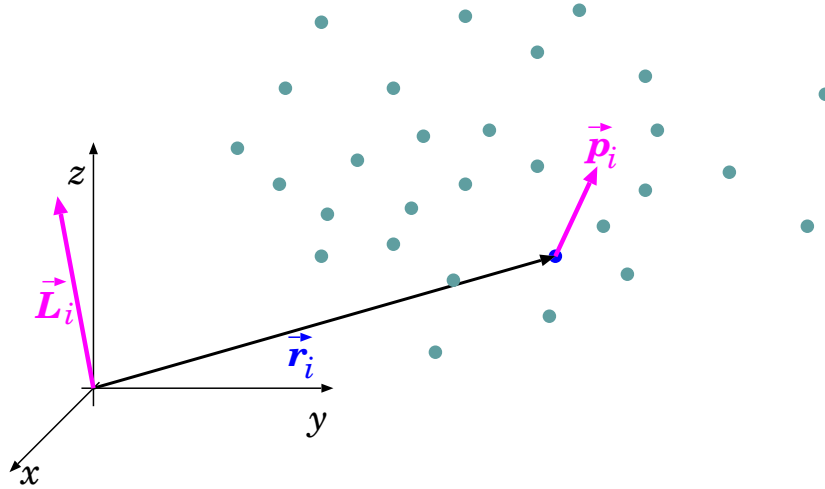


Figura 17.1: Posizione, velocità, quantità di moto e momento angolare di ciascun componente di un sistema di punti.

Le forze agenti sull' $i$ -esimo punto possono essere dovute agli altri punti  $j$  del sistema, nel qual caso sono chiamate *forze interne* ed indicate con  $\vec{F}_{ij}$  (vd Fig. 17.2): la convenzione è che il primo indice (in questo caso  $i$ ) indica l'oggetto su cui agisce la forza, il secondo (in questo caso  $j$ ) indica l'oggetto che produce la forza. Le forze fra i due oggetti,  $i$  e  $j$ , devono soddisfare il principio di azione-reazione:

$$\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij} \quad (17.4)$$

$$\vec{F}_{ij} \parallel (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

Inoltre, possono esserci altre forze prodotte da cause esterne al sistema dei punti, nel qual caso saranno indicate con  $\vec{F}_i^{(est)}$ . Quindi, la forza risultante sull' $i$ -esimo punto è:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(est)} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \quad (17.5)$$

Nel caso non esistano azioni di origine esterna al sistema dei punti, abbiamo  $\vec{F}_i^{(est)} = 0$ : in tal caso diciamo che *il sistema è isolato*.

## 17.2 Quantità di moto e momento angolare

Definiamo la quantità di moto totale del sistema come:

$$\vec{p}_{tot} = \sum_i \vec{p}_i \quad (17.6)$$

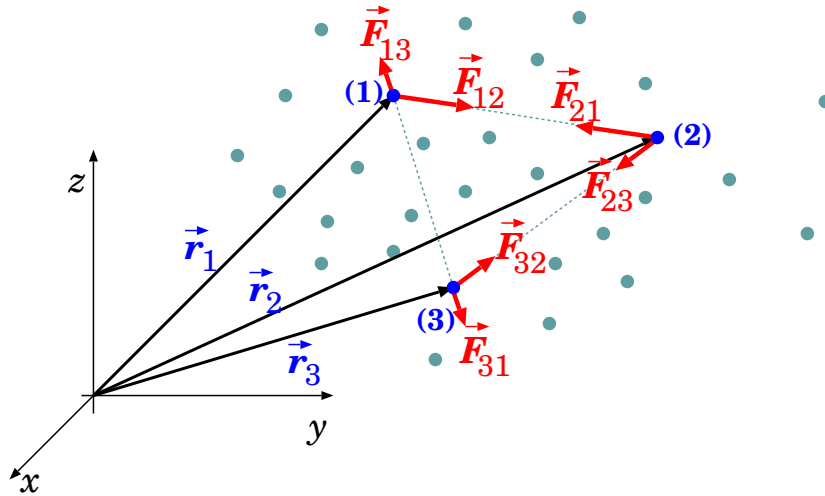


Figura 17.2: Forza su ciascun componente di un sistema di punti.

e il momento angolare totale come:

$$\vec{L}_{tot} = \sum_i \vec{L}_i \quad (17.7)$$

Come evolvono nel tempo queste quantità?

Consideriamo dapprima la quantità di moto totale del sistema:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}_{tot}}{dt} &= \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \left[ \vec{F}_i^{(est)} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \right] \\ &= \sum_i \vec{F}_i^{(est)} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{F}_{ij} \end{aligned}$$

A causa del principio di azione-reazione (Eq. (17.4)) il risultato della seconda sommatoria è sempre identicamente nullo: infatti, per ogni termine  $\vec{F}_{ij}$  ce n'è sempre uno  $\vec{F}_{ji}$  che ha segno opposto.

Pertanto, le forze interne al sistema non ne alterano la quantità di moto totale. Essa è alterata solo dalle forze esterne:

$$\frac{d\vec{p}_{tot}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{(est)} \quad (17.8)$$

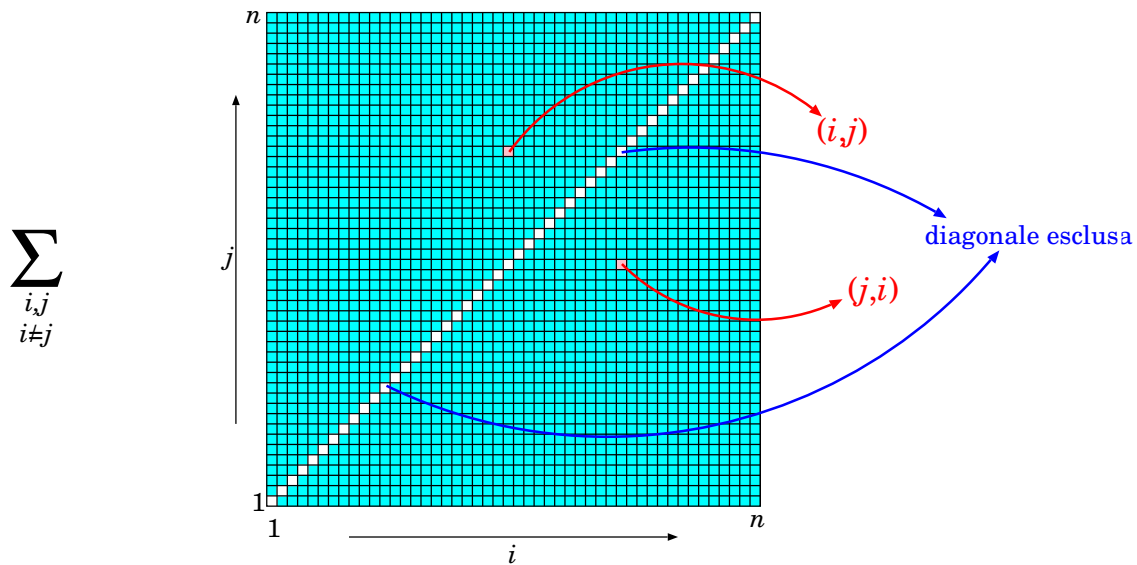


Figura 17.3: Rappresentazione grafica della doppia sommatoria  $\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}$ : gli indici  $i, j$  corrono ciascuno da 1 a  $n$ ; tutte le caselle della “scacchiera” vengono sommate, tranne quelle sulla diagonale ( $i = j$ ). La somma può essere eseguita in qualunque ordine (proprietà commutativa): se si intende come  $\sum_i \sum_{j \neq i}$  la scacchiera viene scansata per colonne (per ciascun valore di  $i$  si scorrono tutti i valori di  $j$ , tranne  $j = i$ ); se invece si intende come  $\sum_j \sum_{i \neq j}$  la scacchiera viene scansata per righe; oppure, si possono sommare a 2 a 2 le coppie simmetriche rispetto alla diagonale:  $(i, j)$  e  $(j, i)$ .

La doppia sommatoria  $\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}$  è un’operazione che ci accompagnerà per tutto questo capitolo. Essa può essere rappresentata come in Fig. 17.3.

Ora consideriamo il momento angolare totale del sistema:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} &= \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \left[ \vec{F}_i^{(est)} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \right] \\ &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(est)} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} \end{aligned}$$

Anche qui, il risultato della seconda sommatoria è identicamente nullo. Infatti, per ogni coppia  $ij$  esiste una coppia  $ji$ : il contributo di entrambe è:

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}$$

(dove abbiamo sfruttato  $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$ ). Ora, poiché  $\vec{F}_{ij}$  deve avere la direzione della congiungente le posizioni  $\vec{r}_i$  e  $\vec{r}_j$ , il prodotto vettoriale si annulla sempre.

In conclusione:

$$\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(est)} \quad (17.9)$$

le forze interne al sistema non ne alterano il momento angolare totale. Esso risente solo delle forze esterne.

### ———— Variante: polo in movimento (\*) ————

Nella trattazione del momento angolare, riesaminiamo la scrittura:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} &= \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_i m_i \frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) \\ &= \sum_i m_i \left( \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{v}_i + \vec{r}_i \times \frac{d\vec{v}_i}{dt} \right) \end{aligned}$$

Se si assume (come fatto finora) che il polo  $O$  rispetto a cui si misurano le distanze  $\vec{r}_i$  sia fermo, possiamo scrivere  $\frac{d\vec{r}_i}{dt} \equiv \vec{v}_i$ , cosicché  $\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{v}_i = 0$ .

In alcuni casi può essere utile scegliere un polo  $O$  che sia in movimento, con velocità  $\vec{v}_O$ . In tal caso, la variazione di  $\vec{r}_i$  nel tempo è

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i - \vec{v}_O$$

(cioè la velocità relativa del punto  $i$  rispetto al punto  $O$ ), cosicché  $\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{v}_i = -\vec{v}_O \times \vec{v}_i$ . Allora, il risultato dell'Eq. (17.9) si modifica così:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} &= -\vec{v}_O \times \left( \sum_i m_i \vec{v}_i \right) + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(est)} \\ &= -\vec{v}_O \times \vec{p}_{tot} + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(est)} \end{aligned}$$

Il “nuovo” termine  $-\vec{v}_O \times \vec{p}_{tot}$ , dovuto al movimento del polo, si manifesta solo se  $\vec{v}_O$  non è parallela a  $\vec{p}_{tot}$ .

Il polo in movimento è una situazione che in seguito non useremo: abbiamo descritto questo caso solo per completezza.

### 17.2.1 Sistema isolato, quantità conservate

In particolare, se il sistema di punti è isolato (cioè  $\vec{F}_i^{(est)} = 0$ ) la quantità di moto totale e il momento angolare totale sono costanti del moto:

$$\frac{d\vec{p}_{tot}}{dt} = 0 \quad ; \quad \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = 0 \quad (\text{sistema isolato}) \quad (17.10)$$

Abbiamo ottenuto questo risultato, come conseguenza del fatto che le forze interne  $\vec{F}_{ij}$  non contribuiscono ad alterare  $\vec{p}_{tot}$ ,  $\vec{L}_{tot}$ . Questo risultato, a sua volta, è conseguenza della legge di azione-reazione.

#### ————— Simmetrie e leggi di conservazione —————

*Vale la pena fare una piccola digressione, senza dimostrazioni. Abbiamo accennato che non tutte le forze soddisfano il principio di azione-reazione — per esempio, le forze magnetiche fra cariche elettriche in moto lo violano. Eppure, la conservazione della quantità di moto totale e del momento angolare totale di un sistema isolato è una legge valida in generale. Quando si formulano le leggi della dinamica con il formalismo Lagrangiano (non trattato in questo testo!), si trova che se il sistema presenta certe simmetrie, ad esse corrispondono quantità conservate (“teorema di Noether”). Per “simmetria”, si intende genericamente una trasformazione degli osservabili che non altera le leggi che governano il sistema.*

*In particolare, si può considerare una traslazione di tutto il sistema nello spazio, oppure una sua rotazione. Per chiarezza: parliamo di una traslazione e/o una rotazione fissate, non che evolvono nel tempo. Se lo spazio è omogeneo, una traslazione non deve alterare le leggi della fisica, quindi si tratta di una simmetria. Analogamente, se lo spazio è isotropo, anche la rotazione deve essere una simmetria. A queste simmetrie corrispondono leggi di conservazione. Si dimostra che:*

- *se lo spazio è omogeneo, segue la conservazione di  $\vec{p}_{tot}$ ;*
- *se lo spazio è isotropo, segue la conservazione di  $\vec{L}_{tot}$ .*

*È importante notare che le ipotesi di omogeneità e isotropia valgono solo se il sistema è isolato. Infatti, la presenza di forze esterne introduce direzioni privilegiate, rompendo l’isotropia, e invalida anche l’omogeneità, poiché le sorgenti delle forze esterne costituiscono punti privilegiati dello spazio.*

*Il fatto che la conservazione di  $\vec{p}_{tot}$ ,  $\vec{L}_{tot}$  valga anche quando ci sono forze che violano la legge di azione-reazione, è attribuibile al fatto che anche i campi di forza possono possedere quantità di moto e momento angolare. Questo è un risultato notevole, che scaturisce per esempio dalle equazioni di Maxwell, che governano l’elettromagnetismo.*

### 17.3 Lavoro ed energia

Ciascun punto ( $i$ ) del sistema ha un'energia cinetica  $\mathcal{E}_i = \frac{m_i}{2} v_i^2$ . L'energia cinetica totale è

$$\mathcal{E}_{tot} = \sum_i \mathcal{E}_i = \sum_i \frac{m_i}{2} v_i^2 \quad (17.11)$$

Il lavoro elementare fatto dalle forze agenti sull' $i$ -esimo punto è:

$$\delta\mathcal{W}_i = \vec{\mathbf{F}}_i \cdot d\vec{\mathbf{r}}_i = \underbrace{\vec{\mathbf{F}}_i^{(est)} \cdot d\vec{\mathbf{r}}_i}_{\delta\mathcal{W}_i^{(est)}} + \underbrace{\sum_{j \neq i} \vec{\mathbf{F}}_{ij} \cdot d\vec{\mathbf{r}}_i}_{\delta\mathcal{W}_i^{(int)}} \quad (17.12)$$

dove abbiamo separato le due componenti di lavoro fatte dalle forze esterne e da quelle interne. Quindi la variazione dell'energia cinetica totale è

$$d\mathcal{E}_{tot} = \underbrace{\sum_i \delta\mathcal{W}_i^{(est)}}_{\delta\mathcal{W}^{(est)}} + \underbrace{\sum_i \delta\mathcal{W}_i^{(int)}}_{\delta\mathcal{W}^{(int)}} \quad (17.13)$$

#### 17.3.1 Lavoro delle forze interne

Calcoliamo il lavoro totale delle forze interne:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{W}^{(int)} &= \sum_i \delta\mathcal{W}_i^{(int)} = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i^{(int)} \cdot d\vec{\mathbf{r}}_i = \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{\mathbf{F}}_{ij} \cdot d\vec{\mathbf{r}}_i \\ &= \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{\mathbf{F}}_{ij} \cdot d\vec{\mathbf{r}}_i \quad (*) \end{aligned}$$

La formula (\*) può essere riscritta scambiando gli indici  $i \leftrightarrow j$  senza che il risultato cambi; poi ci ricordiamo che  $\vec{\mathbf{F}}_{ij} = -\vec{\mathbf{F}}_{ji}$ ; infine la sommatoria

doppia è simmetrica negli indici:  $\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \equiv \sum_{\substack{j,i \\ j \neq i}}$ ; con tutto ciò si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \delta\mathcal{W}^{(int)} &= \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i \quad (*) \\
 &= \sum_{\substack{j,i \\ j \neq i}} \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_j \quad (\text{ridefinizione } i \leftrightarrow j) \\
 &= - \sum_{\substack{j,i \\ j \neq i}} \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_j \quad (\text{si sfrutta } \vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}) \\
 &= - \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_j \quad (**) \quad (\text{si sfrutta } \sum_{\substack{j,i \\ j \neq i}} \equiv \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}})
 \end{aligned}$$

Ora, (\*) e (\*\*) sono due espressioni equivalenti per  $\delta\mathcal{W}^{(int)}$ , pertanto:

$$\delta\mathcal{W}^{(int)} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{F}_{ij} \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad (17.14)$$

da cui si vede che il lavoro interno dipende dagli spostamenti *relativi* delle coppie di punti:  $d(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ .

### 17.3.2 Forze interne centrali, energia potenziale

Introduciamo le seguenti notazioni:

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_{ij} &\equiv \vec{r}_i - \vec{r}_j \\
 r_{ij} &\equiv |\vec{r}_{ij}| = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| \\
 \hat{r}_{ij} &\equiv \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} = \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}
 \end{aligned}$$

È di particolare interesse il caso in cui le forze mutue fra i punti  $i, j$  del sistema dipendano solo dalla distanza  $r_{ij}$  fra essi — vd Fig. 17.4. Abbiamo parlato di questo caso già introducendo i campi di forza centrali, nella Sezione 11.4. In tal caso le forze interne possono essere scritte come:

$$\vec{F}_{ij} = F_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \equiv F_{ij}(r_{ij}) \hat{r}_{ij} \quad (17.15)$$

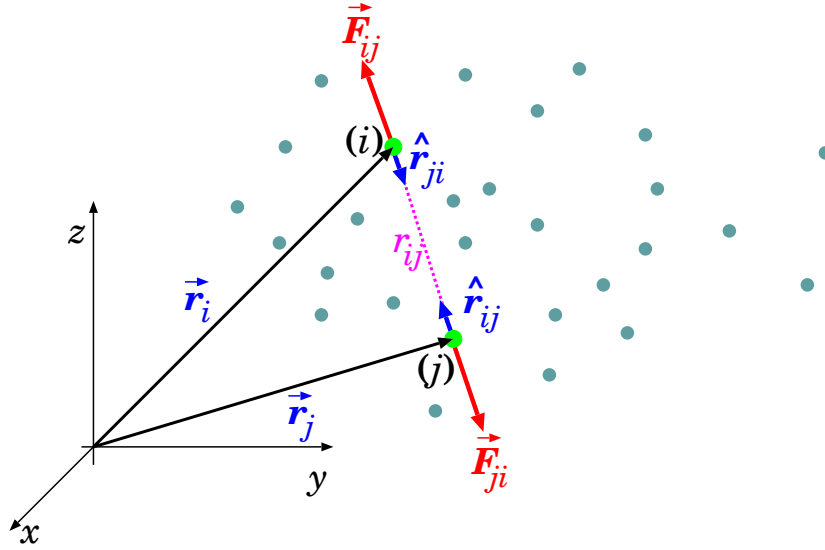


Figura 17.4: Forze interne centrali.

La funzione  $F_{ij}(r_{ij})$  dà l'intensità della forza: essa dipende solo dalla distanza  $r_{ij}$  ma non dalla direzione. Gli indici di  $F_{ij}$  stanno ad indicare che la natura (e quindi l'intensità) della forza può in generale dipendere dalla coppia  $i, j$  di punti presi in considerazione. Se  $F_{ij}(r_{ij}) > 0$  la forza è repulsiva, altrimenti è attrattiva.

La legge di azione-reazione,  $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ , insieme all'Eq. (17.15) <sup>[1]</sup>, ci dice che

$$F_{ij} = F_{ji} \quad (17.16)$$

Riscriviamo il lavoro delle forze interne, Eq. (17.14):

$$\delta\mathcal{W}^{(int)} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{F}_{ij} \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \left( \frac{F_{ij}(r_{ij})}{r_{ij}} \vec{r}_{ij} \right) \cdot d\vec{r}_{ij}$$

Abbiamo più volte trovato l'identità  $\vec{A} \cdot d\vec{A} = d\left(\frac{A^2}{2}\right) = A dA$ , che applichiamo qui:

$$\delta\mathcal{W}^{(int)} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \left( \frac{F_{ij}(r_{ij})}{r_{ij}} \right) r_{ij} dr_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} F_{ij}(r_{ij}) dr_{ij}$$

<sup>1</sup> ... ricorda che  $\hat{r}_{ij} = -\hat{r}_{ji}$



Possiamo ora introdurre — la qual cosa è sempre possibile — una funzione  $\mathcal{U}_{ij}(r)$  tale che

$$\frac{d\mathcal{U}_{ij}(r)}{dr} = -F_{ij}(r) \quad (17.17)$$

e scrivere dunque

$$\delta\mathcal{W}^{(int)} = -d \left( \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathcal{U}_{ij}(r_{ij}) \right) \quad (17.18)$$

Tutto ciò porta a definire l'energia potenziale delle forze interne del sistema:

$$\mathcal{U}_{tot} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathcal{U}_{ij}(r_{ij}) \quad (17.19)$$

tale che

$$\delta\mathcal{W}^{(int)} = -d\mathcal{U}_{tot} \quad (17.20)$$

Notiamo fin da subito che, se il sistema di punti è rigido (vd Capitolo 19), cioè se le distanze relative  $r_{ij}$  fra i punti non cambiano, il lavoro interno si annulla:

$$\delta\mathcal{W}^{(int)} = 0 \quad (\text{se il sistema è rigido}) \quad (17.21)$$

### Forze non centrali

La forma delle forze qui ipotizzate,  $\vec{F}_{ij} = F_{ij}(r_{ij})\hat{r}_{ij}$ , appare così ragionevole da sembrare sempre vera: sono forze centrali, come vorrebbero il principio di azione-reazione e l'isotropia — vd discussione in Sezione 11.4.1. Di certo è vera se le forze sono di natura gravitazionale, o elettrostatica. È valida anche nel caso le interazioni siano assimilabili ad urti fra sfere rigide lisce: in tal caso le forze sarebbero come reazioni vincolari, ortogonali alle superfici delle sfere, dunque ancora radiali.

Sappiamo già che le forze magnetiche non soddisfano questi requisiti — però poco male, si direbbe, visto che non compiono lavoro.

Possiamo tuttavia immaginare altri esempi di interazioni che non soddisfano  $\vec{F}_{ij} = F_{ij}(r_{ij})\hat{r}_{ij}$ .

- I nostri punti materiali possono essere corpuscoli appiccicosi che appena si urtano restano attaccati. In tal caso, la forma delle forze è profondamente diversa: al momento dell'urto la forza è repulsiva (arresta i corpuscoli che si scontrano) e poi si trasforma in qualcosa di complicato: attrattiva se uno cerca di allontanare i corpuscoli, repulsiva se uno cerca di schiacciarli insieme: la dipendenza non è più un semplice  $F(r)$ .

- I punti materiali possono essere “ruvidi”, cosicché quando si toccano presentano interazioni anche parallele alle superfici di contatto, dunque non più solo radiali.

Possiamo immaginare entrambi questi casi, per esempio in un sistema di molti corpuscoli proto-planetari... In tal caso non si può descrivere tutte le interazioni interne mediante un'energia potenziale del sistema.

### 17.3.3 Riassumendo: lavoro ed energia

L'energia cinetica totale subisce una variazione a causa del lavoro delle forze esterne e delle forze interne:

$$d\mathcal{E}_{tot} = \underbrace{\sum_i \vec{\mathbf{F}}_i^{(est)} \cdot d\vec{\mathbf{r}}_i}_{\delta\mathcal{W}^{(est)}} + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{\mathbf{F}}_{ij} \cdot d(\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_j)}_{\delta\mathcal{W}^{(int)}}$$

Se le forze interne sono conservative, si può introdurre un'energia potenziale:

$$\mathcal{U}_{tot} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathcal{U}_{ij}(r_{ij})$$

tale che  $\delta\mathcal{W}^{(int)} = -d\mathcal{U}_{tot}$ , e un'energia meccanica totale del sistema:

$$E_{tot} = \mathcal{E}_{tot} + \mathcal{U}_{tot} = \sum_i \frac{m_i}{2} v_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathcal{U}_{ij}(r_{ij}) \quad (17.22)$$

che subisce variazioni pari al lavoro delle sole forze esterne:

$$dE_{tot} = \delta\mathcal{W}^{(est)} \quad (17.23)$$

In particolare, se il sistema è isolato e le forze interne sono conservative, la sua energia meccanica si conserva.

## 17.4 Centro di massa

Si definisce *centro di massa* del sistema, o *baricentro*, il punto che si trova in posizione:

$$\vec{\mathbf{r}}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}_i}{\sum_i m_i} \quad (17.24)$$

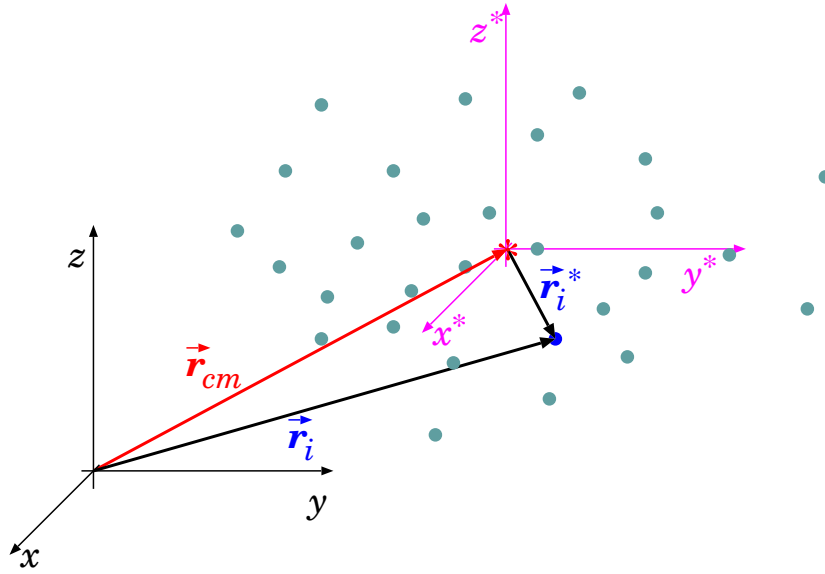


Figura 17.5: Centro di massa di un sistema di punti (indicato dall'asterisco rosso).

In generale, il centro di massa non coincide con la posizione di un punto materiale preciso del sistema. Esso si trova localizzato all'interno della “nuvola” di punti materiali, come indicato in Fig. 17.5.

La velocità del centro di massa è:

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \right] = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} \quad (17.25)$$

Dall'Eq. (17.25) è immediato verificare che

$$\vec{p}_{tot} = \left( \sum_i m_i \right) \vec{v}_{cm} = m_{tot} \vec{v}_{cm} \quad (17.26)$$

cioè la quantità di moto totale del sistema  $\vec{p}_{tot}$  è descrivibile come il prodotto della massa totale  $m_{tot} \equiv (\sum_i m_i)$  per la velocità del centro di massa.

Se il sistema di punti è isolato, allora la quantità di moto totale del sistema  $\vec{p}_{tot}$  si conserva (vd Eq. (17.10)). Come conseguenza, anche la velocità del centro di massa  $\vec{v}_{cm}$  è costante.

L'accelerazione del centro di massa è

$$\vec{a}_{cm} = \frac{1}{m_{tot}} \frac{d\vec{p}_{tot}}{dt} = \frac{\sum_i \vec{F}_i^{(est)}}{m_{tot}} \quad (17.27)$$

Il centro di massa del sistema subisce un'accelerazione pari a quella che avrebbe un oggetto puntiforme di massa pari alla massa totale del sistema, e su cui agisse una forza pari alla risultante di tutte le forze esterne agenti effettivamente sul sistema.

## 17.5 Variabili dinamiche nel SR del centro di massa

È utile ridefinire le quantità dinamiche di ciascun punto come viste dal SR del centro di massa — che chiameremo SRCM d'ora in poi. Analogamente, il SR originario viene chiamato *SR del laboratorio*, SRLAB.

Indicheremo le quantità nel SRCM con un asterisco (\*). In generale, il SRCM sarà dotato di velocità  $\vec{v}_{cm}$  e accelerazione  $\vec{a}_{cm}$  rispetto al SRLAB, ma assumiamo che gli assi cartesiani non ruotino rispetto ad esso. Pertanto, le trasformazioni di velocità e accelerazioni sono quelle date dall'Eq. (16.9) e Eq. (16.11). In particolare, non abbiamo accelerazioni centrifughe o di Coriolis.

Pertanto le relazioni fra le quantità dinamiche nei due SR sono:

$$\begin{array}{rcl}
 \text{SRCM} & & \text{SRLAB} \\
 \\
 \vec{r}_k^* & = & \vec{r}_k - \vec{r}_{cm} \\
 \vec{v}_k^* & = & \vec{v}_k - \vec{v}_{cm} = \vec{v}_k - \frac{\vec{p}_{tot}}{m_{tot}} \\
 \vec{p}_k^* & = & \vec{p}_k - m_k \vec{v}_{cm} = \vec{p}_k - m_k \frac{\vec{p}_{tot}}{m_{tot}} \\
 \vec{a}_k^* & = & \vec{a}_k - \vec{a}_{cm} = \vec{a}_k - \frac{\sum_i \vec{F}_i^{(est)}}{m_{tot}} \\
 \vec{F}_k^* & = & \vec{F}_k - m_k \vec{a}_{cm} = \vec{F}_k - m_k \frac{\sum_i \vec{F}_i^{(est)}}{m_{tot}}
 \end{array} \tag{17.28}$$

Consideriamo il particolare l'equazione per le forze, e ricordiamo che nel SRLAB  $\vec{F}_k = \sum_{j \neq k} \vec{F}_{kj} + \vec{F}_k^{(est)}$ ; nel SRCM troviamo quindi

$$\vec{F}_k^* = \sum_{j \neq k} \vec{F}_{kj} + \vec{F}_k^{(est)} - m_k \vec{a}_{cm}$$

cioè la “forza di inerzia”  $-m_k \vec{a}_{cm}$  appare come una ulteriore forza esterna — ovviamente non può essere attribuita a nessuna interazione con un altro punto

del sistema. Per cui possiamo anche riscrivere in maniera più dettagliata la corrispondenza fra forze nei due SR:

$$\begin{aligned}\vec{F}_k^{*(est)} &= \vec{F}_k^{(est)} - m_k \vec{a}_{cm} \\ \vec{F}_{kj}^* &= \vec{F}_{kj}\end{aligned}\quad (17.29)$$

(come dire che solo la forza esterna si trasforma, quelle interne no).

### 17.5.1 Momento angolare nel SRCM

Con le trasformazioni delle Eq. (17.28) si possono calcolare le relazioni fra il momento angolare totale  $\vec{L}_{tot}^*$  e il momento torcente totale  $\vec{M}_{tot}^*$  nel sistema del centro di massa, rispetto alle quantità  $\vec{L}_{tot}$  e  $\vec{M}_{tot}$  nel SRLAB <sup>[2]</sup>.

Cominciamo con  $\vec{L}$ .

$$\begin{aligned}\vec{L}_{tot} &= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \\ &= \sum_i m_i (\vec{r}_i^* + \vec{r}_{cm}) \times \vec{v}_i \\ &= \sum_i m_i \vec{r}_i^* \times (\vec{v}_i^* + \vec{v}_{cm}) + \vec{r}_{cm} \times \left( \sum_i m_i \vec{v}_i \right) \\ &= \sum_i m_i \vec{r}_i^* \times \vec{v}_i^* + \left( \sum_i m_i \vec{r}_i^* \right) \times \vec{v}_{cm} + \vec{r}_{cm} \times \vec{p}_{tot}\end{aligned}$$

Ora,  $\sum_i m_i \vec{r}_i^* = 0$ . Questa identità si può dimostrare algebricamente...

oppure, basti pensare che rappresenta la posizione del centro di massa del sistema ... vista dal centro di massa stesso! Per cui, si ottiene:

$$\vec{L}_{tot} = \vec{L}_{tot}^* + \vec{r}_{cm} \times \vec{p}_{tot} \quad (17.30)$$

Il momento angolare totale di un sistema di punti si può descrivere come la somma di due termini:

- il momento angolare totale osservato dal centro di massa:  $\vec{L}_{tot}^*$ : questa è una quantità intrinseca del sistema; a volte si suole chiamarla “spin”;

<sup>2</sup> Perché non la quantità di moto totale,  $\vec{p}_{tot}^*$ ? In realtà è facile vedere che questa, nel centro di massa, è nulla:

$$\vec{p}_{tot}^* = \sum_i m_i \vec{v}_i^* = \sum_i m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_{cm}) = \sum_i m_i \vec{v}_i - \left( \sum_i m_i \right) \left( \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} \right) = 0$$

- un termine  $\vec{r}_{cm} \times \vec{p}_{tot}$  che descrive il momento angolare di un oggetto puntiforme di massa  $m_{tot}$  e quantità di moto  $\vec{p}_{tot}$ , posto nella posizione del centro di massa  $\vec{r}_{cm}$ : sarebbe il momento angolare del sistema di punti, se questo fosse tutto concentrato nel suo centro di massa.

Possiamo ripetere il conto per il momento torcente. Abbiamo già visto che esso non dipende dalle forze interne, ma solo da quelle esterne (Eq. (17.9), Sezione 17.2):

$$\vec{M}_{tot} = \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(est)}$$

Procediamo come prima:

$$\begin{aligned} \vec{M}_{tot} &= \sum_i (\vec{r}_i^* + \vec{r}_{cm}) \times \vec{F}_i^{(est)} \\ &= \sum_i \vec{r}_i^* \times \vec{F}_i^{(est)} + \vec{r}_{cm} \times \left( \sum_i \vec{F}_i^{(est)} \right) \\ &= \sum_i \vec{r}_i^* \times \vec{F}_i^{(est)} + \vec{r}_{cm} \times \vec{F}_{tot}^{(est)} \end{aligned}$$

Definendo la quantità

$$\vec{M}_{tot}^* = \sum_i \vec{r}_i^* \times \vec{F}_i^{(est)} \quad (17.31)$$

possiamo scrivere

$$\vec{M}_{tot} = \vec{M}_{tot}^* + \vec{r}_{cm} \times \vec{F}_{tot}^{(est)} \quad (17.32)$$

Il momento torcente totale di un sistema di punti si può descrivere come la somma di due termini:

- il momento torcente totale osservato dal centro di massa:  $\vec{M}_{tot}^*$ : questa è una quantità intrinseca del sistema; a volte si suole chiamarla “coppia”;
- un termine  $\vec{r}_{cm} \times \vec{F}_{tot}^{(est)}$  che descrive il momento torcente applicato dalla totalità delle forze esterne ad un ipotetico oggetto posto nella posizione del centro di massa  $\vec{r}_{cm}$ .

Ora, confrontiamo l’Eq. (17.30) con l’Eq. (17.32):

$$\frac{d}{dt} \left( \vec{L}_{tot}^* + \vec{r}_{cm} \times \vec{p}_{tot} \right) = \vec{M}_{tot}^* + \vec{r}_{cm} \times \vec{F}_{tot}^{(est)}$$

In particolare,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\vec{r}_{cm} \times \vec{p}_{tot}) &= \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} \times \vec{p}_{tot} + \vec{r}_{cm} \times \frac{d\vec{p}_{tot}}{dt} \\ &= \underbrace{\vec{v}_{cm} \times \vec{p}_{tot}}_{=0} + \vec{r}_{cm} \times \vec{F}_{tot}^{(est)} \end{aligned}$$

(il primo termine è nullo, poiché  $\vec{v}_{cm}$  e  $\vec{p}_{tot}$  sono paralleli). Quindi abbiamo trovato che

$$\frac{d\vec{L}_{tot}^*}{dt} = \vec{M}_{tot}^* \quad (17.33)$$

Abbiamo un risultato molto interessante: il *momento angolare intrinseco* (o *spin*)  $\vec{L}_{tot}^*$  evolve solo a causa della *coppia*  $\vec{M}_{tot}^*$  — le due quantità nel SRCM possono essere trattate come se non ci fossero le corrispondenti quantità  $\vec{r}_{cm} \times \vec{p}_{tot}$  e  $\vec{r}_{cm} \times \vec{F}_{tot}^{(est)}$ .

Un'osservazione: mentre si è scelto di esprimere  $\vec{L}_{tot}^* = \sum_i \vec{r}_i^* \times \vec{p}_i^*$ , tutto in funzione di quantità osservabili nel SRCM, per  $\vec{M}_{tot}^* = \sum_i \vec{r}_i^* \times \vec{F}_i^{(est)}$  le forze sono rimaste espresse nel SRLAB. Questa scelta appare logica, trattandosi di forze esterne, appunto. Tuttavia, se in alcuni casi fosse utile esprimere anch'esse nel SRCM,  $\vec{F}_i^{(est)} = \vec{F}_i^{*(est)} + m_i \vec{a}_{cm}$ , il risultato non cambierebbe:

$$\begin{aligned} \vec{M}_{tot}^* &= \sum_i \vec{r}_i^* \times \vec{F}_i^{(est)} \\ &= \sum_i \vec{r}_i^* \times \left( \vec{F}_i^{*(est)} + m_i \vec{a}_{cm} \right) \\ &= \sum_i \vec{r}_i^* \times \vec{F}_i^{*(est)} + \left( \sum_i m_i \vec{r}_i^* \right) \times \vec{a}_{cm} \end{aligned}$$

e, come già visto,  $\sum_i m_i \vec{r}_i^* = 0$ .

### 17.5.2 Energia nel SRCM

L'energia cinetica totale del sistema è:

$$\mathcal{E}_{tot} = \sum_i \frac{m_i}{2} (v_i)^2$$

Anch'essa può essere riscritta rispetto al SRCM:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{tot} &= \sum_i \frac{m_i}{2} (\vec{v}_i^* + \vec{v}_{cm})^2 \\ &= \sum_i \frac{m_i}{2} (v_i^*)^2 + \left( \sum_i m_i \vec{v}_i^* \right) \cdot \vec{v}_{cm} + \frac{1}{2} \left( \sum_i m_i \right) v_{cm}^2\end{aligned}$$

Ricordando ancora che  $\sum_i m_i \vec{v}_i^* = 0$ , si trova:

$$\mathcal{E}_{tot} = \mathcal{E}_{tot}^* + \frac{m_{tot}}{2} v_{cm}^2 \quad (17.34)$$

L'energia cinetica totale di un sistema di punti si può descrivere come la somma di due termini:

- l'energia cinetica totale osservata dal centro di massa:  $\mathcal{E}_{tot}^*$ : questa è una quantità intrinseca del sistema;
- un termine  $\frac{m_{tot}}{2} v_{cm}^2$  che sembra descrivere l'energia cinetica di un oggetto puntiforme di massa  $m_{tot}$  che si muove con velocità  $\vec{v}_{cm}$ : sarebbe l'energia cinetica del sistema di punti, se questo fosse tutto concentrato nel suo centro di massa.

Ora analizziamo il lavoro totale  $\delta\mathcal{W}^{(int)} + \delta\mathcal{W}^{(est)}$ , nei due SR.

Il lavoro delle forze interne,  $\delta\mathcal{W}^{(int)} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{F}_{ij} \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ , è uguale nei

due SR: infatti abbiamo visto che  $\vec{F}_{ij} = \vec{F}_{ij}^*$  — Eq. (17.29) — e altrettanto,  $(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = (\vec{r}_i^* - \vec{r}_j^*)$ . Quindi:

$$\delta\mathcal{W}^{(int)} = \delta\mathcal{W}^{*(int)} \quad (17.35)$$

Ora consideriamo il lavoro delle forze esterne. Essendo  $d\vec{r}_i = d\vec{r}_i^* + d\vec{r}_{cm}$ , si ottiene:

$$\delta\mathcal{W}^{(est)} = \sum_i \vec{F}_i^{(est)} \cdot (d\vec{r}_i^* + d\vec{r}_{cm}) = \underbrace{\sum_i \vec{F}_i^{(est)} \cdot d\vec{r}_i^*}_{\delta\mathcal{W}^{*(est)}} + \left( \sum_i \vec{F}_i^{(est)} \right) \cdot d\vec{r}_{cm}$$

$$\delta\mathcal{W}^{(est)} = \delta\mathcal{W}^{*(est)} + \vec{F}_{tot}^{(est)} \cdot d\vec{r}_{cm} \quad (17.36)$$



Abbiamo trovato che il lavoro delle forze interne non cambia, mentre quello delle forze esterne si può esprimere come una parte equivalente, vista nel SRCM, più un'altra parte che sembra esprimere il lavoro fatto dalla forza esterna totale sul centro di massa.

Abbiamo espresso il lavoro nel SRCM come  $\sum_i \vec{\mathbf{F}}_i^{(est)} \cdot d\vec{\mathbf{r}}_i^*$ , ovvero usando  $\vec{\mathbf{F}}_i^{(est)}$  anziché  $\vec{\mathbf{F}}_i^{*(est)}$ . In effetti il risultato sarebbe lo stesso, poiché:

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i^{(est)} \cdot d\vec{\mathbf{r}}_i^* &= \sum_i (\vec{\mathbf{F}}_i^{*(est)} + m_i \vec{\mathbf{a}}_{cm}) \cdot d\vec{\mathbf{r}}_i^* \\ &= \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i^{*(est)} \cdot d\vec{\mathbf{r}}_i^* + \underbrace{\left( \sum_i m_i d\vec{\mathbf{r}}_i^* \right)}_{=d(\sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}_i^*)=0} \cdot \vec{\mathbf{a}}_{cm} \end{aligned}$$

Nel caso le forze interne siano conservative, anche l'energia potenziale  $\mathcal{U}_{tot} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathcal{U}_{ij}(r_{ij})$  non cambia con il SR, poiché dipende solo dalle distanze mutue, e  $\vec{\mathbf{r}}_{ij} = \vec{\mathbf{r}}_{ij}^*$ :

$$\mathcal{U}_{tot} = \mathcal{U}_{tot}^* \quad (17.37)$$

In tal caso, per l'energia meccanica abbiamo:

$$E_{tot} = E_{tot}^* + \frac{m_{tot}}{2} v_{cm}^2 \quad (17.38)$$

L'energia meccanica totale si può scrivere come la somma di due componenti:

- una componente di *energia interna*,  $E_{tot}^*$ , che è l'energia meccanica vista nel SRCM;
- una componente che descriverebbe l'energia cinetica di un oggetto puntiforme di massa  $m_{tot}$  che si muove con velocità  $\vec{\mathbf{v}}_{cm}$ .

Ora, se confrontiamo l'Eq. (17.38) con l'Eq. (17.36) troviamo:

$$\begin{aligned} dE_{tot} &= \delta \mathcal{W}^{(est)} \\ d\left(E_{tot}^* + \frac{m_{tot}}{2} v_{cm}^2\right) &= \delta \mathcal{W}^{*(est)} + \vec{\mathbf{F}}_{tot}^{(est)} \cdot d\vec{\mathbf{r}}_{cm} \end{aligned}$$

Elaborando l'ultimo termine:

$$\begin{aligned}
 \vec{\mathbf{F}}_{tot}^{(est)} \cdot d\vec{\mathbf{r}}_{cm} &= m_{tot} \vec{\mathbf{a}}_{cm} \cdot d\vec{\mathbf{r}}_{cm} \\
 &= m_{tot} \frac{d\vec{\mathbf{v}}_{cm}}{dt} \cdot d\vec{\mathbf{r}}_{cm} = m_{tot} d\vec{\mathbf{v}}_{cm} \cdot \frac{d\vec{\mathbf{r}}_{cm}}{dt} = m_{tot} \vec{\mathbf{v}}_{cm} \cdot d\vec{\mathbf{v}}_{cm} \\
 &= d\left(\frac{m_{tot}}{2} v_{cm}^2\right)
 \end{aligned}$$

Quindi si deduce che

$$dE_{tot}^* = \delta\mathcal{W}^{*(est)} = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i^{(est)} \cdot d\vec{\mathbf{r}}_i^* \quad (17.39)$$

Anche in questo caso abbiamo trovato un notevole risultato: la variazione dell'energia interna  $E_{tot}^*$  è data solo dal lavoro delle forze esterne, misurato nel SRCM.

### 17.5.3 Ricapitolando...

Riassumiamo nella seguente tabella tutto quanto detto nelle sezioni precedenti:

SRLAB	grandezza dinamica SRCM	legge dinamica nel SRCM
$\vec{\mathbf{p}}_{tot}$	$= m_{tot} \vec{\mathbf{v}}_{cm}$	
$\vec{\mathbf{L}}_{tot}$ $\vec{\mathbf{M}}_{tot}$	$= \vec{\mathbf{L}}_{tot}^* + \vec{\mathbf{r}}_{cm} \times \vec{\mathbf{p}}_{tot}$ $= \vec{\mathbf{M}}_{tot}^* + \vec{\mathbf{r}}_{cm} \times \vec{\mathbf{F}}_{tot}^{(est)}$	$\frac{d\vec{\mathbf{L}}_{tot}^*}{dt} = \vec{\mathbf{M}}_{tot}^* = \sum_i \vec{\mathbf{r}}_i^* \times \vec{\mathbf{F}}_i^{(est)}$
$\mathcal{E}_{tot}$ $\delta\mathcal{W}_{tot}^{(int)}$ $\delta\mathcal{W}_{tot}^{(est)}$	$= \mathcal{E}_{tot}^* + \frac{m_{tot}}{2} v_{cm}^2$ $= \delta\mathcal{W}_{tot}^{*(int)}$ $= \delta\mathcal{W}_{tot}^{*(est)} + \vec{\mathbf{F}}_{tot}^{(est)} \cdot d\vec{\mathbf{r}}_{cm}$	$d\mathcal{E}_{tot}^* = \delta\mathcal{W}_{tot}^{*(int)} + \delta\mathcal{W}_{tot}^{*(est)}$ $\left( \delta\mathcal{W}_{tot}^{*(est)} = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i^{(est)} \cdot d\vec{\mathbf{r}}_i^* \right)$
(forze interne conservative)		
$\mathcal{U}_{tot}$ $E_{tot}$	$= \mathcal{U}_{tot}^* + \frac{m_{tot}}{2} v_{cm}^2$	$dE_{tot}^* = \delta\mathcal{W}_{tot}^{*(est)} = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i^{(est)} \cdot d\vec{\mathbf{r}}_i^*$

Vediamo in tabella diverse formule della forma

$$Q = Q^* + Q_{cm}$$

dove:

$Q$	$\equiv$	quantità calcolata nel SRLAB
$Q^*$	$\equiv$	quantità calcolata nel SRCM
$Q_{cm}$	$\equiv$	quantità calcolata <u>come se</u> il sistema fosse condensato nel centro di massa

Questo vale sia per quantità dinamiche del sistema ( $Q$  può essere  $\vec{L}_{tot}$ ,  $\mathcal{E}_{tot}$ ,  $E_{tot}$ ) sia per le cause delle loro variazioni (in tal caso  $Q$  può essere rispettivamente  $\vec{M}_{tot}$ ,  $\delta\mathcal{W}_{tot}$ ,  $\delta\mathcal{W}_{tot}^{(est)}$ ).

Queste “regole di separazione” sono note come *teoremi di König*.

La loro importanza risiede nel fatto che, volendo studiare il moto di un sistema di punti, complicato finché si vuole (un sistema planetario, un gas di molecole, una galassia, ...) il problema può essere sempre separato in due parti:

- il “moto collettivo” del sistema, come se fosse condensato nel centro di massa; le variabili dinamiche che entrano in gioco, e le loro evoluzioni, sono:

$$\begin{aligned} \vec{p}_{tot} & & ; & \quad \frac{d\vec{p}_{tot}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{(est)} \\ \vec{L}_{cm} & \equiv \vec{r}_{cm} \times \vec{p}_{tot} & ; & \quad \frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \vec{r}_{cm} \times \left( \sum_i \vec{F}_i^{(est)} \right) \\ \mathcal{E}_{cm} & \equiv \frac{m_{tot}}{2} v_{cm}^2 & ; & \quad d\mathcal{E}_{cm} = \left( \sum_i \vec{F}_i^{(est)} \right) \cdot d\vec{r}_{cm} \end{aligned}$$

- i “moti interni” del sistema, come visti dal SRCM; le variabili dinamiche e le loro evoluzioni sono indipendenti da quello che succede nel “moto collettivo”:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_{tot}^*}{dt} & = \vec{M}_{tot}^* = \sum_i \vec{r}_i^* \times \vec{F}_i^{(est)} \\ \frac{dE_{tot}^*}{dt} & = \delta\mathcal{W}_{tot}^{*(est)} = \sum_i \vec{F}_i^{(est)} \cdot d\vec{r}_i^* \quad (\text{forze interne conservative}) \end{aligned}$$

Se si è interessati solo al moto collettivo, si possono trascurare i moti interni. Questo accade per esempio se studiamo il moto di un protone in un campo elettromagnetico, omettendo di analizzare la sua struttura interna composta (quarks e gluoni, che interagiscono in modo complicato!) oppure se studiamo il moto del Sistema Solare come un “tutt’uno” nella Via Lattea, senza entrare nel dettaglio dei moti di pianeti, satelliti, asteroidi, planetoidi, etc.

Viceversa, se siamo interessati ai moti interni, si può ignorare il moto collettivo. Per esempio se ci interessa analizzare il moto dei pianeti nel Sistema Solare (trascurando il moto collettivo nella Via Lattea), oppure il moto delle molecole in un gas (senza interessarci dell’eventuale moto del recipiente che contiene il gas).

#### 17.5.4 Un caso particolare: forza-peso come forza esterna

Vediamo un caso particolare: le forze esterne sono tutte forze-peso, ovvero forze gravitazionali in un campo  $\vec{g}$  uniforme — per esempio alla superficie terrestre. In tal caso

$$\begin{aligned}\vec{F}_i^{(est)} &= m_i \vec{g} && \text{(campo gravitazionale uniforme)} \\ \vec{M}_{tot}^* &= \sum_i \vec{r}_i^* \times \vec{F}_i^{(est)} = \left( \sum_i m_i \vec{r}_i^* \right) \times \vec{g} = 0 \\ \delta \mathcal{W}_{tot}^{*(est)} &= \sum_i \vec{F}_i^{(est)} \cdot d\vec{r}_i^* = \vec{g} \cdot \left( \sum_i m_i d\vec{r}_i^* \right) = 0\end{aligned}$$

(ricordiamo infatti che nel SRCM  $\sum_i m_i \vec{r}_i^* = 0$ , e quindi anche  $\sum_i m_i d\vec{r}_i^* = d(\sum_i m_i \vec{r}_i^*) = 0$ ).

Quindi il sistema di punti, nel SRCM, non mostra nessuna sensibilità alle forze esterne, ovvero appare *come se fosse isolato*. Ne consegue che il momento angolare intrinseco  $\vec{L}_{tot}^*$  e l’energia interna  $E_{tot}^*$  di un sistema di punti, immerso in un campo gravitazionale uniforme, sono quantità conservate — come se il sistema fosse isolato.

---

#### Osservazione: forze esterne gravitazionali

---

*Quanto detto sopra è rigorosamente valido solo se il campo gravitazionale  $\vec{g}$  è perfettamente uniforme.*

*Se vogliamo studiare i moti interni nel Sistema Solare, che cosa si può dire? In questo caso, le forze gravitazionali esterne sono dovute principalmente alla presenza delle altre stelle della Via Lattea. Queste creano un campo gravitazionale*

esterno  $\vec{g}^{(est)}(\vec{r})$  che non è perfettamente uniforme: esso dipende dalla posizione  $\vec{r}$  rispetto a ciascuna delle stelle che contribuiscono a  $\vec{g}^{(est)}(\vec{r})$ . Sull' $i$ -esimo oggetto del Sistema Solare, la forza gravitazionale esterna è:

$$\vec{F}_i^{(est)} = m_i \vec{g}^{(est)}(\vec{r}_i^*)$$

Tuttavia sappiamo che gli oggetti esterni più vicini al Sistema Solare distano anni-luce: il sistema stellare più vicino è Alpha Centauri, a distanza 4.2 ly  $\simeq 4 \cdot 10^{16}$  m, mentre Nettuno si trova a circa  $4.5 \cdot 10^{12}$  m dal Sole. Chiamando  $r_{stella}$  la distanza di una stella dal Sole, e  $r_{SS}$  una distanza tipica all'interno del Sistema Solare, la variazione di  $g^{(est)}$  su una distanza  $\Delta r_{SS}$  è stimabile come:

$$\begin{aligned} \Delta g^{(est)} &\simeq \frac{\partial [g^{(est)}(r_{stella})]}{\partial r_{stella}} \Delta r_{SS} = \frac{\partial}{\partial r_{stella}} \left( -\frac{GM_{stella}}{r_{stella}^2} \right) \Delta r_{SS} \\ &= 2 \frac{GM_{stella}}{r_{stella}^3} \Delta r_{SS} \\ &= -2 g^{(est)}(r_{stella}) \frac{\Delta r_{SS}}{r_{stella}} \end{aligned}$$

Usando come  $r_{stella}$  la distanza di Alpha Centauri e come  $\Delta r_{SS}$  il raggio dell'orbita di Nettuno, si trova:

$$\left| \frac{\Delta g^{(est)}}{g^{(est)}} \right| = 2 \frac{\Delta r_{SS}}{r_{stella}} \simeq 2 \cdot 10^{-4}$$

Ai fini dello studio dei moti nel Sistema Solare, se siamo disposti ad accettare una precisione  $\gtrsim 2 \cdot 10^{-4}$ , possiamo considerare  $\vec{g}^{(est)}$  uniforme.

## 17.6 Conservazione della massa

Immaginiamo ora una situazione di un sistema complesso, in cui un insieme di particelle  $\{i\}$  nello stato iniziale interagisce producendo un altro insieme di particelle  $\{f\}$  nello stato finale.

Le particelle nello stato finale possono anche essere diverse da quelle dello stato iniziale. Se questo può apparire strano, possiamo immaginarci alcuni esempi:

- le “particelle” sono oggetti estesi, ma di dimensioni trascurabili rispetto alle loro distanze, che nell'urto si frantumano oppure si attaccano fra loro;
- le “particelle” sono oggetti astrofisici di una galassia: stelle, pianeti, gas e polveri interstellari. . . le stelle possono emettere o assorbire materia, possono anche subire trasformazioni catastrofiche (supernovae);

- le “particelle” sono molecole che prendono parte ad una reazione chimica: i reagenti in generale sono diversi dai prodotti della reazione.

Non è necessario che l’energia meccanica si conservi <sup>[3]</sup>.

Viceversa sappiamo che, in un opportuno SR, si deve conservare la quantità di moto totale:

$$\sum_{i \in \{\text{stato iniziale}\}} \vec{p}_i = \sum_{f \in \{\text{stato finale}\}} \vec{p}_f \quad (17.40)$$

Se il sistema è isolato, la cosa è ovvia, perché  $\frac{d\vec{p}_{tot}}{dt} = \vec{F}_{tot}^{(est)} = 0$ . Se invece il sistema non fosse isolato, esisterebbe una forza  $\vec{F}_{tot}^{(est)} \neq 0$ . Il centro di massa del sistema subirebbe un’accelerazione  $\vec{a}_{cm} = \frac{\vec{F}_{tot}^{(est)}}{m_{tot}}$ . Scegliendo un SR dotato di accelerazione pari a  $\vec{a}_{cm}$  — non necessariamente solidale con il centro di massa — ogni forza esterna in tale sistema acquisirebbe una componente fittizia: sull’oggetto  $k$ -esimo,  $\vec{F}'_k^{(est)} = \vec{F}_k^{(est)} - m_k \vec{a}_{cm}$ . In tale SR la forza esterna totale sarebbe comunque nulla, in qualunque istante (iniziale, intermedio, finale):

$$\vec{F}'_{tot}{}^{(est)} = \sum_k \vec{F}'_k{}^{(est)} = \sum_k \vec{F}_k{}^{(est)} - \sum_k m_k \vec{a}_{cm} = 0$$

e quindi la quantità di moto totale sarebbe conservata.

Senza fare nessuna ipotesi sulle interazioni che governano il sistema, possiamo ricavare una legge del tutto generale:

*La massa totale si conserva durante l’urto*

ovvero:

$$\sum_i m_i = \sum_f m_f \quad (17.41)$$

La conservazione della massa è una legge nota empiricamente dai tempi di Lavoisier (seconda metà del Settecento), che l’aveva verificata nelle reazioni chimiche. Qui vediamo che la sua validità è ancora più generale, e non è più un principio primo, bensì è derivabile dalle leggi della dinamica.

<sup>3</sup> In generale, nelle reazioni chimiche, non si conserva ... tanto per fare un esempio.

Per vedere ciò, scriviamo la conservazione della quantità di moto, Eq. (17.40), in due SR  $(O; x, y, z)$  e  $(O'; x', y', z')$ , dotati di moto relativo rettilineo uniforme, con velocità  $\vec{v}^{(SR)}$ :

$$\sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_f m_f \vec{v}_f \quad (*)$$

$$\sum_i m_i \vec{v}'_i = \sum_f m_f \vec{v}'_f \quad (**)$$

Ora, la trasformazione delle velocità è tale che

$$\vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{v}^{(SR)} \quad ; \quad \vec{v}_f = \vec{v}'_f + \vec{v}^{(SR)}$$

pertanto, inserendo queste trasformazioni nell'equazione (\*) si ottiene:

$$\sum_i m_i \vec{v}'_i + \left( \sum_i m_i \right) \vec{v}^{(SR)} = \sum_f m_f \vec{v}'_f + \left( \sum_f m_f \right) \vec{v}^{(SR)}$$

e confrontando con l'equazione (\*\*) si ricava la conservazione della massa, Eq. (17.41).

## 17.7 Problemi con “massa variabile”

Ricordando che la massa di un sistema si conserva, quando di parla di “problemi a massa variabile” ci si riferisce a situazioni in cui si vuole studiare il moto di un oggetto, la cui massa si modifica nel tempo, o perché ne disperde una parte, o perché ne acquisisce dall'ambiente circostante. In questo contesto, l'oggetto sotto studio non può essere trattato come a sé stante, bensì insieme alla massa che cede/acquisisce.

### 17.7.1 Il razzo a combustibile

Consideriamo un problema particolare: il moto di un razzo spinto dall'emissione di materia ad alta velocità. È il caso di molti razzi vettori usati per mandare in orbita satelliti — ma anche dei razzi Saturn per le missioni lunari. In questi casi, buona parte della massa iniziale del razzo è costituita da combustibile solido, che viene espulso ad alta velocità all'indietro. Quindi, durante la spinta, la massa del razzo diminuisce sensibilmente. Come si risolve questo problema?

Chiamiamo  $v(t)$  la velocità del razzo, e  $m(t)$  la massa del razzo — che diminuirà nel tempo. Il calo di massa per unità di tempo è descritto da

$\mu = -\frac{dm}{dt}$  (qui si sceglie  $\mu > 0$  per descrivere un calo di massa). In un tempo  $dt$ , il razzo ha espulso una quantità di massa  $-dm = \mu dt$ , ad una velocità  $-w$  rispetto al razzo, quindi a velocità  $-w + v(t)$  se vista da un osservatore esterno.

Ad un istante  $t$ , la quantità di moto del razzo è:

$$p(t) = m(t) v(t)$$

All'istante  $(t + dt)$  la massa del razzo è:

$$m(t + dt) = m + dm = m - \mu dt$$

quindi la sua quantità di moto è

$$p_R(t + dt) = m(t + dt) \cdot v(t + dt) = (m + dm) \cdot (v + dv)$$

Ad essa va sommata la quantità di moto della massa espulsa,  $\mu dt$ :

$$p_E(t + dt) = (\mu dt)(v - w)$$

La quantità di moto del sistema (razzo+materia espulsa), a  $t + dt$ , è quindi:

$$\begin{aligned} p(t + dt) &= p_R(t + dt) + p_E(t + dt) \\ &= (m + dm) \cdot (v + dv) + \mu(v - w)dt \\ &= mv + m dv + v dm + \mu(v - w)dt \\ &= mv + m dv - v \mu dt + \mu(v - w)dt \\ &= p(t) + m dv - \mu w dt \end{aligned}$$

Quindi

$$dp = p(t + dt) - p(t) = m dv - \mu w dt$$

In un tempo  $dt$ , sul razzo, e sul materiale espulso, agisce la forza di gravità,  $-mg$ , pertanto la quantità di moto del sistema (razzo+materia espulsa) subisce una variazione:

$$dp = -mg dt$$

Uguagliando le due espressioni si trova:

$$\begin{aligned} m dv - \mu w dt &= -mg dt \\ a &= \frac{dv}{dt} = \frac{\mu w}{m} - g \end{aligned}$$



Assumiamo che  $\mu$ ,  $w$  siano costanti. Allora,  $m(t) = m_0 - \mu t$ , con  $m_0$  la massa iniziale del razzo a serbatoi pieni.

$$\frac{dv}{dt} = -g + \frac{w\mu}{m_0 - \mu t}$$

L'equazione si integra facilmente: assumendo  $v(0) = 0$  — il razzo parte da fermo — si trova:

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t dt' \left( -g + \frac{w\mu}{m_0 - \mu t'} \right) \\ &= [-gt' - w \ln(m_0 - \mu t')]_{t'=0}^{t'=t} \\ &= w \ln \left( \frac{m_0}{m_0 - \mu t} \right) - gt \end{aligned}$$

La velocità finale si ottiene sapendo la massa “finale” del razzo, a serbatoi vuoti: infatti  $m_0 - \mu t_{fin} = m_{fin}$ :

$$\begin{aligned} v_{fin} &= w \ln \left( \frac{m_0}{m_{fin}} \right) - gt_{fin} \\ &= w \ln \left( \frac{m_0}{m_{fin}} \right) - g \frac{m_0 - m_{fin}}{\mu} \end{aligned}$$

### 17.7.2 Il satellite in un ambiente “polveroso”

Consideriamo un satellite, di massa  $m$ , che orbita a quota costante, in un ambiente “polveroso”, costituito da molti corpuscoli in quiete, che si attaccano al satellite man mano che questo li investe.

Detta  $v$  la velocità del satellite, esso acquisisce materia dall'ambiente circostante secondo una legge del tipo  $dm = kv dt$  — per esempio, se  $\rho$  è la densità dell'ambiente circostante, e  $\Sigma$  la sezione frontale del satellite, il volume spazzato in un tempo  $dt$  è  $dV = \Sigma v dt$  e quindi  $dm = \rho dV = \rho \Sigma v dt$ .

Ad un dato istante, la massa del satellite è  $m(t)$  e la sua velocità  $v(t)$ . Essendo l'ambiente “fermo”, la quantità di moto totale del sistema (satellite)+(ambiente) è:

$$p(t) = m(t)v(t)$$

mentre in  $t + dt$  è:

$$\begin{aligned} p(t + dt) &= m(t + dt)v(t + dt) \\ &= (m + kv dt)(v + dv) = m(t)v(t) + kv^2 dt + m dv \\ &= p(t) + kv^2 dt + m dv \end{aligned}$$

In assenza di forze esterne,  $dp = 0$ ; pertanto  $m dv = -kv^2 dt$ , ovvero

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m(t)}v^2$$

Come intuitivo, il moto è rallentato. Si noti che la massa,  $m(t)$ , non è costante. Per integrare il moto, conviene considerare che  $m(t)v(t) = m_0v_0$ , quindi  $m(t) = \frac{m_0v_0}{v(t)}$ . Si deduce che

$$a = -\frac{k}{m_0v_0}v^3$$

L'integrazione si svolge per separazione di variabili:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -\frac{k}{m_0v_0}v^3 \\ \frac{dv}{v^3} &= -\frac{k}{m_0v_0}dt \\ \int_{v_0}^v \frac{dv'}{(v')^3} &= -\frac{k}{m_0v_0} \int_0^t dt' \\ \left[ -\frac{1}{2(v')^2} \right]_{v'=v_0}^{v'=v} &= -\frac{k}{m_0v_0} t \\ \frac{1}{v^2} - \frac{1}{v_0^2} &= \frac{2k}{m_0v_0} t \end{aligned}$$

ovvero:

$$v = v_0 \sqrt{\frac{m_0}{m_0 + 2v_0kt}}$$

## 17.8 Sistemi legati, andamenti medi, teorema del viriale

Nello studio di un sistema di molti punti, è praticamente impossibile analizzare il moto di ogni singolo costituente, pertanto si cerca il più possibile di indagare grandezze globali, come la quantità di moto totale  $\vec{p}_{tot}$ , il momento angolare totale  $\vec{L}_{tot}$ , l'energia meccanica totale  $E_{tot}$ . Nel caso di sistemi isolati, abbiamo visto che queste quantità si conservano.

Ora consideriamo in particolare sistemi *legati*, cioè le cui interazioni interne siano tali da mantenere tutti i costituenti confinati in una certa

regione di spazio. È il caso di sistemi complessi, come un sistema planetario o una galassia, tenuti insieme dall'attrazione gravitazionale, ma anche di oggetti più piccoli, come una goccia d'acqua, che "sta insieme" a causa delle interazioni fra le molecole.

Per l' $i$ -esimo componente, introduciamo la quantità

$$G_i \equiv \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i$$

e consideriamo la seguente identità:

$$\frac{dG_i}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{p}_i \cdot \vec{r}_i) = \frac{d\vec{p}_i}{dt} \cdot \vec{r}_i + \vec{p}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i + \vec{p}_i \cdot \vec{v}_i$$

Ora,  $\vec{p}_i \cdot \vec{v}_i = m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = 2\mathcal{E}_i$ , quindi

$$\frac{dG_i}{dt} = \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i + 2\mathcal{E}_i$$

La derivata della quantità  $G_i$  evolve nel tempo in maniera complicata, ma consideriamo il suo valore mediato su un tempo  $\Delta t$  *molto lungo*:

$$\overline{\frac{dG_i}{dt}} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} dt' \frac{dG_i(t')}{dt'} = \frac{G_i(t + \Delta t) - G_i(t)}{\Delta t}$$

Ora, essendo il moto confinato,  $\vec{r}_i$ , per quanto vari in maniera complicata nel tempo, non può assumere valori infiniti, sarà comunque limitato. A causa della conservazione dell'energia meccanica, anche  $|\vec{p}_i|$  deve essere superiormente limitato. Pertanto anche il numeratore,  $|G_i(t + \Delta t) - G_i(t)|$ , deve essere limitato. Viceversa, il denominatore,  $\Delta t$ , può essere idealmente fatto crescere a volontà. Ne consegue che il risultato è nullo nel limite  $\Delta t \rightarrow \infty$ . Possiamo quindi scrivere che:

$$\overline{\vec{F}_i \cdot \vec{r}_i} = -2 \overline{\mathcal{E}_i} \quad (\text{media temporale su } \Delta t \rightarrow \infty)$$

La stessa equazione può essere sommata su tutti i costituenti  $i$  del sistema:

$$\overline{\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i} = -2 \overline{\sum_i \mathcal{E}_i} \quad (\text{media temporale su } \Delta t \rightarrow \infty)$$

Lavoriamo sul membro sinistro, scrivendo la forza come  $\vec{F}_{ij} = \frac{F_{ij}(r_{ij})}{r_{ij}} (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ :

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i = \sum_i \left( \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \right) \cdot \vec{r}_i = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{F_{ij}(r_{ij})}{r_{ij}} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot \vec{r}_i$$

Come già fatto per il calcolo del lavoro interno, invertiamo i due indici  $i \leftrightarrow j$ . Poiché il membro a sinistra è simmetrico per questo scambio, anche quello di destra deve esserlo:

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i &= \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{F_{ij}(r_{ij})}{r_{ij}} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot \vec{r}_i \\ &= \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{F_{ij}(r_{ij})}{r_{ij}} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \cdot \vec{r}_j \end{aligned}$$

pertanto

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{F_{ij}(r_{ij})}{r_{ij}} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} F_{ij}(r_{ij}) r_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{d\mathcal{U}_{ij}}{dr_{ij}} r_{ij} \end{aligned}$$

Questa equazione assume un particolare interesse quando sia nota la forma analitica dell'energia potenziale  $\mathcal{U}_{ij}$  dell'interazione a due oggetti. In molti modelli, essa è una legge di potenza:

$$\mathcal{U}_{ij}(r_{ij}) = K_{ij} \cdot (r_{ij})^\nu$$

(per esempio,  $\nu = -1$  per forze gravitazionali o coulombiane; oppure,  $\nu = +2$  per forze elastiche). In tal caso,  $\frac{d\mathcal{U}_{ij}}{dr_{ij}} r_{ij} = \nu \mathcal{U}_{ij}$ , e si può alla fine scrivere:

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i &= -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{d\mathcal{U}_{ij}}{dr_{ij}} r_{ij} = -\frac{\nu}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathcal{U}_{ij} r_{ij} \\ &= -\nu \mathcal{U}_{tot} \end{aligned}$$

La media temporale dell'energia cinetica si può dunque scrivere come

$$\nu \overline{\mathcal{U}_{tot}} = 2 \overline{\mathcal{E}_{tot}} \quad (\text{media temporale su } \Delta t \rightarrow \infty) \quad (17.42)$$

Questa equazione è nota come *teorema del viriale* (in latino “vis” significa “forza”...).

17.8. SISTEMI LEGATI, ANDAMENTI MEDI, TEOREMA DEL VIRIALE 421

Utilizzando la conservazione dell'energia,  $E_{tot} = \mathcal{U}_{tot} + \mathcal{E}_{tot}$ , l'Eq. (17.42) può esprimere la media temporale dell'energia cinetica totale e dell'energia potenziale totale:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{U}_{tot}} &= \frac{2}{2 + \nu} E_{tot} \\ \overline{\mathcal{E}_{tot}} &= \frac{\nu}{2 + \nu} E_{tot} \end{aligned} \quad (\text{media temporale su } \Delta t \rightarrow \infty) \quad (17.43)$$

A rigore, il teorema del viriale vale per medie temporali lunghe, come quelle che compaiono nelle Eq. (17.42) e Eq. (17.43). In pratica, per sistemi con un numero molto elevato di costituenti, gli andamenti temporali di  $\mathcal{E}_{tot}$ ,  $\mathcal{U}_{tot}$  sono piuttosto stabili nel tempo, poiché ci saranno componenti che tendono ad aumentare  $\mathcal{E}_i$  e altri che tendono a diminuirla, cosicché l'effetto su  $\mathcal{E}_{tot}$  è piccolo. Pertanto, un sistema molto complesso, nella sua evoluzione temporale, tende a “virializzarsi”, e in questa situazione si può scrivere:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{tot} &\approx \frac{2}{2 + \nu} E_{tot} \\ \mathcal{E}_{tot} &\approx \frac{\nu}{2 + \nu} E_{tot} \end{aligned} \quad (17.44)$$

Come esempio tipico, consideriamo la forza gravitazionale, per cui  $\mathcal{U}_{ij}(r_{ij}) = -\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}}$ , ovvero  $\nu = -1$ . Le Eq. (17.44) diventano

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{tot} &\approx 2 E_{tot} \\ \mathcal{E}_{tot} &\approx -E_{tot} \end{aligned} \quad (\text{forze gravitazionali}) \quad (17.45)$$

Da qui si vede che un sistema gravitazionale legato deve necessariamente avere  $E_{tot} < 0$ , e per conseguenza  $\mathcal{U}_{tot} < 0$ .



# Capitolo 18

## Urti

### 18.1 Generalità

L'idea alla base dello studio degli urti è che gli oggetti siano sostanzialmente liberi di muoversi sia prima che dopo l'urto, e che l'interazione abbia luogo solo per un tempo relativamente breve, quando essi si sono avvicinati molto, o quando entrano in contatto.

In generale non si conoscono i dettagli dell'interazione.

Tuttavia, le velocità iniziali e finali — quando cioè gli oggetti sono abbastanza lontani da non interagire — sono costanti, e i moti sono rettilinei uniformi.

Formuliamo ora il problema: due oggetti puntiformi (1) e (2), di masse  $m_1$ ,  $m_2$ , entrano in collisione con quantità di moto iniziali  $\vec{p}_1^{in}$ ,  $\vec{p}_2^{in}$ , come illustrato in Fig. 18.1. Vogliamo cercare di prevedere informazioni sul loro stato finale, ovvero sulle quantità di moto  $\vec{p}_1^{out}$ ,  $\vec{p}_2^{out}$ .

### 18.2 Conservazione della quantità di moto

Assumiamo che le forze che gli oggetti si scambiano durante l'urto siano le uniche che hanno importanza:

- o perché sono effettivamente le uniche esistenti — cioè  $\vec{F}_{tot}^{(est)} = 0$ ;
- oppure perché sono di natura *impulsiva* — vd Sezione 8.6.1 — ovvero, agiscono per un tempo molto breve, e siano molto più intense di eventuali altre forze esterne, cosicché queste ultime possano essere trascurate,  $\vec{F}_{tot}^{(est)} \simeq 0$  durante l'urto.

In entrambi i casi, la quantità di moto totale degli oggetti che si urtano deve conservarsi.

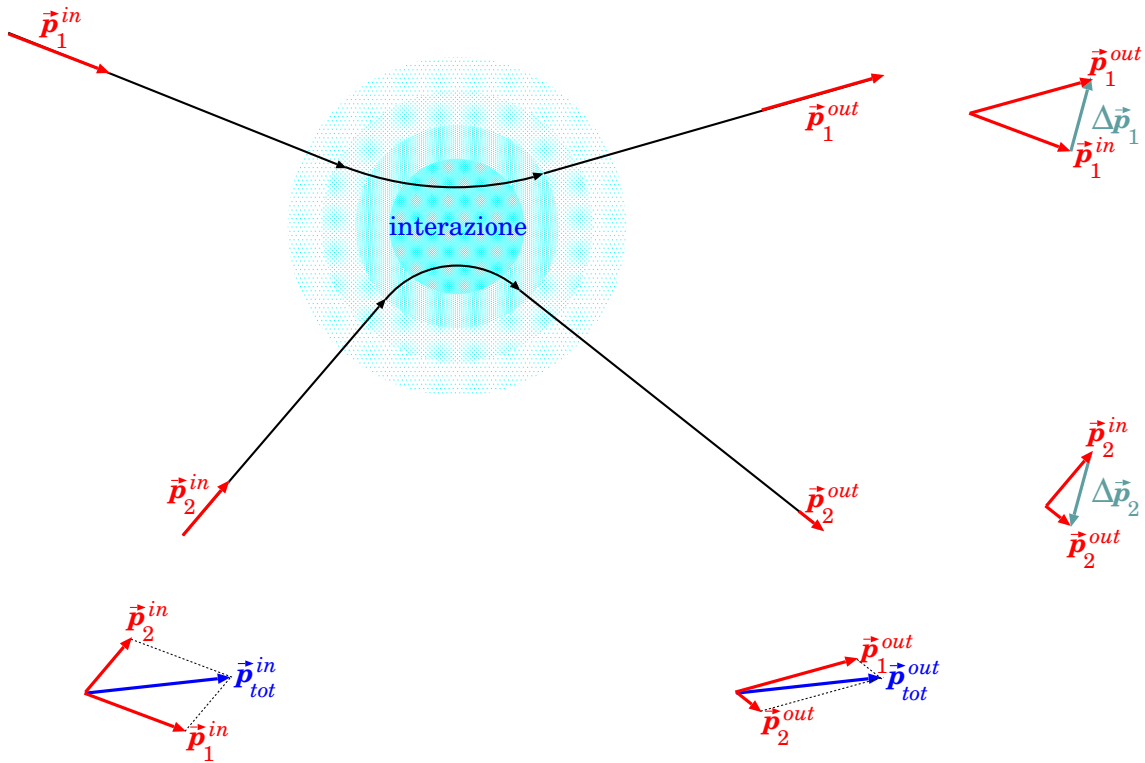


Figura 18.1: Urto fra due corpi (1) e (2). In basso e a destra: la rappresentazione vettoriale della conservazione della quantità di moto.

La conservazione della quantità di moto si scrive nelle due forme equivalenti:

$$\vec{p}_1^{in} + \vec{p}_2^{in} = \vec{p}_1^{out} + \vec{p}_2^{out} \quad (18.1)$$

$$m_1 \vec{v}_1^{in} + m_2 \vec{v}_2^{in} = m_1 \vec{v}_1^{out} + m_2 \vec{v}_2^{out}$$

oppure, introducendo  $\Delta \vec{p}_i = \vec{p}_i^{out} - \vec{p}_i^{in}$  ( $i = 1, 2$ ), anche:

$$\Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = 0 \quad (18.2)$$

Questa è un'equazione vettoriale, quindi fornisce 3 equazioni algebriche: una per ciascuna direzione  $x, y, z$ .

Tuttavia, le incognite sono 6: infatti sia  $\vec{p}_1^{out}$  che  $\vec{p}_2^{out}$  possiedono 3 componenti. Quindi, la sola conservazione della quantità di moto non è sufficiente a risolvere il problema.



## 18.3 Energia negli urti

Se la forza fra i due oggetti che si urtano è conservativa, è possibile definire un'energia potenziale  $\mathcal{U}$  e un'energia meccanica del sistema:

$$E = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{U} \quad (\text{forza conservativa}) \quad (18.3)$$

che si conserva:

$$\underbrace{\mathcal{E}_1^{in} + \mathcal{E}_2^{in} + \mathcal{U}^{in}}_{\text{stato iniziale}} = \underbrace{\mathcal{E}_1^{inter} + \mathcal{E}_2^{inter} + \mathcal{U}^{inter}}_{\text{interazione}} = \underbrace{\mathcal{E}_1^{out} + \mathcal{E}_2^{out} + \mathcal{U}^{out}}_{\text{stato finale}} \quad (\text{forza conservativa})$$

Prima dell'urto e dopo l'urto, i corpi sono considerati come non interagenti, pertanto  $\mathcal{U}^{in} = \mathcal{U}^{out} = 0$ . Senza entrare nel merito di che cosa succede durante l'interazione, possiamo affermare quindi che, per forze conservative, l'energia cinetica totale fra stato iniziale e stato finale non cambia:

$$\mathcal{E}_1^{in} + \mathcal{E}_2^{in} = \mathcal{E}_1^{out} + \mathcal{E}_2^{out} \quad (\text{urti elastici}) \quad (18.4)$$

In questo caso si parla di *urti elastici*.

In generale, gli urti possono essere anche *inelastici*, ovvero caratterizzati da una variazione dell'energia cinetica totale.

La variazione di energia cinetica è calcolabile come:

$$\Delta\mathcal{E}_{tot} = (\mathcal{E}_1^{out} + \mathcal{E}_2^{out}) - (\mathcal{E}_1^{in} + \mathcal{E}_2^{in})$$

Spesso, l'energia cinetica totale diminuisce in seguito all'urto: in questo caso si parla di urti dissipativi:

$$\Delta\mathcal{E}_{tot} < 0 \quad (\text{urto dissipativo}) \quad (18.5)$$

In questi casi, durante l'urto agiscono forze dissipative, che convertono parte dell'energia cinetica in energia termica.

### 18.3.1 Invarianza di $\Delta\mathcal{E}_{tot}$ (\*)

La quantità di energia termica, generata nell'urto dissipativo, dovrebbe essere indipendente dal SR in cui osserviamo l'urto. In effetti si può mostrare che  $\Delta\mathcal{E}_{tot}$  è invariante per un cambiamento di SR.

Applicando  $\mathcal{E} = \frac{m}{2}v^2$ , possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{E}_{tot} &= \left(\frac{m_1}{2}(v_1^{out})^2 + \frac{m_2}{2}(v_2^{out})^2\right) - \left(\frac{m_1}{2}(v_1^{in})^2 + \frac{m_2}{2}(v_2^{in})^2\right) \\ &= \frac{1}{2} [m_1((v_1^{out})^2 - (v_1^{in})^2) + m_2((v_2^{out})^2 - (v_2^{in})^2)]\end{aligned}$$

Ora usiamo l'identità vettoriale  $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = a^2 - b^2$ :

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{E}_{tot} &= \frac{1}{2} [m_1(\vec{v}_1^{out} - \vec{v}_1^{in}) \cdot (\vec{v}_1^{out} + \vec{v}_1^{in}) + m_2(\vec{v}_2^{out} - \vec{v}_2^{in}) \cdot (\vec{v}_2^{out} + \vec{v}_2^{in})] \\ &= \frac{1}{2} [(\vec{p}_1^{out} - \vec{p}_1^{in}) \cdot (\vec{v}_1^{out} + \vec{v}_1^{in}) + (\vec{p}_2^{out} - \vec{p}_2^{in}) \cdot (\vec{v}_2^{out} + \vec{v}_2^{in})] \\ &= \frac{1}{2} [\Delta\vec{p}_1 \cdot (\vec{v}_1^{out} + \vec{v}_1^{in}) + \Delta\vec{p}_2 \cdot (\vec{v}_2^{out} + \vec{v}_2^{in})] \\ &= \frac{1}{2} \Delta\vec{p}_1 \cdot (\vec{v}_1^{out} + \vec{v}_1^{in} - \vec{v}_2^{out} - \vec{v}_2^{in})\end{aligned}$$

(nell'ultimo passaggio si è sfruttata la conservazione della quantità di moto,  $\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = 0$ ).

È interessante notare che  $\Delta\mathcal{E}_{tot}$  non dipende dal sistema di riferimento. Infatti, supponiamo di passare da un SR ad un altro, con le consuete equazioni di trasformazione delle velocità:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}^{(SR)}$$

Ora, evidentemente tutto ciò che comporta differenze di velocità è invariante: per esempio

$$\begin{aligned}\Delta\vec{p}_1 &= m_1(\vec{v}_1^{out} - \vec{v}_1^{in}) \\ &= m_1((\vec{v}_1'^{out} + \vec{v}^{(SR)}) - (\vec{v}_1'^{in} + \vec{v}^{(SR)})) \\ &= m_1(\vec{v}_1'^{out} - \vec{v}_1'^{in}) = \Delta\vec{p}_1'\end{aligned}$$

e analogamente per  $\vec{v}_1^{out} - \vec{v}_2^{out}$  e  $\vec{v}_1^{in} - \vec{v}_2^{in}$ . Quindi

$$\Delta\mathcal{E}_{tot} = \Delta\mathcal{E}'_{tot}$$

### 18.3.2 Urti dissipativi, coefficiente di restituzione (\*)

Calcoliamo  $\Delta\mathcal{E}_{tot}$  nel SR del centro di massa. Poiché nel SRCM  $\vec{p}_{tot}^* = 0$ , deve essere:

$$\begin{aligned}\vec{p}_1^{*,in} + \vec{p}_2^{*,in} &= 0 \\ \vec{p}_1^{*,out} + \vec{p}_2^{*,out} &= 0\end{aligned}$$

quindi possiamo definire:

$$\begin{aligned} p^{*,in} &= |\vec{p}_1^{*,in}| = |\vec{p}_2^{*,in}| \\ p^{*,out} &= |\vec{p}_1^{*,out}| = |\vec{p}_2^{*,out}| \end{aligned}$$

Ovviamente,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{tot}^{*,in} &= \frac{(p_1^{*,in})^2}{2m_1} + \frac{(p_2^{*,in})^2}{2m_2} = \frac{m_1 + m_2}{2m_1m_2} (p^{*,in})^2 \\ \mathcal{E}_{tot}^{*,out} &= \frac{(p_1^{*,out})^2}{2m_1} + \frac{(p_2^{*,out})^2}{2m_2} = \frac{m_1 + m_2}{2m_1m_2} (p^{*,out})^2 \end{aligned}$$

Quindi

$$\Delta\mathcal{E}_{tot} = \frac{m_1 + m_2}{2m_1m_2} [(p^{*,out})^2 - (p^{*,in})^2]$$

Si definisce *coefficiente di restituzione* la quantità

$$e = \frac{p^{*,out}}{p^{*,in}} \quad (\text{definito sempre nel SRCM})$$

Da cui

$$\Delta\mathcal{E}_{tot} = \mathcal{E}_{tot}^{*,in} \cdot (e^2 - 1) \quad (18.6)$$

Negli urti elastici,  $\Delta\mathcal{E}_{tot} = 0$ , quindi  $e = 1$ ; negli urti dissipativi  $\Delta\mathcal{E}_{tot} < 0$ , quindi  $e < 1$ . La massima dissipazione si ha per  $e = 0$  — urto totalmente inelastico: in quest'ultimo caso  $p^{*,out} = 0$ , cioè i due oggetti restano attaccati dopo l'urto. In sintesi:

$$\begin{aligned} e = 1 & \quad (\text{urto elastico}) \\ 0 \leq e < 1 & \quad (\text{urto dissipativo}) \\ e = 0 & \quad (\text{urto totalmente inelastico}) \end{aligned}$$

Mentre  $\Delta\mathcal{E}_{tot}$  è invariante,  $\mathcal{E}_{tot}$  si modifica cambiando SR: sappiamo che nel SRLAB

$$\mathcal{E}_{tot} = \mathcal{E}_{tot}^* + \frac{m_1 + m_2}{2} v_{cm}^2$$

Inoltre, negli urti  $\vec{p}_{tot}$  si conserva, pertanto anche  $v_{cm}$  non subisce variazioni fra prima e dopo dell'urto. Quindi l'Eq. (18.6) può essere generalizzata a un qualunque SR così:

$$\Delta\mathcal{E}_{tot} = \left( \mathcal{E}_{tot}^{in} - \frac{m_1 + m_2}{2} v_{cm}^2 \right) \cdot (e^2 - 1) \quad (18.7)$$

È interessante notare che l'energia cinetica iniziale,  $\mathcal{E}_{tot}^{in}$ , non può mai dissiparsi completamente, se  $v_{cm} > 0$ . Infatti, la massima dissipazione si ha per  $e = 0$ . In questo caso:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{tot}^{fin} &= \mathcal{E}_{tot}^{in} + \Delta\mathcal{E}_{tot} = e^2\mathcal{E}_{tot}^{in} + (1 - e^2)\frac{m_1 + m_2}{2}v_{cm}^2 \\ \left[\mathcal{E}_{tot}^{fin}\right]_{min} &= \frac{m_1 + m_2}{2}v_{cm}^2\end{aligned}$$

In altre parole, il sistema deve comunque conservare *almeno* la velocità del centro di massa,  $v_{cm}$ .

## 18.4 Urto totalmente inelastico

Nell'urto totalmente inelastico, i due oggetti, dopo l'urto, restano attaccati fra loro, pertanto  $\vec{v}_1^{out} = \vec{v}_2^{out} \equiv \vec{V}^{out}$ : le incognite da 6 si riducono a 3 — le 3 componenti di  $\vec{V}^{out}$  — quindi la conservazione della quantità di moto, Eq. (18.1), è sufficiente a risolvere il problema. Il risultato è

$$(m_1 + m_2)\vec{V}^{out} = m_1\vec{v}_1^{in} + m_2\vec{v}_2^{in}$$

ovvero

$$\vec{V}^{out} = \frac{m_1\vec{v}_1^{in} + m_2\vec{v}_2^{in}}{m_1 + m_2} \quad (18.8)$$

La dissipazione di energia cinetica si può calcolare come

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{E}_{tot} &= \frac{m_1 + m_2}{2} (V^{out})^2 - \left[ \frac{m_1}{2} (v_1^{in})^2 + \frac{m_2}{2} (v_2^{in})^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{m_1^2 (v_1^{in})^2 + m_2^2 (v_2^{in})^2 + 2m_1m_2\vec{v}_1^{in} \cdot \vec{v}_2^{in}}{m_1 + m_2} - m_1 (v_1^{in})^2 - m_2 (v_2^{in})^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{2m_1m_2\vec{v}_1^{in} \cdot \vec{v}_2^{in} - m_1m_2 (v_1^{in})^2 - m_1m_2 (v_2^{in})^2}{m_1 + m_2} \right] \\ &= -\frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)} (\vec{v}_1^{in} - \vec{v}_2^{in})^2\end{aligned}$$

Manifestamente,  $\Delta\mathcal{E}_{tot} < 0$ , dunque l'urto è effettivamente dissipativo <sup>[1]</sup>. Inoltre, per fissati  $v_1^{in}$ ,  $v_2^{in}$ , l'energia dissipata è massima nel caso di urto

<sup>1</sup> Si ha  $\Delta\mathcal{E}_{tot} = 0$  solo nel caso  $\vec{v}_1^{in} = \vec{v}_2^{in}$ , ma in questo caso i due oggetti possiedono la stessa velocità iniziale, in direzione e modulo, dunque di fatto l'urto non avviene.

frontale, ovvero quando gli orientamenti di  $\vec{v}_1^{in}$ ,  $\vec{v}_2^{in}$  sono opposti. Questo si può vedere matematicamente scrivendo:

$$(\vec{v}_1^{in} - \vec{v}_2^{in})^2 = (v_1^{in})^2 + (v_2^{in})^2 - 2v_1^{in}v_2^{in} \cos \alpha$$

essendo  $\alpha$  l'angolo fra  $\vec{v}_1^{in}$ ,  $\vec{v}_2^{in}$ . A parità di  $v_1^{in}$ ,  $v_2^{in}$ , il termine  $(\vec{v}_1^{in} - \vec{v}_2^{in})^2$  è massimo quando  $\cos \alpha = -1$ , ovvero  $\alpha = \pi$ .

## 18.5 Urto elastico

Nell'urto elastico, l'energia cinetica si conserva:

$$\mathcal{E}_{tot}^{in} = \mathcal{E}_{tot}^{out}$$

Applicata al nostro urto essa si scrive

$$\frac{m_1}{2} (v_1^{in})^2 + \frac{m_2}{2} (v_2^{in})^2 = \frac{m_1}{2} (v_1^{out})^2 + \frac{m_2}{2} (v_2^{out})^2 \quad (18.9)$$

È utile “rimaneggiare” un po' questa equazione:

$$\begin{aligned} m_1 \left[ (v_1^{in})^2 - (v_1^{out})^2 \right] &= m_2 \left[ (v_2^{out})^2 - (v_2^{in})^2 \right] \\ m_1 (\vec{v}_1^{in} - \vec{v}_1^{out}) \cdot (\vec{v}_1^{in} + \vec{v}_1^{out}) &= m_2 (\vec{v}_2^{out} - \vec{v}_2^{in}) \cdot (\vec{v}_2^{out} + \vec{v}_2^{in}) \end{aligned}$$

(abbiamo sfruttato l'identità vettoriale  $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = a^2 - b^2$ , facilmente verificabile). Ora “rimaneggiamo” anche la conservazione della quantità di moto, Eq. (18.1):

$$m_1 (\vec{v}_1^{in} - \vec{v}_1^{out}) = m_2 (\vec{v}_2^{out} - \vec{v}_2^{in})$$

Sostituendo questa nella precedente, si ottiene:

$$(\vec{v}_1^{in} + \vec{v}_1^{out} - \vec{v}_2^{out} - \vec{v}_2^{in}) \cdot (\vec{v}_1^{in} - \vec{v}_1^{out}) = 0 \quad (18.10)$$

Escludendo il caso banale  $\vec{v}_1^{in} = \vec{v}_1^{out}$ , in cui di fatto non c'è urto, questa equazione dà una condizione fra  $\vec{v}_1^{out}$ ,  $\vec{v}_2^{out}$  lungo la direzione di  $(\vec{v}_1^{in} - \vec{v}_1^{out})$  — quindi è una sola condizione. Insieme alla conservazione della quantità di moto, ho 4 condizioni e 6 incognite.

### 18.5.1 Urto elastico: caso unidimensionale

Se gli oggetti che si urtano sono costretti a muoversi lungo una sola dimensione (per esempio carrelli su una rotaia), allora il problema è perfettamente risolvibile: le equazioni sono:

$$\begin{aligned} v_1^{in} + v_1^{out} &= v_2^{in} + v_2^{out} \\ m_1(v_1^{in} - v_1^{out}) &= -m_2(v_2^{in} - v_2^{out}) \end{aligned} \quad (18.11)$$

nelle due incognite  $v_1^{out}, v_2^{out}$ . La soluzione si può ottenere per sostituzione, per esempio ricavando  $v_1^{out} = v_2^{out} - v_1^{in} + v_2^{in}$  dalla prima equazione e introducendolo nella seconda. La soluzione è:

$$\begin{aligned} v_1^{out} &= \frac{(m_1 - m_2)v_1^{in} + 2m_2v_2^{in}}{m_1 + m_2} \\ v_2^{out} &= \frac{(m_2 - m_1)v_2^{in} + 2m_1v_1^{in}}{m_2 + m_1} \end{aligned} \quad (18.12)$$

Vediamo alcuni casi notevoli:

- $m_1 = m_2$ : masse uguali:

$$v_1^{out} = v_2^{in} \quad ; \quad v_2^{out} = v_1^{in}$$

ovvero le velocità “si scambiano” da prima a dopo l’urto.

- $m_1 \ll m_2$ : una massa è estremamente più piccola dell’altra:

$$v_1^{out} \simeq -v_1^{in} + 2v_2^{in} \quad ; \quad v_2^{out} \simeq v_2^{in}$$

ovvero la massa più grande  $m_2$  non subisce variazioni apprezzabili di velocità; per studiare l’effetto sulla massa più piccola consideriamo alcuni sotto-casi:

- $m_1 \ll m_2$  e  $v_2^{in} = 0$ : la massa più grande è ferma e la più piccola la colpisce; in questo caso

$$v_1^{out} \simeq -v_1^{in} \quad ; \quad v_2^{out} \simeq 0$$

ovvero la massa piccola viene rimbalzata all’indietro, mentre la massa grande resta indisturbata;

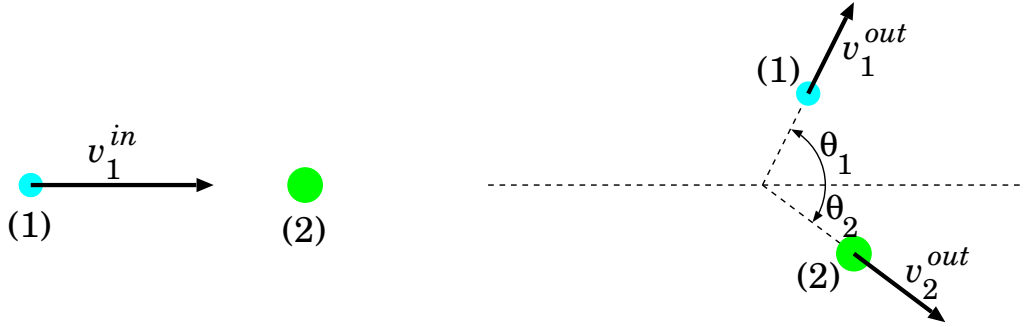


Figura 18.2: *Urto elastico in due dimensioni: prima (a sinistra) e dopo (a destra) dell'urto.*

- $m_1 \ll m_2$  e  $v_1^{in} = 0$ : la massa più piccola è ferma e la più grande la colpisce; in questo caso

$$v_1^{out} \simeq 2v_2^{in} \quad ; \quad v_2^{out} \simeq v_2^{in}$$

ovvero la massa piccola viene sparata in avanti a velocità doppia della massa grande, mentre quest'ultima procede indisturbata.

- masse  $m_1, m_2$  qualunque, ma  $v_2^{in} = 0$ , ovvero l'oggetto (2) è inizialmente fermo; in questo caso:

$$v_1^{out} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1^{in} \quad ; \quad v_2^{out} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1^{in}$$

## 18.6 Urti elastici in due dimensioni

Affrontiamo il caso generale solo nella condizione che l'oggetto (2) sia inizialmente fermo:  $\vec{v}_2^{in} = 0$ . Il problema, così facendo, da tridimensionale si riduce a bidimensionale. Infatti, nello stato finale  $\vec{p}_1^{out}, \vec{p}_2^{out}$  individuano un piano, e per la conservazione della quantità di moto,  $\vec{p}_1^{in} = \vec{p}_1^{out} + \vec{p}_2^{out}$  deve giacere su tale piano.

Chiamiamo “proiettile” l'oggetto incidente (1), e “bersaglio” l'oggetto (2), inizialmente fermo.

Scegliamo come direzione di riferimento quella del proiettile prima dell'urto, e misuriamo rispetto ad essa gli angoli  $\theta_1, \theta_2$  degli oggetti uscenti, come in Fig. 18.2. Riscriviamo l'Eq. (18.10) utilizzando le quantità di moto:

$$\left( \frac{\vec{p}_1^{in} + \vec{p}_1^{out}}{m_1} - \frac{\vec{p}_2^{out} + \vec{p}_2^{in}}{m_2} \right) \cdot (\vec{p}_1^{in} - \vec{p}_1^{out}) = 0$$

quindi poniamo  $\vec{p}_2^{in} = 0$ ; questo significa che  $\vec{p}_2^{out} = \vec{p}_1^{in} - \vec{p}_1^{out}$ . Definiamo per comodità

$$k = \frac{m_2}{m_1}$$

Allora

$$\begin{aligned} 0 &= [k(\vec{p}_1^{in} + \vec{p}_1^{out}) - (\vec{p}_1^{in} - \vec{p}_1^{out})] \cdot (\vec{p}_1^{in} - \vec{p}_1^{out}) \\ &= [(k-1)\vec{p}_1^{in} + (k+1)\vec{p}_1^{out}] \cdot (\vec{p}_1^{in} - \vec{p}_1^{out}) \\ &= (k-1)(\vec{p}_1^{in})^2 - (k+1)(\vec{p}_1^{out})^2 + [(k+1) - (k-1)]\vec{p}_1^{in} \cdot \vec{p}_1^{out} \\ &= (k-1)(p_1^{in})^2 - (k+1)(p_1^{out})^2 + 2p_1^{in}p_1^{out} \cos \theta_1 \end{aligned}$$

Introduciamo poi la quantità

$$x = \frac{p_1^{out}}{p_1^{in}}$$

che esprime la frazione di quantità di moto conservata dal proiettile dopo l'urto. Allora la relazione trovata si scrive:

$$(k+1)x^2 - 2x \cos \theta_1 - (k-1) = 0 \quad \left( \begin{array}{l} k = \frac{m_2}{m_1} \\ x = \frac{p_1^{out}}{p_1^{in}} \end{array} \right) \quad (18.13)$$

Questa si può risolvere per  $\cos \theta_1$

$$\cos \theta_1 = \frac{(k+1)x^2 - (k-1)}{2x} \quad (18.14)$$

oppure per  $x$ :

$$x = \frac{\cos \theta_1 \pm \sqrt{(\cos \theta_1)^2 + k^2 - 1}}{k+1} \quad (18.15)$$

La relazione fra le due variabili  $x$ ,  $\cos \theta_1$  è mostrata in Fig. 18.3, dove i diversi colori rappresentano diversi rapporti  $k = \frac{m_2}{m_1}$ . È possibile osservare tre diverse casistiche:  $m_2 > m_1$  (proiettile leggero),  $m_2 < m_1$  (proiettile pesante), e il caso-limite  $m_2 = m_1$ , corrispondenti rispettivamente alla “parte sinistra”, “parte destra”, e linea nera nella figura.

Prima di discutere i 3 casi, notiamo subito che lo studio di urti consente di indagare la massa del bersaglio,  $m_2$ , se è possibile inviare diversi proiettili



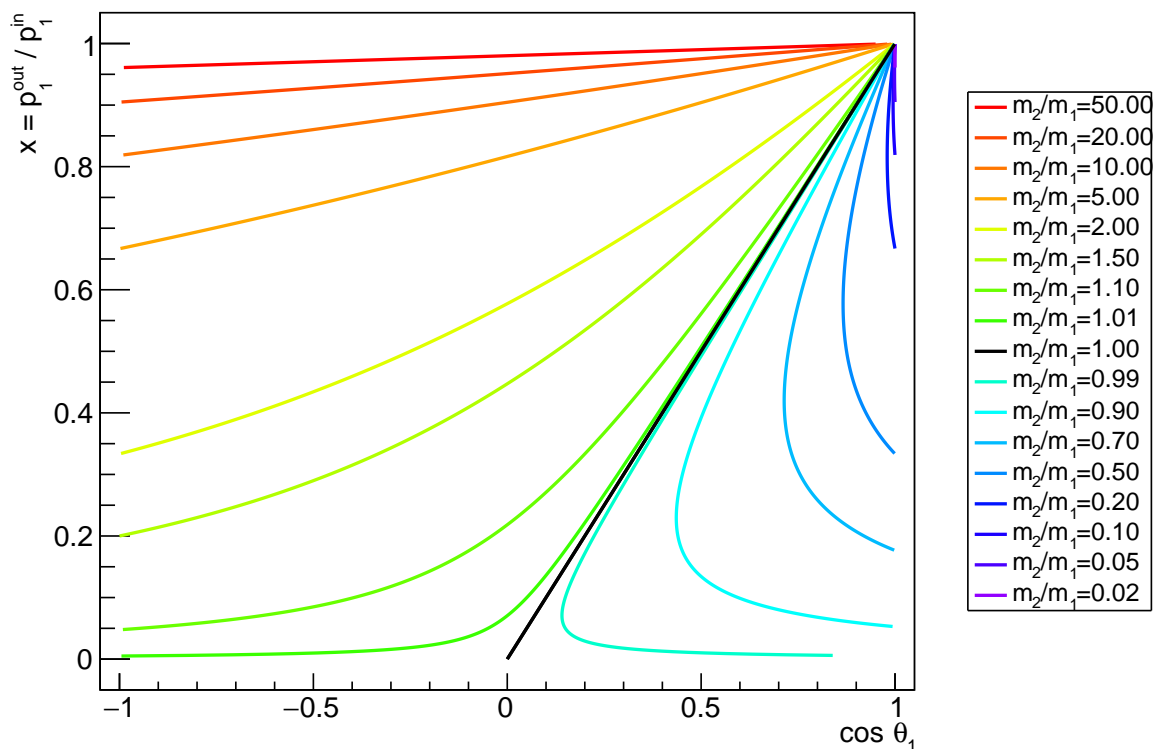


Figura 18.3: Rappresentazione grafica della relazione fra la frazione di quantità di moto  $x = \frac{p_1^{\text{out}}}{p_1^{\text{in}}}$  e l'angolo di diffusione  $\theta_1$  in un urto elastico, per diversi valori del rapporto  $k = \frac{m_2}{m_1}$ . La massa  $m_2$  è supposta ferma prima dell'urto.

di massa  $m_1$  nota su altrettanti bersagli uguali: misurando la frazione  $x$  di quantità di moto dopo l'urto, e l'angolo di diffusione  $\theta_1$  del proiettile, si può costruire una curva di punti sperimentali nel piano  $(\cos \theta_1; x)$  e da questa dedurre il rapporto  $\frac{m_2}{m_1}$ .

In generale, lo studio di urti contro particelle-bersaglio ha consentito nella storia della fisica, e tuttora consente, di indagare le proprietà delle strutture sub-atomiche. Uno degli esperimenti che hanno fatto la storia della fisica atomica è lo "scattering di Rutherford" (1909–11): un sottile foglio di oro veniva bombardato con particelle- $\alpha$  (nuclei di  $^4\text{He}$ ), e studiando gli angoli di diffusione Rutherford dedusse che la massa degli atomi è concentrata in una

struttura molto più piccola dell'atomo stesso, il nucleo.

### 18.6.1 Discussione dei 3 casi

- $k = \frac{m_2}{m_1} > 1$  : **proiettile più leggero del bersaglio.**

In questo caso, ogni angolo di diffusione è possibile:  $\cos \theta_1 \in [-1; +1]$ , ovvero  $\theta_1 \in [0, \pi]$ . Inoltre, per ciascun valore di  $\theta_1$  il rapporto  $x = \frac{p_1^{out}}{p_1^{in}}$  è univocamente determinato. In effetti, una delle due soluzioni Eq. (18.15) risulta negativa, il che è fisicamente privo di senso, pertanto resta

$$\frac{p_1^{out}}{p_1^{in}} = \frac{\cos \theta_1 + \sqrt{(\cos \theta_1)^2 + k^2 - 1}}{k + 1} \quad (\text{per } k > 1)$$

Nel caso-limite  $k \gg 1$  (cioè il bersaglio è molto più massivo del proiettile) abbiamo  $p_1^{out} \simeq p_1^{in}$ , ovvero l'urto modifica la direzione del proiettile ma non la sua energia.

- $k = \frac{m_2}{m_1} = 1$  : **proiettile e bersaglio hanno masse identiche.**

Solo la diffusione "in avanti" è possibile:  $\cos \theta_1 \in [0; +1]$ , ovvero  $\theta_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . Inoltre, il rapporto  $x = \frac{p_1^{out}}{p_1^{in}}$  è univocamente determinato

$$\frac{p_1^{out}}{p_1^{in}} = \cos \theta_1 \quad (\text{per } k = 1)$$

- $k = \frac{m_2}{m_1} < 1$  : **proiettile più pesante del bersaglio.**

Solo la diffusione in avanti è possibile; inoltre, per un dato angolo di diffusione  $\theta_1$ , esistono due possibili valori per  $x = \frac{p_1^{out}}{p_1^{in}}$ :

$$\frac{p_1^{out}}{p_1^{in}} = \frac{\cos \theta_1 \pm \sqrt{(\cos \theta_1)^2 + k^2 - 1}}{k + 1} \quad (\text{per } k < 1)$$

L'intervallo ammesso degli angoli di diffusione è definito dalla condizione  $(\cos \theta_1)^2 \geq 1 - k^2$ , ovvero, ricordando che  $\cos^2 + \sin^2 = 1$ , da

$$\sin \theta_1 \leq k \quad (\text{per } k < 1)$$

### 18.6.2 Energia trasferita

L'energia trasferita nell'urto alla particella-bersaglio (2) si può esprimere con la frazione:

$$\begin{aligned} f &= \frac{\mathcal{E}_2^{(out)}}{\mathcal{E}_1^{(in)}} = \frac{\mathcal{E}_1^{(in)} - \mathcal{E}_1^{(out)}}{\mathcal{E}_1^{(in)}} = \frac{(p_1^{(in)})^2 - (p_1^{(out)})^2}{(p_1^{(in)})^2} \\ &= 1 - x^2 \end{aligned}$$

Dalla Fig. 18.3, si nota che per ciascun valore di  $k$  esiste un valore minimo di  $x$ , che quindi corrisponde ad un valore massimo di  $f$  — tranne nel caso  $k = 1$ , in cui  $x$  può essere anche zero. Per  $k > 1$ ,  $x_{min}$  si trova per  $\cos \theta_1 = -1$  e vale

$$x_{min} = \frac{k - 1}{k + 1} \quad (k > 1)$$

Invece, per  $k < 1$ ,  $x_{min}$  si trova per  $\cos \theta_1 = +1$  e vale

$$x_{min} = \frac{1 - k}{k + 1} \quad (k < 1)$$

In ogni caso, si trova

$$\begin{aligned} x_{min} &= \left| \frac{k - 1}{k + 1} \right| = \left| \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \right| \\ f_{max} &= 1 - x_{min}^2 = \frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{4k}{(1 + k)^2} \end{aligned}$$

Il valore di  $f_{max}$  è massimo quando  $k = 1$ . Si deduce che lo scambio di energia fra il proiettile e il bersaglio può essere tanto maggiore quanto più vicine sono le due masse  $m_1$ ,  $m_2$ .

## 18.7 Urti elastici nel sistema di riferimento del centro di massa

Nel sistema di riferimento del centro di massa deve essere:

$$\begin{aligned} \vec{p}_1^{*,in} + \vec{p}_2^{*,in} &= 0 \\ \vec{p}_1^{*,out} + \vec{p}_2^{*,out} &= 0 \end{aligned}$$

Inoltre,  $\mathcal{E}_1^{*,in} + \mathcal{E}_2^{*,in} = \mathcal{E}_1^{*,out} + \mathcal{E}_2^{*,out}$ ; sostituendo  $\mathcal{E} = \frac{p^2}{2m}$ , e chiamando  $p^* = |\vec{p}_1^*| = |\vec{p}_2^*|$  si ha dunque:

$$\begin{aligned} \frac{(p_1^{*,in})^2}{2m_1} + \frac{(p_2^{*,in})^2}{2m_2} &= \frac{(p_1^{*,out})^2}{2m_1} + \frac{(p_2^{*,out})^2}{2m_2} \\ \frac{(p^{*,in})^2}{2m_1} + \frac{(p^{*,in})^2}{2m_2} &= \frac{(p^{*,out})^2}{2m_1} + \frac{(p^{*,out})^2}{2m_2} \\ \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}\right) (p^{*,in})^2 &= \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}\right) (p^{*,out})^2 \end{aligned}$$

da cui  $p^{*,in} = p^{*,out}$ .

In sintesi, abbiamo trovato che le quantità di moto delle particelle incidenti sono uguali a quelli delle particelle diffuse:

$$\begin{aligned} |\vec{p}_1^{*,in}| &= |\vec{p}_2^{*,in}| \\ &= p^* = \\ &|\vec{p}_1^{*,out}| = |\vec{p}_2^{*,out}| \end{aligned} \quad (18.16)$$

Inoltre abbiamo anche semplici relazioni fra le energie:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1^{*,in} &= \frac{(p^*)^2}{2m_1} = \mathcal{E}_1^{*,out} \\ \mathcal{E}_2^{*,in} &= \frac{(p^*)^2}{2m_2} = \mathcal{E}_2^{*,out} \end{aligned} \quad (18.17)$$

## 18.8 Trasferimento di energia negli urti elastici

È interessante analizzare il trasferimento di energia negli urti elastici. Qualitativamente, possiamo vedere che se due particelle collidono, quella più energetica tende *in media* a cedere energia a quella meno energetica, cosicché dopo l'urto le due energie *tendono a essere* “meno diverse”.

Prima di verificare questa proprietà, pensiamo per un attimo alle sue implicazioni. Immaginiamo di avere un sistema di molte particelle che viaggiano per lo spazio, e che occasionalmente si trovano a essere sufficientemente vicine da interagire, per un brevissimo tempo. Un sistema

di questo tipo è quello che comunemente si chiama *gas*. Inizialmente la distribuzione energetica delle particelle può essere la più svariata. . . Tuttavia, in seguito agli urti, quelle inizialmente più energetiche avranno *in media* perso parte della loro energia, mentre quelle inizialmente meno energetiche, ne avranno *in media* acquistata. Alla fine, la distribuzione delle energie sarà più “democratica” che all’inizio. Va però notato che stiamo parlando di comportamenti *medii*: questo significa che le energie finali delle particelle non saranno identiche! Questo processo si chiama “termalizzazione”, ed è alla base dei sistemi termodinamici. Infatti, la temperatura di un gas è direttamente proporzionale all’energia cinetica delle particelle:  $T \propto \langle \mathcal{E} \rangle$ . Se due gas, a temperature iniziali  $T_1$ ,  $T_2$  ( $T_2 > T_1$ ), entrano in contatto, le molecole del gas (2) avranno in media energia cinetica maggiore di quelle del gas (1), quindi sarà più probabile che cedano energia. Ne consegue che il gas (2) tende a raffreddarsi, mentre il gas (1) tende a scaldarsi, fino a che le due temperature non si saranno uniformate.

Passiamo ora alla dimostrazione. Consideriamo il caso di particelle tutte aventi la stessa massa  $m$ .

Conviene esprimere la differenza di energia  $\mathcal{E}_1^{in} - \mathcal{E}_2^{in}$  fra le due particelle prima dell’urto in funzione di grandezze relative al centro di massa:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_1^{in} - \mathcal{E}_2^{in} &= \frac{m}{2}(\vec{v}_1^{in})^2 - \frac{m}{2}(\vec{v}_2^{in})^2 \\
 &= \frac{m}{2}(\vec{v}_1^{*,in} + \vec{v}_{cm})^2 - \frac{m}{2}(\vec{v}_2^{*,in} + \vec{v}_{cm})^2 \\
 &= \frac{m}{2} [(\vec{v}_1^{*,in})^2 + 2\vec{v}_1^{*,in} \cdot \vec{v}_{cm} + (\vec{v}_{cm})^2] \\
 &\quad - \frac{m}{2} [(\vec{v}_2^{*,in})^2 + 2\vec{v}_2^{*,in} \cdot \vec{v}_{cm} + (\vec{v}_{cm})^2] \\
 &= \mathcal{E}_1^{*,in} - \mathcal{E}_2^{*,in} + \vec{p}_1^{*,in} \cdot \vec{v}_{cm} - \vec{p}_2^{*,in} \cdot \vec{v}_{cm}
 \end{aligned}$$

Ora, da quanto visto in Sezione 18.7, nel caso di masse uguali  $\mathcal{E}_1^{*,in} = \mathcal{E}_2^{*,in}$  e  $\vec{p}_2^{*,in} = -\vec{p}_1^{*,in}$ ; quindi:

$$\mathcal{E}_1^{in} - \mathcal{E}_2^{in} = 2\vec{p}_1^{*,in} \cdot \vec{v}_{cm}$$

Ora trattiamo in modo analogo la variazione di energia:

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathcal{E}_1 &= \mathcal{E}_1^{out} - \mathcal{E}_1^{in} = \frac{m}{2}(\vec{v}_1^{out})^2 - \frac{m}{2}(\vec{v}_1^{in})^2 \\
 &= \frac{m}{2}(\vec{v}_1^{*,out} + \vec{v}_{cm})^2 - \frac{m}{2}(\vec{v}_1^{*,in} + \vec{v}_{cm})^2 \\
 &= \frac{m}{2} [(\vec{v}_1^{*,out})^2 + 2\vec{v}_1^{*,out} \cdot \vec{v}_{cm} + (\vec{v}_{cm})^2] \\
 &\quad - \frac{m}{2} [(\vec{v}_1^{*,in})^2 + 2\vec{v}_1^{*,in} \cdot \vec{v}_{cm} + (\vec{v}_{cm})^2] \\
 &= \mathcal{E}_1^{*,out} - \mathcal{E}_1^{*,in} + \vec{p}_1^{*,out} \cdot \vec{v}_{cm} - \vec{p}_1^{*,in} \cdot \vec{v}_{cm}
 \end{aligned}$$

Sempre dalla Sezione 18.7 sappiamo che  $\mathcal{E}_1^{*,out} = \mathcal{E}_1^{*,in}$ , quindi

$$\Delta \mathcal{E}_1 = \vec{p}_1^{*,out} \cdot \vec{v}_{cm} - \vec{p}_1^{*,in} \cdot \vec{v}_{cm}$$

Confrontando le due espressioni, che hanno in comune  $\vec{p}_1^{*,in} \cdot \vec{v}_{cm}$ , troviamo

$$\Delta \mathcal{E}_1 = \vec{p}_1^{*,out} \cdot \vec{v}_{cm} - \frac{1}{2}(\mathcal{E}_1^{in} - \mathcal{E}_2^{in})$$

Ora, su un urto preciso non possiamo dire di più. Tuttavia, la direzione di  $\vec{p}_1^{*,out}$  è indipendente dalla direzione di  $\vec{v}_{cm}$ : su molti urti, l'angolo formato fra questi due vettori è randomizzato, cosicché il suo coseno sarà positivo o negativo con uguali probabilità. Pertanto possiamo affermare, che *in media*

$$\langle \vec{p}_1^{*,out} \cdot \vec{v}_{cm} \rangle = 0$$

Ne consegue che

$$\langle \Delta \mathcal{E}_1 \rangle = -\frac{1}{2}(\mathcal{E}_1^{in} - \mathcal{E}_2^{in})$$

e così abbiamo trovato ciò che andavamo cercando: se  $\mathcal{E}_1^{in} > \mathcal{E}_2^{in}$ , *in media*  $\Delta \mathcal{E}_1$  è negativo, cioè la particella (1) tende a cedere energia — e viceversa nel caso contrario.

# Capitolo 19

## Dinamica del corpo rigido

### 19.1 Definizione di corpo rigido

Si intende per *corpo rigido* un oggetto esteso, indeformabile. Possiamo pensarlo come costituito da molti punti materiali, le cui distanze mutue sono fissate e immutabili.

Pensando ad oggetti materiali, formati di atomi, potremmo identificare ciascun “punto materiale” con un atomo, e assumere che le distanze interatomiche siano fissate dalle rispettive interazioni e non cambino. Ovviamente si tratta di un’astrazione. Gli atomi “vibrano” intorno a posizioni di equilibrio stabile. Inoltre, se agiscono forze esterne sufficientemente intense, esse potranno alterare gli equilibri interatomici e modificarne le distanze, o addirittura spezzare i legami e frantumare l’oggetto. Nella trattazione che segue, supponiamo che tutti questi effetti siano trascurabili.

#### 19.1.1 Gradi di libertà di un corpo rigido

Si chiamano *gradi di libertà* di un sistema fisico tutti i parametri necessari a descriverne i suoi spostamenti continui nello spazio.

Per esempio, per un generico sistema formato da  $n$  punti, la sua configurazione sarebbe specificata dando le 3 coordinate di ciascun punto, pertanto avrebbe  $3n$  gradi di libertà.

Per il corpo rigido, la rigidità delle distanze mutue fra coppie di punti riduce i gradi di libertà a 6. Questo risultato può essere compreso anche intuitivamente. Immaginate di tenere fra le mani un qualunque oggetto solido: potete traslarlo nello spazio lungo le 3 direzioni cartesiane (avanti-indietro lungo  $\hat{x}$ , destra-sinistra lungo  $\hat{y}$ , alto-basso lungo  $\hat{z}$ ), e questi sono 3

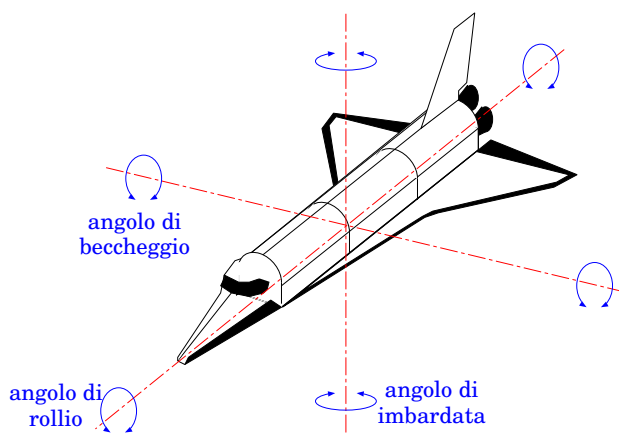


Figura 19.1: Angoli di assetto di un veicolo: rollio, beccheggio, imbardata.

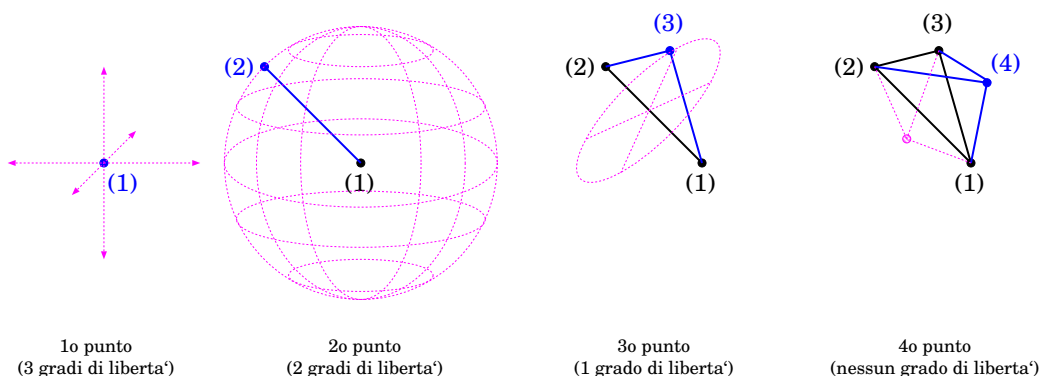


Figura 19.2: Calcolo dei gradi di liberta' di un sistema rigido di punti.

gradi di liberta'. Potete inoltre orientarlo in diversi modi, ruotandolo intorno a ciascuno dei tre assi  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$ , e quindi servono 3 angoli, dunque altri 3 gradi di liberta'. Per esempio, l'assetto di un velivolo e' descritto dagli angoli di rollio, beccheggio, e imbardata (vd Fig. 19.1).

Vediamo ora piu' nel dettaglio, come i vincoli delle distanze mutue fra coppie di punti fissino a 6 i gradi di liberta'. Ci aiutiamo con la Fig. 19.2.

- Consideriamo dapprima un singolo punto materiale, (1), del corpo rigido: esso puo' essere collocato arbitrariamente in una qualunque posizione spaziale  $(x_1, y_1, z_1)$ , pertanto ha 3 gradi di liberta'.
- Poi consideriamo un secondo punto, (2), posto in  $(x_2, y_2, z_2)$ . Questa



posizione non è del tutto arbitraria, perché la distanza

$$r_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

fra i due punti è fissata, pertanto pone un vincolo. Quindi, il secondo punto ha solo 2 gradi di libertà: infatti può solo stare su una superficie sferica centrata in  $(x_1, y_1, z_1)$  e di raggio  $r_{12}$  <sup>[1]</sup>.

- Ora consideriamo un terzo punto, (3), posto in  $(x_3, y_3, z_3)$ . Esso deve sottostare a 2 vincoli:

$$r_{13} = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2}$$

$$r_{23} = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2}$$

con  $r_{13}$ ,  $r_{23}$  fissati. Pertanto possiede solo 1 grado di libertà: infatti può solo stare su una circonferenza che ha asse passante per i primi due punti, e di raggio fissato dalle distanze  $r_{13}$ ,  $r_{23}$ .

- Infine, consideriamo un generico punto ( $k$ ), oltre ai 3 già introdotti. Esso ha 3 coordinate  $(x_k, y_k, z_k)$  che devono soddisfare (almeno) 3 vincoli, dati dalle distanze  $r_{1k}$ ,  $r_{2k}$ ,  $r_{3k}$ . Pertanto, non ha gradi di libertà <sup>[2]</sup>.

Riassumendo: abbiamo contato 3 gradi di libertà per il 1° punto, 2 gradi di libertà per il 2° punto, 1 grado di libertà per il 3° punto, e nessun grado di libertà per tutti gli altri. *Totale: 6 gradi di libertà.*

### 19.1.2 Movimenti di un corpo rigido

In generale, si cerca di determinare la dinamica di un corpo rigido in un SR (con buona approssimazione) inerziale,  $(O; x, y, z)$ , detto “sistema del laboratorio”, SRLAB.

Per quanto detto finora, il movimento di un corpo rigido nello spazio deve essere descrivibile come una composizione di una traslazione e di una rotazione, come in Fig. 19.3.

<sup>1</sup> Una posizione su una sfera può essere descritta da due sole coordinate indipendenti, per esempio gli angoli polare e azimuthale  $\theta$ ,  $\phi$ .

<sup>2</sup> Dalla figura, si nota che per il 4° punto esiste ancora un’ambiguità “speculare”: essa però, una volta stabilita, non può essere alterata con un movimento continuo: quindi non si conta come grado di libertà.

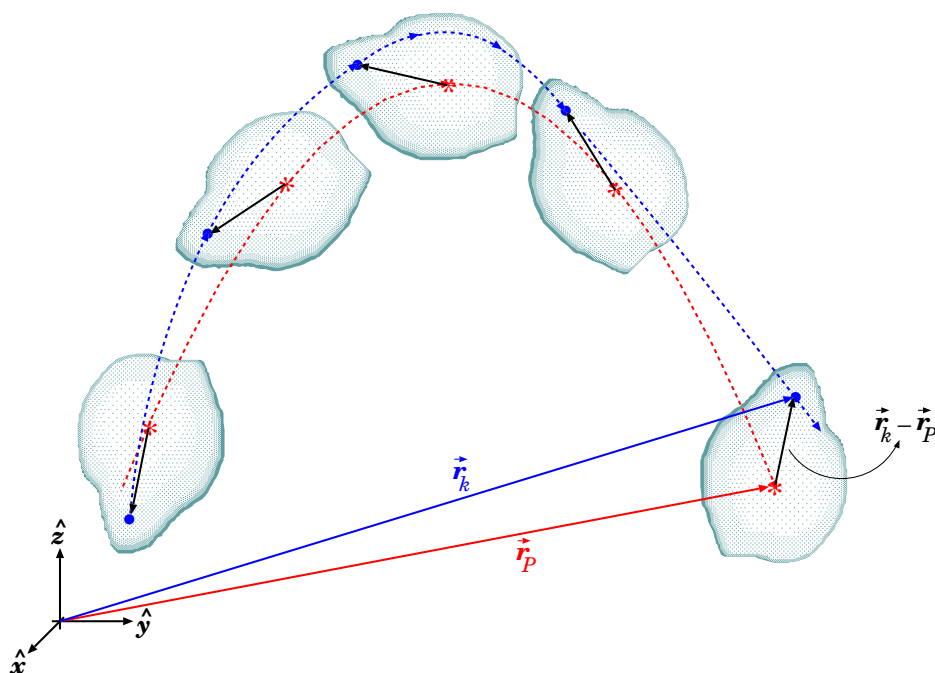


Figura 19.3: Movimento di un corpo rigido, composto dalla traslazione di un punto  $P$  (il “polo”) e dalla rotazione intorno ad esso degli altri punti.

Si può scegliere un punto  $P$  del corpo — non importa quale, per ora — detto *polo*, e parametrizzare il suo moto con il suo raggio vettore  $\vec{r}_P$  e la sua velocità:

$$\vec{r}_P(t) \quad ; \quad \vec{v}_P \equiv \frac{d\vec{r}_P}{dt} \quad (19.1)$$

Tutti gli altri punti  $k$  del corpo ruotano intorno a  $P$  con una velocità angolare  $\vec{\omega}$  comune — che in generale può cambiare nel tempo, sia in direzione che in modulo, anche in maniera molto complicata! Tuttavia, in un dato istante, il vettore-posizione  $(\vec{r}_k - \vec{r}_P)$ , che collega  $P$  a  $k$ , ruota attorno all’asse  $\vec{\omega}$  con velocità angolare  $\omega$ , quindi, dalla Sezione 7.6.4, Eq. (7.44), sappiamo che la sua evoluzione è

$$\frac{d}{dt} (\vec{r}_k - \vec{r}_P) = \vec{\omega} \times (\vec{r}_k - \vec{r}_P)$$

ovvero

$$\vec{v}_k = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times (\vec{r}_k - \vec{r}_P) \quad (19.2)$$

La scelta di  $P$  è del tutto arbitraria: come si modifica l’Eq. (19.2) se uno sceglie un diverso punto di riferimento,  $Q$ ?

Anche il punto  $Q$  deve soddisfare un'equazione analoga all'Eq. (19.2):

$$\vec{v}_Q = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_P)$$

Sottraendo questa equazione all'Eq. (19.2) si trova

$$\vec{v}_k - \vec{v}_Q = \vec{\omega} \times (\vec{r}_k - \vec{r}_Q)$$

che è equivalente all'Eq. (19.2), ma vista da  $Q$ .

Abbiamo trovato un risultato interessante: *un cambiamento di polo non modifica la velocità angolare  $\vec{\omega}$* : ovvero il vettore velocità angolare è indipendente dal polo  $P$  di riferimento.

### 19.1.3 Scelta del polo

La scelta più conveniente del punto  $P$  di riferimento dipende dal caso che si vuole studiare. Vediamo alcuni casi tipici:

- *rotazione intorno ad un asse fisso*:  
 $P$  viene scelto sull'asse di rotazione;
- *rotazione intorno ad un punto fisso*:  
 $P$  viene scelto coincidente con il punto fisso;
- *puro rotolamento*: il corpo rigido rotola, senza strisciare, su una superficie solida ferma, pertanto ha istantaneamente sempre (almeno) un punto di contatto istantaneamente fermo;  
 $P$  viene scelto coincidente con il punto di contatto.

La caratteristica comune di tutti questi casi è che  $P$  è fermo. Nel caso del rotolamento, il punto di contatto cambia da un istante all'altro, ma è sempre istantaneamente fermo. In ogni caso,  $\vec{v}_P = 0$ . In questi casi si sceglie un SRLAB  $(O; x, y, z)$  con l'origine  $O \equiv P$ . La velocità del generico punto, Eq. (19.2), si riduce semplicemente a:

$$\vec{v}_k = \vec{\omega} \times \vec{r}_k \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{asse fisso} \\ \text{punto fisso} \\ \text{puro rotolamento} \end{array} \right. \quad (19.3)$$

Vi è poi un quarto caso notevole:

- *corpo rigido non vincolato*:  
nessun punto del corpo è fissato;  
in questo caso si sceglie  $P$  coincidente con il centro di massa.

Come per qualunque sistema di punti materiali, la posizione del centro di massa si può calcolare come:

$$\vec{\mathbf{r}}_{cm} = \frac{\sum_k m_k \vec{\mathbf{r}}_k}{\sum_k m_k} \quad (19.4)$$

La scelta del polo coincidente con il centro di massa è motivata dalla sua equazione del moto, più semplice di ogni altro punto:

$$m \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}_{cm}}{dt^2} = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i^{(est)} \quad (19.5)$$

Nel SRCM, con assi paralleli al SRLAB e origine nel centro di massa, la velocità di ciascun punto è data da:

$$\vec{\mathbf{v}}_k^* = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}_k^* \quad (\text{nel SRCM}) \quad (19.6)$$

La caratteristica comune delle Eq. (19.3) e Eq. (19.6) è che la velocità di ciascun punto del corpo è esprimibile mediante una velocità angolare  $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ , collettiva, e il vettore-posizione del punto rispetto al polo.

### 19.1.4 Sistema di riferimento “solidale”

È utile introdurre un terzo SR ( $O'; x', y', z'$ ), in cui i 3 versori cartesiani  $\hat{\mathbf{x}}', \hat{\mathbf{y}}', \hat{\mathbf{z}}'$  sono solidali con il corpo. Chiamiamo questo sistema SRSOL.

Ogni punto  $k$ -esimo del corpo è quindi individuato da 3 coordinate cartesiane ( $x'_k, y'_k, z'_k$ ) rispetto agli assi solidali. Qualunque sia il movimento del corpo rigido, le coordinate ( $x'_k, y'_k, z'_k$ ) non cambiano. Il SRSOL è quindi il SR più adatto a descrivere la forma e la distribuzione di massa del corpo rigido.

L'orientamento del corpo rigido è completamente definito dall'orientamento degli assi solidali  $\hat{\mathbf{x}}', \hat{\mathbf{y}}', \hat{\mathbf{z}}'$  [3],

---

<sup>3</sup> Come si può scegliere tale orientamento? L'asse  $\hat{\mathbf{x}}'$  è definito da 2 coordinate angolari (per esempio gli angoli polare e azimuthale,  $\theta_{x'}$ ,  $\phi_{x'}$ , definiti rispetto ad un asse polare esterno,  $\hat{\mathbf{z}}$ ). Fissato l'asse  $\hat{\mathbf{x}}'$ , l'asse  $\hat{\mathbf{y}}'$  deve giacere sul piano ortogonale a  $\hat{\mathbf{x}}'$ , quindi la sua direzione è definita da un solo angolo (l'angolo azimuthale  $\phi_{y'}$ , definito rispetto all'asse polare  $\hat{\mathbf{x}}'$ ). A questo punto, l'asse  $\hat{\mathbf{z}}'$  è automaticamente fissato — si pensi alla relazione  $\hat{\mathbf{z}}' = \hat{\mathbf{x}}' \times \hat{\mathbf{y}}'$ , valida per qualunque sistema di assi cartesiani.

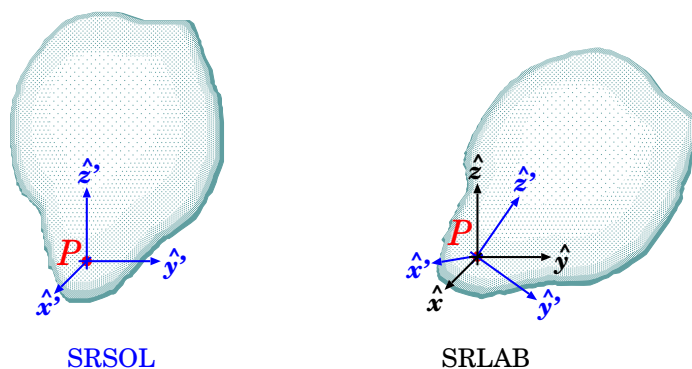


Figura 19.4: I sistemi di riferimento SRSOL, SRLAB utilizzati per un corpo rigido vincolato, ovvero con un punto fisso  $P$ .

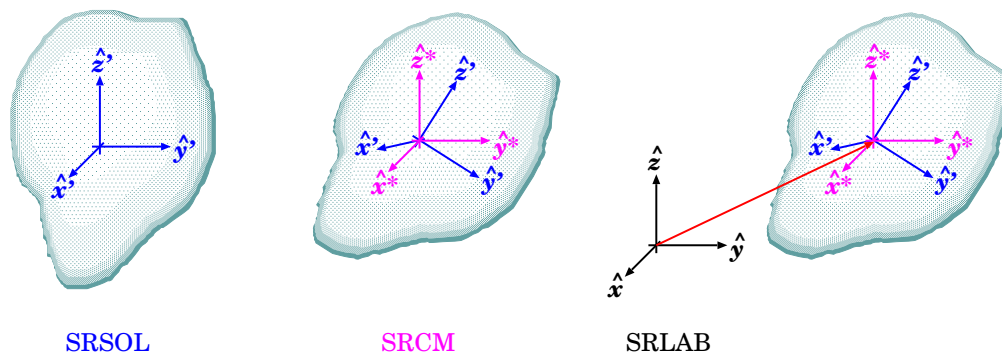


Figura 19.5: I sistemi di riferimento SRSOL, SRCM, SRLAB utilizzati per un corpo rigido non vincolato.

che ruotano insieme ad esso. Se il corpo rigido ruota con velocità angolare  $\vec{\omega}$ , gli assi solidali  $\hat{x}'$ ,  $\hat{y}'$ ,  $\hat{z}'$  evolvono secondo le equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}'}{dt} &= \vec{\omega} \times \hat{x}' \\ \frac{d\hat{y}'}{dt} &= \vec{\omega} \times \hat{y}' \\ \frac{d\hat{z}'}{dt} &= \vec{\omega} \times \hat{z}' \end{aligned} \tag{19.7}$$

(vd Eq. (16.24), Sezione 16.5).

Se il corpo rigido ha un punto fisso  $P$ , le origini  $O$  e  $O'$  del SRLAB e del SRSOL vengono scelte coincidenti con  $P$ , come in Fig. 19.4.

Se invece il corpo è libero di muoversi, allora l'origine del SRSOL viene scelta nel centro di massa, quindi coincidente con l'origine del SRCM. La situazione è quella di Fig. 19.5.

## 19.2 Dinamica del corpo rigido

### 19.2.1 Quantità dinamiche, equazioni cardinali

Come fatto per un qualunque sistema di punti materiali (vd Capitolo 17), si possono definire tutte le quantità dinamiche. Per comodità, le riportiamo qui:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{p}} &= \sum_k \vec{\mathbf{p}}_k && \text{(quantità di moto totale)} \\ \vec{\mathbf{L}} &= \sum_k \vec{\mathbf{r}}_k \times \vec{\mathbf{p}}_k && \text{(momento angolare totale)}\end{aligned}\tag{19.8}$$

Le quantità  $\vec{\mathbf{p}}$ ,  $\vec{\mathbf{L}}$  evolvono nel tempo secondo le *equazioni cardinali*:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} &= \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i^{(est)} \\ \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} &= \vec{\mathbf{M}} \equiv \sum_i \vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{F}}_i^{(est)}\end{aligned}\tag{19.9}$$

Le equazioni cardinali sono 2 equazioni vettoriali, ciascuna con 3 componenti cartesiane, pertanto stabiliscono 6 leggi del moto: tante quante i gradi di libertà del corpo rigido. Quindi devono essere sufficienti a fornire tutto l'occorrente per analizzare e risolvere il moto.

### 19.2.2 Forza equivalente

In generale su un corpo rigido possono agire diverse forze esterne,  $\vec{\mathbf{F}}_k^{(est)}$ , applicate ciascuna in un "punto di applicazione"  $\vec{\mathbf{r}}_k$ , che danno:

$$\vec{\mathbf{F}}_{tot} = \sum_k \vec{\mathbf{F}}_k^{(est)} \quad ; \quad \vec{\mathbf{M}}_{tot} = \sum_k \vec{\mathbf{r}}_k \times \vec{\mathbf{F}}_k^{(est)}$$

È possibile trovare una forza *equivalente*  $\vec{\mathbf{F}}^{(equiv)}$  che, applicata in un preciso punto  $\vec{\mathbf{r}}^{(equiv)}$ , dia lo stesso effetto del sistema di forze  $\{\vec{\mathbf{F}}_k^{(est)}\}$ ? Poiché le equazioni cardinali coinvolgono  $\vec{\mathbf{F}}_{tot}$ ,  $\vec{\mathbf{M}}_{tot}$ , occorre che la forza equivalente

produca la stessa forza totale e lo stesso momento torcente totale, ovvero:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{F}}^{(equiv)} &= \vec{\mathbf{F}}_{tot} = \sum_k \vec{\mathbf{F}}_k^{(est)} \\ \vec{\mathbf{r}}^{(equiv)} \times \vec{\mathbf{F}}^{(equiv)} &= \vec{\mathbf{M}}_{tot} = \sum_k \vec{\mathbf{r}}_k \times \vec{\mathbf{F}}_k^{(est)}\end{aligned}$$

La prima equazione è ovvia: occorre però trovare il punto  $\vec{\mathbf{r}}^{(equiv)}$  dove applicare  $\vec{\mathbf{F}}^{(equiv)}$ . Osserviamo subito che se  $\vec{\mathbf{F}}^{(equiv)} = 0$  e  $\vec{\mathbf{M}}_{tot} \neq 0$  il problema non ammette soluzione!

Quindi concentriamoci sul caso  $\vec{\mathbf{F}}^{(equiv)} \neq 0$ . Moltiplicando la 2<sup>a</sup> equazione per  $\vec{\mathbf{F}}_{tot} \times \dots$  a sinistra, troviamo:

$$\vec{\mathbf{F}}_{tot} \times \vec{\mathbf{M}}_{tot} = \vec{\mathbf{F}}_{tot} \times \left( \vec{\mathbf{r}}^{(equiv)} \times \vec{\mathbf{F}}_{tot} \right)$$

Ora scomponiamo  $\vec{\mathbf{r}}^{(equiv)}$  in due componenti: una parallela a  $\vec{\mathbf{F}}_{tot}$  e una perpendicolare:

$$\vec{\mathbf{r}}^{(equiv)} = \vec{\mathbf{r}}_{\parallel}^{(equiv)} + \vec{\mathbf{r}}_{\perp}^{(equiv)}$$

Poiché  $\vec{\mathbf{r}}^{(equiv)}$  compare solo in  $\vec{\mathbf{r}}^{(equiv)} \times \vec{\mathbf{F}}_{tot}$ , è chiaro che non potremo mai dire niente sulla componente  $\vec{\mathbf{r}}_{\parallel}^{(equiv)}$  — il che è sensato: per produrre un momento torcente conta solo il braccio,  $\vec{\mathbf{r}}_{\perp}^{(equiv)}$ . Quindi:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{F}}_{tot} \times \vec{\mathbf{M}}_{tot} &= \vec{\mathbf{F}}_{tot} \times \left( \vec{\mathbf{r}}_{\perp}^{(equiv)} \times \vec{\mathbf{F}}_{tot} \right) \\ &= \vec{\mathbf{r}}_{\perp}^{(equiv)} \cdot \left| \vec{\mathbf{F}}_{tot} \right|^2 - \vec{\mathbf{F}}_{tot} \left( \vec{\mathbf{F}}_{tot} \cdot \vec{\mathbf{r}}_{\perp}^{(equiv)} \right) \\ &= \vec{\mathbf{r}}_{\perp}^{(equiv)} \cdot \left| \vec{\mathbf{F}}_{tot} \right|^2 \\ \vec{\mathbf{r}}_{\perp}^{(equiv)} &= \frac{\vec{\mathbf{F}}_{tot} \times \vec{\mathbf{M}}_{tot}}{\left| \vec{\mathbf{F}}_{tot} \right|^2}\end{aligned}$$

### 19.2.3 Condizioni di equilibrio statico

Analogamente a quanto fatto nella dinamica del punto materiale — Sezione 8.4.3 — si definisce la condizione di *equilibrio statico* per un corpo rigido come la situazione per cui un corpo rigido, che si trova in quiete in un dato istante, mantiene la sua condizione di quiete.

Per il corpo rigido, la condizione di quiete equivale alle due condizioni  $\vec{\mathbf{p}} = 0$  e  $\vec{\mathbf{L}} = 0$ . Affinché queste condizioni si mantengano nel tempo, dalle equazioni cardinali, Eq. (19.9) deve essere:

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{F}_i^{(est)} &= 0 \\ \vec{M} \equiv \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(est)} &= 0 \end{aligned} \quad (19.10)$$

Anche qui, notiamo che non è necessario che il corpo rigido sia isolato, ovvero, non è necessario che ciascuna forza esterna  $\vec{F}_i^{(est)}$  sia nulla: l'importante è che siano nulle la risultante delle forze esterne e la risultante dei momenti torcenti esterni.

#### 19.2.4 Quantità dinamiche nel SRCM

Ricordiamo (vd Sezione 17.5.3) che le quantità dinamiche nel SRLAB e nel SRCM sono legate dalle equazioni:

$$\begin{aligned} \vec{p} &= m\vec{v}_{cm} \\ \vec{L} &= \vec{r}_{cm} \times \vec{p} + \vec{L}^* \end{aligned} \quad (19.11)$$

Nel SRCM, il momento angolare prende la forma:

$$\vec{L}^* = \sum_k \vec{r}_k^* \times \vec{p}_k^* \quad (19.12)$$

ed evolve secondo l'equazione:

$$\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \vec{M}^* \equiv \sum_i \vec{r}_i^* \times \vec{F}_i^{(est)} \quad (19.13)$$

#### 19.2.5 Energia cinetica

L'energia cinetica del corpo rigido è:

$$\mathcal{E} = \sum_k \frac{m_k}{2} v_k^2 \quad (\text{energia cinetica totale}) \quad (19.14)$$



La sua equazione di evoluzione sarebbe  $d\mathcal{E} = \delta\mathcal{W}^{(est)} + \delta\mathcal{W}^{(int)}$ , ma abbiamo visto che per sistemi rigidi

$$\delta\mathcal{W}^{(int)} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{\mathbf{F}}_{ij} \cdot d(\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_j) = 0$$

— vd Eq. (17.21), Sezione 17.3.1. Quindi

$$d\mathcal{E} = \delta\mathcal{W}^{(est)} \equiv \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i^{(est)} \cdot d\vec{\mathbf{r}}_i \quad (19.15)$$

Nel caso di corpo rigido vincolato, con un punto  $P$  fermo, o istantaneamente fermo, scelto come origine,  $\vec{\mathbf{v}}_k = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}_k$ . Sfruttando l'identità vettoriale Eq. (6.15) (b),  $\vec{\mathbf{A}} \cdot (\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{C}}) = \vec{\mathbf{B}} \cdot (\vec{\mathbf{C}} \times \vec{\mathbf{A}})$ , troviamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \sum_k \frac{m_k}{2} v_k^2 = \sum_k \frac{m_k}{2} \vec{\mathbf{v}}_k \cdot (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}_k) \\ &= \sum_k \frac{m_k}{2} \vec{\boldsymbol{\omega}} \cdot (\vec{\mathbf{r}}_k \times \vec{\mathbf{v}}_k) = \frac{\vec{\boldsymbol{\omega}}}{2} \cdot \sum_k m_k \vec{\mathbf{r}}_k \times \vec{\mathbf{v}}_k \end{aligned}$$

Ovvero

$$\mathcal{E} = \frac{\vec{\boldsymbol{\omega}} \cdot \vec{\mathbf{L}}}{2} \quad (\text{polo vincolato}) \quad (19.16)$$

Nel SRCM l'energia cinetica è:

$$\mathcal{E}^* = \sum_k \frac{m_k}{2} (v_k^*)^2 \quad (19.17)$$

ed evolve secondo:

$$d\mathcal{E}^* = \delta\mathcal{W}^{*(est)} \equiv \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i^{*(est)} \cdot d\vec{\mathbf{r}}_i^* \quad (19.18)$$

L'energia cinetica nel SRLAB è legata a quella nel SRCM da:

$$\mathcal{E} = \frac{m}{2} v_{cm}^2 + \mathcal{E}^* \quad (19.19)$$

Nel caso di corpo rigido non vincolato, si sceglie il polo nel centro di massa, e con ragionamento analogo si trova

$$\mathcal{E}^* = \frac{\vec{\boldsymbol{\omega}} \cdot \vec{\mathbf{L}}^*}{2} \quad (\text{nel SRCM}) \quad (19.20)$$

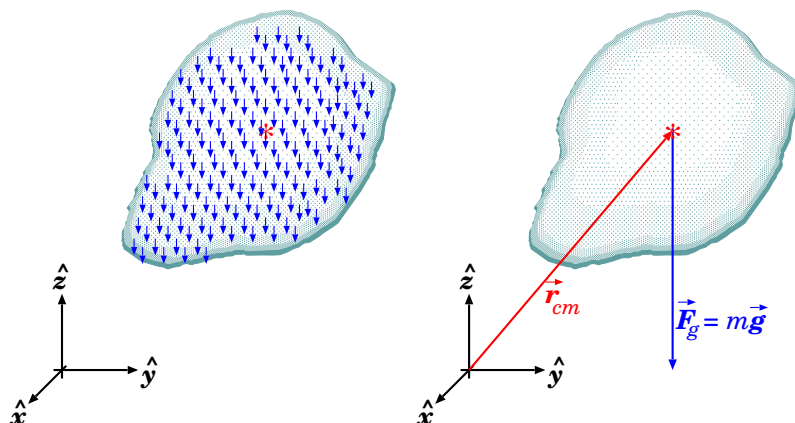


Figura 19.6: Forza-peso agente su un corpo rigido: a sinistra,  $\vec{F}_{g,k} = m_k \vec{g}$  agenti su ciascun punto  $k$ ; a destra, la forza equivalente  $\vec{F}_{g,tot} = m \vec{g}$  applicata al centro di massa.

In entrambi i casi, l'energia cinetica può essere espressa in funzione del momento angolare, quindi non è una variabile dinamica indipendente.

### 19.2.6 Effetti della forza-peso

Un caso interessante si ha quando tra le forze esterne c'è la forza-peso — vd Fig. 19.6:

$$\vec{F}_{g,k}^{(est)} = m_k \vec{g} \quad (\vec{g} = -g \hat{z} \text{ uniforme}) \quad (19.21)$$

In tal caso la risultante delle forze esterne è

$$\vec{F}_{g,tot}^{(est)} = \sum_k \vec{F}_{g,k}^{(est)} = m \vec{g} \quad (19.22)$$

La forza-peso è conservativa: per un punto materiale di massa  $m$  possiamo considerare un'energia potenziale gravitazionale  $\mathcal{U}_g = mgz$ . Un risultato simile si può ottenere per un corpo rigido. Ogni punto, nella posizione  $\vec{r}_k = (x_k, y_k, z_k)$ , ha un'energia potenziale  $\mathcal{U}_{g,k} = m_k g z_k$ . L'energia potenziale totale del corpo rigido è:

$$\mathcal{U}_{g,tot} = \sum_k \mathcal{U}_{g,k} = \left( \sum_k m_k z_k \right) \cdot g$$

Ora però la coordinata- $z$  del centro di massa è  $z_{cm} = \frac{\sum_k m_k z_k}{\sum_k m_k} = \frac{\sum_k m_k z_k}{m}$ , quindi

$$\mathcal{U}_{g,tot} = m g z_{cm} \quad (19.23)$$

ovvero, l'energia potenziale della forza-peso applicata ad un corpo rigido è pari a quella che avrebbe un punto materiale di uguale massa, posto nel suo centro di massa.

Il momento torcente totale della forza-peso è:

$$\begin{aligned} \vec{M}_g &= \sum_k \vec{r}_k \times \vec{F}_{g,k}^{(est)} = \left( \sum_k m_k \vec{r}_k \right) \times \vec{g} \\ &= m \vec{r}_{cm} \times \vec{g} = \vec{r}_{cm} \times \vec{F}_{g,tot}^{(est)} \end{aligned}$$

ovvero

$$\vec{M}_g = \vec{r}_{cm} \times \vec{F}_{g,tot}^{(est)} \quad (19.24)$$

Questo risultato è notevole: il momento torcente della forza-peso sul corpo rigido si può calcolare come se il corpo fosse un punto materiale, con tutta la sua massa  $m$  concentrata nel centro di massa.

Inoltre, nel SRCM, il momento torcente della forza-peso è nullo:

$$\begin{aligned} \vec{M}_g^* &= \sum_k \vec{r}_k^* \times (m_k \vec{g}) = \underbrace{\left( \sum_k m_k \vec{r}_k^* \right)}_{=0} \times \vec{g} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Abbiamo quindi trovato questi risultati notevoli: se un corpo rigido è soggetto ad un campo gravitazionale uniforme,  $\vec{g} = -g\hat{z}$ , la sua dinamica è completamente separabile in due dinamiche “disaccoppiate”, o indipendenti:

- quella traslatoria, di un punto materiale di pari massa che si trovi nel suo centro di massa, a cui viene applicata la risultante di tutte le forze-peso applicate ai singoli punti del corpo rigido;
- quella rotatoria, caratterizzata da un momento angolare intrinseco  $\vec{L}^*$  costante.

### 19.3 Rotazione e momento angolare

Il momento angolare  $\vec{L}$  di un corpo rigido è associato alla sua rotazione, quindi a  $\vec{\omega}$ , però i due vettori hanno significati diversi:

- $\vec{\omega}$  descrive allo stesso tempo la velocità di rotazione ( $\omega \equiv |\vec{\omega}|$ ) e l'orientamento dell'asse di rotazione — che può essere fisso, oppure cambiare da un istante all'altro, dipende dalle condizioni;
- $\vec{L}$  è una quantità dinamica di cui conosciamo la legge di evoluzione:  

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.$$

Partiamo dalla definizione,  $\vec{L} = \sum_k \vec{r}_k \times \vec{p}_k = \sum_k m_k \vec{r}_k \times \vec{v}_k$ . Nel caso di polo fisso  $\vec{v}_k = \vec{\omega} \times \vec{r}_k$ ; invece nel caso di corpo non vincolato usiamo il centro di massa come polo, cosicché  $\vec{v}_k^* = \vec{\omega} \times \vec{r}_k^*$ . In ciascuno dei due casi si trova:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_k m_k \vec{r}_k \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_k) && \text{(polo fisso)} \\ \vec{L}^* &= \sum_k m_k \vec{r}_k^* \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_k^*) && \text{(nel SRCM)} \end{aligned} \quad (19.25)$$

Abbiamo quindi evidenziato che in entrambi i casi esiste una relazione lineare fra  $\vec{L}$  e  $\vec{\omega}$  <sup>[4]</sup>, ma non è una banale proporzione:

$$\vec{L} \stackrel{?}{=} I \cdot \vec{\omega} \quad \text{(SBAGLIATO!)}$$

Per esempio, in generale,  $\vec{L}$  e  $\vec{\omega}$  hanno direzioni diverse! (Riprenderemo questo discorso alla fine della Sezione 19.3.1.)

#### 19.3.1 I momenti di inerzia

Riprendiamo l'Eq. (19.25): per semplicità consideriamo il caso di polo vincolato (dunque senza asterischi) — ma il discorso nel SRCM sarebbe identico:

$$\vec{L} = \sum_k m_k \vec{r}_k \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_k)$$

<sup>4</sup> L'Eq. (19.25) costituisce una relazione  $\vec{\omega} \rightarrow \vec{L}$ , dove  $\rightarrow$  significa che, per il corpo rigido in questione, per ogni valore di  $\vec{\omega}$  possiamo calcolare il corrispondente valore di  $\vec{L}$ . Per relazione lineare si intende che se  $\vec{\omega}_1 \rightarrow \vec{L}_1$  e  $\vec{\omega}_2 \rightarrow \vec{L}_2$ , allora  $(a_1 \vec{\omega}_1 + a_2 \vec{\omega}_2) \rightarrow (a_1 \vec{L}_1 + a_2 \vec{L}_2)$  per qualunque coppia di coefficienti  $a_1, a_2$ .

ed elaboriamo il doppio prodotto vettoriale, ricordando l'identità Eq. (6.15) (c),  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ :

$$\vec{r}_k \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_k) = \vec{\omega} (\vec{r}_k \cdot \vec{r}_k) - \vec{r}_k (\vec{r}_k \cdot \vec{\omega})$$

Ora conviene separare le 3 componenti cartesiane:

$$\begin{aligned} [\vec{r}_k \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_k)]_x &= \omega_x(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) - x_k(\omega_x x_k + \omega_y y_k + \omega_z z_k) \\ &= \omega_x(y_k^2 + z_k^2) - \omega_y(x_k y_k) - \omega_z(x_k z_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\vec{r}_k \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_k)]_y &= \omega_y(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) - y_k(\omega_x x_k + \omega_y y_k + \omega_z z_k) \\ &= \omega_y(x_k^2 + z_k^2) - \omega_x(x_k y_k) - \omega_z(y_k z_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\vec{r}_k \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_k)]_z &= \omega_z(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) - z_k(\omega_x x_k + \omega_y y_k + \omega_z z_k) \\ &= \omega_z(x_k^2 + y_k^2) - \omega_x(x_k z_k) - \omega_y(y_k z_k) \end{aligned}$$

Quindi, il momento angolare per componenti cartesiane è:

$$\begin{aligned} L_x &= + \left[ \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) \right] \omega_x - \left[ \sum_i m_i x_i y_i \right] \omega_y - \left[ \sum_i m_i x_i z_i \right] \omega_z \\ L_y &= - \left[ \sum_i m_i x_i y_i \right] \omega_x + \left[ \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) \right] \omega_y - \left[ \sum_i m_i y_i z_i \right] \omega_z \\ L_z &= - \left[ \sum_i m_i x_i z_i \right] \omega_x - \left[ \sum_i m_i y_i z_i \right] \omega_y + \left[ \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \right] \omega_z \end{aligned} \quad (19.26)$$

Abbiamo quindi visto che le componenti  $L_x$ ,  $L_y$ ,  $L_z$  sono tutte combinazioni lineari di  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ . Riscriviamo le Eq. (19.26) in maniera più compatta:

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ L_y &= I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ L_z &= I_{xz}\omega_x + I_{yz}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{aligned} \quad (19.27)$$

I coefficienti  $I$  si chiamano *momenti di inerzia* <sup>[5]</sup>, si distinguono in momenti diagonali e non-diagonali, e valgono

$$\begin{array}{ll}
 \text{diagonali} & \text{non-diagonali} \\
 I_{xx} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & I_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i \\
 I_{yy} = \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) & I_{xz} = -\sum_i m_i x_i z_i \\
 I_{zz} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) & I_{yz} = -\sum_i m_i y_i z_i
 \end{array} \quad (19.28)$$

Dall'Eq. (19.27) si nota subito che  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{L}$  in generale *non sono paralleli*. Infatti, possiamo orientare  $\hat{z}$  come l'asse di rotazione (in un dato istante), cosicch   $\omega_x = \omega_y = 0$ . Per   $\vec{L}$  ha componenti anche lungo  $x, y$ , precisamente  $L_x = I_{xz}\omega_z$  e  $L_y = I_{yz}\omega_z$ . Questo rende lo studio del moto in generale molto complicato, e ha diverse implicazioni, fra le quali:

- se il momento torcente esterno   nullo,  $\vec{L}$    costante e mantiene sempre lo stesso orientamento: quindi l'asse di rotazione, identificato dall'orientamento di  $\vec{\omega}$ , deve necessariamente cambiare nel tempo;
- viceversa, se il corpo rigido   vincolato a ruotare intorno ad un asse fisso, in generale  $\vec{L}$  deve continuamente cambiare orientamento, il che vuol dire che il vincolo che fissa l'asse deve applicare un momento torcente.

### Il tensore di inerzia

Per chi   familiare con l'algebra delle matrici, si vede che le Eq. (19.26) possono essere scritte in forma pi  compatta come:

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \underbrace{\left[ \sum_k m_k \begin{pmatrix} (y_k)^2 + (z_k)^2 & -x_k y_k & -x_k z_k \\ -x_k z_k & (x_k)^2 + (z_k)^2 & -y_k z_k \\ -x_k z_k & -y_k z_k & (x_k)^2 + (y_k)^2 \end{pmatrix} \right]}_{\mathbb{I}} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

La quantit   $\mathbb{I}$  che compare in forma di matrice  $3 \times 3$    un tensore, e si chiama tensore di inerzia. Quindi la relazione fra  $\vec{L}$  e  $\vec{\omega}$  si scrive:

<sup>5</sup> ... o anche *coefficienti inerziali*

$$\vec{L} = \mathbb{I} \cdot \vec{\omega}$$

$$\mathbb{I} = \left[ \sum_k m_k \begin{pmatrix} (y_k)^2 + (z_k)^2 & -x_k y_k & -x_k z_k \\ -x_k z_k & (x_k)^2 + (z_k)^2 & -y_k z_k \\ -x_k z_k & -y_k z_k & (x_k)^2 + (y_k)^2 \end{pmatrix} \right] \quad (19.29)$$

---

### Disuguaglianze triangolari per i momenti diagonali

---

*I momenti di inerzia diagonali devono soddisfare le seguenti disuguaglianze:*

$$\begin{aligned} 0 &\leq I_{xx} \leq I_{yy} + I_{zz} \\ 0 &\leq I_{yy} \leq I_{xx} + I_{zz} \\ 0 &\leq I_{zz} \leq I_{xx} + I_{yy} \end{aligned} \quad (19.30)$$

*Consideriamo per esempio la terza:  $I_{zz} \geq 0$  è ovvio. Ora guardiamo le Eq. (19.28), per  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$ :*

$$\begin{aligned} I_{xx} + I_{yy} &= \sum_i m_i (y_i^2 + x_i^2 + 2z_i^2) = \sum_i m_i (y_i^2 + x_i^2) + 2 \sum_i m_i z_i^2 \\ &= I_{zz} + 2 \sum_i m_i z_i^2 \geq I_{zz} \end{aligned}$$

### 19.3.2 Momenti di inerzia nel SRCM

Ricordate i teoremi di König, che collegano momento angolare e energia cinetica fra SRLAB e SRCM?

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{L}^* + \vec{r}_{cm} \times \vec{p} \\ \mathcal{E} &= \mathcal{E}^* + \frac{m}{2} v_{cm}^2 \end{aligned}$$

Anche per i momenti di inerzia esistono equazioni che mettono in relazione

SRLAB e SRCM. Ricordiamo che

$$\begin{aligned} \vec{r}_i = \vec{r}_i^* + \vec{r}_{cm} &\implies \begin{cases} x_i = x_i^* + x_{cm} \\ y_i = y_i^* + y_{cm} \\ z_i = z_i^* + z_{cm} \end{cases} \\ \sum_i m_i \vec{r}_i^* = 0 &\implies \begin{cases} \sum_i m_i x_i^* = 0 \\ \sum_i m_i y_i^* = 0 \\ \sum_i m_i z_i^* = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ora calcoliamo i momenti di inerzia — Eq. (19.28) — rispetto alle coordinate del SRCM. Per i momenti diagonali occorrono termini del tipo:

$$\begin{aligned} \sum_i m_i x_i^2 &= \sum_i m_i (x_i^* + x_{cm})^2 = \sum_i m_i ((x_i^*)^2 + 2x_i^* x_{cm} + x_{cm}^2) \\ &= \sum_i m_i (x_i^*)^2 + \underbrace{2x_{cm} \sum_i m_i x_i^*}_{=0} + m x_{cm}^2 \end{aligned}$$

(e analoghi per  $y$ ,  $z$  al posto di  $x$ ), mentre per i momenti non-diagonali abbiamo termini del tipo:

$$\begin{aligned} \sum_i m_i x_i y_i &= \sum_i m_i (x_i^* + x_{cm})(y_i^* + y_{cm}) \\ &= \sum_i m_i (x_i^* y_i^* + x_i^* y_{cm} + y_i^* x_{cm} + x_{cm} y_{cm}) \\ &= \sum_i m_i x_i^* y_i^* + \underbrace{y_{cm} \sum_i m_i x_i^*}_{=0} + \underbrace{x_{cm} \sum_i m_i y_i^*}_{=0} + m x_{cm} y_{cm} \end{aligned}$$

(e analogamente per i termini in  $xz$ ,  $yz$ ). Quindi possiamo ricavare una corrispondenza fra i momenti di inerzia nel SRLAB e nel SRCM:

diagonali	non-diagonali
$I_{xx} = I_{xx}^* + m (y_{cm}^2 + z_{cm}^2)$	$I_{xy} = I_{xy}^* - m x_{cm} y_{cm}$
$I_{yy} = I_{yy}^* + m (x_{cm}^2 + z_{cm}^2)$	$I_{xz} = I_{xz}^* - m x_{cm} z_{cm}$
$I_{zz} = I_{zz}^* + m (x_{cm}^2 + y_{cm}^2)$	$I_{yz} = I_{yz}^* - m y_{cm} z_{cm}$

Queste relazioni, fra i momenti di inerzia nel SRLAB e nel SRCM, sono note complessivamente come *teorema di Huygens-Steiner*.

Spesso è più agevole calcolare i momenti di inerzia nel SRCM, specialmente se il corpo presenta particolari simmetrie. Il vantaggio delle Eq. (19.31) è che consentono di calcolare poi i momenti di inerzia nel SRLAB.



### 19.3.3 Equazioni del moto nel SRLAB e nel SRSOL

Usando i momenti di inerzia, le equazioni del moto di un corpo rigido diventano:

$$\begin{aligned}
 M_x &= \frac{dL_x}{dt} = \frac{d}{dt} (I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z) \\
 M_y &= \frac{dL_y}{dt} = \frac{d}{dt} (I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z) \\
 M_z &= \frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt} (I_{xz}\omega_x + I_{yz}\omega_y + I_{zz}\omega_z)
 \end{aligned} \tag{19.32}$$

Si tratta di equazioni differenziali: note le componenti del momento torcente esterno,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ , esse *in linea di principio* possono essere integrate per ricavare  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ . La difficoltà è che i momenti di inerzia dipendono dalla disposizione spaziale  $\{(x_k, y_k, z_k)\}$  di tutti i punti del corpo rigido — vd Eq. (19.28) — e quindi non sono delle costanti: cambiano a loro volta nel tempo, a causa della rotazione del corpo. Il che rende il problema di difficoltà estrema, e analiticamente quasi insolubile, a meno di casi particolarissimi.

È qui che entra in gioco il SRSOL: in esso, tutti i punti del corpo rigido sono fissi, per cui i momenti di inerzia (che chiamiamo  $I'_{xx}$ ,  $I'_{yy}$ ,  $I'_{zz}$ ,  $I'_{xy}$ ,  $I'_{xz}$ ,  $I'_{yz}$ ) sono tutti costanti.

E c'è di più: con un orientamento opportuno degli assi  $\hat{x}'$ ,  $\hat{y}'$ ,  $\hat{z}'$ , i momenti di inerzia non-diagonali si annullano <sup>[6]</sup>:

$$I'_{xy} = 0 \quad ; \quad I'_{xz} = 0 \quad ; \quad I'_{yz} = 0$$

pertanto possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
 L'_x &= I'_{xx}\omega'_x \\
 L'_y &= I'_{yy}\omega'_y \\
 L'_z &= I'_{zz}\omega'_z
 \end{aligned} \tag{19.33}$$

Gli assi solidali  $\hat{x}'$ ,  $\hat{y}'$ ,  $\hat{z}'$  così scelti si chiamano *assi principali*. Se l'oggetto in questione ha assi di simmetria, essi sono assi principali. Se gli assi principali sono passanti per il centro di massa, essi si chiamano *assi centrali*.

Vale la pena fare un'osservazione:  $\omega'_x$ ,  $\omega'_y$ ,  $\omega'_z$  *NON sono le componenti della velocità angolare misurata nel SRSOL* — se così fosse, sarebbero nulle,

<sup>6</sup> La matrice  $\mathbb{I}$  è simmetrica, in qualunque SR. L'algebra lineare insegna che le matrici simmetriche, con una opportuna rotazione degli assi cartesiani, si trasformano in matrici diagonali.

poiché nel SRSOL il corpo non ruota! La velocità angolare  $\vec{\omega}$  è sempre riferita al SRLAB o al SRCM, e  $\omega'_x$ ,  $\omega'_y$ ,  $\omega'_z$  sono le sue componenti cartesiane rispetto agli assi principali  $\hat{x}'$ ,  $\hat{y}'$ ,  $\hat{z}'$ :

$$\vec{\omega} = \omega'_x \hat{x}' + \omega'_y \hat{y}' + \omega'_z \hat{z}'$$

Per studiare la rotazione del corpo rigido, occorre usare l'equazione dell'evoluzione di  $\vec{L}$ :

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Nel SRSOL, rotante rispetto al SRLAB, la derivata di  $\vec{L}$  appare come

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)' = \frac{dL'_x}{dt} \hat{x}' + \frac{dL'_y}{dt} \hat{y}' + \frac{dL'_z}{dt} \hat{z}'$$

Ricordando quanto ricavato nella Sezione 16.5.1, Eq. (16.25), a proposito delle derivate di vettori in SR rotanti:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)' + \vec{\omega} \times \vec{L}$$

Quindi,

$$\vec{M} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)' + \vec{\omega} \times \vec{L}$$

Separando per componenti cartesiane rispetto agli assi principali  $\hat{x}'$ ,  $\hat{y}'$ ,  $\hat{z}'$  si ottiene:

$$\begin{aligned} M'_x &= \frac{dL'_x}{dt} + \omega'_y L'_z - \omega'_z L'_y = I'_{xx} \frac{d\omega'_x}{dt} + (I'_{zz} - I'_{yy}) \omega'_y \omega'_z \\ M'_y &= \frac{dL'_y}{dt} + \omega'_z L'_x - \omega'_x L'_z = I'_{yy} \frac{d\omega'_y}{dt} + (I'_{xx} - I'_{zz}) \omega'_x \omega'_z \\ M'_z &= \frac{dL'_z}{dt} + \omega'_x L'_y - \omega'_y L'_x = I'_{zz} \frac{d\omega'_z}{dt} + (I'_{yy} - I'_{xx}) \omega'_x \omega'_y \end{aligned} \quad (19.34)$$

Queste equazioni sono note come *equazioni di Eulero*.

Il vantaggio è che i coefficienti  $I'_{xx}$ ,  $I'_{yy}$ ,  $I'_{zz}$  sono tutti costanti. La difficoltà (analitica) è che queste sono equazioni differenziali *non lineari*,

poiché le funzioni incognite,  $\omega'_x(t)$ ,  $\omega'_y(t)$ ,  $\omega'_z(t)$ , compaiono anche come prodotti. Inoltre, e soprattutto, le componenti cartesiane — sia  $\omega'_x$ ,  $\omega'_y$ ,  $\omega'_z$  che  $M'_x$ ,  $M'_y$ ,  $M'_z$  — sono riferite agli assi rotanti  $\hat{x}'$ ,  $\hat{y}'$ ,  $\hat{z}'$ , quindi in qualche modo vanno poi rimappate rispetto ad assi fissi, del SRLAB o del SRCM. Quest'ultimo discorso verrà ripreso nella Sezione 19.10, per il caso particolare di rotazione libera senza momenti torcenti.

### 19.3.4 Lavoro dei momenti torcenti

Abbiamo visto — Eq. (19.20) — che l'energia cinetica del corpo rigido nel SRCM è dovuta alla rotazione:

$$\mathcal{E}^* = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{L}^*}{2}$$

Studiamo l'evoluzione di questa quantità.

Il prodotto scalare è invariante per un cambio di SR, quindi la stessa espressione può essere scritta per coordinate cartesiane sia nel SRCM che nel SRSOL:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^* &= \frac{1}{2} (\omega_x^* L_x^* + \omega_y^* L_y^* + \omega_z^* L_z^*) \\ &= \frac{1}{2} (\omega'_x L'_x + \omega'_y L'_y + \omega'_z L'_z) = \frac{1}{2} (I'_{xx} (\omega'_x)^2 + I'_{yy} (\omega'_y)^2 + I'_{zz} (\omega'_z)^2) \end{aligned}$$

La seconda scrittura in questo caso è più comoda, perché permette di esprimere  $\mathcal{E}^*$  attraverso le sole componenti di  $\vec{\omega}$ , usando i momenti di inerzia degli assi principali, che sono costanti.

La variazione è quindi

$$\begin{aligned} d\mathcal{E}^* &= I'_{xx} \omega'_x d\omega'_x + I'_{yy} \omega'_y d\omega'_y + I'_{zz} \omega'_z d\omega'_z \\ &= \omega'_x d(I'_{xx} \omega'_x) + \omega'_y d(I'_{yy} \omega'_y) + \omega'_z d(I'_{zz} \omega'_z) \\ &= \omega'_x dL'_x + \omega'_y dL'_y + \omega'_z dL'_z \\ &= \vec{\omega} \cdot d\vec{L}^* \\ &= \vec{\omega} \cdot \vec{M}^* dt \end{aligned}$$

Ora però, sappiamo che la variazione di energia cinetica, per il corpo rigido, è interamente dovuta al lavoro delle forze esterne:

$$d\mathcal{E}^* = \delta\mathcal{W}^{*,(est)}$$

Quindi si deduce che il lavoro delle forze esterne è interamente descrivibile attraverso il momento torcente applicato:

$$\delta\mathcal{W}^{*,(est)} = \vec{M}^* \cdot (\vec{\omega} dt) \quad (19.35)$$

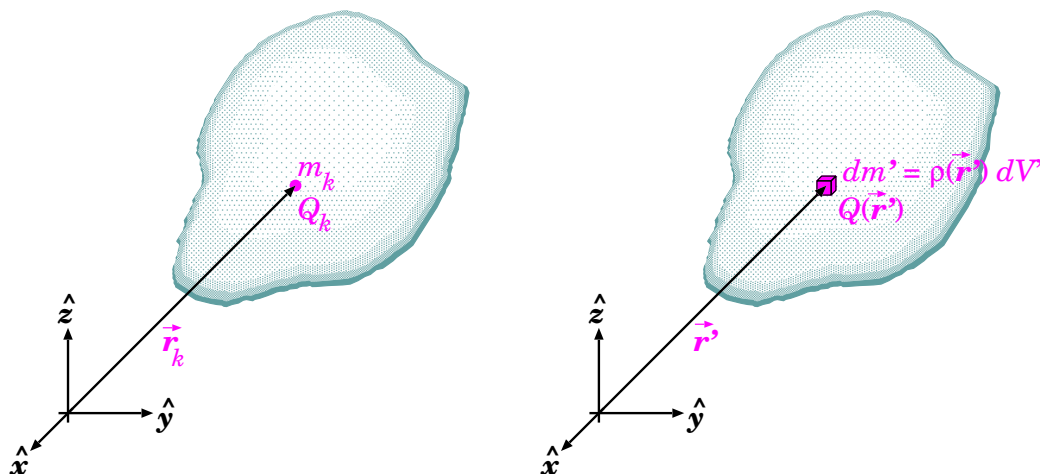


Figura 19.7: *Corpo rigido descritto come insieme discreto di punti materiali (a sinistra) o come materia continua (a destra).*

essendo  $|\vec{\omega}|dt \equiv d\alpha$  l'angolo infinitesimo di rotazione intorno all'asse  $\hat{\omega}$ , descritto dal corpo rigido nel tempo  $dt$  durante il quale agisce il momento torcente  $\vec{M}^*$ .

La potenza erogata dalle forze esterne,  $\mathcal{P}^{*,est} = \frac{\delta\mathcal{W}^{*,(est)}}{dt}$ , vale quindi:

$$\mathcal{P}^{*,(est)} = \vec{M}^* \cdot \vec{\omega} \quad (19.36)$$

(“la potenza del motore è data dal prodotto della coppia per i giri”, direbbe il vostro meccanico).

## 19.4 Approssimazione continua e densità

Finora abbiamo definito tutte le grandezze dinamiche del corpo rigido ( $\vec{p}$ ,  $\vec{L}$ ,  $\mathcal{E}$ , momenti di inerzia, ...) come sommatorie sui “punti materiali” che lo costituiscono. Tutto ok in linea di principio: possiamo considerare come punti materiali tutti gli atomi che costituiscono il corpo rigido <sup>[7]</sup>. Ma sarebbe un approccio ben poco pratico, quando si volesse fare un calcolo di un momento angolare, o di un momento di inerzia!

<sup>7</sup> Sappiamo che gli atomi hanno una struttura interna; d'altra parte andare a considerare tutti gli elettroni e i quarks dentro ai nucleoni come i punti materiali costituenti il corpo rigido sarebbe erroneo, perché essi non sono rigidamente legati: anzi, hanno moti molto rapidi!

Si può invece pensare alla materia come “diluita” nello spazio, come un qualcosa di “continuo” anziché “granulare”, in modo tale che un volumetto  $dV'$  molto piccolo — al limite infinitesimo — di materia contenga una massa  $dm'$ . L'idea intuitiva è che  $dm'$  sia direttamente proporzionale a  $dV'$  —  $dm' \propto dV'$ . La costante di proporzionalità viene chiamata *densità*,  $\rho$ , quindi:

$$dm' = \rho(\vec{r}') dV' \quad (19.37)$$

La situazione è schematizzata in Fig. 19.7.

La dipendenza dalla posizione  $\vec{r}'$  della densità del volumetto  $dV'$  sta a ricordare che in generale la densità non è uniforme. Si pensi ad un oggetto costituito da diversi materiali rigidi (metalli, plastiche, legno, sassi, ...): anche se ciascun materiale ha una densità omogenea, non si può dire lo stesso per l'oggetto nella sua complessità.

Il volumetto  $dV'$ , a rigore, non può essere infinitesimo. Deve essere “abbastanza grande” da contenere molti atomi, in modo da non poterne apprezzare la struttura discreta, ma allo stesso tempo deve essere molto più piccolo del corpo rigido in esame, e comunque abbastanza piccolo da poter descrivere correttamente le disomogeneità della materia.

Questo “compromesso” non è difficile da realizzare in pratica. Proviamo a calcolare quanti atomi sono contenuti in un cubetto di lato  $1 \mu\text{m}$  di un materiale solido ordinario. Occorre conoscere la massa atomica  $A$  e la densità  $\rho$  del materiale, con le quali si può calcolare il numero di atomi per unità di volume,  $n$ . In un volumetto  $\Delta V$  sono contenuti  $\Delta N = n \Delta V$  atomi, per una massa totale di  $\Delta m = \Delta N \cdot A = nA \Delta V$ . D'altra parte  $\Delta m = \rho \Delta V$ , quindi

$$n = \frac{\rho}{A}$$

Nel caso di composti chimici, formati di molecole, per calcolare la densità atomica  $n$  consideriamo la massa atomica media calcolata sulla molecola: numerando con  $i = 1, 2, \dots, p$  gli atomi della molecola,  $\langle A \rangle = \frac{\sum_{i=1}^p A_i}{p}$  — per esempio, per la molecola  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $A_{\text{H}} = 1$  u.m.a e  $A_{\text{O}} = 16$  u.m.a, quindi  $\langle A \rangle_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{(1 + 1 + 16) \text{ u.m.a}}{3} = 6$  u.m.a. Compiliamo una tabella con alcuni materiali tipici:

materiale	$A$ o $\langle A \rangle$		$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$n$ (m <sup>-3</sup> )	$10^9 \times$ atomi per $\mu\text{m}^3$
	(u.m.a)	( $10^{-27}$ kg)			
Piombo (Pb)	207	344	11300	$3.3 \cdot 10^{28}$	33
Tungsteno (W)	184	305	19300	$6.3 \cdot 10^{28}$	63
Ferro (Fe)	56	93	7960	$8.6 \cdot 10^{28}$	86
Alluminio (Al)	27	45	2700	$6.0 \cdot 10^{28}$	60
Vetro (SiO <sub>2</sub> )	20	33	$\sim 2500$	$\sim 7.6 \cdot 10^{28}$	$\sim 76$
Granito (*)	20	33	$\sim 2600$	$\sim 7.9 \cdot 10^{28}$	$\sim 78$
Diamante (C)	12	20	3550	$1.8 \cdot 10^{29}$	180
Grafite (C)	12	20	2100	$1.0 \cdot 10^{29}$	100
Ghiaccio (H <sub>2</sub> O)	6	10	920	$9.2 \cdot 10^{28}$	92

(\*) Il granito è un materiale eterogeneo, composto prevalentemente da SiO<sub>2</sub> e Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>. Qui è stata fatta una media pesata delle due masse molecolari:  $\langle A \rangle_{\text{SiO}_2} = 20$  al 75% e  $\langle A \rangle_{\text{Al}_2\text{O}_3} = 20.4$  per la parte restante — è un'approssimazione un po' grossolana, ma qui ci interessano gli ordini di grandezza).

In generale, nei materiali solidi ordinari, un cubetto di lato 1  $\mu\text{m}$  contiene da  $10^9$  a  $10^{12}$  atomi. Quindi l'approssimazione della “materia continua” è ottima per scopi pratici.

Con questo approccio, tutte le sommatorie presenti nelle Eq. (19.8) e nell'Eq. (19.4) possono essere sostituite con integrali. La posizione  $\vec{r}_k$  del  $k$ -esimo punto diventa una variabile continua  $\vec{r}'$ ; la massa  $m_k$  diventa una massa infinitesima  $dm'$  localizzata in un volumetto  $dV'$  posto in  $\vec{r}'$ ; una qualunque quantità  $Q_k$ , del  $k$ -esimo punto, può essere rimappata come una funzione della posizione,  $Q(\vec{r}')$ , cosicché:

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_k &\longrightarrow \vec{r}' \\
 m_k &\longrightarrow dm' \quad \equiv \quad \rho(\vec{r}') dV' \\
 Q_k &\longrightarrow Q(\vec{r}') \\
 m_k Q_k &\longrightarrow dm' Q(\vec{r}') \quad \equiv \quad dV' \rho(\vec{r}') Q(\vec{r}') \\
 \sum_k m_k Q_k &\longrightarrow \int_V dm' Q(\vec{r}') \quad \equiv \quad \int_V dV' \rho(\vec{r}') Q(\vec{r}')
 \end{aligned} \tag{19.38}$$

dove l'integrale  $\int_V$  si estende in 3 dimensioni su tutto il volume  $V$  occupato dal solido.

La formula del vettore-posizione del centro di massa, in particolare, quindi diventa:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\int dV' \rho(\vec{r}') \vec{r}'}{\int dV' \rho(\vec{r}')} = \frac{\int dV' \rho(\vec{r}') \vec{r}'}{m} \tag{19.39}$$

Analogamente le formule dei momenti di inerzia diventano:

diagonali	non-diagonali
$I_{xx} = \int_V dV' \rho(x', y', z') [(y')^2 + (z')^2]$	$I_{xy} = - \int_V dV' \rho(x', y', z') x' y'$
$I_{yy} = \int_V dV' \rho(x', y', z') [(x')^2 + (z')^2]$	$I_{xz} = - \int_V dV' \rho(x', y', z') x' z'$
$I_{zz} = \int_V dV' \rho(x', y', z') [(x')^2 + (y')^2]$	$I_{yz} = - \int_V dV' \rho(x', y', z') y' z'$
	(19.40)

---

### Calcolo degli integrali sul corpo rigido

---

In generale, gli integrali come quelli dell'Eq. (19.38) — e quindi in particolare anche Eq. (19.39) e Eq. (19.40) — si possono risolvere solo per via numerica, al computer, a parte alcuni casi particolari ad alta simmetria, che vedremo.

Una prima difficoltà è nella definizione della regione di integrazione: per esempio, l'intervallo di integrazione di  $x'$  dipende dalla scelta dei valori di  $y'$ ,  $z'$ . Si può ovviare a questa difficoltà definendo la funzione  $\rho(\vec{r}')$  anche al di fuori del volume  $V$  del corpo rigido:

$$\rho(\vec{r}') = 0 \quad \text{se } \vec{r}' \notin V$$

In questo modo l'integrale può essere esteso a tutto lo spazio 3-dimensionale:

$$\int_V dV' \rho(\vec{r}') Q(\vec{r}') = \int_{\mathbb{R}^3} dV' \rho(\vec{r}') Q(\vec{r}')$$

L'idea è poi di suddividere lo spazio 3-dimensionale in una griglia di cellette parallelepipedo di lati  $dx'$ ,  $dy'$ ,  $dz'$ , esprimere il volumetto come  $dV' = dx' dy' dz'$ , e integrare lungo le 3 direzioni cartesiane. Il volume di integrazione può essere ristretto ad un parallelepipedo di spigoli paralleli agli assi cartesiani, che contenga tutto il corpo rigido: un prodotto cartesiano di intervalli chiusi  $[x_{min}; x_{max}] \times [y_{min}; y_{max}] \times [z_{min}; z_{max}]$ . I bordi di integrazione sono così più facili da definire e maneggiare.

Ora l'integrazione può essere separata per ciascuna coordinata cartesiana (scelte nell'ordine che fa più comodo):

$$\int_V dV' \rho(\vec{r}') Q(\vec{r}') = \int_{x_{min}}^{x_{max}} dx' \int_{y_{min}}^{y_{max}} dy' \int_{z_{min}}^{z_{max}} dz' \rho(x', y', z') Q(x', y', z')$$

Al computer, l'integrale viene reso come somma su tutti i volumetti  $dx' \times dy' \times dz'$  (che ovviamente saranno "piccoli" ma non possono essere infinitesimi), calcolando  $\rho(x', y', z')$  e  $Q(x', y', z')$  nel centro di ciascun volumetto. Ovviamente si tratta di una approssimazione, dal momento che  $dx'$ ,  $dy'$ ,  $dz'$  non sono infinitesimi. Si può valutare l'impatto dell'approssimazione ripetendo il calcolo con una diversa "griglia", per esempio traslandola di  $dx'/2$ , o  $dy'/2$ , o  $dz'/2$ , oppure adottando un passo più fine.

## 19.5 Calcolo del centro di massa

La posizione del centro di massa dipende dalla forma e dalla distribuzione di massa all'interno del corpo rigido. In questo capitolo vedremo come affrontare questo calcolo in alcuni casi notevoli.

### 19.5.1 Oggetti con simmetrie

Anzitutto, se un oggetto presenta un piano di simmetria, o un asse di simmetria, il centro di massa deve giacere su di esso.

Quando parliamo di “simmetria”, in questo contesto, intendiamo una trasformazione geometrica che lascia l'oggetto immutato: non solo come sagoma esteriore, ma anche come distribuzione di masse. Se applichiamo una trasformazione ad un oggetto, in generale anche il suo centro di massa subirà la stessa trasformazione:

- se applichiamo una riflessione rispetto ad un piano, anche il centro di massa si troverà riflesso rispetto al piano;
- se applichiamo una rotazione di un dato angolo rispetto ad un asse, anche il centro di massa si troverà ruotato dello stesso angolo rispetto allo stesso asse.

Ma se tale trasformazione è una simmetria, l'oggetto resta invariato, quindi anche il centro di massa deve rimanere inalterato. L'unico modo perché ciò avvenga è che esso si trovi sul piano, o sull'asse di simmetria.

Se un oggetto possiede 3 assi di simmetria, oppure 3 piani di simmetria (per esempio un parallelepipedo), oppure un asse e un piano di simmetria (per esempio un cilindro), il centro di massa deve trovarsi nell'intersezione di tali assi e/o piani: in tal caso la sua posizione è completamente determinata.

Vediamo alcuni esempi in cui una simmetria aiuta a trovare il centro di massa: facciamo riferimento alla Fig. 19.8.

#### Centro di massa di un cono

Consideriamo un cono omogeneo di altezza  $h$  e raggio di base  $R$ . Scegliamo l'asse  $z$  lungo l'asse di simmetria del cono, e poniamo il piano  $(x, y)$  alla base del cono. Il centro di massa deve giacere lungo l'asse  $z$ , quindi  $x_{cm} = 0$  e



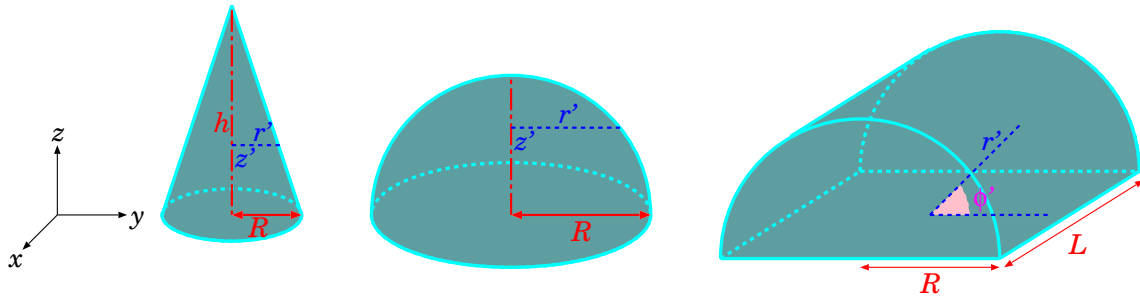


Figura 19.8: Schema del calcolo del centro di massa per alcune figure notevoli: un cono, una semisfera, un semicilindro.

$y_{cm} = 0$ : resta da trovare  $z_{cm}$ . Scegliamo le coordinate cilindriche  $(r, \phi, z)$  <sup>[8]</sup>; il volumetto  $dV' = r' dr' d\phi', dz'$ . Allora:

$$z_{cm} = \frac{1}{m} \int_V dV' \rho z' = \frac{\rho}{m} \int_V r' dr' d\phi', dz' z'$$

Ora dobbiamo fissare gli intervalli per  $\phi'$ ,  $r'$ ,  $z'$ . Intanto  $\phi' \in [0; 2\pi[$ , e ovviamente  $z' \in [0; h]$ . Infine  $r' \in [0; r'_{max}]$ , essendo  $r'_{max} = R$  per  $z' = 0$ , poi decresce linearmente fino a  $r'_{max} = 0$  per  $z' = h$ ; quindi  $r'_{max} = R \left(1 - \frac{z'}{h}\right)$ .

Quindi (ricordiamo che  $m = \rho V$ ):

$$\begin{aligned} z_{cm} &= \frac{1}{V} \int_0^h z' dz' \int_0^{r'_{max}} r' dr' \int_0^{2\pi} d\phi' \\ &= \frac{2\pi}{V} \int_0^h z' dz' \frac{(r'_{max})^2}{2} \\ &= \frac{2\pi}{V} \frac{R^2}{2} \int_0^h z' dz' \left(1 - \frac{z'}{h}\right)^2 \end{aligned}$$

Ora poniamo  $\xi = 1 - \frac{z'}{h}$ , cosicch   $z' = h(1 - \xi)$  e  $dz' = -h d\xi$ ; otteniamo:

$$\begin{aligned} z_{cm} &= \frac{\pi R^2}{V} \int_1^0 (-h d\xi) h(1 - \xi) \xi^2 \\ &= \frac{\pi h^2 R^2}{V} \int_0^1 d\xi (1 - \xi) \xi^2 = \frac{\pi h^2 R^2}{V} \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi h^2 R^2}{V} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{12} \frac{\pi h^2 R^2}{V} \end{aligned}$$

<sup>8</sup> Eravamo soliti chiamarle  $(\rho, \phi, z)$ ; qui scegliamo di usare  $r$  per non confonderci con la densit , che indichiamo con  $\rho \dots$

Infine ricordiamo il volume del cono:  $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ . Mettendo insieme tutto si trova:

$$z_{cm} = \frac{h}{4} \quad (\text{cono}) \quad (19.41)$$

### Centro di massa di una semisfera

Ora consideriamo una semisfera omogenea, di raggio  $R$ . Procediamo in modo analogo a quanto fatto per il cono, però ora  $r'_{max} = \sqrt{R^2 - (z')^2}$ . Quindi

$$\begin{aligned} z_{cm} &= \frac{1}{V} \int_0^R z' dz' \int_0^{r'_{max}} r' dr' \int_0^{2\pi} d\phi' \\ &= \frac{2\pi}{V} \int_0^R z' dz' \frac{(r'_{max})^2}{2} \\ &= \frac{\pi}{V} \int_0^R z' dz' (R^2 - (z')^2) \\ &= \frac{\pi}{V} \left( R^2 \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4} \right) \\ &= \frac{\pi}{V} \frac{R^4}{4} \end{aligned}$$

Il volume della semisfera è  $V = \frac{2}{3}\pi R^3$ , quindi

$$z_{cm} = \frac{3}{8}R \quad (\text{semisfera}) \quad (19.42)$$

### Centro di massa di un semicilindro

Consideriamo un semicilindro omogeneo, di lunghezza  $L$  e raggio esterno  $R$ . Questo solido ha 2 piani di simmetria: scegliamo gli assi in modo che tali piani siano  $(x, z)$  e  $(y, z)$ , cosicché il centro di massa deve essere necessariamente lungo l'asse  $z$ . Scegliamo l'asse  $x$  come asse delle coordinate cilindriche: il volumetto di integrazione è  $dV' = dr' r' d\phi' dx'$ ; inoltre  $z' = r' \sin \phi'$ . Allora:

$$z_{cm} = \frac{1}{m} \int_V dV' \rho z' = \frac{1}{V} \int_V dr' r' d\phi' dx' z'$$

Gli intervalli delle variabili di integrazione sono:  
 $\phi' \in [0, \pi]$ ,  $x' \in \left[-\frac{L}{2}, +\frac{L}{2}\right]$ ,  $r' \in [0, R]$ . Quindi:

$$\begin{aligned} z_{cm} &= \frac{1}{V} \int_{-L/2}^{+L/2} dx' \int_0^\pi d\phi' \int_0^R r' dr' r' \sin \phi' \\ &= \frac{L}{V} \int_0^R (r')^2 dr' \int_0^\pi \sin \phi' d\phi' \\ &= \frac{L}{V} \int_0^R (r')^2 dr' [-\cos \phi']_0^\pi \\ &= \frac{2L}{V} \int_0^R (r')^2 dr' = \frac{2L}{V} \frac{R^3}{3} \end{aligned}$$

Il volume totale è  $V = \frac{\pi LR^2}{2}$ . Quindi:

$$z_{cm} = \frac{4}{3\pi} R \simeq 0.424 R \quad (\text{semicilindro}) \quad (19.43)$$

### 19.5.2 Oggetti composti

Immaginiamo che un oggetto sia ottenuto attaccando altri  $n$  oggetti, che chiameremo  $1, 2, \dots, n$ . Chiamiamo  $m, V$  la massa e il volume occupato dall'oggetto composto, e  $m_i, V_i$  la massa e il volume occupato da ciascun  $i$ -esimo oggetto "componente". Osserviamo che per  $i \neq j$  i volumi  $V_i, V_j$  devono essere disgiunti — ( $V_i \cap V_j = \emptyset$ ) e che la loro unione deve fare  $V$  ( $\bigcup_i V_i = V$ ). Ricordiamo che il centro di massa di ciascun oggetto componente è:

$$\vec{r}_{cm}^{(i)} = \frac{\int_{V_i} dV' \rho(\vec{r}') \vec{r}'}{m_i}$$

Ora calcoliamo il centro di massa dell'oggetto composto:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{cm} &= \frac{\int_V dV' \rho(\vec{r}') \vec{r}'}{m} \\ &= \frac{\sum_i \left[ \int_{V_i} dV' \rho(\vec{r}') \vec{r}'}{m} \right]}{m} \\ &= \frac{\sum_i m_i \vec{r}_{cm}^{(i)}}{m} \end{aligned}$$

Il centro di massa dell'oggetto composto si può quindi calcolare come il centro di massa di un sistema di  $n$  punti materiali, ciascuno localizzato nel centro di massa di un oggetto componente, e con massa pari a quella dell'oggetto componente.

**Esempio: manubrio**

Un manubrio è composto da due sfere, di raggi  $R_1$ ,  $R_2$  e masse  $m_1$ ,  $m_2$ , collegate da una barra cilindrica di lunghezza  $L$ , raggio  $r$  e massa  $m_3$ , coassiale con i centri delle sfere. Dove si trova il suo centro di massa?

**Risposta:** Il sistema ha simmetria assiale, quindi il centro di massa si trova sull'asse, e può essere individuato da una sola coordinata,  $z$ . Scegliamo come riferimento l'estremo esterno della sfera 1. Allora abbiamo 3 oggetti, di masse  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ , i cui centri di massa si trovano in:

$$\begin{aligned} z_{cm}^{(1)} &= R_1 \\ z_{cm}^{(2)} &= 2R_1 + L + R_2 \\ z_{cm}^{(3)} &= 2R_1 + \frac{L}{2} \end{aligned}$$

Quindi:

$$z_{cm} = \frac{\sum_i m_i z_{cm}^{(i)}}{\sum_i m_i} = \frac{m_1 R_1 + m_2 (2R_1 + L + R_2) + m_3 (2R_1 + \frac{L}{2})}{m_1 + m_2 + m_3}$$

**Esempio: cupola semisferica**

Una cupola semisferica ha raggio interno  $R_1$  e raggio esterno  $R_2$ : dove si trova il centro di massa?

**Risposta:** Possiamo pensare alla cupola  $C$  come ad una semisfera piena  $S_2$  di raggio  $R_2$ , a cui è stata asportata una semisfera più piccola  $S_1$  di raggio  $R_1$ . Il centro di massa della cupola e quelli delle semisfere si trovano tutti sull'asse di simmetria: li indichiamo con le coordinate  $z_{cm}^C$ ,  $z_{mc}^{S_1}$ ,  $z_{mc}^{S_2}$ . Detta  $\rho$  la densità del materiale, le masse sono  $m_{S_i} = \frac{2\pi}{3} R_i^3 \rho$  ( $i = 1, 2$ ) e ovviamente  $m_C = m_{S_2} - m_{S_1}$ . Siccome  $S_2 = S_1 \cup C$ , deve essere:

$$\begin{aligned} m_{S_2} z_{cm}^{S_2} &= m_{S_1} z_{cm}^{S_1} + m_C z_{cm}^C \\ z_{cm}^C &= \frac{m_{S_2} z_{cm}^{S_2} - m_{S_1} z_{cm}^{S_1}}{m_{S_2} - m_{S_1}} \end{aligned}$$

Ricordiamo che  $z_{cm}^{S_i} = \frac{3}{8}R_i$ . Poi osserviamo che  $m_{S_1} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 m_{S_2}$ . Allora:

$$\begin{aligned} z_{cm}^C &= \frac{3}{8} \frac{R_2 - R_1 \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3}{1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3} \\ &= \frac{3}{8} \frac{R_2^4 - R_1^4}{R_2^3 - R_1^3} = \frac{3}{8} \frac{(R_2 - R_1)(R_2^3 + R_2^2 R_1 + R_2 R_1^2 + R_1^3)}{(R_2 - R_1)(R_2^2 + R_2 R_1 + R_1^2)} \\ &= \frac{3}{8} \frac{R_2^3 + R_2^2 R_1 + R_2 R_1^2 + R_1^3}{R_2^2 + R_2 R_1 + R_1^2} \end{aligned}$$

**Esempio: calotta sferica sottile:** poniamo  $R_1 \rightarrow R_2 \equiv R$  e troviamo

$$z_{cm}^{C \text{ sottile}} = \frac{1}{2}R$$

**Esempio: cupola con**  $R_1 = \alpha R_2$ : chiamiamo  $R_2 \equiv R$  il raggio esterno, e troviamo

$$z_{cm}^{C(R_1=\alpha R)} = \frac{3}{8}R \frac{1 - \alpha^4}{1 - \alpha^3}$$

## 19.6 Calcolo dei momenti di inerzia

I momenti di inerzia, definiti nelle Eq. (19.28), dipendono sia dalla forma del corpo rigido, sia dalla sua posizione e dal suo orientamento — il che non è molto conveniente! Per calcolarli in maniera che dipendano solo dalla forma del corpo, conviene lavorare in un SRSOL, con origine nel centro di massa. È inoltre utile scegliere come  $\hat{x}'$ ,  $\hat{y}'$ ,  $\hat{z}'$  gli assi principali, in modo che i momenti non-diagonali si annullano. Per fare questo, si scelgono ove possibile assi di simmetria del corpo, in modo tale che per ogni punto  $(x', y', z')$  esista un punto  $(-x', y', z')$  con la stessa densità  $\rho$  che lo compensi nel calcolo di  $I'_{xy}$ ,  $I'_{xz}$  — e analogamente per le altre coordinate.

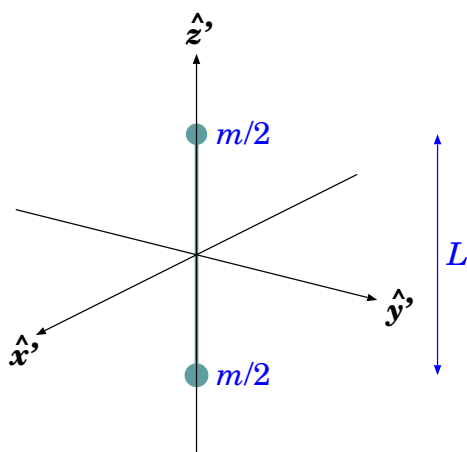
Una volta calcolati i momenti di inerzia in un SR con origine nel centro di massa, essi possono essere trasformati in qualunque altro SR con assi paralleli al primo, mediante i teoremi di Huygens-Steiner — vd Eq. (19.31).

Nella prossima sezione, elenchiamo i momenti di inerzia per alcuni casi notevoli. Le dimostrazioni saranno poi date nelle sezioni successive.

Per corpi rigidi più complicati, occorre calcolare i momenti di inerzia totali come somma dei momenti di inerzia di parti più semplici.

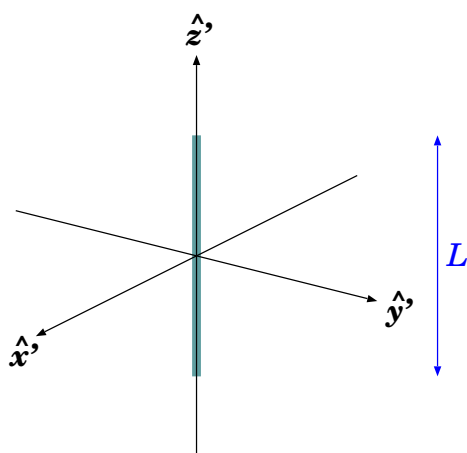
### 19.6.1 Momenti di inerzia notevoli

Elenchiamo qui i momenti di inerzia, rispetto agli assi principali, di alcuni corpi rigidi, dotati di simmetrie notevoli — le dimostrazioni sono in Sezione 19.6.3.



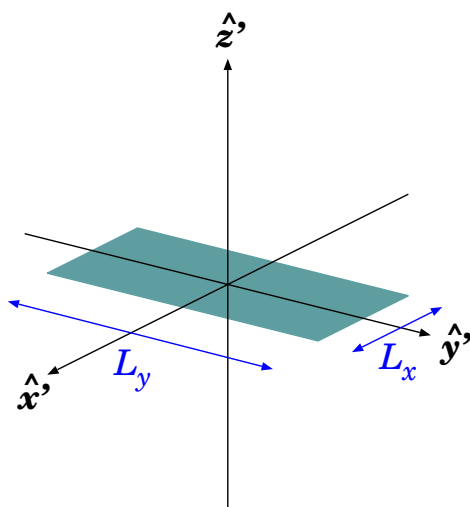
2 masse connesse da sbarra trascurabile

$$\begin{aligned} I'_{xx} &= \frac{mL^2}{4} \\ I'_{yy} &= \frac{mL^2}{4} \\ I'_{zz} &= 0 \end{aligned} \quad (19.44)$$



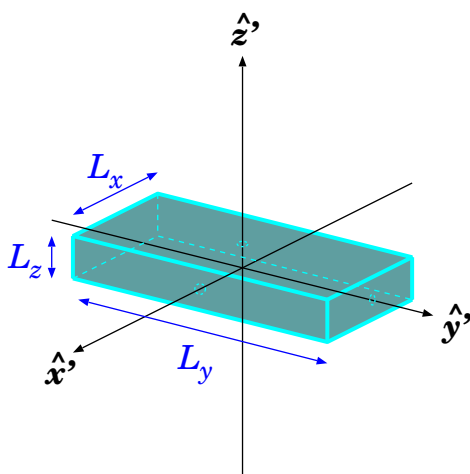
sbarra di spessore trascurabile

$$\begin{aligned} I'_{xx} &= \frac{mL^2}{12} \\ I'_{yy} &= \frac{mL^2}{12} \\ I'_{zz} &= 0 \end{aligned} \quad (19.45)$$



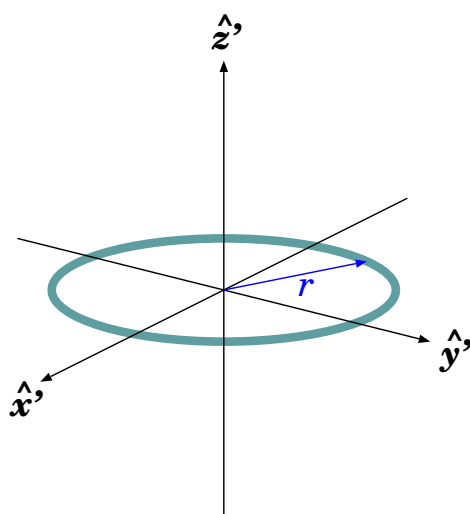
rettangolo di spessore trascurabile

$$\begin{aligned} I'_{xx} &= \frac{mL_y^2}{12} \\ I'_{yy} &= \frac{mL_x^2}{12} \\ I'_{zz} &= \frac{m(L_x^2 + L_y^2)}{12} \end{aligned} \quad (19.46)$$



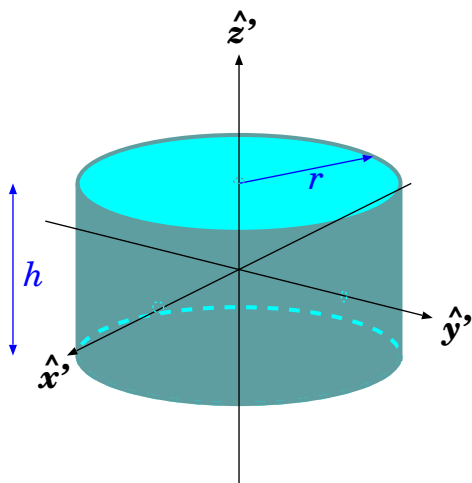
parallelepipedo

$$\begin{aligned} I'_{xx} &= \frac{m(L_y^2 + L_z^2)}{12} \\ I'_{yy} &= \frac{m(L_x^2 + L_z^2)}{12} \\ I'_{zz} &= \frac{m(L_x^2 + L_y^2)}{12} \end{aligned} \quad (19.47)$$



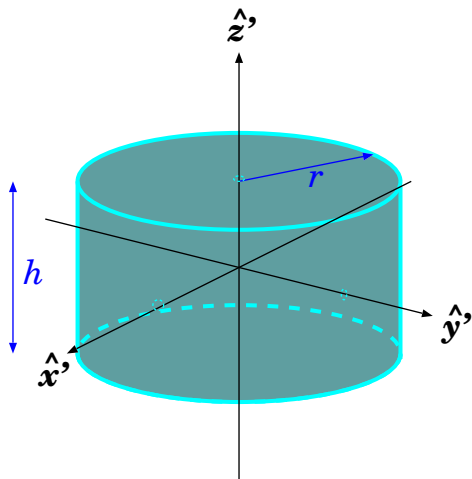
anello di spessore trascurabile

$$\begin{aligned} I'_{xx} &= \frac{mr^2}{2} \\ I'_{yy} &= \frac{mr^2}{2} \\ I'_{zz} &= mr^2 \end{aligned} \quad (19.48)$$



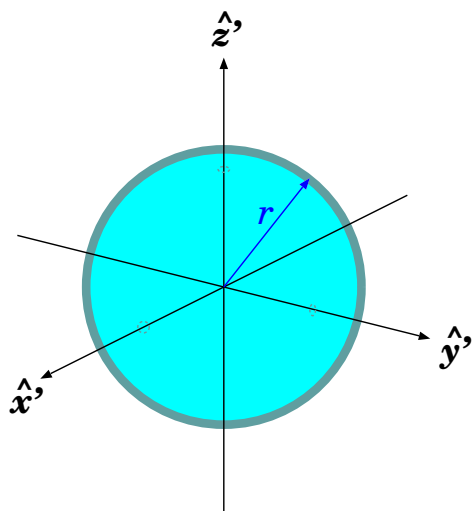
guscio cilindrico di spessore trascurabile

$$\begin{aligned} I'_{xx} &= m \left( \frac{r^2}{2} + \frac{h^2}{12} \right) \\ I'_{yy} &= m \left( \frac{r^2}{2} + \frac{h^2}{12} \right) \\ I'_{zz} &= mr^2 \end{aligned} \quad (19.49)$$



cilindro pieno

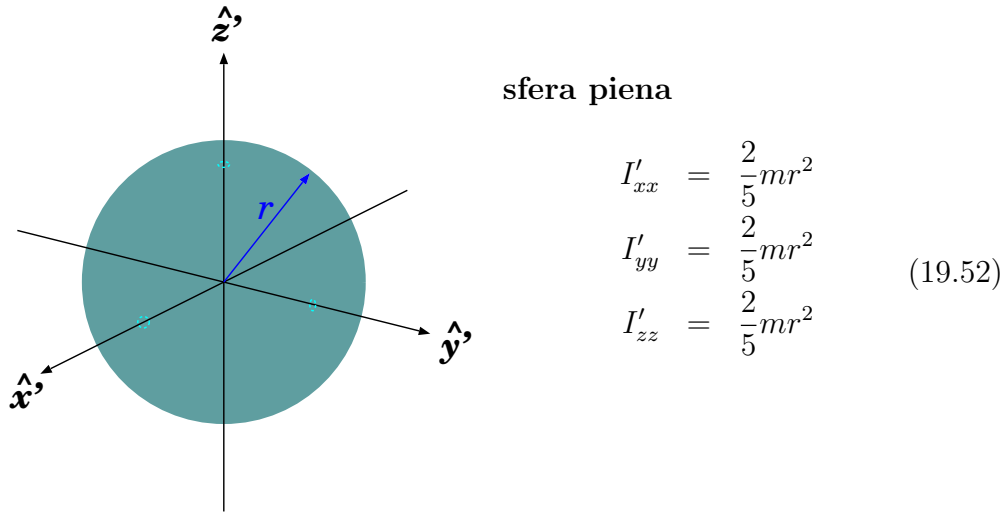
$$\begin{aligned} I'_{xx} &= m \left( \frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) \\ I'_{yy} &= m \left( \frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) \\ I'_{zz} &= \frac{mr^2}{2} \end{aligned} \quad (19.50)$$



guscio sferico di spessore trascurabile

$$\begin{aligned} I'_{xx} &= \frac{2}{3}mr^2 \\ I'_{yy} &= \frac{2}{3}mr^2 \\ I'_{zz} &= \frac{2}{3}mr^2 \end{aligned} \quad (19.51)$$





### 19.6.2 Momenti di inerzia di corpi composti

Consideriamo un oggetto ottenuto attaccando altri  $n$  oggetti,  $1, 2, \dots, n$ . Chiamiamo  $m, V$  la massa e il volume occupato dall'oggetto composto, e  $m_i, V_i$  la massa e il volume occupato da ciascun  $i$ -esimo oggetto "componente". Per  $i \neq j$  i volumi  $V_i, V_j$  devono essere disgiunti ( $V_i \cap V_j = \emptyset$ ) e che la loro unione deve fare  $V$  ( $\bigcup_i V_i = V$ ).

Tutti i momenti di inerzia sono esprimibili come integrali di volume — vd Eq. (19.40): ciascuno di questi può essere scomposto in integrali sui componenti:

$$\int_V dV' \dots = \sum_i \int_{V_i} dV' \dots$$

Quindi i momenti di inerzia dell'oggetto composto sono semplicemente le somme dei momenti di inerzia di ciascun oggetto componente, *tutti espressi rispetto agli stessi assi  $x, y, z$* :

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \sum_i I_{xx}^{(i)} & ; & & I_{xy} &= \sum_i I_{xy}^{(i)} \\ I_{yy} &= \sum_i I_{yy}^{(i)} & ; & & I_{xz} &= \sum_i I_{xz}^{(i)} \\ I_{zz} &= \sum_i I_{zz}^{(i)} & ; & & I_{yz} &= \sum_i I_{yz}^{(i)} \end{aligned}$$

Tuttavia, più spesso, i momenti di inerzia di ciascun componente sono espressi rispetto al proprio centro di massa:  $I_{\dots}^{*(i)}$ , pertanto questi andranno espressi

rispetto al riferimento globale attraverso i teoremi H.S. — Eq. (19.31) — e poi sommati. Quindi:

$$\begin{array}{cc}
 \text{diagonali} & \text{non-diagonali} \\
 I_{xx} = \sum_i \left[ I_{xx}^{*(i)} + m_i \left( (y_{cm}^{(i)})^2 + (z_{cm}^{(i)})^2 \right) \right] & I_{xy} = \sum_i \left[ I_{xy}^{*(i)} - m_i x_{cm}^{(i)} y_{cm}^{(i)} \right] \\
 I_{yy} = \sum_i \left[ I_{yy}^{*(i)} + m_i \left( (x_{cm}^{(i)})^2 + (z_{cm}^{(i)})^2 \right) \right] & I_{xz} = \sum_i \left[ I_{xz}^{*(i)} - m_i x_{cm}^{(i)} z_{cm}^{(i)} \right] \\
 I_{zz} = \sum_i \left[ I_{zz}^{*(i)} + m_i \left( (x_{cm}^{(i)})^2 + (y_{cm}^{(i)})^2 \right) \right] & I_{yz} = \sum_i \left[ I_{yz}^{*(i)} - m_i y_{cm}^{(i)} z_{cm}^{(i)} \right]
 \end{array} \quad ; \quad (19.53)$$

### Esempio di oggetto composto

Una sfera cava di raggio  $R_1$  e massa  $m_1$  è collegata ad un cilindro cavo di raggio  $R_2$ , altezza  $h_2$  e massa  $m_2$  da una sbarra sottile di lunghezza  $L_3$  e massa  $m_3$ . La sbarra è allineata con i baricentri di sfera e cilindro ed è perpendicolare all'asse del cilindro. Calcolare il momento di inerzia rispetto ad un asse parallelo all'asse di simmetria del cilindro e passante per il centro della sbarra.

**Risposta.** Anzitutto cerchiamo il centro di massa dell'oggetto composto. Chiamiamo  $z$  l'asse rispetto al quale si calcola il momento di inerzia, e  $x$  l'asse lungo la sbarra. I centri di massa di ciascun componente, e quello dell'oggetto composto, devono giacere lungo l'asse  $x$ . Per fissare un riferimento, prendiamo l'origine  $O$  a metà della sbarra. Allora i centri di massa dei 3 componenti sono situati in:

$$\begin{aligned}
 x_{cm}^{(1)} &= - \left( \frac{L_3}{2} + R_1 \right) \\
 x_{cm}^{(2)} &= + \left( \frac{L_3}{2} + R_2 \right) \\
 x_{cm}^{(3)} &= 0
 \end{aligned}$$

I momenti di inerzia centrali sono

$$\begin{aligned}
 I_{zz}^{*(1)} &= \frac{2}{3} m_1 R_1^2 \\
 I_{zz}^{*(2)} &= m_2 R_2^2 \\
 I_{zz}^{*(3)} &= m_3 \frac{L_3^2}{12}
 \end{aligned}$$

Quindi:

$$I_{zz} = m_1 \left( \frac{2}{3} R_1^2 + \left( \frac{L_3}{2} + R_1 \right)^2 \right) + m_2 \left( R_2^2 + \left( \frac{L_3}{2} + R_2 \right)^2 \right) + m_3 \frac{L_3^2}{12}$$

**Esempio di oggetto composto**

Una sfera piena omogenea e un cilindro pieno omogeneo, rispettivamente di raggi  $R_1$ ,  $R_2$  e  $m_1$ ,  $m_2$ , sono attaccati, in modo che la sfera tocchi il cilindro nel centro della sua base; l'altezza del cilindro è  $h_2$ . Quanto vale il momento di inerzia, rispetto all'asse passante per il punto di contatto e ortogonale alla linea dei baricentri?

**Risposta:** scegliamo l'asse  $x$  lungo la linea dei baricentri e chiamiamo  $z$  l'asse rispetto al quale dobbiamo calcolare il momento di inerzia. I momenti di inerzia centrali dei due oggetti sono:

$$I_{zz}^{*(1)} = \frac{2}{5}m_1R_1^2$$

$$I_{zz}^{*(2)} = m_2 \left( \frac{R_2^2}{4} + \frac{h_2^2}{12} \right)$$

(Nota: per il cilindro si è usato il momento di inerzia relativo ad un asse ortogonale all'asse del cilindro: quello che in Eq. (19.50) si chiama  $I'_{xx}$ : l'asse- $z$  nel nostro caso NON È l'asse- $z$  dell'Eq. (19.50)). I centri di massa dei 2 componenti si trovano in:

$$x_{cm}^{(1)} = -R_1 \quad ; \quad x_{cm}^{(2)} = +\frac{h_2}{2}$$

Quindi

$$I_{zz} = \left( \frac{2}{5}m_1R_1^2 + m_1R_1^2 \right) + \left( m_2 \left( \frac{R_2^2}{4} + \frac{h_2^2}{12} \right) + m_2 \left( \frac{h_2}{2} \right)^2 \right)$$

$$= \frac{7}{5}m_1R_1^2 + m_2 \left( \frac{R_2^2}{4} + \frac{h_2^2}{3} \right)$$

### 19.6.3 Momenti di inerzia notevoli — dimostrazioni

#### Momenti di inerzia di una sbarra sottile omogenea

Consideriamo una sbarra sottile di massa  $m$  e lunghezza  $L$ .

Scegliamo  $\hat{z}'$  lungo la sbarra, e  $\hat{x}'$ ,  $\hat{y}'$  passanti per il suo centro geometrico, che deve essere anche il centro di massa. L'unica coordinata lungo cui si può integrare è  $z'$ , mentre  $x' = 0$  e  $y' = 0$ . Quindi  $I'_{zz} = 0$ .

Anziché introdurre la densità di massa in volume, introduciamo la densità di massa in lunghezza,  $\lambda$ , tale che  $dm' = \lambda dz'$ . Essendo la sbarra omogenea,

$\lambda = \frac{m}{L}$ . Quindi:

$$\begin{aligned} I'_{xx} &= \int_{-L/2}^{+L/2} dz' \lambda (z')^2 = \lambda \left[ \frac{(z')^3}{3} \right]_{-L/2}^{+L/2} \\ &= \frac{m}{L} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \left( \frac{L}{2} \right)^3 = \frac{m L^2}{12} \end{aligned}$$

e analogamente per  $I'_{yy}$ . In sintesi:

$$I'_{xx} = I'_{yy} = \frac{m L^2}{12} \quad ; \quad I'_{zz} = 0 \quad (\text{sbarra sottile}) \quad (19.54)$$

### Momenti di inerzia di una lastra rettangolare sottile omogenea

Consideriamo un rettangolo sottile di massa  $m$  e lati  $L_x$ ,  $L_y$ .

Scegliamo  $\hat{x}'$ ,  $\hat{y}'$  paralleli ai lati  $L_x$ ,  $L_y$ , e  $\hat{z}'$  perpendicolare al piano del rettangolo. L'origine degli assi è posta nel centro del rettangolo. Essendo lo spessore trascurabile, le uniche coordinate lungo cui si può integrare sono  $x'$ ,  $y'$ , mentre  $z' = 0$ .

Il momento  $I'_{yy}$  dipende in generale dall'estensione in  $x'$  e in  $z'$ : in questo caso solo da quella in  $x'$ . Pertanto esso sarà pari a quello di una sbarra sottile lunga  $L_x$ :  $I'_{yy} = \frac{m L_x^2}{12}$ . Con un discorso analogo si ricava  $I'_{xx} = \frac{m L_y^2}{12}$ .

Invece per  $I'_{zz}$  occorre fare l'integrale. Qui introduciamo la densità di massa per unità di area,  $\sigma$ , tale che  $dm' = \sigma dx' dy'$ . Essendo la lastra omogenea,  $\sigma = \frac{m}{L_x L_y}$ . Allora

$$\begin{aligned} I'_{zz} &= \int_{-L_x/2}^{+L_x/2} dx' \int_{-L_y/2}^{+L_y/2} dy' \sigma [(x')^2 + (y')^2] \\ &= \sigma \left[ L_y \int_{-L_x/2}^{+L_x/2} dx' (x')^2 + L_x \int_{-L_y/2}^{+L_y/2} dy' (y')^2 \right] \\ &= \frac{m}{L_x L_y} \left[ \frac{L_y L_x^3}{12} + \frac{L_x L_y^3}{12} \right] = \frac{m(L_x^2 + L_y^2)}{12} \end{aligned}$$

Riassumendo:

$$I'_{xx} = \frac{m L_y^2}{12} \quad ; \quad I'_{yy} = \frac{m L_x^2}{12} \quad ; \quad I'_{zz} = \frac{m(L_x^2 + L_y^2)}{12} \quad (\text{lastra rettangolare sottile}) \quad (19.55)$$

### Momenti di inerzia di un parallelepipedo omogeneo

Consideriamo un parallelepipedo omogeneo di massa  $m$  e spigoli  $L_x$ ,  $L_y$ ,  $L_z$ .

Scegliamo  $\hat{x}'$ ,  $\hat{y}'$ ,  $\hat{z}'$  paralleli ai lati  $L_x$ ,  $L_y$ ,  $L_z$ . L'origine degli assi è posta nel centro del parallelepipedo. Il calcolo di ciascun momento di inerzia "vede" solo l'estensione nelle due dimensioni perpendicolari all'asse: per esempio

$$I'_{zz} = \int_{-L_x/2}^{+L_x/2} dx' \int_{-L_y/2}^{+L_y/2} dy' \frac{m}{L_x L_y} [(x')^2 + (y')^2] = \frac{m(L_x^2 + L_y^2)}{12}$$

e analogamente per gli altri due assi. I risultati sono quindi:

$$I'_{xx} = \frac{m(L_y^2 + L_z^2)}{12} \quad ; \quad I'_{yy} = \frac{m(L_x^2 + L_z^2)}{12} \quad ; \quad I'_{zz} = \frac{m(L_x^2 + L_y^2)}{12} \quad (\text{parallelepipedo}) \quad (19.56)$$

### Momenti di inerzia di un anello sottile omogeneo

Poniamo l'anello di raggio  $r$  centrato nell'origine, sul piano  $(x', y')$ . Un elemento di anello, sotteso dall'angolo  $d\phi$ , ha massa  $dm' = \frac{m}{2\pi} d\phi$ . Quindi:

$$\begin{aligned} I'_{zz} &= \int dm' [(x')^2 + (y')^2] = \int_0^{2\pi} \frac{m}{2\pi} d\phi r^2 \\ &= mr^2 \\ I'_{xx} &= \int dm' (y')^2 = \int_0^{2\pi} \frac{m}{2\pi} d\phi (r \sin \phi)^2 = \frac{mr^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \sin^2 \phi \\ &= \frac{mr^2}{2} \end{aligned}$$

e  $I'_{yy} = I'_{xx}$ .

### Momenti di inerzia di un guscio cilindrico sottile omogeneo

Disponiamo il guscio cilindrico con asse coincidente con  $\hat{z}'$ . Un elemento di guscio, di altezza  $dz'$  e sotteso da angolo azimuthale  $d\phi$ , ha massa

$dm' = \frac{m}{2\pi h} d\phi dz'$ . Quindi:

$$\begin{aligned} I'_{zz} &= \int dm' [(x')^2 + (y')^2] = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{z'=-h/2}^{z'=+h/2} dz' \frac{m}{2\pi h} d\phi dz' r^2 \\ &= mr^2 \\ I'_{xx} &= \int dm' [(y')^2 + (z')^2] = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{z'=-h/2}^{z'=+h/2} dz' \frac{m}{2\pi h} d\phi dz' [(r \sin \phi)^2 + (z')^2] \\ &= \frac{m}{2\pi h} \left[ h \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\phi r^2 \sin^2 \phi + 2\pi \int_{z'=-h/2}^{z'=+h/2} dz' (z')^2 \right] \\ &= \frac{mr^2}{2} + \frac{mh^2}{12} = m \left( \frac{r^2}{2} + \frac{h^2}{12} \right) \end{aligned}$$

e  $I'_{yy} = I'_{xx}$ .

### Momenti di inerzia di un cilindro omogeneo

Consideriamo il cilindro come costituito da tanti gusci cilindrici concentrici, ciascuno di raggio  $r'$  e spessore  $dr'$ : ognuno di essi ha massa

$$dm' = \frac{m}{\pi r^2} \cdot 2\pi r' dr' = \frac{2m}{r^2} r' dr'.$$

$$\begin{aligned} I'_{zz} &= \int dm' (r')^2 = \int_{r'=0}^{r'=r} \frac{2m}{r^2} r' dr' (r')^2 = \frac{2m}{r^2} \int_{r'=0}^{r'=r} dr' (r')^3 \\ &= \frac{2m}{r^2} \frac{r^4}{4} = \frac{mr^2}{2} \\ I'_{xx} &= \int dm' \left( \frac{(r')^2}{2} + \frac{h^2}{12} \right) = \int_{r'=0}^{r'=r} \frac{2m}{r^2} r' dr' \left( \frac{(r')^2}{2} + \frac{h^2}{12} \right) \\ &= \frac{2m}{r^2} \int_{r'=0}^{r'=r} dr' r' \left( \frac{(r')^2}{2} + \frac{h^2}{12} \right) \\ &= \frac{2m}{r^2} \left( \frac{r^4}{8} + \frac{r^2 h^2}{24} \right) = m \left( \frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) \end{aligned}$$

e  $I'_{yy} = I'_{xx}$ .

### Momenti di inerzia di un guscio sferico sottile omogeneo

Consideriamo un guscio sferico di raggio  $r$  come formato da tanti anelli sottili, ciascuno situato ad un angolo polare  $\theta$ : la larghezza di ciascun

anello è  $ds = r d\theta$  e il raggio è  $\rho = r \sin \theta$ . La massa dell'anello è  $dm' = \frac{m}{4\pi r^2} \cdot 2\pi \rho \cdot ds = \frac{m}{2} \sin \theta d\theta$ .

$$\begin{aligned} I'_{zz} &= \int dm' \rho^2 = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{m}{2} \sin \theta d\theta (r \sin \theta)^2 = \frac{mr^2}{2} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin^3 \theta d\theta \\ &= \frac{mr^2}{2} \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} d\xi (1 - \xi^2) \quad (\xi = \cos \theta) \\ &= \frac{mr^2}{2} \cdot 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} mr^2 \end{aligned}$$

e  $I'_{yy} = I'_{xx} = I'_{zz}$ .

### Momenti di inerzia di una sfera omogenea

Consideriamo la sfera come formata da gusci sferici, ciascuno di raggio  $r'$  e spessore  $dr'$ ; ciascun guscio ha massa  $dm' = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3} 4\pi (r')^2 dr' = \frac{3m}{r^3} (r')^2 dr'$ .

$$\begin{aligned} I'_{zz} &= \int dm' \frac{2}{3} (r')^2 = \frac{2}{3} \frac{3m}{r^3} \int_{r'=0}^{r'=r} (r')^4 dr' = \frac{2m}{r^3} \frac{r^5}{5} \\ &= \frac{2}{5} mr^2 \end{aligned}$$

e  $I'_{yy} = I'_{xx} = I'_{zz}$ .

## 19.7 Introduzione alle prossime sezioni

In generale, il moto di un corpo rigido è estremamente complicato. Nelle sezioni successive analizzeremo 4 casi notevoli (in ordine di difficoltà crescente!), che qui schematizziamo in Fig. 19.9.

- **Rotazione attorno a un asse fisso**

È il caso più semplice: può essere trattato in presenza o in assenza di momenti torcenti applicati, e non è necessario in generale fare ipotesi di simmetria sulla forma del corpo rigido. C'è un solo grado di libertà: l'angolo di rotazione.

- **Puro rotolamento** (ovvero rotolamento su una superficie solida senza strisciamento)

Anche questo caso è relativamente semplice, a patto di assumere che il corpo rigido abbia una simmetria cilindrica. Il moto è la composizione

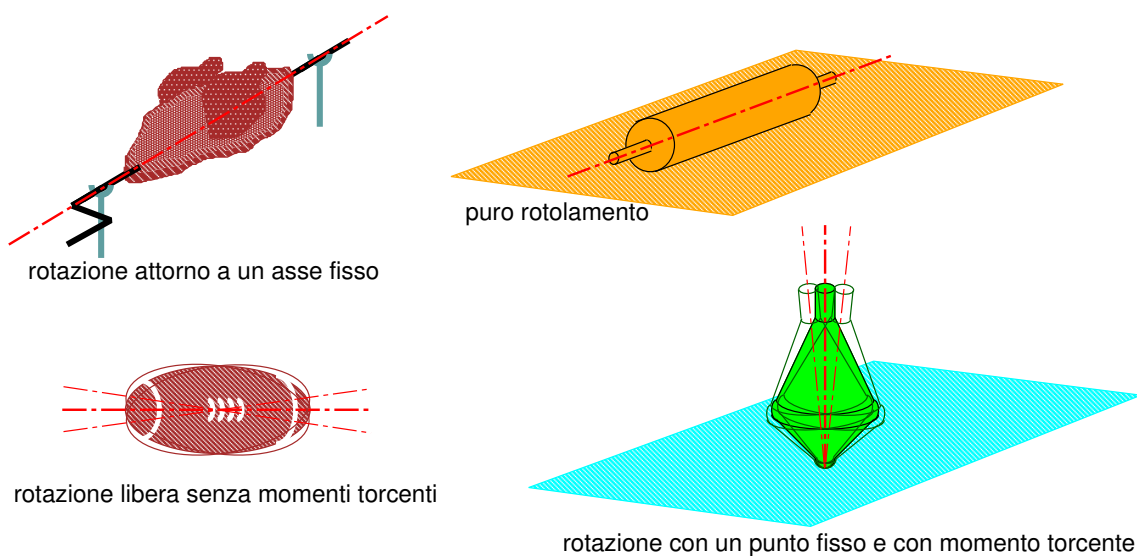


Figura 19.9:

di una traslazione e una rotazione, che però non sono indipendenti a causa dell'assenza di strisciamento, pertanto anche qui c'è un solo grado di libertà.

- **Rotazione libera senza momenti torcenti**

L'eventuale moto traslatorio si separa dalla rotazione, pertanto i gradi di libertà sono 3. Non è necessario fare ipotesi sulla forma del corpo rigido. Il moto è relativamente semplice se avviene attorno a un asse principale di inerzia: in tal caso l'asse di rotazione è stabile. In caso contrario il moto si complica notevolmente, e l'asse di rotazione cambia nel tempo con un moto di "precessione".

- **Rotazione con un punto fisso e un momento torcente**

I gradi di libertà sono 3. Il problema si riesce a trattare solo se il corpo rigido ha una simmetria cilindrica e se la rotazione avviene molto rapidamente, e prevalentemente attorno all'asse di simmetria. In generale l'asse di rotazione evolve nel tempo, con un moto "principale" di precessione a cui si aggiungono oscillazioni nella direzione dette "nutazioni". Questo è il più difficile dei casi qui trattati.

La casistica non si esaurisce qui: potete immaginare tutte le possibili combinazioni con/senza punto fisso, con/senza momenti torcenti, questi ultimi ortogonali o paralleli al momento angolare... un *mare magnum!*



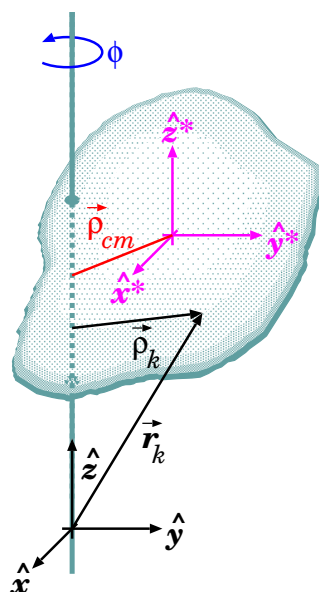


Figura 19.10: *Corpo rigido che ruota intorno ad un asse fisso.*

## 19.8 Rotazione intorno a un asse fisso

Consideriamo un corpo rigido, vincolato a ruotare intorno ad un asse fisso, senza traslare su di esso, come in Fig. 19.10.

Il problema è ad un solo grado di libertà: l'angolo di rotazione  $\phi$ . Pertanto, le variabili cinematiche sono la velocità angolare:

$$\vec{\omega} = \omega \hat{z} \quad ; \quad \omega = \frac{d\phi}{dt}$$

e l'accelerazione angolare:

$$\vec{\alpha} = \alpha \hat{z} \quad ; \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

Per studiare il moto, si sceglie il SRLAB con l'origine  $O$  sull'asse di rotazione e l'asse  $\hat{z}$  coincidente con l'asse di rotazione.

La velocità angolare è per definizione lungo  $\hat{z}$ :

$$\vec{\omega} = \omega \hat{z} \tag{19.57}$$

Convien separare la posizione  $\vec{r}_i$  di ciascun punto in due componenti, parallela e ortogonale a  $\vec{\omega}$ :

$$\vec{r}_i = z_i \hat{z} + \vec{\rho}_i \tag{19.58}$$

La velocità di ciascun punto è:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i \quad (19.59)$$

Il momento angolare totale è:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \\ &= \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i) \\ &= \sum_i m_i [\vec{\omega}(\vec{r}_i \cdot \vec{\rho}_i) - \vec{\rho}_i(\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})] \end{aligned}$$

Ora,  $\vec{r}_i \cdot \vec{\rho}_i = \rho_i^2$ , mentre  $\vec{r}_i \cdot \vec{\omega} = \omega z_i$ , quindi:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \omega \left\{ \sum_i m_i [\rho_i^2 \hat{z} - z_i \vec{\rho}_i] \right\} \\ &= \left( \sum_i m_i \rho_i^2 \right) \vec{\omega} - \omega \left( \sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i \right) \end{aligned}$$

Il momento angolare si scompone naturalmente in due componenti  $\vec{L}_{\parallel}$  e  $\vec{L}_{\perp}$ , rispettivamente parallela e ortogonale all'asse:

$$\begin{aligned} \vec{L}_{\parallel} &= \underbrace{\left( \sum_i m_i \rho_i^2 \right)}_I \vec{\omega} = I \vec{\omega} \\ \vec{L}_{\perp} &= -\omega \left( \sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i \right) \end{aligned} \quad (19.60)$$

### Un esempio su $\vec{L}$ e $\vec{\omega}$ (\*)

Consideriamo un semplice esempio: il sistema in Fig. 19.11 è formato da un manubrio, con due masse  $m$  puntiformi, collegate da una sbarra di lunghezza  $A$  di massa trascurabile, il tutto vincolato a ruotare attorno ad un asse, con velocità angolare costante  $\omega$ . Il manubrio è obliquo, nel senso che forma un angolo  $\alpha$  con la perpendicolare all'asse di rotazione.

Quanto vale  $\vec{L}$ ? Cambia nel tempo? E perché?

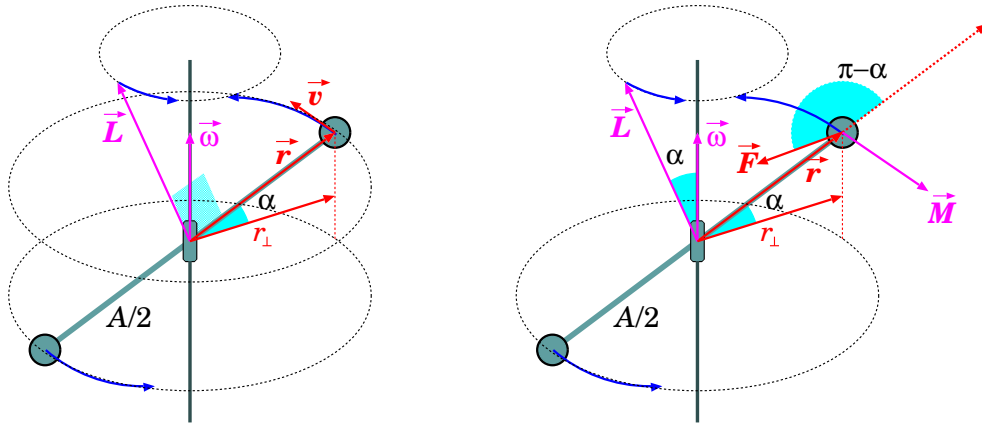


Figura 19.11: Manubrio obliquo che ruota intorno ad un asse.

Prendiamo come origine  $O$  il centro del sistema — che per ragioni di simmetria è anche il centro di massa.

Il momento angolare totale è semplicemente dato dal moto delle due masse identiche,  $k = 1, 2$ . Ciascuna ha velocità di modulo:

$$v_k = \omega r_{\perp} = \omega \frac{A}{2} \cos \alpha$$

Ora, dalla figura,  $\vec{r}_k \perp \vec{v}_k$ , quindi ciascuna massa contribuisce al momento angolare con una quantità  $\vec{L}_k$  che è ortogonale a  $\vec{r}_k$  e  $\vec{v}_k$  e vale in modulo:

$$|\vec{L}_k| = m r_k v_k = m \left( \frac{A}{2} \right) \left( \omega \frac{A}{2} \cos \alpha \right) = m \frac{A^2}{4} \omega \cos \alpha$$

I contributi delle due masse al momento angolare sono paralleli e concordi, quindi troviamo

$$|\vec{L}| = |\vec{L}_1| + |\vec{L}_2| = \frac{mA^2}{2} \omega \cos \alpha$$

Mentre  $\vec{\omega}$  è costante, per costruzione, il momento angolare  $\vec{L}$  non lo è: è costante in modulo, ma ruota con un moto di precessione intorno all'asse del sistema. Pertanto, la sua derivata è:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{\omega} \times \vec{L} \\ \left| \frac{d\vec{L}}{dt} \right| &= \omega |\vec{L}| \sin \alpha \\ &= \frac{mA^2}{2} \omega^2 \cos \alpha \sin \alpha \end{aligned}$$

Poiché  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{est}$ , deve esistere un momento torcente esterno,  $\vec{M}^{est}$ , che agisce sul sistema. Effettivamente, ciascuna massa è sottoposta ad una forza centripeta

$$F_k = m\omega^2 r_\perp = m\omega^2 \frac{A}{2} \cos \alpha$$

che la mantiene sulla traiettoria circolare. Questa produce un momento torcente di modulo

$$\begin{aligned} |\vec{M}_k| &= F_k r_k \sin(\pi - \alpha) = \left(m\omega^2 \frac{A}{2} \cos \alpha\right) \cdot \left(\frac{A}{2} \sin \alpha\right) \\ &= m\omega^2 \frac{A^2}{4} \cos \alpha \sin \alpha \end{aligned}$$

I momenti torcenti applicati alle due masse sono uguali e concordi, quindi il momento torcente esterno ha modulo:

$$|\vec{M}^{est}| = |\vec{M}_1| + |\vec{M}_2| = m\omega^2 \frac{A^2}{2} \cos \alpha \sin \alpha$$

Come ci si aspettava, abbiamo trovato  $\left|\frac{d\vec{L}}{dt}\right| = |\vec{M}^{est}|$ .

### 19.8.1 Dinamica della rotazione intorno a un asse fisso

Riprendiamo le Eq. (19.60):

$$\begin{aligned} \vec{L}_\parallel &= \underbrace{\left(\sum_i m_i \rho_i^2\right)}_I \vec{\omega} = I \vec{\omega} \\ \vec{L}_\perp &= -\omega \left(\sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i\right) \end{aligned}$$

La componente  $\vec{L}_\perp$  è una combinazione lineare di vettori  $\vec{\rho}_i$ , tutti rotanti intorno all'asse con velocità angolare  $\omega$ , quindi anche  $\vec{L}_\perp$  ruota allo stesso modo. La sua derivata temporale è complicata: dipende dalla rotazione del termine  $\left(\sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i\right)$  e dalla variazione di  $\omega$ .

Quindi ci concentriamo su  $\vec{L}_\parallel$ . La quantità

$$I = \sum_i m_i \rho_i^2 \tag{19.61}$$

si chiama *momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione*. Essendo il corpo rigido, tutte le distanze  $\rho_i$  dall'asse sono costanti, quindi anche  $I$  è costante. Pertanto, la variazione temporale di  $\vec{L}_{\parallel}$  è:

$$\frac{d\vec{L}_{\parallel}}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \vec{\alpha} \quad (19.62)$$

Quando si conosce il momento torcente esterno, ed in particolare la sua componente  $\vec{M}_{\parallel}$  parallela all'asse di rotazione, si può facilmente scrivere la legge del moto:

$$\vec{M}_{\parallel} = \frac{d\vec{L}_{\parallel}}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \vec{\alpha} \quad (19.63)$$

### 19.8.2 Teorema di Huygens-Steiner per rotazioni intorno a un asse fisso

Si può definire il momento di inerzia  $I^*$ , relativo ad un asse  $\hat{z}^*$ , parallelo a  $\hat{z}$  e passante per il centro di massa. La relazione fra  $I$  e  $I^*$  si ricava dal teorema di Huygens-Steiner, Eq. (19.31): in questo caso siamo interessati a  $I_{zz}$ , che qui abbiamo semplicemente chiamato  $I$ . La relazione è

$$I = I^* + m(x_{cm}^2 + y_{cm}^2)$$

Indicando con  $\rho_{cm} = \sqrt{x_{cm}^2 + y_{cm}^2}$  la distanza del centro di massa dall'asse di rotazione, il teorema di Huygens-Steiner dà la relazione:

$$I = I^* + m\rho_{cm}^2 \quad (19.64)$$

### 19.8.3 Moto del “pendolo fisico”

Si chiama “pendolo fisico” un corpo rigido vincolato a ruotare intorno ad un asse fisso orizzontale, immerso in un campo gravitazionale  $\vec{g}$  uniforme, come illustrato in Fig. 19.12.

Le forze agenti sono la forza-peso e le reazioni vincolari dell'asse di rotazione. Queste ultime, avendo braccio nullo, non producono nessun momento torcente. Pertanto il momento torcente è dato solo dalla forza-peso e vale:

$$\vec{M}_g = \vec{\rho}_{cm} \times (m\vec{g}) \quad (19.65)$$

Siccome ci interessa la rotazione intorno all'asse fisso, possiamo scrivere l'equazione in forma scalare. Indicando con  $\phi$  l'angolo formato dall'asse che va dall'asse di rotazione al centro di massa, e con  $\rho_{cm}$  la distanza di questi, si trova

$$M_g = -mg\rho_{cm} \sin \phi \quad (19.66)$$

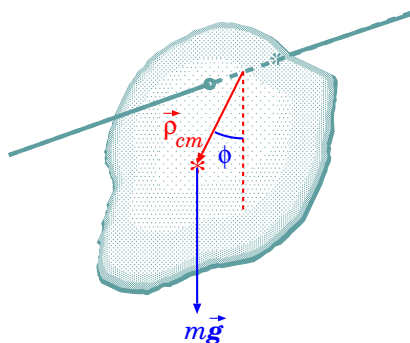


Figura 19.12: Pendolo fisico che oscilla ruotando intorno ad un asse fisso.

Il momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione è  $I = I^* + m\rho_{cm}^2$ , pertanto il momento angolare è

$$L = \underbrace{(I^* + m\rho_{cm}^2)}_I \frac{d\phi}{dt}$$

Il momento di inerzia  $I$  è costante, pertanto l'equazione del moto,  $\frac{dL}{dt} = M_g$ , diventa:

$$(I^* + m\rho_{cm}^2) \frac{d^2\phi}{dt^2} = -mg\rho_{cm} \sin\phi \quad (19.67)$$

Come fatto per il pendolo semplice, nel regime di piccole oscillazioni si può approssimare  $\sin\phi \simeq \phi$ , e l'Eq. (19.67) diventa

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{mg\rho_{cm}}{I^* + m\rho_{cm}^2} \phi \quad (19.68)$$

Questa è l'equazione differenziale di un moto oscillatorio armonico, con frequenza angolare

$$\Omega = \sqrt{\frac{mg\rho_{cm}}{I^* + m\rho_{cm}^2}} \quad (19.69)$$

e periodo

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I^* + m\rho_{cm}^2}{mg\rho_{cm}}} \quad (19.70)$$

Si noti che, nel limite di pendolo semplice, in cui  $I^* \ll m\rho_{cm}^2$ , questa equazione si riduce a  $\Omega \xrightarrow{I^* \rightarrow 0} \sqrt{\frac{g}{\rho_{cm}}}$ , ovvero come se tutta la massa del pendolo fisico fosse concentrata nel centro di massa. Viceversa, quando

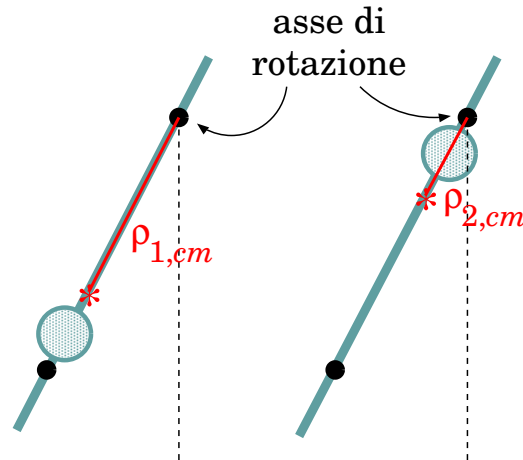


Figura 19.13: Pendolo reversibile di Kater: in nero, i perni che possono essere usati come assi di rotazione; la grossa massa circolare è spostabile, in modo da modificare i momenti di inerzia  $I_1$ ,  $I_2$  rispetto ai due assi.

$I^*$  non è trascurabile, la frequenza angolare subisce alterazione rispetto al pendolo semplice.

### Il pendolo reversibile di Kater

La distanza  $\rho_{cm}$  del centro di massa dall'asse di rotazione, e il momento di inerzia  $I^*$  rispetto all'asse passante per il centro di massa, che compaiono nelle Eq. (19.69) e Eq. (19.70), sono in generale difficili da calcolare. Il “pendolo di Kater” aggira questo problema. Si tratta di un pendolo “reversibile”, in cui cioè sono disponibili due perni, che possono essere usati uno alla volta come assi di rotazione — vd Fig. 19.13. Sul pendolo sono poste masse spostabili, in modo da poter modificare la posizione del centro di massa, e quindi le frequenze angolari  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  corrispondenti ai due assi, fino a renderle uguali:  $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ . Applicando l'Eq. (19.69) a entrambi gli assi si trova:

$$\begin{aligned}\Omega^2 &= \frac{mg\rho_{1,cm}}{I^* + m\rho_{1,cm}^2} \\ &= \frac{mg\rho_{2,cm}}{I^* + m\rho_{2,cm}^2}\end{aligned}$$

Con un po' di algebra, si trova:

$$\begin{aligned}\rho_{1,cm}(I^* + m\rho_{2,cm}^2) &= \rho_{2,cm}(I^* + m\rho_{1,cm}^2) \\ m\rho_{1,cm}\rho_{2,cm}(\rho_{2,cm} - \rho_{1,cm}) &= I^*(\rho_{2,cm} - \rho_{1,cm})\end{aligned}$$

Se i due “bracci”  $\rho_{1,cm}$ ,  $\rho_{2,cm}$  sono diversi — e quindi se sono diversi i due momenti di inerzia  $I_1$ ,  $I_2$  rispetto ai due assi, si trova che  $I^* = m\rho_{1,cm}\rho_{2,cm}$ .

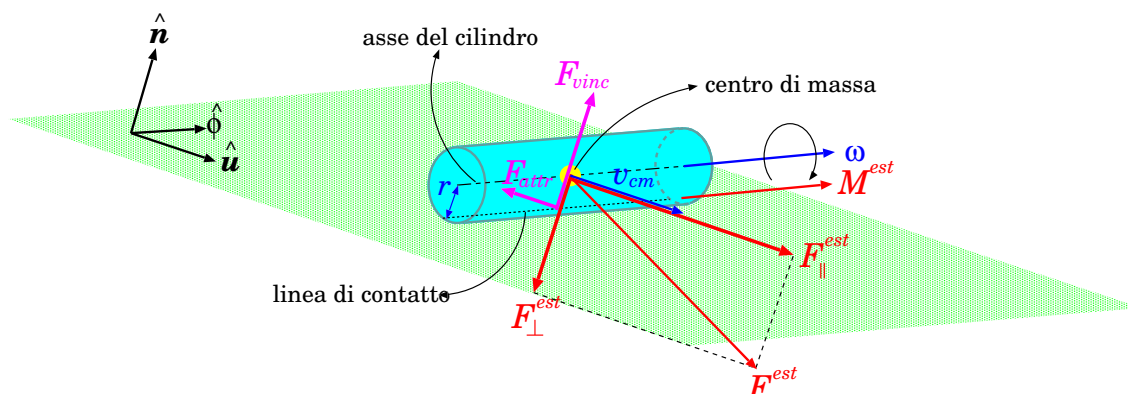


Figura 19.14: Rotolamento di un cilindro rigido su una superficie.

Inserendo questo risultato nella formula di  $\Omega^2$  si trova:

$$\Omega^2 = \frac{g}{\rho_{1,cm} + \rho_{2,cm}}$$

Ora,  $\rho_{1,cm}$  e  $\rho_{2,cm}$  non sono direttamente misurabili — bisognerebbe sapere dov'è il centro di massa! Ma se si costruisce il pendolo con una buona simmetria, in modo che il centro di massa sia lungo la congiungente dei due assi di rotazione, allora  $\rho_{1,cm} + \rho_{2,cm}$  è semplicemente la distanza fra tali assi. Pertanto  $\Omega$  risulta calcolabile.

Il pendolo reversibile di Kater consente di effettuare misure molto precise di  $g$ . La misura di  $\Omega$  si ottiene lasciando oscillare il pendolo per molto tempo, cosicché l'incertezza relativa sul periodo può essere ridotta in linea di principio a piacere.

## 19.9 Rotolamento su una superficie

Consideriamo un moto di puro rotolamento (cioè senza strisciamento) di un oggetto a *simmetria cilindrica*, su una superficie. Qui per “simmetria cilindrica” ci riferiamo sia alla forma esteriore che alla distribuzione interna della massa, cosicché possiamo assumere che l'asse di simmetria contenga anche il centro di massa.

I parametri dell'oggetto dunque sono:

- $m$  massa
- $r$  raggio e distanza fra centro di massa e linea di contatto
- $I^*$  momento di inerzia rispetto all'asse di simmetria

L'oggetto in generale è soggetto a diverse forze esterne, che producono una risultante  $\vec{F}^{(est)}$  e un momento torcente  $\vec{M}^{(est)}$ . Per caratterizzare



gli orientamenti, introduciamo 3 versori:  $\hat{\mathbf{u}}$  parallelo alla superficie,  $\hat{\mathbf{n}}$  perpendicolare ad essa e diretto verso l'esterno,  $\hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{u}}$ . Assumiamo inoltre che  $\vec{\mathbf{M}}^{(est)}$  e  $\vec{\boldsymbol{\omega}}$  siano sempre diretti come  $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ , cosicché le loro direzioni siano fissate e possiamo trattarle come quantità scalari,  $M^{(est)}$ ,  $\omega$ . Inoltre esistono la reazione vincolare della superficie,  $\vec{\mathbf{F}}_{vinc}$ , e l'attrito statico  $\vec{\mathbf{F}}_{attr}$  che impedisce lo scivolamento. Il polo, per definire momenti torcenti e momento angolare, viene scelto sulla linea di contatto: in questo modo  $\vec{\mathbf{F}}_{attr}$ ,  $\vec{\mathbf{F}}_{vinc}$  hanno braccio nullo e non producono momento torcente. La situazione è illustrata in Fig. 19.14.

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{F}}_{vinc} &= F_{vinc} \hat{\mathbf{n}} && \text{reazione vincolare} \\ \vec{\mathbf{F}}_{attr} &= F_{attr} \hat{\mathbf{u}} && \text{forza di attrito statico} \\ \vec{\mathbf{F}}^{(est)} &= F_{\perp}^{(est)} \hat{\mathbf{n}} + F_{\parallel}^{(est)} \hat{\mathbf{u}} && \text{risultante delle forze esterne} \\ \vec{\mathbf{M}}^{(est)} &= M^{(est)} \hat{\boldsymbol{\phi}} && \text{momento torcente totale esterno} \end{aligned}$$

La dinamica del moto è caratterizzata dalla velocità di traslazione del centro di massa,  $v_{cm}$ , e dalla velocità angolare di rotazione,  $\omega$ . Queste due variabili però non sono indipendenti. Infatti, chiamando  $Q$  un punto di contatto fra oggetto e superficie, deve essere ovviamente  $\vec{\mathbf{v}}_Q = 0$ . D'altra parte, scegliendo il centro di massa come polo, e usando l'Eq. (19.2),

$$0 = \vec{\mathbf{v}}_Q = \vec{\mathbf{v}}_{cm} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\mathbf{r}}_Q - \vec{\mathbf{r}}_{cm})$$

Siccome  $\vec{\mathbf{v}}_{cm} = v_{cm} \hat{\mathbf{u}}$ ,  $\vec{\boldsymbol{\omega}} = \omega \hat{\boldsymbol{\phi}}$ ,  $\vec{\mathbf{r}}_Q - \vec{\mathbf{r}}_{cm} = -r \hat{\mathbf{n}}$ , si ottiene

$$v_{cm} \hat{\mathbf{u}} = -(\omega \hat{\boldsymbol{\phi}}) \times (-r \hat{\mathbf{n}}) = \omega r (\hat{\boldsymbol{\phi}} \times \hat{\mathbf{n}}) = \omega r \hat{\mathbf{u}}$$

ovvero

$$v_{cm} = \omega \cdot r \tag{19.71}$$

Quindi, il corpo che rotola senza strisciare ha un solo grado di libertà.

Per studiarne il moto, calcoliamo la risultante delle forze, nelle direzioni  $\hat{\mathbf{n}}$  e  $\hat{\mathbf{u}}$ .

Nella direzione  $\hat{\mathbf{n}}$  la risultante delle forze,  $(F_{vinc} + F_{\perp}^{(est)}) \hat{\mathbf{n}}$ , deve produrre la forza centripeta totale. Se la superficie è convessa/concava, essa sarà diretta verso l'interno/esterno. Se la superficie è piana, essa sarà nulla: non c'è spostamento, perché il corpo deve aderire alla superficie. Quindi deve essere

$$F_{vinc} + F_{\perp}^{(est)} = \begin{cases} -m \frac{v_{cm}^2}{\rho} & (\text{superficie convessa}) \\ +m \frac{v_{cm}^2}{\rho} & (\text{superficie concava}) \\ 0 & (\text{superficie piana}) \end{cases} \quad (19.72)$$

essendo  $\rho$  il raggio di curvatura della superficie. Poiché la reazione vincolare deve essere sempre uscente dalla superficie di appoggio, deve essere  $F_{vinc} > 0$  sempre.

Nella direzione  $\hat{\mathbf{u}}$  l'accelerazione del centro di massa  $a_{cm}$  deve soddisfare

$$m a_{cm} = F_{attr} + F_{\parallel}^{(est)} \quad (19.73)$$

Questa equazione, da sola, non è sufficiente a risolvere il moto, perché non conosciamo il valore di  $F_{attr}$ : sappiamo solo che deve essere

$$|F_{attr}| < \mu_s \cdot F_{vinc} \quad (19.74)$$

Resta il momento torcente. Scegliendo come polo il punto  $Q$  di contatto, la forza di attrito e la reazione vincolare non hanno braccio, quindi non producono momento torcente. L'unico contributo al momento torcente viene da  $M^{(est)}$ :

$$M_{tot} = M^{(est)} \quad (19.75)$$

Ora,  $M_{tot} = \frac{dL}{dt}$ , e  $L = L_{cm} + L^* = mrv_{cm} + L^*$ . Inoltre,  $L^* = I^*\omega = \frac{I^*}{r}v_{cm}$ . Quindi:

$$\begin{aligned} L &= \left( mr + \frac{I^*}{r} \right) v_{cm} \\ M_{tot} &= \frac{d}{dt} \left[ \left( mr + \frac{I^*}{r} \right) v_{cm} \right] = \left( mr + \frac{I^*}{r} \right) \cdot a_{cm} \end{aligned} \quad (19.76)$$

ovvero, usando l'Eq. (19.75):

$$a_{cm} = \frac{r M^{(est)}}{mr^2 + I^*} \quad (19.77)$$

Questa è la soluzione per l'accelerazione dell'oggetto che rotola.

Incidentalmente, ora che conosciamo  $a_{cm}$ , possiamo calcolare la forza di attrito statico, utilizzando l'Eq. (19.73).

Una osservazione: la relazione  $L = \left( mr + \frac{I^*}{r} \right) v_{cm}$  — la prima delle Eq. (19.76) — si può ricavare anche in un altro modo: si assume come polo il punto di appoggio  $Q$  e si usa il momento di inerzia rispetto all'asse passante per quel polo: per il teorema di Huygens-Steiner esso vale  $I = I^* + mr^2$ . Poi si considera la velocità angolare rispetto all'asse di rotazione passante per  $Q$ : essa è sempre  $\omega$ , perché non dipende dalla scelta del polo. Quindi  $L = I \cdot \omega = (I^* + mr^2) \frac{v_{cm}}{r}$ , che è il risultato già trovato.

### 19.9.1 Rotolamento su un piano inclinato con forza-peso

Consideriamo il caso particolare in cui le forze esterne sono le forze-peso. La superficie sia un piano inclinato, che forma un angolo  $\theta$  rispetto all'orizzontale — vd Fig. 19.15. Allora:

$$\vec{F}^{(est)} = m\vec{g} = -mg \cos \theta \hat{n} + mg \sin \theta \hat{u} \quad (19.78)$$

Per il momento torcente occorre considerare solo la componente di  $\vec{F}_g$  perpendicolare a  $r$ , ovvero parallela a  $\hat{u}$ :

$$M^{(est)} = r \cdot (mg \sin \theta) \quad (19.79)$$

Nella direzione  $\hat{n}$  il bilancio delle forze è:

$$-mg \cos \theta + F_{vinc} = 0 \quad (19.80)$$

mentre nella direzione  $\hat{u}$

$$m a_{cm} = mg \sin \theta + F_{attr} \quad (19.81)$$

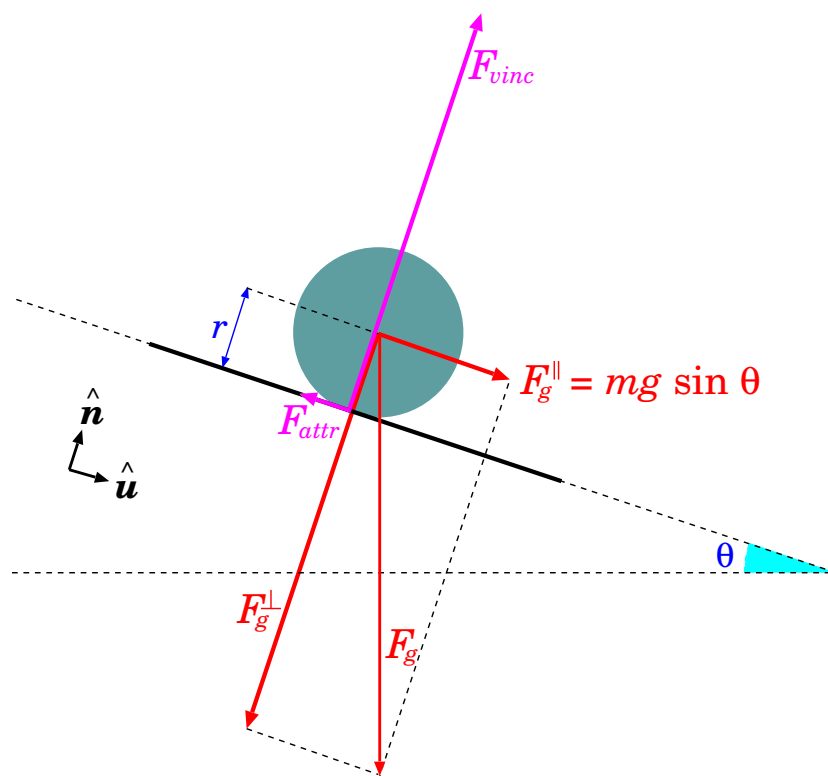


Figura 19.15: Oggetto cilindrico che rotola giù per un piano inclinato, senza strisciare.

Per risolvere il moto, facciamo uso del momento torcente: introduciamo l'Eq. (19.79) nell'Eq. (19.77):

$$a_{cm} = \frac{r^2 mg \sin \theta}{mr^2 + I^*} \quad (19.82)$$

La forza di attrito si calcola come:

$$\begin{aligned} F_{attr} &= ma_{cm} - mg \sin \theta \\ &= \frac{mr^2 (mg \sin \theta)}{mr^2 + I^*} - mg \sin \theta \\ &= -\frac{I^*}{mr^2 + I^*} mg \sin \theta \end{aligned} \quad (19.83)$$

Il problema dinamico è così risolto. Resta solo da verificare se la soluzione trovata per  $F_{attr}$  soddisfa la condizione di attrito statico, Eq. (19.74). Deve

essere:

$$\begin{aligned} |F_{attr}| &< \mu_s \cdot F_{vinc} \\ \frac{I^*}{mr^2 + I^*} mg \sin \theta &< \mu_s mg \cos \theta \end{aligned}$$

ovvero

$$\tan \theta < \mu_s \left( 1 + \frac{mr^2}{I^*} \right)$$

### 19.9.2 Rotolamento ed energia meccanica

Possiamo risolvere il problema anche con l'energia meccanica:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \mathcal{E}^* + \frac{m}{2} v_{cm}^2 = \frac{I^*}{2} \omega^2 + \frac{m}{2} v_{cm}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{I^*}{r^2} + m \right) v_{cm}^2 \\ \mathcal{U}_g &= mg z_{cm} \end{aligned}$$

L'attrito statico non compie lavoro, perché è applicato ad un punto che, istantaneamente, è fermo. Anche la reazione vincolare non compie lavoro, perché è sempre ortogonale alla superficie, mentre lo spostamento è parallelo.

La variazione di energia cinetica è

$$d\mathcal{E} = \left( \frac{I^*}{r^2} + m \right) v_{cm} dv_{cm} = \left( \frac{I^*}{r^2} + m \right) v_{cm} a_{cm} dt$$

Per la variazione di energia potenziale, bisogna ricordare che uno spostamento  $ds$  lungo  $\hat{\mathbf{u}}$  corrisponde ad una variazione di altezza  $dz_{cm} = -\sin \theta ds$ , quindi:

$$d\mathcal{U}_g = mg dz_{cm} = -mg \sin \theta ds = -mg \sin \theta v_{cm} dt$$

L'energia meccanica,  $E = \mathcal{E} + \mathcal{U}_g$ , si conserva, quindi:

$$\begin{aligned} 0 = dE &= d\mathcal{E} + d\mathcal{U}_g \\ &= \left[ \left( \frac{I^*}{r^2} + m \right) a_{cm} - mg \sin \theta \right] v_{cm} dt \\ \left( \frac{I^*}{r^2} + m \right) a_{cm} &= mg \sin \theta \end{aligned}$$

che è equivalente all'Eq. (19.82).

### 19.9.3 Alcuni esempi

Consideriamo diversi oggetti che rotolano senza strisciare giù per uno stesso piano inclinato, di pendenza  $\theta$ :

- (1) un cilindro pieno di acciaio di raggio  $r$ ;
- (2) un cilindro pieno di legno di raggio  $r$ ;
- (3) un cilindro pieno di acciaio di raggio  $2r$ ;
- (4) un cilindro cavo di spessore trascurabile, di raggio  $r$ ;
- (5) una sfera cava di spessore trascurabile, di raggio  $r$ ;
- (6) una sfera piena di raggio  $r$ ;
- (7) un cilindro di raggio  $r$ , leggerissimo, con al centro una sbarra cilindrica sottile massiva.

Detta  $\ell$  la lunghezza della discesa, quanto valgono i tempi di discesa per ciascun oggetto?

**Risposta.** In tutti i casi è un problema di moto rettilineo uniformemente accelerato: il tempo di discesa è  $\Delta t = \sqrt{\frac{2\ell}{a}}$ . Quindi si tratta di calcolare l'accelerazione, usando l'Eq. (19.82):

$$a = \frac{mr^2 g \sin \theta}{mr^2 + I^*} = \frac{g \sin \theta}{1 + \frac{I^*}{mr^2}}$$

Il punto-chiave è quindi calcolare  $1 + \frac{I^*}{mr^2}$  per i vari oggetti. Ci serviamo delle formule date nella Sezione 19.6.1:

oggetto $k$	$I^*$	$1 + \frac{I^*}{m_k r_k^2}$
(1-3) cilindro pieno	$\frac{m_k r_k^2}{2}$	1.5
(4) cilindro cavo	$m_k r_k^2$	2
(5) sfera cava	$\frac{2}{3} m_k r_k^2$	1.6667
(6) sfera piena	$\frac{2}{5} m_k r_k^2$	1.20
(7) cilindro leggero con sbarra massiva	$\sim 0$	1

L'oggetto che scende più rapidamente è il (7), con  $a = g \sin \theta$ ; tutti gli altri scendono più lentamente. L'accelerazione è tanto più piccola quanto più la massa dell'oggetto è distribuita verso la sua parte esterna: l'oggetto più lento è il cilindro cavo, seguito dalla sfera cava, poi dal cilindro pieno, infine dalla sfera piena. Fra i vari cilindri pieni non c'è differenza, a prescindere dal raggio e dal materiale, perché il rapporto  $\frac{I^*}{m r^2}$  non cambia. Lo stesso avverrebbe fra sfere piene.

## 19.10 Rotazioni in assenza di momento torcente

Studiamo il moto in assenza di momento torcente esterno:

$$\vec{M}^* = \sum_i \vec{r}_i^* \times \vec{F}_i^{(est)} = 0$$

Questo si può verificare in diverse condizioni:

- il corpo rigido non è soggetto ad alcuna forza esterna —  $\vec{F}_i^{(est)} = 0 \forall i$ ;
- il corpo rigido è sostenuto da una sospensione cardanica (vd Fig. 19.16), costruita per realizzare

$$\sum_i \vec{F}_i^{(est)} = 0 \quad ; \quad \sum_i \vec{r}_i^* \times \vec{F}_i^{(est)} = 0$$

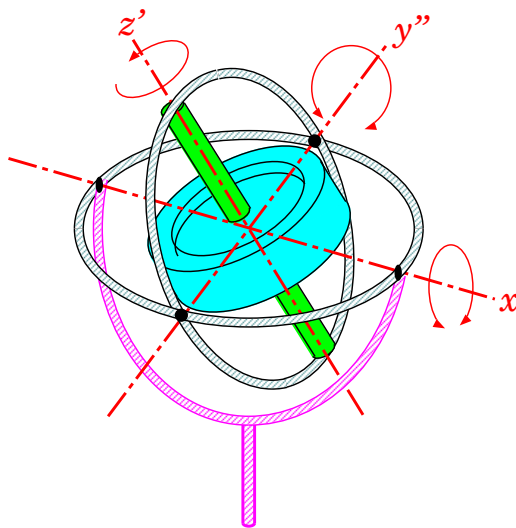


Figura 19.16: *Sospensione cardanica: la sospensione viola è fissa, mentre quelle circolari grigie possono ruotare liberamente, ciascuna intorno ad un asse. Il sistema di supporti consente libertà totale nelle rotazioni, mantenendo fermo il baricentro del corpo rigido sostenuto (giroscopio). L'asse  $x$  è fisso nel SRLAB; l'asse  $z'$  è uno degli assi principali del corpo, quindi è fisso nel SRSOL; infine l'asse  $y''$  fa parte del sostegno meccanico, può ruotare liberamente intorno all'asse  $x$ , ma non è fisso né in SRLAB né in SRSOL.*

- il corpo rigido è soggetto solo a forze gravitazionali:  $\vec{F}_i^{(est)} = m_i \vec{g}$ , con  $\vec{g}$  uniforme; in questo caso:

$$\vec{M}^* = \sum_i \vec{r}_i^* \times (m_i \vec{g}) = \underbrace{\left( \sum_i m_i \vec{r}_i^* \right)}_{=0} \times \vec{g} = 0$$

Nei primi due casi, il centro di massa non è soggetto a forze; nel terzo caso si muove secondo  $\frac{d^2 \vec{r}_{cm}}{dt^2} = \vec{g}$ .

In tutti i casi

$$\frac{d\vec{L}^*}{dt} = 0$$

Conviene studiare il moto nel SRSOL — da qui in poi omettiamo gli asterischi, per comodità. Le equazioni di Eulero del moto, Eq. (19.34), diventano:



$$\begin{aligned}
 I'_{xx} \frac{d\omega'_x}{dt} + (I'_{zz} - I'_{yy})\omega'_y\omega'_z &= 0 \\
 I'_{yy} \frac{d\omega'_y}{dt} + (I'_{xx} - I'_{zz})\omega'_x\omega'_z &= 0 \\
 I'_{zz} \frac{d\omega'_z}{dt} + (I'_{yy} - I'_{xx})\omega'_x\omega'_y &= 0
 \end{aligned} \tag{19.84}$$

Si tratta di equazioni differenziali *non lineari*, la cui soluzione analitica è in generale impossibile — e quindi vanno integrate al computer. Tuttavia possiamo dedurre alcune proprietà fondamentali.

### 19.10.1 Rotazione intorno a un asse principale

Anzitutto, *gli assi principali sono assi di rotazione costanti*, vale a dire, se  $\vec{\omega}$  in un certo istante è allineato con un asse principale, allora entrambi manterranno lo stesso orientamento nel tempo. Infatti, supponiamo che in un certo istante  $\vec{\omega}$  sia allineato con  $\hat{z}'$ : quindi deve essere

$$\omega'_x = 0 \quad ; \quad \omega'_y = 0$$

Allora le Eq. (19.84) diventano

$$\frac{d\omega'_x}{dt} = 0 \quad ; \quad \frac{d\omega'_y}{dt} = 0 \quad ; \quad \frac{d\omega'_z}{dt} = 0$$

cioè  $\omega'_x$ ,  $\omega'_y$  restano nulli, e  $\omega'_z$  resta costante. Inoltre,

$$\begin{aligned}
 \vec{L} &= L'_x \hat{x}' + L'_y \hat{y}' + L'_z \hat{z}' \\
 &= I'_{xx} \underbrace{\omega'_x}_{=0} \hat{x}' + I'_{yy} \underbrace{\omega'_y}_{=0} \hat{y}' + I'_{zz} \omega'_z \hat{z}' \\
 &= I'_{zz} \omega'_z \hat{z}'
 \end{aligned}$$

Poiché, in assenza di  $\vec{M}$ ,  $\vec{L}$  deve essere costante, occorre che  $\hat{z}'$  mantenga lo stesso orientamento.

### 19.10.2 Precessione intorno a un asse principale

Che succede se l'asse di rotazione è discosto da un asse principale? Possiamo scomporre  $\vec{\omega}$  così:

$$\vec{\omega} = \omega'_x \hat{x}' + \omega'_y \hat{y}' + \omega'_z \hat{z}'$$

Se il corpo è a simmetria cilindrica intorno a  $\hat{z}'$ , allora  $I'_{xx} = I'_{yy}$ , e la terza delle Eq. (19.84) dice che

$$\frac{d\omega'_z}{dt} = 0 \quad (\text{simmetria cilindrica})$$

ovvero  $\omega'_z$  è costante.

Un risultato simile si ottiene anche per  $I'_{xx} \neq I'_{yy}$ , se l'asse di rotazione è molto vicino all'asse principale  $\hat{z}'$ , ovvero se  $|\omega'_x|, |\omega'_y| \ll |\omega'_z|$ . In tal caso, la terza delle Eq. (19.84) dice che  $\frac{d\omega'_z}{dt} \propto \omega'_x \omega'_y$ : essendo  $\omega'_x, \omega'_y$  molto piccoli, il loro prodotto  $\omega'_x \omega'_y$  lo è ancora di più, risultando trascurabile. Quindi possiamo assumere  $\omega'_z$  costante <sup>[9]</sup>:

$$\frac{d\omega'_z}{dt} \simeq 0 \quad (\text{se } |\omega'_x|, |\omega'_y| \ll |\omega'_z|)$$

In entrambi i casi, le prime due delle Eq. (19.84) diventano:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega'_x}{dt} &= - \underbrace{\left( \frac{I'_{zz} - I'_{yy}}{I'_{xx}} \omega'_z \right)}_A \omega'_y \\ \frac{d\omega'_y}{dt} &= \underbrace{\left( \frac{I'_{zz} - I'_{xx}}{I'_{yy}} \omega'_z \right)}_B \omega'_x \end{aligned} \quad (19.85)$$

dove i termini  $A, B$  sono da considerare costanti.

Vogliamo mostrare che, se  $I'_{zz}$  è il massimo o il minimo fra i 3 momenti di inerzia principali, l'asse  $\hat{z}'$  è un asse di rotazione stabile, e che le componenti  $(\omega'_x, \omega'_y)$  di  $\vec{\omega}$  ruotano attorno a  $\hat{z}'$ , formando un *moto di precessione*. Viceversa, se  $I'_{zz}$  è il momento di inerzia intermedio, l'asse di rotazione è instabile.

Il sistema di equazioni differenziali ottenute, Eq. (19.85), è lineare e si risolve analiticamente. Per esempio, deriviamo la prima equazione:

$$\frac{d^2\omega'_x}{dt^2} = -A \frac{d\omega'_y}{dt}$$

<sup>9</sup> Altro approccio:  $|\vec{L}|^2 = (I'_{xx}\omega'_x)^2 + (I'_{yy}\omega'_y)^2 + (I'_{zz}\omega'_z)^2$  deve essere costante; quindi  $|\omega'_z| = \frac{1}{I'_{zz}} \sqrt{|\vec{L}|^2 - (I'_{xx}\omega'_x)^2 - (I'_{yy}\omega'_y)^2}$  subisce variazioni che sono proporzionali a  $(\omega'_x)^2, (\omega'_y)^2$ , dunque molto piccole.

e poi applichiamo la seconda:

$$\frac{d^2\omega'_x}{dt^2} = -AB \cdot \omega'_x \quad (19.86)$$

essendo

$$AB = \frac{(I'_{zz} - I'_{xx})(I'_{zz} - I'_{yy})}{I'_{xx}I'_{yy}} (\omega'_z)^2 \quad (19.87)$$

La soluzione per  $\omega'_x$ ,  $\omega'_y$  dipende dal segno di  $AB$ :

- se  $AB < 0$  (quindi  $-AB = |AB|$ ), la soluzione è  $\omega'_{x,y} = W_{x,y} e^{\pm\sqrt{|AB|} t}$ . Quindi  $\omega'_x$ ,  $\omega'_y$  possono divergere esponenzialmente, il che vuol dire che una piccola deviazione dall'asse  $\hat{z}'$  si amplifica rapidamente. L'asse di rotazione è dunque *instabile*. Questa condizione si verifica per:

$$\left. \begin{array}{l} I'_{xx} < I'_{zz} < I'_{yy} \\ \text{oppure} \\ I'_{yy} < I'_{zz} < I'_{xx} \end{array} \right\} \implies \hat{z}' \text{ è un asse di rotazione instabile}$$

- se  $AB > 0$ , l'Eq. (19.86) è la nota equazione del moto armonico, con frequenza angolare  $\Omega = \sqrt{AB}$ . La soluzione è della forma  $\omega'_x = W_x \cos(\Omega t + \phi)$ , dove la costante di proporzionalità  $W_x$  dipende dalla condizione iniziale. Ora si può ricavare anche  $\omega'_y$ , dalla prima delle Eq. (19.85), ottenendo:

$$\begin{aligned} \omega'_x &= W_x \cos(\Omega t + \phi) \\ \omega'_y &= W_y \sin(\Omega t + \phi) \end{aligned} \quad \left( W_y = \frac{\Omega}{A} W_x = \frac{B}{\Omega} W_x \right) \quad (19.88)$$

Quindi  $\omega'_x$ ,  $\omega'_y$  sono oscillanti, con frequenza angolare

$$\Omega = \sqrt{\frac{(I'_{zz} - I'_{xx})(I'_{zz} - I'_{yy})}{I'_{xx}I'_{yy}}} \omega'_z \quad (19.89)$$

il che vuol dire che una piccola deviazione dall'asse  $\hat{z}'$  resta confinata. In questo caso l'asse di rotazione è *stabile*. La condizione  $AB > 0$  si verifica per:

$$\left. \begin{array}{l} I'_{zz} > I'_{xx} \ ; \ I'_{zz} > I'_{yy} \\ \text{oppure} \\ I'_{zz} < I'_{xx} \ ; \ I'_{zz} < I'_{yy} \end{array} \right\} \implies \hat{z}' \text{ è un asse di rotazione stabile}$$

Per un corpo rigido a simmetria cilindrica,  $I'_{xx} = I'_{yy}$ , quindi dall'Eq. (19.87) è sempre  $AB > 0$ , cioè l'asse  $\hat{z}'$  è sempre stabile, e si ha sempre precessione di  $\vec{\omega}$  attorno a  $\hat{z}'$ .

### 19.10.3 Precessione, come appare nel SRCM (\*)

Nei casi in cui  $(\omega'_x, \omega'_y)$  ruota intorno a  $\hat{z}'$ , valgono le Eq. (19.88). In termini di componenti del momento angolare, si ottiene:

$$\begin{aligned} L'_x &= I'_{xx}\omega'_x = W\sqrt{I'_{xx}(I'_{zz} - I'_{yy})}\omega'_z \cos(\Omega t + \phi) \\ L'_y &= I'_{yy}\omega'_y = W\sqrt{I'_{yy}(I'_{zz} - I'_{xx})}\omega'_z \sin(\Omega t + \phi) \end{aligned} \quad (19.90)$$

quindi, anche  $\vec{L}$  “precede” intorno a  $\hat{z}'$  con la frequenza angolare  $\Omega$ , data dall'Eq. (19.89), che è detta *frequenza angolare di precessione*.

D'altronde, nel SRCM, in assenza di momento torcente,  $\vec{L}^*$  deve essere costante. Quindi in realtà  $\hat{z}'$  ruota intorno a  $\vec{L}$ , e  $\vec{\omega}$  ruota intorno a  $\hat{z}'$ . Il moto nel SRCM può diventare anche parecchio complicato.

Proviamo (proviamo!) a farci un'idea di come appare il moto nel SRCM. Per seguire il ragionamento, fare riferimento alla Fig. 19.17.

Nel SRSOL abbiamo calcolato come evolvono  $(\omega'_x, \omega'_y)$  e  $(L'_x, L'_y)$ . In termini di scostamento angolare da  $\hat{z}'$ , possiamo esprimerli come:

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_{z'}^{SRSOL}(\omega) &\equiv \left( \frac{\omega'_x}{\omega'_z}, \frac{\omega'_y}{\omega'_z} \right) \\ \vec{\alpha}_{z'}^{SRSOL}(L) &\equiv \left( \frac{L'_x}{L'_z}, \frac{L'_y}{L'_z} \right) \end{aligned}$$

Ora ricordiamo che  $\hat{z}'$  ruota attorno a  $\vec{\omega}$ , quindi tutte le quantità  $\vec{\alpha}_{z'}^{SRSOL}(\dots)$  vanno ri-esprese come scostamenti angolari rispetto a  $\vec{\omega}$ :

$$\begin{aligned} \vec{\Delta}^{SRSOL}(z') &= -\vec{\alpha}_{z'}^{SRSOL}(\omega) \\ \vec{\Delta}^{SRSOL}(L) &= \vec{\alpha}_{z'}^{SRSOL}(L) - \vec{\alpha}_{z'}^{SRSOL}(\omega) \end{aligned}$$

Poi, tutte le quantità  $\vec{\Delta}^{SRCM}(\dots)$  vanno espresse nel SRCM applicando una rotazione nel piano, di un angolo  $\phi = \omega'_z t$ :

$$\begin{aligned} \Delta_x^{SRCM} &= \cos \phi \cdot \Delta_x^{SRSOL} - \sin \phi \cdot \Delta_y^{SRSOL} \\ \Delta_y^{SRCM} &= \sin \phi \cdot \Delta_x^{SRSOL} + \cos \phi \cdot \Delta_y^{SRSOL} \end{aligned}$$

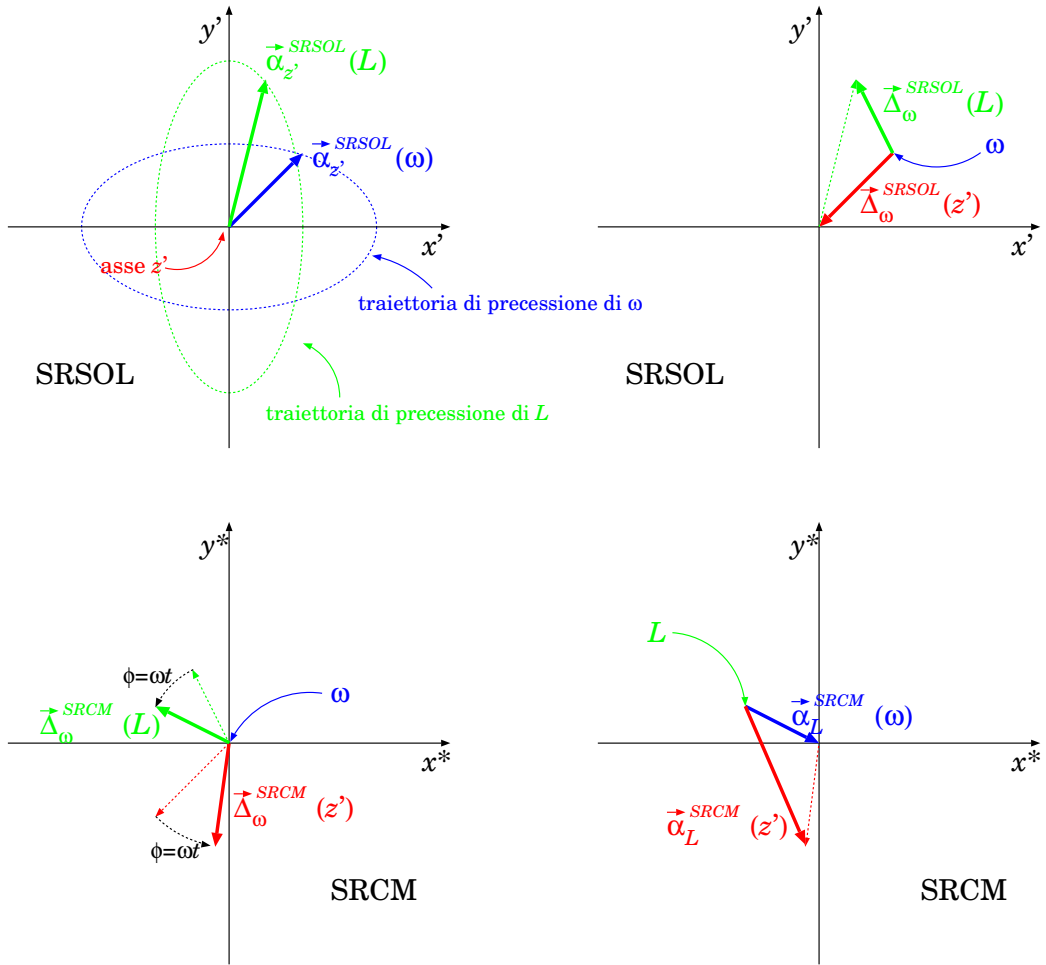


Figura 19.17: Definizione delle variabili usate per studiare il moto del corpo rigido nel SRCM.

Infine, tutte le deviazioni vanno poi riferite all'asse di  $\vec{L}^*$ , che è fisso nel SRCM:

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_L^{SRCM}(z') &= \vec{\Delta}^{SRCM}(z') - \vec{\Delta}^{SRCM}(L) \\ \vec{\alpha}_L^{SRCM}(\omega) &= -\vec{\Delta}^{SRCM}(L) \end{aligned}$$

Questi passaggi sono stati implementati in un programma che traccia la precessione degli scostamenti angolari di  $\hat{z}'$ ,  $\vec{\omega}$  da  $\vec{L}^*$ . Il risultato è mostrato in Fig. 19.18, per diverse configurazioni dei momenti di inerzia. In generale il moto appare regolare quando  $I'_{xx} = I'_{yy}$ ; in caso contrario appaiono moti “a rosetta”.

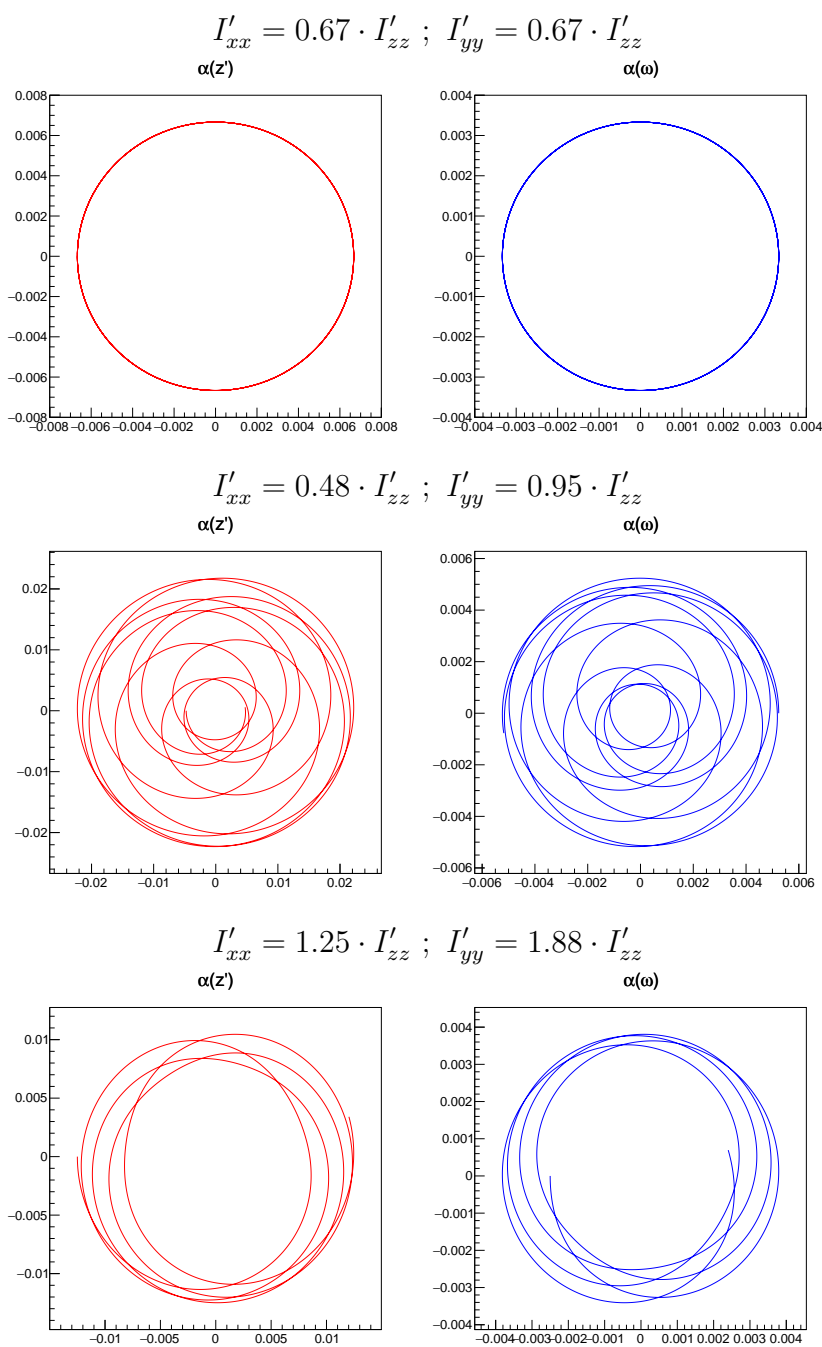
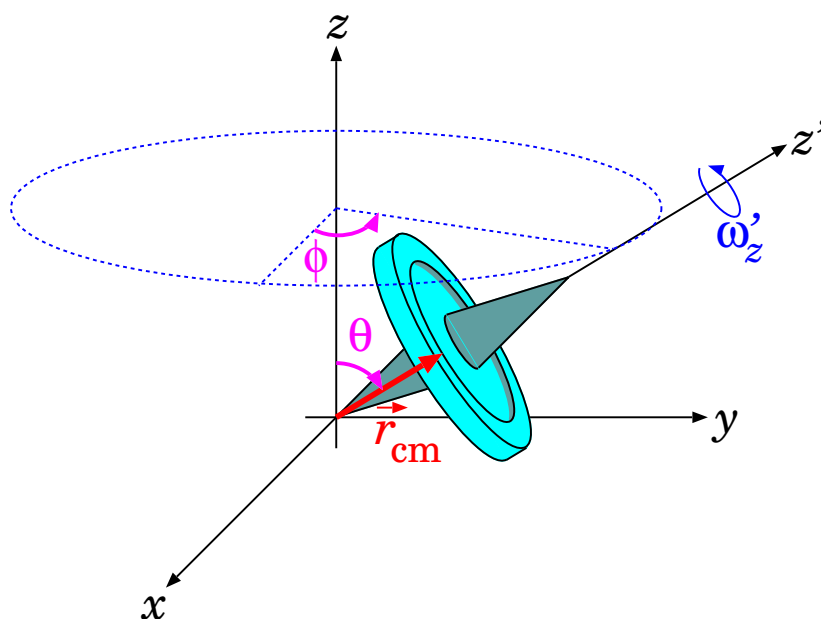


Figura 19.18: Evoluzione di  $\hat{\mathbf{z}}'$  (a sinistra) e di  $\vec{\boldsymbol{\omega}}$  (a destra) nel SRCM: all'origine c'è la direzione di  $\vec{\mathbf{L}}^*$ , che è fissa nello spazio. Le diverse righe rappresentano diverse configurazioni di  $I'_{xx}$ ,  $I'_{yy}$ ,  $I'_{zz}$ .

Figura 19.19: *La trottola simmetrica.*

## 19.11 La trottola simmetrica

Consideriamo un corpo rigido dotato di simmetria cilindrica attorno ad un suo asse  $\hat{z}'$ , vincolato in un solo punto  $O$  (il polo), e soggetto alla forza-peso.

Se l'oggetto è in rapida rotazione attorno al suo asse  $\hat{z}'$ , l'effetto della forza-peso, anziché farlo cadere, è tale da indurre un moto di precessione attorno all'asse verticale  $\hat{z}$ . Questo fenomeno, apparentemente paradossale, si può comprendere attraverso la meccanica dei momenti angolari.

### 19.11.1 Trattazione semplice

Consideriamo la Fig. 19.19. Chiamiamo  $\vec{r}_{cm}$  la posizione del centro di massa del corpo. A causa della simmetria, il centro di massa si deve trovare sull'asse di simmetria  $\hat{z}'$ , pertanto

$$\vec{r}_{cm} = r_{cm} \hat{z}' \quad (19.91)$$

L'oggetto subisce un momento torcente a causa della forza-peso:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{r}_{cm} \times (-mg\hat{z}) \\ &= mgr_{cm} \hat{z} \times \hat{z}' \end{aligned} \quad (19.92)$$

Se l'oggetto è in rotazione molto rapida attorno a  $\hat{z}'$ , con velocità angolare  $\omega'_z$ , il suo momento angolare è *quasi completamente* dovuto a tale rotazione, pertanto:

$$\vec{L} \simeq I'_z \omega'_z \hat{z}' \quad (19.93)$$

Evidentemente, in questo caso  $\vec{M} \perp \vec{L}$ , pertanto  $\vec{L}$  deve avere modulo costante <sup>[10]</sup>. Quindi  $\vec{L}$  evolve nel tempo con un moto di precessione, attorno ad un vettore velocità angolare  $\vec{\omega}_p$ :

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega}_p \times \vec{L} \quad (19.94)$$

Riutilizzando l'Eq. (19.93) troviamo:

$$\vec{M} = I'_z \omega'_z \vec{\omega}_p \times \hat{z}'$$

e confrontando con l'Eq. (19.92) vediamo che una possibile soluzione è:

$$\vec{\omega}_p = \frac{mgr_{cm}}{I'_z \omega'_z} \hat{z} \quad (19.95)$$

Quindi, effettivamente, l'asse della precessione è l'asse verticale  $\hat{z}$ , e la velocità angolare di precessione è data che

$$\omega_p \equiv \dot{\phi} = \frac{mgr_{cm}}{I'_z \omega'_z} \quad (19.96)$$

La precessione è tanto più lenta quanto più rapida è la rotazione intorno all'asse  $\hat{z}'$ , quanto più grande è il momento di inerzia  $I'_z$ , e quanto più piccolo è  $r_{cm}$  — ovvero, il centro di massa è vicino al polo.

Un commento sull'Eq. (19.93): se avessimo messo un'uguaglianza esatta:

$$\vec{L} = I'_z \omega'_z \hat{z}' \quad (\text{sbagliato!})$$

avremmo trovato una possibile contraddizione. Supponiamo infatti che  $\hat{z}'$  sia perfettamente orizzontale: allora  $\vec{L}$  non avrebbe componente lungo  $\hat{z}$ ; eppure, a causa della precessione, tale componente dovrebbe esistere!

In effetti, esiste una soluzione più generale, della forma:

---

<sup>10</sup>

$$\frac{d|\vec{L}|^2}{dt} = 2\vec{L} \cdot \frac{d\vec{L}}{dt} = 2\vec{L} \cdot \vec{M} = 0$$



$$\begin{aligned}\vec{L} &= L'_z \hat{z}' + \mathcal{I} \vec{\omega}_p & (\mathcal{I}, \vec{\omega}_p \text{ costanti}) \\ &= I'_z \omega'_z \hat{z}' + \mathcal{I} \dot{\phi} \hat{z}\end{aligned}\quad (19.97)$$

(infatti il termine aggiuntivo,  $\mathcal{I} \vec{\omega}_p$ , è costante, dunque ha derivata nulla —  $\frac{d}{dt}(\mathcal{I} \vec{\omega}_p) = 0$  — e sicuramente soddisfa  $\vec{\omega}_p \times (\mathcal{I} \vec{\omega}_p) = 0$ ).

Se la rotazione è molto rapida,  $\dot{\phi} \ll \omega'_z$ , rimaniamo comunque nel regime  $\vec{L} \simeq L'_z \hat{z}'$ .

### 19.11.2 Trattazione generale del problema (\*)

Una trattazione generale è decisamente più complicata. Tuttavia può essere istruttiva, soprattutto per i lettori più curiosi, perché è un esempio di come un problema dinamico, intrinsecamente complicato, può essere trattato sfruttando le costanti del moto, cercando di comprendere l'andamento qualitativo, e in casi particolari ottenendo delle soluzioni.

#### Impostazione

Un corpo rigido con un punto vincolato ha 3 gradi di libertà: pertanto il suo moto è descritto da 3 variabili. Chiamando  $\hat{z}'$  il suo asse di simmetria, una di queste variabili è l'angolo di rotazione  $\psi$  intorno ad esso: non useremo più questa variabile, perché, vedremo, ciò che servirà sarà la sua derivata:

$$\omega'_z = \frac{d\psi}{dt}.$$

Le altre due variabili descrivono l'orientamento dell'asse di simmetria  $\hat{z}'$ , mediante un angolo polare  $\theta$  e un angolo azimuthale  $\phi$  (vd Fig. 19.19), cosicché:

$$\hat{z}' = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (19.98)$$

La rotazione del corpo rigido è descritta dalla combinazione di 2 velocità angolari: una è  $\omega'_z \hat{z}'$ ; l'altra è data da come l'asse  $\hat{z}'$  evolve nel tempo:

$$\frac{d\hat{z}'}{dt} = \vec{\Omega} \times \hat{z}' \quad (19.99)$$

Questa scrittura non determina completamente  $\vec{\Omega}$  — ne determina solo la componente perpendicolare a  $\hat{z}'$ . Per risolvere l'ambiguità scegliamo  $\vec{\Omega} \perp \hat{z}'$ :

$$\vec{\Omega} \equiv \Omega \hat{t} \quad (\text{essendo } \hat{t} \perp \hat{z}') \quad (19.100)$$

Questa scelta ha diversi vantaggi. Anzitutto, la velocità angolare del corpo rigido è:

$$\vec{\omega} = \omega'_z \hat{z}' + \Omega \hat{t} \quad (19.101)$$

Inoltre possiamo scrivere semplicemente il momento angolare totale del corpo. Infatti, nel SRSOL

$$\vec{L} = I'_x \omega'_x \hat{x}' + I'_y \omega'_y \hat{y}' + I'_z \omega'_z \hat{z}'$$

ma a causa della simmetria

$$I'_x = I'_y \equiv I_t$$

I 2 momenti di inerzia “trasversi” sono identici: nel SRSOL li chiameremmo  $I'_t$ , ma siccome la rotazione attorno a  $\hat{z}'$  non produce cambiamenti nella disposizione del corpo visto da SRLAB,  $I'_t \equiv I_t$ . La velocità angolare trasversale a  $\hat{z}'$  è

$$\omega'_x \hat{x}' + \omega'_y \hat{y}' \equiv \Omega \hat{t}$$

quindi

$$I'_x \omega'_x \hat{x}' + I'_y \omega'_y \hat{y}' = I_t \Omega \hat{t}$$

e infine:

$$\vec{L} = I'_z \omega'_z \hat{z}' + I_t \Omega \hat{t} \quad (19.102)$$

### Costanti del moto

Il momento torcente — vedi Eq. (19.92) — è:

$$\vec{M} = mgr_{cm} \hat{z} \times \hat{z}'$$

pertanto è ortogonale sia a  $\hat{z}'$  che a  $\hat{z}$ .

Nel SRSOL, l'equazione di Eulero per  $\hat{z}'$  — vedi Eq. (19.34) è

$$M'_z = I'_z \frac{d\omega'_z}{dt} + (I'_y - I'_x) \omega'_x \omega'_y$$

Nel nostro caso,  $I'_y = I'_x$  per la simmetria; inoltre  $\vec{M} \perp \hat{z}'$ , quindi  $M'_z = 0$ ; pertanto  $\frac{d\omega'_z}{dt} = 0$ :

$$\begin{aligned} \omega'_z & \boxed{\text{costante}} \\ L'_z \equiv I'_z \omega'_z & \boxed{\text{costante}} \end{aligned} \quad (19.103)$$

(le 2 condizioni sono equivalenti)

Inoltre, nel SRLAB,  $M_z = 0$ , quindi  $\frac{dL_z}{dt} = 0$ , cioè anche  $L_z$  è costante:

$$\begin{aligned} L_z &\equiv \hat{z} \cdot (I'_z \omega'_z \hat{z}' + I_t \Omega \hat{t}) \\ &= I'_z \omega'_z \cos \theta + I_t \Omega \hat{z} \cdot \hat{t} \quad \boxed{\text{costante}} \end{aligned} \quad (19.104)$$

L'energia cinetica è  $\mathcal{E} = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{L}}{2}$ ; pertanto, usando le Eq. (19.101) e Eq. (19.102):

$$\mathcal{E} = \frac{I'_z (\omega'_z)^2}{2} + \frac{I_t \Omega^2}{2} \quad (19.105)$$

L'energia potenziale gravitazionale è

$$\mathcal{U} = mgz_{cm} = mgr_{cm} \cos \theta \quad (19.106)$$

Le uniche forze agenti sono la forza-peso (conservativa) e la forza del vincolo — che non compie lavoro, essendo il vincolo statico. Quindi l'energia meccanica si conserva:

$$E = \mathcal{E} + \mathcal{U} = \frac{I'_z (\omega'_z)^2}{2} + \frac{I_t \Omega^2}{2} + mgr_{cm} \cos \theta$$

Abbiamo già visto — Eq. (19.103) — che  $\omega'_z$  è costante: quindi il termine  $\frac{I'_z (\omega'_z)^2}{2}$  nell'energia meccanica è inalterabile, non può mai scambiare energia con gli altri termini: tanto vale accorparlo con  $E$  ottenendo:

$$\begin{aligned} E' &\equiv E - \frac{I'_z (\omega'_z)^2}{2} \\ &= \frac{I_t \Omega^2}{2} + mgr_{cm} \cos \theta \quad \boxed{\text{costante}} \end{aligned} \quad (19.107)$$

Riassumendo: abbiamo 3 gradi di libertà:  $\omega'_z$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ . Il primo sappiamo che è costante, quindi ci interessa determinare come evolvono  $\theta$ ,  $\phi$ . Abbiamo anche due leggi di conservazione — per  $L_z$  e per  $E'$ : da qui dobbiamo partire per cercare la soluzione del moto.

**Verso la soluzione**

Le costanti del moto sono:

$$\begin{aligned} L_z &= I'_z \omega'_z \cos \theta + I_t \vec{\Omega} \cdot \hat{z} \\ E' &= \frac{I_t \Omega^2}{2} + mgr_{cm} \cos \theta \end{aligned} \quad (19.108)$$

Dobbiamo dunque esprimere  $\vec{\Omega}$  in funzione di  $\theta$ ,  $\phi$ . Dalle condizioni  $\frac{d\hat{z}'}{dt} = \vec{\Omega} \times \hat{z}'$  e  $\vec{\Omega} \perp \hat{z}'$  possiamo trovare:

$$\begin{aligned} \hat{z}' \times \frac{d\hat{z}'}{dt} &= \hat{z}' \times (\vec{\Omega} \times \hat{z}') = \vec{\Omega}(\hat{z}' \cdot \hat{z}') - \hat{z}'(\hat{z}' \cdot \vec{\Omega}) \\ &= \vec{\Omega} \end{aligned}$$

Quindi lavoriamo su  $\frac{d\hat{z}'}{dt}$ :

$$\begin{aligned} \hat{z}' &= \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \\ \frac{d\hat{z}'}{dt} &= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \dot{\theta} - \sin \theta \sin \phi \dot{\phi} \\ \cos \theta \sin \phi \dot{\theta} + \sin \theta \cos \phi \dot{\phi} \\ -\sin \theta \dot{\theta} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Facendo il prodotto vettoriale per componenti (provare per credere!):

$$\vec{\Omega} = \hat{z}' \times \frac{d\hat{z}'}{dt} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \dot{\theta} - \cos \theta \sin \theta \cos \phi \dot{\phi} \\ \cos \phi \dot{\theta} - \cos \theta \sin \theta \sin \phi \dot{\phi} \\ \sin^2 \theta \dot{\phi} \end{pmatrix}$$

In particolare

$$\vec{\Omega} \cdot \hat{z} = \sin^2 \theta \dot{\phi}$$

Infine, sempre lavorando sulle componenti di  $\vec{\Omega}$  (ancora: provare!),

troviamo <sup>[11]</sup>:

$$\Omega^2 = (\dot{\theta})^2 + \sin^2 \theta (\dot{\phi})^2$$

Sostituendo tutto nelle Eq. (19.108) si ottiene:

$$\begin{aligned} L_z &= L'_z \cos \theta + I_t \sin^2 \theta \dot{\phi} \\ E' &= \frac{I_t}{2} \left( (\dot{\theta})^2 + \sin^2 \theta (\dot{\phi})^2 \right) + mgr_{cm} \cos \theta \end{aligned} \quad (19.109)$$

Dalla prima equazione:

$$\sin \theta \dot{\phi} = \frac{L_z - L'_z \cos \theta}{I_t \sin \theta} \quad (19.110)$$

che, sostituita nella seconda, dà:

$$E' = \frac{I_t}{2} (\dot{\theta})^2 + \underbrace{\frac{(L_z - L'_z \cos \theta)^2}{2I_t \sin^2 \theta} + mgr_{cm} \cos \theta}_{\mathcal{U}_{eff}(\theta)} \quad (19.111)$$

Il termine

$$\mathcal{U}_{eff} = \frac{(L_z - L'_z \cos \theta)^2}{2I_t \sin^2 \theta} + mgr_{cm} \cos \theta \quad (19.112)$$

è un'energia potenziale efficace, che determina come evolvono  $\dot{\theta}$  e  $\theta$  — idealmente uno scriverebbe

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2(E' - \mathcal{U}_{eff}(\theta))}{I_t}} \quad (19.113)$$

---

<sup>11</sup> Il risultato che si ottiene era un po' aspettato. Immaginiamo che in un tempo  $dt$  abbiamo variazioni  $d\theta$ ,  $d\phi$  degli angoli. Su una sfera di raggio unitario, questo corrisponde a uno spostamento  $d\theta$  lungo un meridiano, e uno spostamento  $\sin \theta d\phi$  lungo un parallelo: quindi uno spostamento totale sulla superficie sferica  $d\alpha = \sqrt{(d\theta)^2 + (\sin \theta d\phi)^2}$ . Essendo la sfera unitaria,  $d\alpha$  è anche uno spostamento angolare, che viene eseguito nel tempo  $dt$ , pertanto con una velocità angolare  $\Omega = \frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{(\dot{\theta})^2 + (\sin \theta \dot{\phi})^2}$ . Nel testo abbiamo seguito una strada diversa, perché ci serviva determinare anche la direzione di  $\vec{\Omega}$  — questo secondo approccio può essere visto come “sanity check” dei nostri calcoli.

quindi potrebbe integrare (per via numerica, al computer) questa equazione e trovare  $\theta(t)$ . Poi, usando l'Eq. (19.110), si può trovare  $\dot{\phi}(t)$  a ogni istante, e integrando a sua volta trovare  $\phi(t)$ .

### Andamento qualitativo

La forma di  $\mathcal{U}_{eff}$  è matematicamente poco gestibile. Conviene fare un cambio di variabile:

$$\xi = \cos \theta$$

cosicché

$$\sin^2 \theta = 1 - \xi^2 \quad ; \quad \dot{\xi} = -\sin \theta \cdot \dot{\theta}$$

e le Eq. (19.109) e Eq. (19.111) diventano

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{L_z - L'_z \xi}{I_t(1 - \xi^2)} \\ \frac{I_t}{2} (\dot{\xi})^2 &= \underbrace{(1 - \xi^2)(E' - mgr_{cm}\xi) - \frac{(L_z - L'_z \xi)^2}{2I_t}}_{-u(\xi)} \end{aligned} \quad (19.114)$$

Abbiamo introdotto la funzione

$$u(\xi) = - \left[ (1 - \xi^2)(E' - mgr_{cm}\xi) - \frac{(L_z - L'_z \xi)^2}{2I_t} \right] \quad (19.115)$$

tale che  $u = \sin^2 \theta \cdot (\mathcal{U}_{eff} - E')$ .

Conviene introdurre 3 coefficienti adimensionali:

$$\gamma = \frac{E'}{mgr_{cm}} \quad ; \quad \alpha = \frac{L_z}{\sqrt{mgr_{cm} I_t}} \quad ; \quad \beta = \frac{L'_z}{\sqrt{mgr_{cm} I_t}} \quad (19.116)$$

e riscrivere le Eq. (19.114) e Eq. (19.115) così:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \sqrt{\frac{mgr_{cm}}{I_t}} \frac{\alpha - \beta\xi}{1 - \xi^2} \\ u(\xi) &= -mgr_{cm} \left[ (1 - \xi^2)(\gamma - \xi) - \frac{(\alpha - \beta\xi)^2}{2} \right] \end{aligned} \quad (19.117)$$

Cerchiamo di capire il comportamento qualitativo.

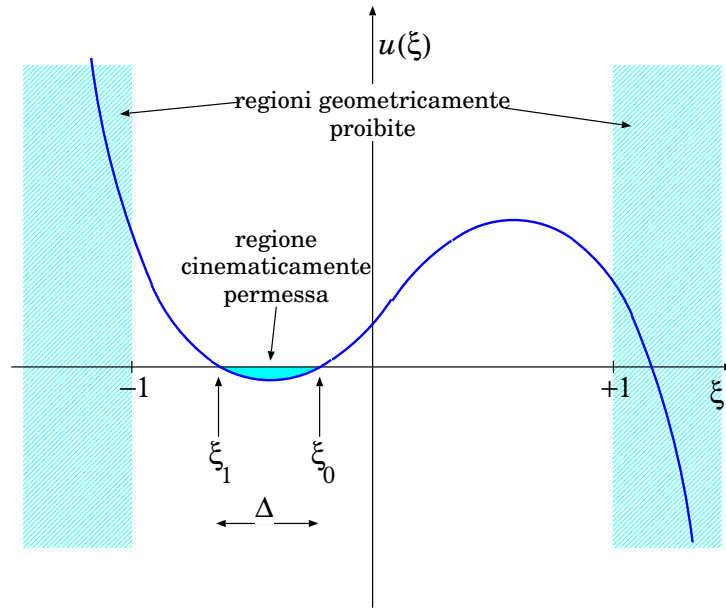


Figura 19.20: Grafico della funzione  $u(\xi)$  — essendo  $\xi = \cos \theta$ .

Anzitutto,  $u(\xi) = -mgr_{cm}\xi^3 + \dots$  è un polinomio di 3° grado, con primo coefficiente negativo; potrebbe essere monotono decrescente, oppure presentare una zona di inversione, con un minimo, un flesso, e un massimo (come in Fig. 19.20). Inoltre, derivando la 2ª delle Eq. (19.114), e dividendo per  $\dot{\xi}$  si ricava:

$$\ddot{\xi} = -\frac{du}{d\xi} \quad (19.118)$$

Se  $u(\xi)$  fosse monotona decrescente, allora  $\ddot{\xi} > 0$  sempre, e dopo un eventuale transiente dipendente dalle condizioni iniziali,  $\xi$  divergerebbe verso  $+\infty$  — il che non è possibile, visto che  $|\xi| \equiv |\cos \theta| \leq 1$ . Quindi i coefficienti  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  devono essere tali da creare il flesso — come in Fig. 19.20.

Inoltre, essendo  $-u(\xi) = \frac{I_t}{2} (\dot{\xi})^2 \geq 0$ , il moto è limitato alla regione in cui  $u(\xi) \leq 0$ . Osserviamo poi che  $u(-1) = +mgr_{cm} \frac{(\alpha + \beta)^2}{2} \geq 0$  e  $u(+1) = +mgr_{cm} \frac{(\alpha - \beta)^2}{2} \geq 0$ . Si deduce che una delle 3 radici dell'equazione  $u(\xi) = 0$  deve essere  $> 1$ ; le altre 2 devono stare nell'intervallo  $[-1; +1]$ : chiamiamo queste soluzioni  $\xi_0$ ,  $\xi_1$ , con  $\xi_0 > \xi_1$  — vedi sempre Fig. 19.20.

Da tutto questo si deduce che:

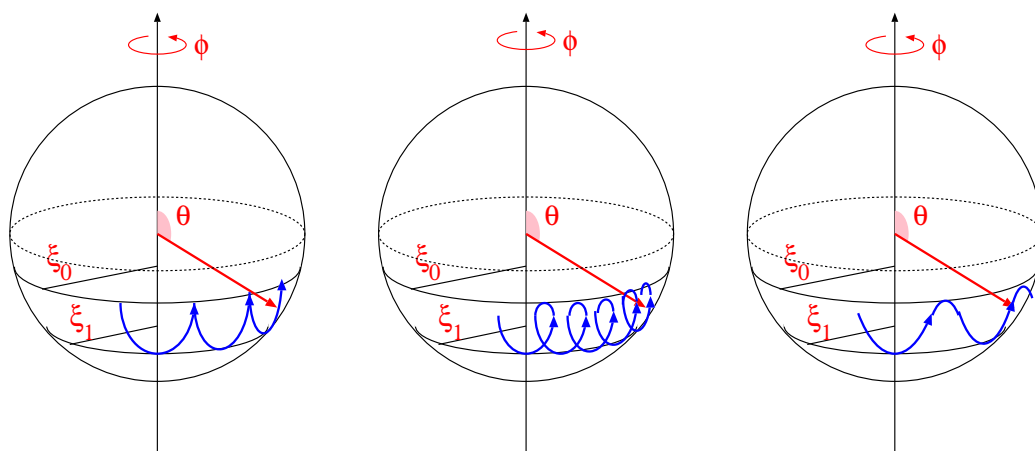


Figura 19.21: Possibili movimenti dell'asse  $\hat{z}'$  della trottola.

- nel tempo,  $\xi(t)$  oscilla fra i due estremi  $\xi_1$ ,  $\xi_0$  — e a ciò corrisponde un'oscillazione di  $\theta$ ;
- dalla prima delle Eq. (19.117), al variare di  $\xi$  anche  $\dot{\phi}$  subisce oscillazioni: quando  $\xi$  scende,  $\dot{\phi}$  aumenta, e viceversa quando  $\xi$  sale,  $\dot{\phi}$  decresce.

L'andamento dell'asse  $\hat{z}'$  è di uno dei tipi indicati in Fig. 19.21: un movimento di precessione in  $\phi$ , combinato con un movimento oscillatorio in  $\theta$ , detto “nutazione”. La forma della traiettoria sulla superficie sferica unitaria dipende dalle condizioni iniziali: può presentare cuspidi (a sinistra), oppure un andamento più liscio, con o senza “loops” (al centro e a destra).

### Moto stazionario, precessione

Nella Sezione 19.11.1 abbiamo mostrato che, per rotazione veloce, può esistere un moto di precessione, in cui l'asse  $\hat{z}'$  rimane a  $\theta$  costante e ruota attorno a  $\hat{z}$  con velocità angolare

$$\dot{\phi} = \frac{mgr_{cm}}{L'_z}$$

(vedi Eq. (19.96)).

Vogliamo verificare che questa soluzione è deducibile anche come soluzione delle Eq. (19.117). Osserviamo che la condizione di rotazione rapida, ovvero di  $L'_z$  “molto grande”, corrisponde a

$$\beta \gg 1$$



Scegliamo dunque le condizioni iniziali in modo da descrivere questo moto:

$$\begin{aligned}\xi(0) &= \xi_0 = \cos \theta_0 \\ \dot{\xi}(0) &= 0 \\ \dot{\phi}(0) &= \frac{mgr_{cm}}{L'_z} = \sqrt{\frac{mgr_{cm}}{I_t}} \frac{1}{\beta}\end{aligned}$$

e verifichiamo se queste sono stazionarie, ovvero se si mantengono nel tempo.

Imponendo la condizione iniziale su  $\dot{\phi}$  troviamo:

$$\begin{aligned}\alpha - \beta\xi_0 &= \frac{1 - \xi_0^2}{\beta} \\ \alpha &= \beta\xi_0 + \frac{1 - \xi_0^2}{\beta}\end{aligned}$$

Imponendo  $\dot{\xi}(0) = 0$  — e ricordando che  $\frac{I_t}{2} (\dot{\xi})^2 = -u(\xi)$  — significa che  $u(\xi_0) = 0$ , ovvero:

$$\begin{aligned}0 &= (1 - \xi_0^2)(\gamma - \xi_0) - \frac{(\alpha - \beta\xi_0)^2}{2} \\ &= (1 - \xi_0^2) \left( \gamma - \xi_0 - \frac{1 - \xi_0^2}{2\beta} \right) \\ \gamma &= \xi_0 + \frac{1 - \xi_0^2}{2\beta^2}\end{aligned}$$

Ora vogliamo vedere se la condizione  $\dot{\xi} = 0$ , imposta all'inizio, si mantiene nel tempo. Per fare questo, dobbiamo calcolare  $\ddot{\xi}$ . Ricordiamo che  $I_t \ddot{\xi} = -\frac{du}{d\xi}$ , quindi calcoliamo:

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\xi} &= -mgr_{cm} \frac{d}{d\xi} \left[ (1 - \xi^2)(\gamma - \xi) - \frac{(\alpha - \beta\xi)^2}{2} \right] \\ &= -mgr_{cm} \left[ -2\xi(\gamma - \xi) - (1 - \xi^2) + \beta(\alpha - \beta\xi) \right] \\ \left[ \frac{du}{d\xi} \right]_{\xi_0} &= -mgr_{cm} \left[ -2\xi_0(\gamma - \xi_0) - (1 - \xi_0^2) + \beta(\alpha - \beta\xi_0) \right] \\ &= -mgr_{cm} \left[ -2\xi_0 \frac{1 - \xi_0^2}{2\beta} - (1 - \xi_0^2) + \beta \frac{1 - \xi_0^2}{\beta} \right] \\ &= mgr_{cm} \frac{\xi_0(1 - \xi_0^2)}{\beta} \xrightarrow{\beta \gg 1} 0\end{aligned}$$

Si conclude che, se abbiamo come condizione iniziale  $\dot{\phi} = \frac{mgr_{cm}}{L'_z}$  e  $\dot{\xi} = 0$ , anche  $\ddot{\xi} = 0$  (nel limite di rotazione rapida): quindi  $\dot{\xi}$  permane nullo,  $\xi$  resta costante, e anche  $\dot{\phi}$  non varia. Questo è esattamente quello che si voleva verificare. Il moto della trottola è dotato di precessione dell'asse a velocità angolare costante, mentre l'inclinazione dell'asse non subisce variazioni.

### Precessione e nutazioni

Analizziamo il caso particolare in cui l'asse della trottola è inizialmente tenuto fermo, con un'inclinazione  $\theta_0$ ; poi viene rilasciato, e vogliamo capire come la trottola si muove.

Le condizioni iniziali sono dunque:

$$\begin{aligned}\xi(0) &= \cos \theta_0 \equiv \xi_0 \\ \dot{\xi}(0) &= 0 \\ \dot{\phi}(0) &= 0\end{aligned}$$

Dalla prima delle Eq. (19.117) si deduce che

$$\alpha = \beta \xi_0$$

Quindi, dalla seconda delle Eq. (19.117) si deduce <sup>[12]</sup> che

$$\gamma = \xi_0$$

Ora la funzione  $u(\xi)$  si semplifica di molto:

$$\begin{aligned}u(\xi) &= -mgr_{cm} \left[ (1 - \xi^2)(\xi_0 - \xi) - \frac{\beta^2(\xi_0 - \xi)^2}{2} \right] \\ &= -mgr_{cm} (\xi_0 - \xi) \left[ (1 - \xi^2) - \frac{\beta^2}{2}(\xi_0 - \xi) \right]\end{aligned}$$

Ovviamente  $\xi = \xi_0$  è uno “zero” di  $u(\xi)$  — per costruzione. Vogliamo trovare l'altra soluzione  $\xi_1$ . Essa deve essere tale che  $1 - \xi_1^2 = \frac{\beta^2}{2}(\xi_0 - \xi_1)$ .

Supponiamo ora che la trottola ruoti molto velocemente attorno al suo asse, ovvero che  $L'_z$  sia “molto grande”. Ciò significa che  $\beta \gg 1$ . Con questa

<sup>12</sup> stiamo assumendo che  $\theta_0 \neq 0$  e  $\theta_0 \neq \pi$ , cosicché  $(1 - \xi_0^2) \neq 0$

approssimazione, cerchiamo di ricavare  $\xi_1$ :

$$\begin{aligned}\Delta \equiv \xi_0 - \xi_1 &= \frac{2}{\beta^2}[1 - \xi_1^2] \\ &= \frac{2}{\beta^2}[1 - (\xi_0 - \Delta)^2] = \frac{2}{\beta^2}\left[1 - \left(\xi_0 - \frac{2}{\beta^2}[1 - \xi_1^2]\right)^2\right] \\ &\simeq \frac{2}{\beta^2}\left[1 - \xi_0^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\beta^2}\right)\right]\end{aligned}$$

Quindi nel limite  $\beta \gg 1$  possiamo porre

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{2}{\beta^2}(1 - \xi_0^2) \\ \xi_1 &= \xi_0 - \Delta \simeq \xi_0 - \frac{2}{\beta^2}(1 - \xi_0^2)\end{aligned}$$

Notiamo che, più  $L'_z$  è elevato — e quindi più  $\beta$  è grande — più limitato è  $\Delta$ , cioè l'intervallo di oscillazione di  $\xi$ .

Usando la prima di Eq. (19.117) troviamo <sup>[13]</sup>

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \sqrt{\frac{mgr_{cm}}{I_t}} \beta \frac{\xi_0 - \xi}{1 - \xi^2} \\ &\simeq \sqrt{\frac{mgr_{cm}}{I_t}} \beta \frac{\xi_0 - \xi}{1 - \xi_0^2}\end{aligned}$$

Mentre  $\xi$  oscilla fra  $\xi_0$  e  $\xi_1$ , anche  $\dot{\phi}$  oscilla:

$$\begin{aligned}\xi = \xi_0 &\implies \dot{\phi} = 0 \\ \xi = \xi_1 &\implies \dot{\phi} = \sqrt{\frac{mgr_{cm}}{I_t}} \frac{2}{\beta} = 2 \frac{mgr_{cm}}{L'_z}\end{aligned}$$

Il moto corrisponde a quello illustrato nella Fig. 19.21 (sinistra).

Il valore medio di  $\xi$  è:

$$\langle \xi \rangle = \frac{\xi_0 + \xi_1}{2} = \xi_0 - \frac{\Delta}{2} = \xi_0 - \frac{1 - \xi_0^2}{\beta^2}$$

<sup>13</sup> Chiamiamo  $u = \xi_0 - \xi$ ; essendo  $u \leq \Delta$ , e nel limite di  $\Delta$  piccolo, possiamo approssimare:

$$\frac{\xi_0 - \xi}{1 - \xi^2} = \frac{u}{1 - (\xi_0 - u)^2} \simeq \frac{u}{1 - \xi_0^2 + 2\xi_0 u} \simeq \frac{u}{1 - \xi_0^2} + \mathcal{O}(u^2)$$

pertanto la velocità media di precessione è

$$\begin{aligned}\langle \dot{\phi} \rangle &\simeq \sqrt{\frac{mgr_{cm}}{I_t}} \beta \left( \frac{1 - \xi_0^2}{1 - \xi_0^2} \right) = \sqrt{\frac{mgr_{cm}}{I_t}} \frac{1}{\beta} \\ &= \frac{mgr_{cm}}{L'_z}\end{aligned}$$

che coincide con il risultato trovato nell'Eq. (19.96).

# Capitolo 20

## Matematica dei campi vettoriali (\*)

Fino ad ora abbiamo usato più volte il concetto di “campo”. Abbiamo parlato di campi di forza, di campo gravitazionale, elettrico, magnetico, . . . In questo capitolo introduciamo in maniera sistematica le operazioni matematiche che si possono fare sui campi, con particolare attenzione ai campi vettoriali.

Di particolare rilevanza sono i concetti di *integrale di linea* (Sezione 20.3) e di *flusso* (Sezione 20.4, Sezione 20.5) di un campo vettoriale. L’integrale di linea di fatto l’abbiamo già introdotto parlando del lavoro di una forza (Sezione 12.1, Eq. (12.2)): qui lo generalizziamo ad un campo vettoriale qualunque. Il concetto di flusso è molto utile nella trattazione di campi gravitazionali generati da masse estese (Sezione 22.7). Entrambi (integrale di linea e flusso) diventano *necessari e imprescindibili* per comprendere la natura dei campi elettromagnetici.

Le ultime sezioni riguardano la definizione di operatori differenziali vettoriali agenti su campi vettoriali, e le loro relazioni con flusso e integrale di linea. Per chi fosse interessato solo al campo gravitazionale, possono essere omesse. Diventano invece fondamentali nell’elettromagnetismo.

### 20.1 Generalità

In fisica, si chiama *campo* una quantità che sia funzione della posizione spaziale.

In particolare, un *campo vettoriale* è una funzione della posizione spaziale a valori vettoriali — ovvero una quantità vettoriale che può variare da punto

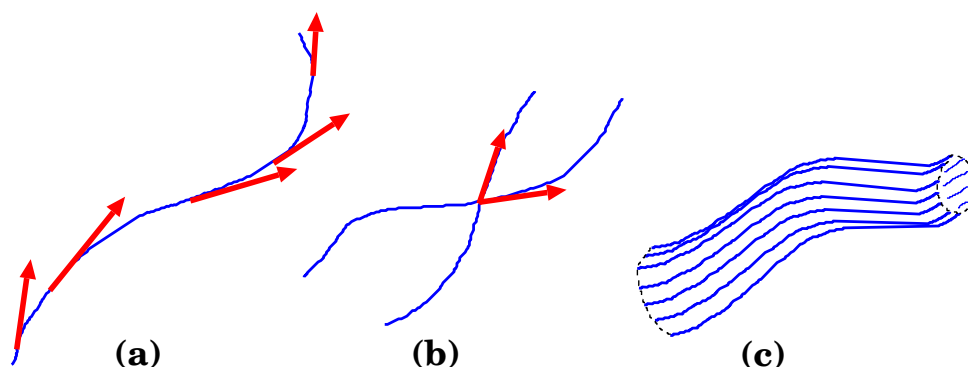


Figura 20.1: (a) *linea di campo (o di flusso)*; (b) *l'assurdo incrocio di due linee di campo*; (c) *un tubo di flusso*

a punto — cioè qualcosa che può essere scritto come

$$\vec{A}(\vec{r}) \quad (\text{campo vettoriale})$$

In molti casi, la forza  $\vec{F}$  agente su un oggetto dipende esclusivamente dalla posizione  $\vec{r}$  occupata dall'oggetto stesso: In tal caso, la funzione  $\vec{F}(\vec{r})$  è un *campo di forza*.

Analogamente, si definisce *campo scalare* una funzione dello spazio a valori numerici — qualcosa che si può scrivere come

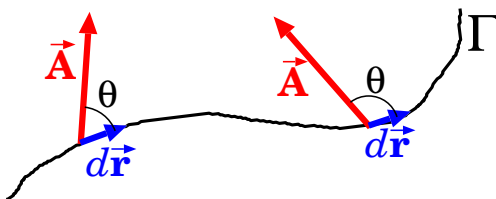
$$\psi(\vec{r}) \quad (\text{campo scalare})$$

Ricordiamo che le quantità scalari hanno la proprietà che non cambiano il loro valore per trasformazioni spaziali. Per esempio, il modulo di un campo vettoriale,  $|\vec{A}|$ , è un campo scalare. Il prodotto scalare  $\vec{A} \cdot \vec{B}$  fra due campi vettoriali è un campo scalare. Molte quantità fisiche (massa, pressione, temperatura, ...) sono campi scalari. Ma una componente di un vettore, o una coordinata spaziale, non è uno scalare, perché viene alterata da trasformazioni spaziali.

## 20.2 Campi vettoriali

Un *campo vettoriale* è una funzione della posizione spaziale a valori vettoriali — ovvero una quantità vettoriale che può variare da punto a punto — cioè qualcosa che può essere scritto come  $\vec{A}(\vec{r})$ .

Una *linea di campo* (o *linea di flusso*) è una linea tale che in ogni suo punto la tangente è parallela al campo vettoriale, come mostrato in Fig. 20.1(a).

Figura 20.2: *Integrale di linea*

Due linee di campo non possono mai incrociarsi — altrimenti nel punto di incrocio avremmo due valori del campo vettoriale, con direzioni diverse, come in Fig. 20.1(b).

Un *tubo di flusso* è una regione di spazio delimitata da un insieme di linee di campo, come in Fig. 20.1(c).

### 20.3 Integrali di linea e circuitazione di un campo vettoriale

Data una linea orientata  $\Gamma$ , l'integrale di linea di un campo vettoriale  $\vec{A}$  lungo  $\Gamma$  è:

$$\int_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} |\vec{A}| ds \cos \theta$$

dove  $ds$  è un segmento infinitesimo sulla linea  $\Gamma$ , e  $\theta$  è l'angolo fra il vettore  $\vec{A}$  e la tangente a  $\Gamma$ , considerando anche l'orientamento di questa, come in Fig. 20.2. Si intende che, sotto il segno di integrale, il valore di  $\vec{A}$  va calcolato nel punto dove si trova il segmento  $ds$ .

Se  $\Gamma$  è una linea chiusa, l'integrale si chiama *circuitazione* e si scrive:

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

Un campo che soddisfi la proprietà  $\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{r} = 0$  per qualunque linea chiusa  $\Gamma$  è detto *irrotazionale*.

Integrale di linea e circuitazione sono operazioni lineari, cioè

$$\int (a\vec{A} + b\vec{B}) \cdot d\vec{r} = a \int \vec{A} \cdot d\vec{r} + b \int \vec{B} \cdot d\vec{r}$$

### 20.4 Superfici orientate, definizione di flusso

Una porzione infinitesimale di superficie  $d\Sigma$  può essere orientata, lungo la direzione ad essa perpendicolare. Introducendo il versore perpendicolare  $\hat{n}$ ,

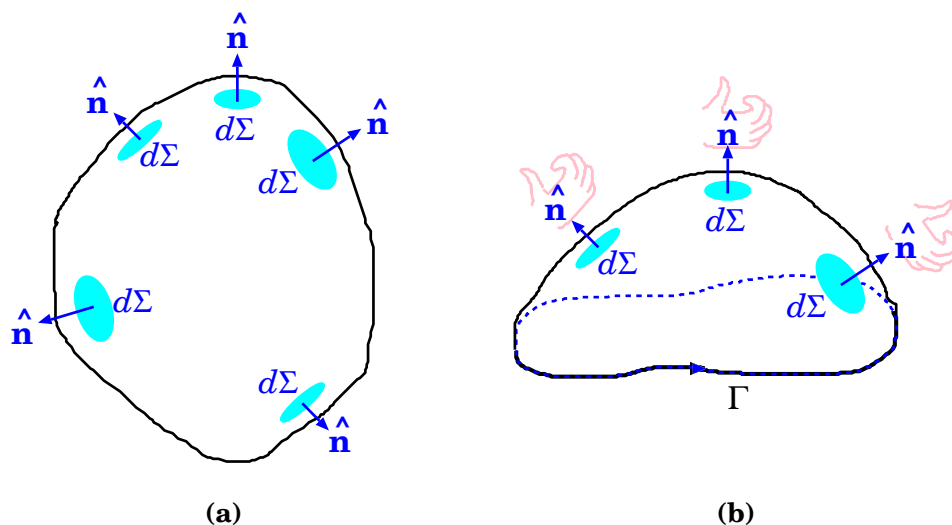


Figura 20.3: Esempi di superfici orientate: in ogni punto si definisce un vettore  $\hat{\mathbf{n}}$  ortogonale alla superficie. A sinistra: superficie chiusa, con  $\hat{\mathbf{n}}$  diretto verso l'esterno. A destra: superficie “concatenata” ad una linea chiusa orientata  $\Gamma$ ; l'orientamento della superficie è definito con la “regola della mano destra”.

chiamiamo

$$d\vec{\Sigma} = \hat{\mathbf{n}} d\Sigma$$

l'elemento di superficie orientato. Una superficie estesa  $\Sigma$  può essere pensata come composta da tante superfici infinitesime  $d\Sigma$ , ciascuna orientata secondo il vettore normale  $\hat{\mathbf{n}}$ , come in Fig. 20.3). L'orientamento della superficie deve essere “continuo”, cioè  $\hat{\mathbf{n}}$  non deve passare da una parte all'altra mentre ci si sposta lungo la superficie stessa.

Per convenzione, le superfici chiuse (Fig. 20.3(a)) sono sempre orientate verso l'esterno. Viceversa, le superfici aperte (Fig. 20.3(b)) sono delimitate da una linea chiusa, il *bordo*, che denotiamo con  $\Gamma$  (spesso anche denotata con  $\partial\Sigma$ ). Se diamo un orientamento a  $\Gamma$ , l'orientamento convenzionale di  $d\Sigma$  è quello della “regola della mano destra”: se si mette la mano destra con le dita che seguono l'orientamento del bordo, il pollice dà l'orientamento della superficie. In tal caso la superficie si dice *concatenata* alla linea  $\Gamma$ .

Dato un campo vettoriale  $\vec{\mathbf{A}}$  e una superficie orientata  $\Sigma$ , chiamiamo *flusso di  $\vec{\mathbf{A}}$  attraverso  $\Sigma$*  la quantità:

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{\mathbf{A}}) = \int_{\Sigma} d\vec{\Sigma} \cdot \vec{\mathbf{A}} = \int_{\Sigma} d\Sigma \hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{A}} \quad (20.1)$$



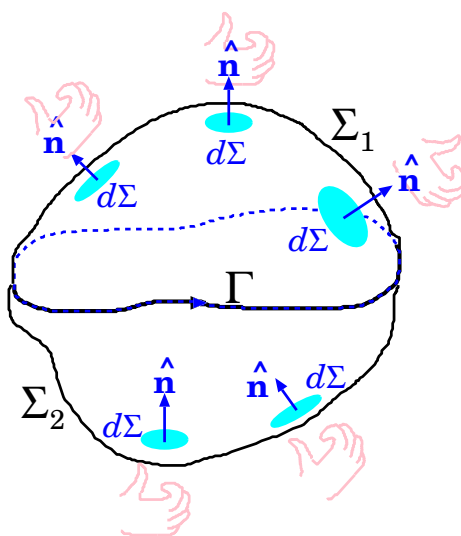


Figura 20.4: *Flusso concatenato per un campo solenoidale*

(si intende che sotto il segno di integrale, il valore di  $\vec{A}$  va calcolato nel punto dove si trova la superficie  $d\Sigma$ )

Ovviamente il flusso è una operazione lineare, cioè

$$\Phi(a\vec{A} + b\vec{B}) = a\Phi(\vec{A}) + b\Phi(\vec{A})$$

## 20.5 Campi solenoidali, flusso concatenato

Un campo tale che il suo flusso attraverso una qualunque superficie chiusa è nullo si dice *solenoidale*.

Consideriamo una linea chiusa orientata  $\Gamma$  e un campo *solenoidale*  $\vec{A}$ . Quindi scegliamo due superfici  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  concatenate a  $\Gamma$ . Allora:

$$\Phi_{\Sigma_1}(\vec{A}) = \Phi_{\Sigma_2}(\vec{A})$$

La dimostrazione segue dalla Fig. 20.4. Le due superfici  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  formano una superficie chiusa  $\Sigma_{\text{ch}}$ , ma la convenzione dell'orientamento non è rispettata:  $\Sigma_1$  è orientata verso l'esterno,  $\Sigma_2$  verso l'interno. Perché  $\Sigma_{\text{ch}}$  sia completamente orientata verso l'esterno, occorre invertire l'orientamento di  $\Sigma_2$ , cambiando così segno al flusso attraverso di essa:

$$0 = \Phi_{\Sigma_{\text{ch}}}(\vec{A}) = \Phi_{\Sigma_1}(\vec{A}) + (-\Phi_{\Sigma_2}(\vec{A}))$$

il che prova l'affermazione.

Abbiamo trovato che il flusso non dipende dalla scelta della superficie concatenata: l'unica cosa importante è il suo bordo  $\Gamma$ . Per questa ragione possiamo definire il *flusso concatenato* ad una linea chiusa orientata  $\Gamma$  come il flusso attraverso una qualunque superficie ad essa concatenata.

Si ricordi che tutto ciò ha senso solo per campi *solenoidali*.

## 20.6 Operatori differenziali vettoriali (\*)

Dato un campo vettoriale  $\vec{A}(\vec{r})$  e un sistema di assi cartesiani  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  nello spazio fisico 3-dimensionale, definiamo la *divergenza* di  $\vec{A}$  come:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (20.2)$$

e il *rotore* di  $\vec{A}$  come:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{z} \quad (20.3)$$

Si noti che definendo l'operatore differenziale *nabla* come:

$$\vec{\nabla} \equiv \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (20.4)$$

le strutture dell'Eq. (20.2) e dell'Eq. (20.3) sono esattamente le stesse del prodotto scalare e vettoriale.

Si può mostrare che se  $\vec{A}$  è un vettore, allora  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$  è una quantità scalare e  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$  è una quantità pseudo-vettoriale. Se  $\vec{A}$  è uno pseudo-vettore,  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$  è un vettore e  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$  è uno pseudo-scalare, cioè cambia segno per inversione spaziale.

Per un campo scalare  $\psi$  definiamo il *laplaciano*:

$$\nabla^2 \psi = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (20.5)$$

Possiamo definire direttamente l'operatore differenziale *laplaciano*:

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (20.6)$$

che risulta essere un operatore *scalare* e può essere applicato sia a campi scalari che vettoriali (ovviamente definire  $\nabla^2 \vec{A}$  come abbiamo fatto per  $\nabla^2 \psi$  non avrebbe senso, perché non possiamo fare il gradiente di un campo vettoriale!)

### 20.6.1 Alcune proprietà degli operatori differenziali (\*)

Mostriamo alcune identità molto utili:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \quad (\text{a})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \psi) = 0 \quad (\text{b})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (\text{c})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\psi \vec{A}) = \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{A} + \psi \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad (\text{d}) \quad (20.7)$$

$$\vec{\nabla} \times (\psi \vec{A}) = \vec{\nabla} \psi \times \vec{A} + \psi \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (\text{e})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad (\text{f})$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})\vec{B} \\ &\quad - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} \end{aligned} \quad (\text{g})$$

Tutte queste possono essere dimostrate utilizzando le tecniche descritte in Sezione 6.9. Per comodità si può introdurre  $\partial_k$  come una notazione compatta di  $\frac{\partial}{\partial x_k}$ .

## 20.7 Teoremi della divergenza e del rotore (\*)

Nel calcolo integro-differenziale dei campi vettoriali, due teoremi giocano un ruolo assolutamente fondamentale.

- Consideriamo una regione  $\Omega$  di spazio semplicemente connesso ed un campo vettoriale  $\vec{A}$  in essa definito.
- Sia  $V$  una regione di spazio,  $V \subset \Omega$ , e  $\Sigma_{\text{ch}} \equiv \partial V$  la superficie chiusa che delimita  $V$ ; allora vale il *teorema della divergenza*:

$$\oint_{\Sigma_{\text{ch}}} \vec{A} \cdot d\vec{\Sigma} = \int_V d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad (20.8)$$

- Sia  $\Sigma$  una qualunque superficie,  $\Sigma \subset \Omega$ , e  $\Gamma_{\text{ch}} \equiv \partial\Sigma$  la linea chiusa che la delimita; allora vale il *teorema del rotore*:

$$\oint_{\Gamma_{\text{ch}}} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{\Sigma} d\vec{\Sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \quad (20.9)$$

In particolare, se  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  il campo  $\vec{A}$  è solenoidale. Se  $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$  il campo  $\vec{A}$  ha circuitazione nulla.

Si osservi che, nel caso del teorema del rotore, il membro di destra dell'equazione è un flusso concatenato: data una linea chiusa  $\Gamma_{\text{ch}}$ , *qualunque* superficie  $\Sigma$  ad essa concatenata soddisfa il teorema. Questo è possibile perché il campo di cui si calcola il flusso,  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ , è sempre solenoidale, essendo  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$  (Eq. (20.7)(a)).

### 20.7.1 Altre relazioni integrali (\*)

Dai teoremi precedenti si possono dedurre altre utili relazioni:

$$\int_{\Sigma} d\vec{\Sigma} \times \vec{\nabla} \psi = \oint_{\partial\Sigma} \psi d\vec{r} \quad (\text{a}) \quad (20.10)$$

$$\int_V d^3r \vec{\nabla} \times \vec{A} = \oint_{\partial V} d\vec{\Sigma} \times \vec{A} \quad (\text{b})$$

Per dimostrare l'Eq. (20.10)(a), consideriamo un campo vettoriale  $\vec{w}$  uniforme. Allora, dall'Eq. (20.7)(b),  $\vec{\nabla} \times (\psi \vec{w}) = \vec{\nabla} \psi \times \vec{w}$ . Usando il teorema del rotore troviamo:

$$\begin{aligned} \vec{w} \cdot \oint_{\partial\Sigma} \psi d\vec{r} &= \oint_{\partial\Sigma} \psi \vec{w} \cdot d\vec{r} = \int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \psi \times \vec{w}) \cdot d\vec{\Sigma} \\ &= \int_{\Sigma} (d\vec{\Sigma} \times \vec{\nabla} \psi) \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \int_{\Sigma} d\vec{\Sigma} \times \vec{\nabla} \psi \end{aligned}$$

e dato che questo deve valere per qualunque  $\vec{w}$ , l'Eq. (20.10)(a) è provata.

Per l'Eq. (20.10)(b), consideriamo ancora un campo vettoriale  $\vec{w}$  uniforme. Allora, dall'Eq. (20.7)(f),  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{w}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot \vec{w}$ . Usando il teorema della divergenza troviamo:

$$\begin{aligned} \vec{w} \cdot \oint_{\partial V} d\vec{\Sigma} \times \vec{A} &= \oint_{\partial V} \vec{w} \cdot (d\vec{\Sigma} \times \vec{A}) = \oint_{\partial V} d\vec{\Sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{w}) \\ &= \int_V d^3r \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{w}) = \int_V d^3r \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot \vec{w} \\ &= \vec{w} \cdot \int_V d^3r \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{aligned}$$

Anche qui, essendo  $\vec{w}$  del tutto generico, l'Eq. (20.10)(b) è provata.

### 20.7.2 Dimostrazione dei teoremi (\*)

Diamo qui un'idea (non precisa) di come si possono dimostrare i teoremi della divergenza e del rotore.

Un volume  $V$  può essere suddiviso in tanti volumetti infinitesimi  $d^3V$  di forma parallelepipedica, di spigoli  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  paralleli agli assi cartesiani. Il flusso di  $\vec{A}$  attraverso  $\partial V$  può essere scritto come la somma di tutti i flussi uscenti dalle superfici  $\partial(d^3V)$  che racchiudono i volumetti: infatti, per la faccia che separa due volumetti adiacenti il flusso uscente da uno è entrante per l'altro, quindi la loro somma è nulla, e restano solo i contributi delle facce dei volumetti che non confinano con altri volumetti, cioè quelle che stanno su  $\partial V$ . Allora basta provare il teorema della divergenza per il volumetto  $d^3V$ . Se questo è centrato nel punto  $(x, y, z)$ , il flusso da esso uscente è:

$$\begin{aligned}
 \oint_{\partial(d^3V)} \vec{A} \cdot d\vec{\Sigma} &= \left[ -A_x \left( x - \frac{dx}{2}, y, z \right) + A_x \left( x + \frac{dx}{2}, y, z \right) \right] dy dz \\
 &+ \left[ -A_y \left( x, y - \frac{dy}{2}, z \right) + A_y \left( x, y + \frac{dy}{2}, z \right) \right] dx dz \\
 &+ \left[ -A_z \left( x, y, z - \frac{dz}{2} \right) + A_z \left( x, y, z + \frac{dz}{2} \right) \right] dx dy \\
 &= \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dx dy dz \\
 &= \vec{\nabla} \cdot \vec{A} d^3V
 \end{aligned}$$

Procediamo in modo analogo per il rotore: una superficie  $\Sigma$  può essere ritagliata in rettangolini infinitesimi  $d^2\Sigma$ . La circuitazione di  $\vec{A}$  lungo  $\partial\Sigma$  può essere scritta come la somma di tutte le circuitazioni lungo i bordi  $\partial(d^2\Sigma)$  che delimitano i rettangolini: infatti, per il lato in comune fra due rettangolini adiacenti, gli orientamenti sono opposti e quindi gli integrali di linea si annullano. Restano solo i lati dei rettangolini non confinanti, cioè disposti lungo  $\partial\Sigma$ . Anche qui allora basta dimostrare il teorema del rotore per un singolo rettangolino  $d^2\Sigma$ . Per comodità, orientiamo gli assi cartesiani in modo che il rettangolino sia centrato in  $(x, y, z)$  e abbia lati  $dx$ ,  $dy$  paralleli

agli assi  $x, y$ . Allora  $d^2\vec{\Sigma} = (dx dy)\hat{z}$ , e inoltre:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial(d^2\Sigma)} \vec{A} \cdot d\vec{r} &= \left[ -A_y \left( x - \frac{dx}{2}, y, z \right) + A_y \left( x + \frac{dx}{2}, y, z \right) \right] dy \\ &+ \left[ A_x \left( x, y - \frac{dy}{2}, z \right) - A_x \left( x, y + \frac{dy}{2}, z \right) \right] dx \\ &= \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \left( \vec{\nabla} \times \vec{A} \right)_z dx dy = \left( \vec{\nabla} \times \vec{A} \right) \cdot d^2\vec{\Sigma} \end{aligned}$$

# Capitolo 21

## Nozioni di fluidodinamica

### 21.1 I fluidi

La materia può trovarsi negli stati *solido* o *fluidi*.

Lo stato solido è definito come quello in cui le distanze fra i singoli punti materiali del sistema (atomi o molecole) sono costanti. Va specificato che tale definizione è relativa al sistema di forze cui il sistema è sottoposto: nessun sistema è *assolutamente* solido, anche i cristalli più rigidi sono uno stato di equilibrio di atomi e/o molecole, che può essere perturbato (per esempio innescando oscillazioni) o rotto. Il “solido” è un materiale per cui l’ approssimazione di rigidità è ragionevole e può essere usata per descrivere correttamente le sue proprietà.

Un *fluido* è un materiale che non è solido, quindi può essere *deformato*. Se il materiale ammette *solo* deformazioni che ne *conservano il volume*, allora diciamo che è un *liquido*. Se invece è possibile anche modificare il volume, oltre che la forma, il fluido si chiama *gas*.

#### 21.1.1 Velocità di deriva e densità di un fluido

In un fluido — liquido o gas — la materia occupa un dato volume  $V$ . Volendo studiare le proprietà interne del fluido, si potrebbe pensare di scomporlo in tutti i suoi elementi costituenti, atomi o molecole che siano <sup>[1]</sup>, descrivendo il moto di ciascuno attraverso la sua posizione  $\vec{r}_k$  e la sua velocità  $\vec{v}_k$ , nonché le loro reciproche interazioni. Una siffatta descrizione è impraticabile, poiché il numero di molecole è decisamente troppo grande!

---

<sup>1</sup> Nel testo, d’ora in poi, parleremo di molecole, perché la maggior parte delle sostanze ha struttura molecolare, ma è sottinteso che quanto segue si applica anche a sostanze con struttura atomica.

---

**Esempio: numero di molecole d'acqua**


---

Quante molecole ci sono in un litro di acqua? E che volume occupano un miliardo di molecole di acqua?

**Risposta.** Un litro di acqua ha una massa  $m = 1$  kg. Per calcolare il numero di molecole, occorre conoscere la massa della molecola,  $m_{\text{H}_2\text{O}}$ . Questa è composta da un atomo di ossigeno (massa  $m_{\text{O}} = 16$  u.m.a. =  $26.56 \cdot 10^{-27}$  kg) e da due atomi di idrogeno (massa  $m_{\text{H}} = 1.67 \cdot 10^{-27}$  kg), pertanto  $m_{\text{H}_2\text{O}} = m_{\text{O}} + 2m_{\text{H}} = 29.90 \cdot 10^{-27}$  kg. Quindi il numero di molecole di acqua in un litro è  $N_{\text{H}_2\text{O}}^{(1 \ell)} = \frac{1 \text{ kg}}{m_{\text{H}_2\text{O}}} = 3.34 \cdot 10^{25}$ .

Il volume “efficace” di una molecola di acqua può essere calcolato come  $V^{\text{mol}} = \frac{1 \ell}{N_{\text{H}_2\text{O}}^{(1 \ell)}} = 2.99 \cdot 10^{-26} \ell \simeq 3 \cdot 10^{-29} \text{ m}^3$ . Quindi per contenere  $10^9$  molecole occorre un volume  $\delta V \simeq 3 \cdot 10^{-20} \text{ m}^3$ , ovvero un cubetto di lato  $\delta L = \sqrt[3]{\delta V} \simeq 3 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 300 \text{ nm}$ .

Nel trattare i fluidi, si assume che la materia sia “diluita” nel volume  $V$ , anziché concentrata in elementi quasi puntiformi. Il volume  $V$  può essere idealmente suddiviso in tantissimi elementini  $\delta V$ . Questi devono essere sufficientemente piccoli ( $\delta V \ll V$ ), in modo da poter essere pensati come “quasi infinitesimi”, per poter dare una descrizione continua del fluido. Ma allo stesso tempo i  $\delta V$  devono essere sufficientemente grandi da contenere un elevato numero di molecole del fluido, in modo che ciascun volumetto possa essere descritto attraverso le proprietà cinematiche medie delle sue molecole.

Se ogni molecola  $i$ -esima del volumetto è dotata di massa  $m_i$  e velocità  $\vec{v}_i$ , la massa totale del volumetto  $\delta V$  è:

$$\delta m = \sum_{i \in \delta V} m_i \quad (21.1)$$

(dove  $i \in \delta V$  sta ad indicare che nella somma consideriamo solo le molecole che si trovano in  $\delta V$ ), e la quantità di moto totale è:

$$\delta \vec{p} = \sum_{i \in \delta V} m_i \vec{v}_i \quad (21.2)$$

Quindi definiamo la *velocità media* (o *velocità di deriva*) del volumetto  $\delta V$  come la media delle velocità  $\vec{v}_i$  delle molecole, “pesate” per le loro masse  $m_i$ :

$$\vec{u} = \langle \vec{v} \rangle = \frac{\sum_{i \in \delta V} m_i \vec{v}_i}{\sum_{i \in \delta V} m_i} \quad (\text{velocità di deriva}) \quad (21.3)$$



cosicché possiamo scrivere la relazione

$$\delta\vec{p} = \delta m \cdot \vec{u} \quad (21.4)$$

che ci consente di trattare il volumetto  $\delta V$  come un oggetto unico.

È noto che le quantità medie (come la velocità di deriva, Eq. (21.3)) assumono valori più stabili se il numero di valori mediati è più grande. Per questo il numero di molecole entro  $\delta V$  deve essere elevato. Ciononostante, il volumetto  $\delta V$  può essere mantenuto piccolo rispetto al volume  $V$  totale. L'esempio fatto sulle molecole di acqua dovrebbe dare un'idea della validità di questa ipotesi.

È ragionevole supporre che la massa  $\delta m$  di fluido contenuta nel volumetto  $\delta V$  sia proporzionale a  $\delta V$  — raddoppiando il volumetto raddoppierebbe anche la massa di fluido in esso contenuta — pertanto possiamo scrivere:

$$\delta m = \rho \cdot \delta V \quad (\rho \equiv \text{densità}) \quad (21.5)$$

dove la quantità  $\rho$  così introdotta è la *densità* del fluido.

In generale la densità può variare da un punto all'altro del fluido: se si tratta di un gas, questo può avere zone più compresse o più rarefatte, che possono anche cambiare nel tempo

$$\rho = \rho(\vec{r}; t) \quad (\text{nei gas}) \quad (21.6)$$

Viceversa, nei liquidi  $\rho$  è uniforme nello spazio, ed in condizioni stabili di temperatura anche costante nel tempo.

$$\rho = \text{costante} \quad (\text{nei liquidi}) \quad (21.7)$$

### 21.1.2 Unità di misura della densità

Dalla definizione, Eq. (21.5) risulta che la densità nel S.I. si misura in  $\text{kg}/\text{m}^3$ . Un'altra unità molto comune, in quanto più pratica, è  $\text{g}/\text{cm}^3$ . Essendo  $1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$  e  $1 \text{ m}^3 = (100 \text{ cm})^3 = 10^6 \text{ cm}^3$ , ricaviamo che

$$1 \text{ g}/\text{cm}^3 = 1000 \text{ kg}/\text{m}^3 \quad (21.8)$$

La densità dell'acqua, alla temperatura di  $4^\circ\text{C}$ , è  $1 \text{ g}/\text{cm}^3$ . Questo numero così "tondo" non è un caso. In effetti, la massa di  $1 \text{ kg}$  è definita precisamente come la massa di una quantità di acqua pura ( $\text{H}_2\text{O}$ ) che occupa il volume di  $1 \text{ litro}$  ( $\equiv 10^{-3} \text{ m}^3$ ) alla temperatura di  $4^\circ\text{C}$ . Anche questa temperatura non è casuale: è quella alla quale il volume dell'acqua è minimo. In effetti, scaldando l'acqua al di sopra di tale temperatura, ma anche raffreddandola al di sotto di essa, essa si dilata.

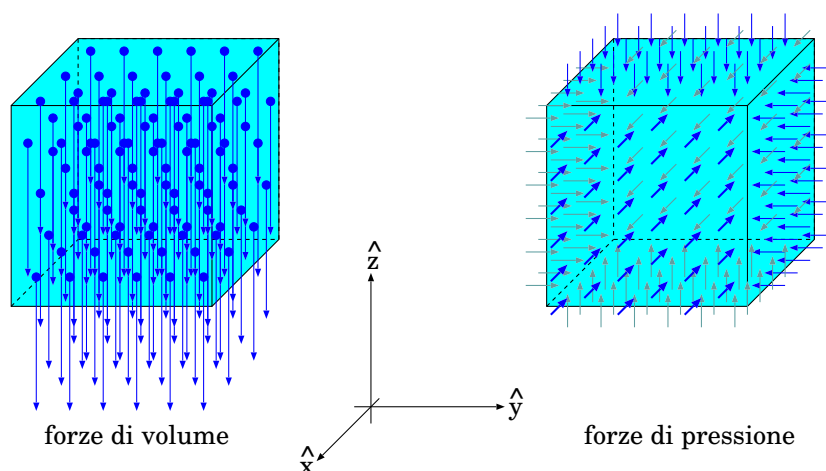


Figura 21.1: Forze di volume (a sinistra) e di superficie (a destra).

## 21.2 Forze di volume e di superficie

Dovendo studiare la dinamica di un fluido, occorre introdurre una descrizione delle forze che si adattano a questa “materia diluita” che stiamo trattando. Quindi non possiamo pensare ad una forza applicata ad un “punto materiale”. Piuttosto, dobbiamo ragionare sul *sistema di forze* che agisce su un volumetto  $\delta V$  di fluido. Distinguiamo due tipologie di forze (vedi Fig. 21.1).

- *Forze di volume*: agiscono su tutte le molecole del fluido; il volumetto  $\delta V$  di fluido ne sente l’effetto collettivo. L’esempio più ovvio — al quale ci limiteremo — è la *forza di gravità* agente su  $\delta V$ , il cui effetto globale sarà

$$\delta \vec{F}_g = \delta m \vec{g} = \rho \vec{g} \delta V \quad (21.9)$$

- *Forze di superficie*: agiscono solo sulla superficie  $\Sigma_{\text{ch}}$  che racchiude il volumetto  $\delta V$ . Tipicamente, queste forze sono un effetto macroscopico (o collettivo) di tutte le interazioni elementari fra le molecole di fluido all’interno e all’esterno del volumetto  $\delta V$ . Queste interazioni sono a corto raggio, quindi interessano solo le molecole vicine fra loro. Pertanto, per l’effetto che esse hanno su  $\delta V$ , contano solo quelle fra le molecole che si trovano in prossimità (subito all’interno, o subito all’esterno) della superficie  $\Sigma_{\text{ch}}$ .

Elaboriamo meglio il secondo caso. Possiamo pensare a due tipi di forze di superficie:

- *forze di superficie ortogonali* o *forze di pressione*: sono dovute agli urti delle molecole esterne al volumetto; verranno trattate nella Sezione 21.2.1;
- *forze di superficie parallele* o *forze viscosse*: sono dovute all'attrito fra strati di fluido che scorrono l'uno sull'altro, e tendono a trascinarsi a vicenda; spesso in una trattazione introduttiva si tendono a trascurare queste forze, limitandosi ai *fluidi non viscosi*; tratteremo queste forze in Sezione 21.2.4.

### 21.2.1 Pressione in un fluido

Qui ci concentriamo sulle *forze di superficie ortogonali alla superficie*. Sperimentalmente si osserva che per una piccola porzione di superficie  $\delta\Sigma$ , la forza  $\delta F$  è proporzionale a  $\delta\Sigma$

$$\delta F_P = P \cdot \delta\Sigma \quad (P \equiv \text{pressione}) \quad (21.10)$$

e sempre diretta verso l'interno del volumetto  $\delta V$ . Entrambe queste proprietà sono comprensibili, se si pensa a queste forze come dovute alla totalità di urti che la superficie  $\delta\Sigma$  subisce da parte delle molecole del fluido circostante.

La costante di proporzionalità  $P$  che compare nell'Eq. (21.10) si chiama *pressione*. Essa può cambiare da un luogo all'altro del fluido, ma non cambia se modifichiamo l'orientamento della superficie  $\delta\Sigma$ .

La superficie  $\Sigma_{\text{ch}}$  che delimita  $\delta V$  è ovviamente una superficie chiusa. È consuetudine dare un "orientamento" alle superfici chiuse, assegnando in ogni punto un versore  $\hat{\mathbf{n}}$  perpendicolare ad esse e diretto verso l'esterno; con questa convenzione, si può riscrivere l'Eq. (21.10) in forma vettoriale:

$$\delta \vec{F}_P = -(P \cdot \delta\Sigma) \hat{\mathbf{n}} \quad (P \equiv \text{pressione}) \quad (21.11)$$

Scegliamo il volumetto  $\delta V$  di forma parallelepipedica, come in Fig. 21.1, con lati  $\delta x, \delta y, \delta z$ . Studiamo le forze di pressione agenti su  $\delta V$  lungo le 3 componenti cartesiane. Lungo la direzione  $x$ , la pressione agisce sulle due superfici di area  $\delta y \cdot \delta z$  collocate in  $x$  e in  $x + \delta x$ : sulla prima agisce in direzione  $+\hat{\mathbf{x}}$ , sulla seconda in direzione  $-\hat{\mathbf{x}}$ . Quindi la forza di pressione totale lungo  $x$  su  $\delta V$  è:

$$\begin{aligned} \delta F_{P,x} &= P(x, y, z)(\delta y \cdot \delta z) - P(x + \delta x, y, z)(\delta y \cdot \delta z) \\ &\simeq -\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x}(\delta x \cdot \delta y \cdot \delta z) \end{aligned}$$

Analogamente possiamo trovare le forze di pressione lungo  $y, z$ :

$$\begin{aligned}\delta F_{P,y} &= P(x, y, z)(\delta x \cdot \delta z) - P(x, y + \delta y, z)(\delta x \cdot \delta z) \\ &\simeq -\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y}(\delta x \cdot \delta y \cdot \delta z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta F_{P,z} &= P(x, y, z)(\delta x \cdot \delta y) - P(x, y, z + \delta z)(\delta x \cdot \delta y) \\ &\simeq -\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z}(\delta x \cdot \delta y \cdot \delta z)\end{aligned}$$

Osserviamo che tutte le espressioni contengono un termine  $(\delta x \cdot \delta y \cdot \delta z)$  che è pari al volume  $\delta V$ . In conclusione le forze di pressione sono date da:

$$\begin{aligned}\delta F_{P,x} &= -\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} \delta V \\ \delta F_{P,y} &= -\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} \delta V \\ \delta F_{P,z} &= -\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} \delta V\end{aligned}\tag{21.12}$$

### ————— Nota di formalismo vettoriale —————

$\delta \vec{F}_P$  è un forza, quindi sarebbe simpatico condensare le tre equazioni cartesiane Eq. (21.12) in una forma vettoriale. In effetti, si può fare: le tre derivate parziali  $\frac{\partial P}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial P}{\partial z}$  possono essere viste come le tre componenti di un vettore, che si chiama “gradiente di  $P$ ”, e che si indica come:

$$\vec{\nabla} P \equiv \left( \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z} \right)\tag{21.13}$$

A questo punto, le Eq. (21.12) si possono riscrivere in maniera compatta come:

$$\delta \vec{F}_P = -\vec{\nabla} P \delta V\tag{21.14}$$

## 21.2.2 Unità di misura della pressione

Dalla definizione, Eq. (21.10), risulta che la pressione è una forza agente su una superficie unitaria.

L’unità di misura di pressione è il Pascal (Pa):

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2\tag{21.15}$$

(1 Pa è la pressione che esercita una forza di 1 N applicata ad una superficie di 1 m<sup>2</sup>). Nelle trasmissioni meteorologiche si fa spesso uso dell'*ettoPascal*, hPa, definito da

$$1 \text{ hPa} = 100 \text{ Pa}$$

La “pressione atmosferica standard” (misurata alla latitudine di 45° al livello del mare, alla temperatura di 15°C) è spesso usata come unità di misura di pressione e si indica con *Atm*. Non è però un’unità S.I. La sua conversione in Pascal è

$$1 \text{ Atm} = 101\,325 \text{ Pa} \quad (21.16)$$

### 21.2.3 Equazione della dinamica del fluido

Abbiamo visto — Eq. (21.9) e Eq. (21.14) — che le forze di volume e di pressione sono pari a

$$\delta \vec{F}_g = \rho \vec{g} \delta V \quad ; \quad \delta \vec{F}_P = -\vec{\nabla} P \delta V$$

Mettendo insieme tutto possiamo quindi scrivere la forza totale agente su  $\delta V$

$$\delta \vec{F} = \left( -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} \right) \delta V \quad (21.17)$$

ovvero, per componenti cartesiane:

$$\begin{aligned} \delta F_x &= -\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} \delta V \\ \delta F_y &= -\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} \delta V \\ \delta F_z &= -\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} \delta V - \rho g \delta V \end{aligned} \quad (21.18)$$

Per la seconda legge della dinamica,  $\delta \vec{F} = \delta m \vec{a}$ , con  $\delta m = \rho \delta V$ , cosicché:

$$\rho \vec{a} = \rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} \quad (21.19)$$

(interessante notare che questo risultato non dipende più dalla scelta di  $\delta V$  — come era da aspettarsi!)

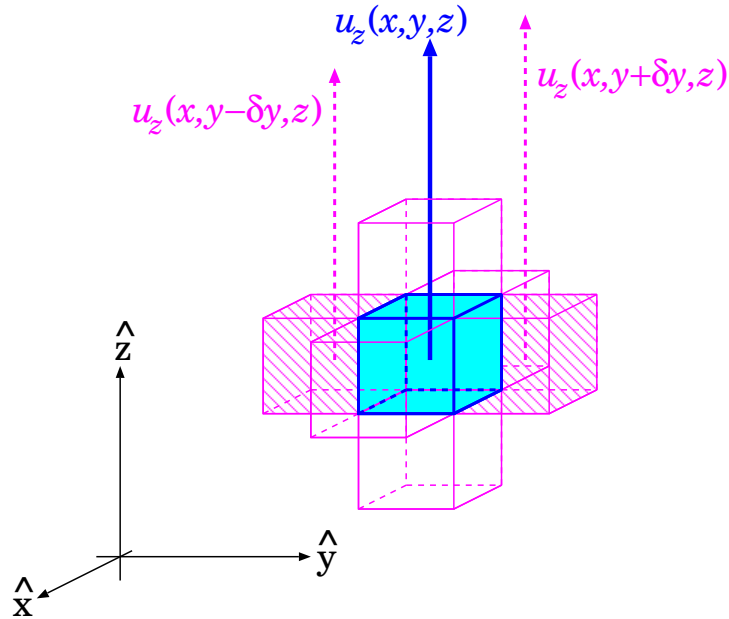


Figura 21.2: Volumetto di fluido viscoso, centrato in  $(x, y, z)$  e circondato da 8 volumetti contigui, centrati in  $(x \pm \delta x, y, z)$ ,  $(x, y \pm \delta y, z)$ ,  $(x, y, z \pm \delta z)$ . Sono indicate la componente- $z$   $u_z(x, y, z)$  della velocità del volumetto centrale, e le analoghe di due dei volumetti contigui,  $u_z(x, y \pm \delta y, z)$ .

#### 21.2.4 Forze viscosse (\*)

In un fluido viscoso, ogni volumetto  $\delta V$  subisce un trascinamento ad opera dei volumetti contigui, la cui intensità è direttamente proporzionale alla differenza di velocità delle porzioni di fluido a contatto.

Assumiamo di suddividere il fluido in volumetti parallelepipedi di spigoli  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ , e concentriamoci su uno di essi, centrato in  $(x, y, z)$  che si muove con velocità  $\vec{u}(x, y, z)$ . Esso è circondato da 8 volumetti simili, centrati rispettivamente in  $(x \pm \delta x, y, z)$ ,  $(x, y \pm \delta y, z)$ ,  $(x, y, z \pm \delta z)$ , ciascuno dotato di una propria velocità — vd Fig. 21.2.

Concentriamoci, per esempio, sulla forza di trascinamento lungo  $z$ ,  $\delta F_{visc,z} = \delta \vec{F}_{visc} \cdot \hat{z}$ , agente su  $\delta V$ . Essa è direttamente proporzionale a tutte le differenze di velocità  $u_z$ , rispetto agli elementi contigui, e alle superfici di contatto. Per esempio, il parallelepipedo centrato in  $(x + \delta x, y, z)$  presenta una differenza di velocità lungo  $x$  pari a  $[u_z(x + \delta x, y, z) - u_z(x, y, z)]$  e una superficie di contatto pari a  $(\delta y \cdot \delta z)$ , quindi il suo contributo al trascinamento

è

$$\delta F_{visc,z}^{(+\delta x)} = \eta \cdot (\delta y \cdot \delta z) \cdot \frac{u_z(x + \delta x, y, z) - u_z(x, y, z)}{\delta x}$$

essendo  $\eta$  una costante di proporzionalità. La proporzionalità diretta con  $[u_z(x + \delta x, y, z) - u_z(x, y, z)]$  è stata espressa attraverso  $\frac{u_z(x, y, z + \delta z) - u_z(x, y, z)}{\delta z}$ : l'aggiunta di  $\delta x$  al denominatore può sembrare artificiosa, ma in realtà è necessaria, perché nel limite  $\delta x \rightarrow 0$  anche  $[u_z(x + \delta x, y, z) - u_z(x, y, z)] \rightarrow 0$ .

In modo analogo, il parallelepipedo centrato in  $(x - \delta x, y, z)$  deve produrre un trascinamento pari a:

$$\delta F_{visc,z}^{(-\delta x)} = \eta \cdot (\delta y \cdot \delta z) \cdot \frac{u_z(x - \delta x, y, z) - u_z(x, y, z)}{\delta x}$$

La somma dei due contributi quindi è:

$$\delta F_{visc,z}^{(\pm\delta x)} = \eta \cdot (\delta y \cdot \delta z) \cdot \frac{u_z(x + \delta x, y, z) + u_z(x - \delta x, y, z) - 2u_z(x, y, z)}{\delta x}$$

Ora sviluppiamo  $u_z(x \pm \delta x, y, z)$  in serie di Taylor:

$$u_z(x \pm \delta x, y, z) = u_z(x, y, z) \pm \delta x \frac{\partial u_z(x, y, z)}{\partial x} + \frac{1}{2}(\delta x)^2 \frac{\partial^2 u_z(x, y, z)}{\partial x^2} + \mathcal{O}((\delta x)^3)$$

da cui

$$u_z(x + \delta x, y, z) + u_z(x - \delta x, y, z) - 2u_z(x, y, z) = (\delta x)^2 \frac{\partial^2 u_z(x, y, z)}{\partial x^2}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \delta F_{visc,z}^{(\pm\delta x)} &= \eta \cdot (\delta x \cdot \delta y \cdot \delta z) \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \\ &= \eta \delta V \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Possiamo ragionare identicamente per i volumetti contigui centrati in  $(x, y \pm \delta y, z)$  e  $(x, y, z \pm \delta z)$ , ottenendo:

$$\begin{aligned} \delta F_{visc,z}^{(\pm\delta y)} &= \eta \delta V \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \\ \delta F_{visc,z}^{(\pm\delta z)} &= \eta \delta V \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \end{aligned}$$

Il trascinamento totale è quindi

$$\begin{aligned}\delta F_{visc,z} &= \delta F_{visc,z}^{(\pm\delta x)} + \delta F_{visc,z}^{(\pm\delta y)} + \delta F_{visc,z}^{(\pm\delta z)} \\ &= \delta V \eta \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right)\end{aligned}$$

La somma delle derivate parziali seconde si chiama *operatore laplaciano*:

$$\nabla^2 \equiv \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

Abbiamo quindi trovato che

$$\delta F_{visc,z} = \delta V \eta \nabla^2 u_z$$

Se il fluido è isotropo, devono valere equazioni analoghe anche per  $\delta F_{visc,x}$ ,  $\delta F_{visc,y}$ :

$$\begin{aligned}\delta F_{visc,x} &= \delta V \eta \nabla^2 u_x \\ \delta F_{visc,y} &= \delta V \eta \nabla^2 u_y\end{aligned}$$

Tutto questo si può scrivere in forma vettoriale:

$$\delta \vec{F}_{visc} = \delta V \eta \nabla^2 \vec{u} \quad (21.20)$$

L'equazione della dinamica, Eq. (21.19), si modifica quindi in:

$$\rho \vec{a} = \rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} + \eta \nabla^2 \vec{u} \quad (21.21)$$

### 21.3 Pressione fluidostatica

Un fluido è considerato in equilibrio quando ciascuno dei suoi volumetti  $\delta V$  in cui l'abbiamo idealmente diviso è in equilibrio rispetto al fluido circostante <sup>[2]</sup>. Per un fluido in equilibrio, la forza totale  $\delta \vec{F}$  agente su  $\delta V$  (cfr Eq. (21.18)) deve essere nulla. Questo significa che le forze di superficie devono bilanciare le forze di volume. Dalle Eq. (21.18) si deduce quindi:

<sup>2</sup> Questo non significa che tutte le sue molecole siano ferme: esse saranno invece in moto caotico e si urteranno continuamente. Però la loro velocità vettoriale media (o "velocità di deriva")  $\vec{u} \equiv \langle \vec{v} \rangle$  sarà in media nulla.



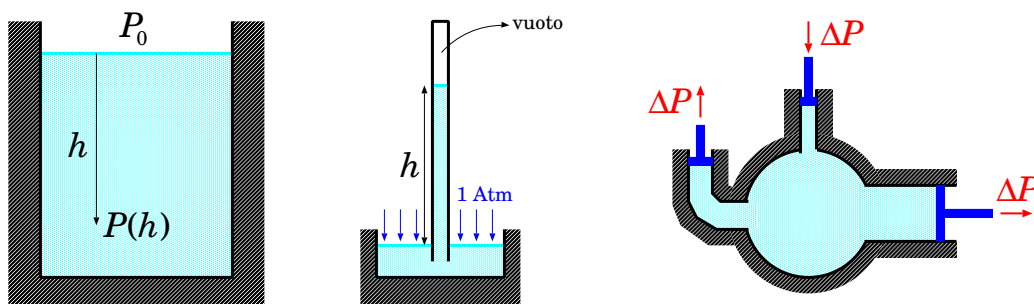


Figura 21.3: *Leggi fluidostatiche: legge di Stevin (a sinistra); barometro di Torricelli (al centro); legge di Pascal (a destra).*

$$\begin{aligned}\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} &= -\rho g\end{aligned}\tag{21.22}$$

Quindi la pressione varia solo con l'altezza ( $z$ ).

### 21.3.1 Liquidi statici, legge di Stevin

Per i liquidi, in cui  $\rho$  è uniforme ovunque, la terza delle Eq. (21.22) si integra immediatamente:

$$P(z) = P(z_0) - \rho g (z - z_0)$$

Poniamo la quota  $z_0$  alla superficie del liquido e chiamiamo  $h = (z_0 - z)$  la profondità. Si ottiene la *legge di Stevin* (Fig. 21.3 (sinistra)): se un liquido alla sua superficie è sottoposto alla pressione  $P_0$ , ad una profondità  $h$  la pressione risulta

$$P(h) = P_0 + \rho g h \quad (\text{nei liquidi})\tag{21.23}$$

**Esercizio 21.1.** *Un subacqueo si immerge in apnea fino ad una profondità  $h = 15$  m. Assumendo che alla superficie dell'acqua la pressione sia di 1 Atm, quant'è la pressione sentita dal subacqueo?*

**Risposta.** *Si applica direttamente la legge di Stevin, con  $P_0 = 101\,325$  Pa,  $h = 15$  m,  $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup>,  $g = 9.806$  m/s<sup>2</sup>. Il risultato è*

$$P(h) = (101\,325 \text{ Pa}) + (1000 \text{ kg/m}^3)(9.806 \text{ m/s}^2)(h = 15 \text{ m}) = 248\,415 \text{ Pa.}$$

Possiamo esprimere il risultato in atmosfere, dividendo per 101 325:

$$P(h) = \frac{248\,415}{101\,325} \text{ Atm} = 2.45 \text{ Atm.}$$

**Esercizio 21.2.** Una diga di un bacino artificiale è larga  $L = 50 \text{ m}$  e ha forma rettangolare; il livello dell'acqua è  $h = 80 \text{ m}$  rispetto al fondo dell'invaso. Qual è la forza totale che l'acqua accumulata nell'invaso esercita sulla diga? Si assuma una densità dell'acqua  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$  e una densità dell'aria  $\rho' = 1.3 \text{ kg/m}^3$ .

**Risposta.** La forza dell'acqua sulla diga è dovuta alla pressione, la quale aumenta con la profondità  $h'$ : detta  $P_0$  la pressione atmosferica che agisce sulla superficie dell'acqua, la pressione dell'acqua è  $P(h') = P_0 + \rho gh'$ . Immaginiamo di dividere la superficie verticale della diga in tanti strati orizzontali di larghezza  $L$  e altezza infinitesima  $dh'$ . La forza su ciascuno di essi è  $dF' = P(h') L dh'$ , quindi la forza totale sulla diga prodotta dall'acqua è

$$\begin{aligned} F_{acqua} &= \int_0^h P(h') L dh' = L \int_0^h dh' (P_0 + \rho gh') = LH P_0 + L\rho g \left[ \frac{(h')^2}{2} \right]_0^h \\ &= LH P_0 + \frac{Lh^2}{2} \rho g \end{aligned}$$

Analogamente si può ragionare per la forza prodotta dalla pressione atmosferica a valle della diga:

$$F_{aria} = LH P_0 + \frac{Lh^2}{2} \rho' g$$

La forza totale è  $F = F_{acqua} - F_{aria} = \frac{Lh^2}{2} (\rho - \rho') g$ . Si nota che  $P_0$  si cancella — come ci si sarebbe aspettato, visto che il suo effetto è uguale a monte e a valle della diga. Inserendo i valori numerici si trova  $F = \frac{(50 \text{ m})(80 \text{ m})^2}{2} [(1000 - 1.3) \text{ kg/m}^3](9.806 \text{ m/s}^2) = 1.57 \cdot 10^9 \text{ N}$ .

### 21.3.2 Il barometro a mercurio di Torricelli

Un'applicazione storica della legge di Stevin è il *barometro di Torricelli*, ideato per misurare la pressione atmosferica. Il funzionamento è illustrato in Fig. 21.3 (centro). Una bacinella contiene del mercurio (Hg, densità  $\rho = 13\,579 \text{ kg/m}^3$ ), esposto alla pressione dell'aria. Un tubo lungo e sottile viene riempito completamente di mercurio, tappato, quindi immerso nella bacinella con l'apertura in basso e stappato. Parte del mercurio defluisce dal tubo nella bacinella, lasciando quindi il vuoto nella parte superiore del tubo.

Per la legge di Stevin, la pressione all'interno del mercurio dipende solo dalla quota. In particolare, al livello della superficie esposta

all'aria, deve valere  $P_0 = 1 \text{ Atm}$  (da determinare!), sia all'esterno che all'interno del tubo. D'altra parte, applicando sempre la legge di Stevin al mercurio dentro il tubo, si deduce che  $P_0 = \rho gh$ . Pertanto, misurando  $h$  si ottiene  $P_0$ . Il valore misurato da Torricelli era  $h = 760 \text{ mm}$  ("760 millimetri di mercurio"). Da questo valore si ricaverebbe  $1 \text{ Atm} = (13\,579 \text{ kg/m}^3)(9.806 \text{ m/s}^2)(0.76 \text{ m}) \simeq 101\,200 \text{ Pa}$ . Il risultato differisce di una parte su mille dal valore standard — discrepanza accettabile per le misure dell'epoca.

**Esercizio 21.3.** *La scelta del mercurio, nel barometro di Torricelli, non era casuale: si tratta infatti del materiale liquido più pesante a disposizione. Quanto sarebbe stata alta la colonnina di liquido se si fosse usata dell'acqua?*

**Risposta.** *La densità dell'acqua è  $1000 \text{ kg/m}^3$ . Occorre trovare un valore di  $h$  tale che  $1 \text{ Atm} = 101\,325 \text{ Pa} = (1000 \text{ kg/m}^3)(9.806 \text{ m/s}^2)h$ , ovvero*

$$h = \frac{101\,325 \text{ Pa}}{(1000 \text{ kg/m}^3)(9.806 \text{ m/s}^2)} = 10.33 \text{ m. Decisamente meno pratico!}$$

### 21.3.3 Propagazione della pressione: legge di Pascal

Un'altra conseguenza della legge di Stevin è la *legge di Pascal*: se ad un liquido racchiuso in un contenitore si applica in un punto una variazione di pressione  $\Delta P$ , questa variazione si propaga ovunque nel liquido, con lo stesso valore, indipendentemente dalla quota e dalla direzione. La situazione è illustrata in Fig. 21.3 (destra).

Per capire il motivo, supponiamo che la variazione di pressione venga applicata ad una quota  $z_0$ . La legge di Stevin dice che ad ogni quota  $z$  la pressione deve essere

$$P(z) = P(z_0) + \rho g(z_0 - z)$$

Questa relazione deve essere vera per qualunque valore di  $P(z_0)$ , pertanto se questa varia di  $\Delta P$ , lo stesso deve fare  $P(z)$  per qualunque quota  $z$ .

Le macchine idrauliche sono importanti applicazioni pratiche della legge di Pascal. Con riferimento sempre alla Fig. 21.3(destra), posso pensare di applicare la pressione  $\Delta P$  attraverso uno stantuffo con sezione  $\Sigma_0$ , cui è applicata una forza  $F_0 = \Delta P \cdot \Sigma_0$ . La pressione  $\Delta P$  si propaga ovunque, anche ad altri stantuffi con sezione  $\Sigma'$ . Su questi quindi si esercita una forza  $F' = \Delta P \cdot \Sigma' = \frac{\Sigma'}{\Sigma_0} F_0$ . Se  $\Sigma' > \Sigma_0$ , la forza ottenuta,  $F'$ , può essere resa molto maggiore di quella applicata,  $F_0$ .

Attenzione però: non stiamo "creando energia dal nulla"! Se il pistone su cui agisco col la forza  $F_0$  si sposta di una distanza  $\Delta \ell_0$ , sto compiendo

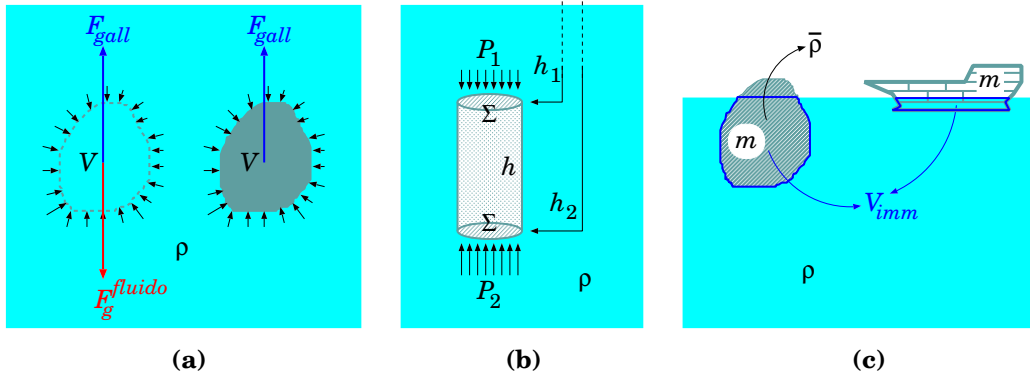


Figura 21.4: *Spinta di Archimede.* (a): le forze di pressione dipendono solo dalla superficie che separa l'oggetto dal fluido, non dalla natura dell'oggetto. (b): calcolo delle forze di pressione per un oggetto cilindrico. (c): volume immerso,  $v_{imm}$ , nel caso di oggetti galleggianti.

un lavoro  $\mathcal{W}_0 = F_0 \cdot \Delta\ell_0$ . Corrispondentemente, il pistone di sezione  $\Sigma'$  si sposterà di  $\Delta\ell'$ , che può essere calcolato come segue: il pistone di sezione  $\Sigma_0$  sposta un volume di liquido  $\Delta V = \Sigma_0 \Delta\ell_0$ , che deve a sua volta spostare lo stantuffo di sezione  $\Sigma'$ , quindi deve essere anche  $\Delta V = \Sigma' \Delta\ell'$ ; quindi  $\Delta\ell' = \frac{\Sigma_0}{\Sigma'} \Delta\ell_0$ . Se abbiamo costruito la macchina in modo che  $\Sigma_0 < \Sigma'$ , ne risulta che  $\Delta\ell' < \Delta\ell_0$ . Il lavoro fatto dalla forza  $F'$  è quindi  $\mathcal{W}' = F' \cdot \Delta\ell' = \left(\frac{\Sigma'}{\Sigma_0} F_0\right) \cdot \left(\frac{\Sigma_0}{\Sigma'} \Delta\ell_0\right) = \mathcal{W}_0$ . In conclusione, una macchina idraulica può amplificare una forza, ma non un lavoro.

### 21.3.4 Galleggiamento: la legge di Archimede

Un oggetto di volume  $V$ , immerso in un fluido di densità  $\rho$  nel campo gravitazionale  $\vec{g} = -g\hat{z}$ , riceve dalle forze di superficie del fluido una spinta totale verso l'alto

$$\vec{F}_{gall} = +\rho g V \hat{z} \quad (21.24)$$

Questa legge è nota come *legge di Archimede*, che la formulò più o meno così: “un oggetto immerso in un fluido riceve da esso una spinta verso l'alto di intensità pari al peso del fluido che occuperebbe il suo volume”.

Possiamo fornire una spiegazione intuitiva ed efficace di questa legge. La spinta  $\vec{F}_{gall}$  che il fluido applica all'oggetto è una forza di superficie, pertanto essa dipende solo dalla superficie che separa l'oggetto dal fluido, e non dalla natura e composizione dell'oggetto stesso. Consideriamo la Fig. 21.4 (a). Se l'oggetto immerso fosse fatto esattamente della stessa sostanza del fluido,

esso dovrebbe stare in equilibrio — immaginiamoci per esempio che il fluido sia acqua e l'oggetto sia un palloncino sottilissimo pieno d'acqua: non c'è ragione per cui l'acqua circostante dovrebbe spingere in su o in giù l'acqua del palloncino. Ma l'oggetto di fluido sente una forza di gravità pari a  $\vec{F}_g^{fluido} = -mg\hat{z} = \rho Vg\hat{z}$ ; se sta in equilibrio, vuol dire che la spinta del fluido circostante deve essere opposta:  $\vec{F}_{gall} = -\vec{F}_g^{fluido} = \rho Vg\hat{z}$ , con il che l'Eq. (21.24) è dimostrata.

Anche la legge di Archimede è una conseguenza della legge di Stevin. È facile capirlo pensando ad un oggetto parallelepipedo, o cilindrico, con altezza  $h$  e base  $\Sigma$  — vd Fig. 21.4 (b). Le profondità delle basi superiore e inferiore sono rispettivamente  $h_1$ ,  $h_2$ . Le forze di pressione sulle superfici laterali si bilanciano esattamente. La forza di pressione agente sulle superfici superiore e inferiore sono dirette rispettivamente verso il basso e verso l'alto, e valgono:

$$\vec{F}^{sopra} = -P_1\Sigma\hat{z} \quad ; \quad \vec{F}^{sotto} = +P_2\Sigma\hat{z}$$

La legge di Stevin ci dice inoltre che

$$P_1 = P_0 + \rho gh_1 \quad ; \quad P_2 = P_0 + \rho gh_2$$

Quindi la forza di galleggiamento è:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{gall} &= \vec{F}^{sopra} + \vec{F}^{sotto} = (P_2 - P_1)\sigma\hat{z} \\ &= \rho g(h_2 - h_1)\Sigma\hat{z} = \rho gh\Sigma\hat{z} \\ &= \rho gV\hat{z} \end{aligned}$$

diretta verso l'alto e in accordo quantitativo con l'Eq. (21.24).

Dalla legge di Archimede risulta un effetto di galleggiamento: il peso apparente di un oggetto in un fluido è inferiore a quello reale. Detta  $m$  la massa dell'oggetto e  $\vec{F}_g = -mg\hat{z}$  la sua forza-peso reale, il suo peso apparente risulta:

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_g + \vec{F}_{gall} = (\rho V - m)g\hat{z} \quad (21.25)$$

Quindi:

$m > \rho V$	$\vec{F}_{tot}$ verso il basso	oggetto attratto verso il basso, ma più debolmente
$m < \rho V$	$\vec{F}_{tot}$ verso l'alto	oggetto spinto verso l'alto

Nel caso  $m < \rho V$ , l'oggetto può raggiungere la superficie superiore del fluido ed emergere parzialmente, cosicché il suo volume immerso rimane  $V_{imm} < V$ . A questo punto la spinta di Archimede si riduce a

$$\vec{F}_{gall} = +\rho g V_{imm} \hat{z} \quad (21.26)$$

e il corpo si assesta quando nuovamente  $\vec{F}_g + \vec{F}_{gall} = 0$ , ovvero quando  $mg = \rho V_{imm} g$ :

$$\rho V_{imm} = m \quad (21.27)$$

Se l'oggetto immerso è ragionevolmente omogeneo, è utile introdurre la sua densità media  $\bar{\rho} = \frac{m}{V}$ , cosicché:

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_g + \vec{F}_{gall} = (\bar{\rho} - \rho) V \vec{g} \quad (21.28)$$

quindi:

oggetto più denso del fluido	$\bar{\rho} > \rho$	$\vec{F}_{tot}$ verso il basso
oggetto meno denso del fluido	$\bar{\rho} < \rho$	$\vec{F}_{tot}$ verso l'alto

La condizione di galleggiamento Eq. (21.27) diventa ora:

$$\rho V_{imm} = \bar{\rho} V \quad (21.29)$$

**Esercizio 21.4.** La densità di un iceberg è  $\rho' = 0.917 \text{ g/cm}^3$ , mentre quella dell'acqua in cui galleggia è  $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$ . Quanta è la frazione di volume dell'iceberg che emerge dall'acqua?

**Risposta.** Chiamiamo  $V$  il volume totale dell'iceberg, e  $V_{imm}$  il volume immerso. La forza di gravità sull'iceberg è  $F_g = -\rho' V g$  (diretta verso il basso), mentre la spinta di Archimede è data solo dalla parte sommersa:  $F_{gall} = \rho V_{imm} g$  (diretta verso l'alto). La condizione di equilibrio si ha quando la risultante delle forze si annulla:  $F_g + F_{gall} = 0$ . Ciò avviene se  $\rho V_{imm} = \rho' V$ , ovvero  $\frac{V_{imm}}{V} = \frac{\rho'}{\rho} = 0.917$ . La frazione di volume dell'iceberg che emerge dall'acqua è quindi  $\frac{V - V_{imm}}{V} = 0.083$ : poco più dell'8%.

... Da cui il modo di dire "vediamo solo la punta dell'iceberg", tipicamente per significare che la situazione è molto peggiore di quello che appare a prima vista.

**Esercizio 21.5.** Un pallone da spiaggia, di raggio  $r = 20$  cm, costituito da un sottile strato di plastica (densità  $\rho^{plas} = 1300$  kg/m<sup>3</sup>) di spessore  $h = 0.2$  mm e riempito d'aria (densità  $\rho^{aria} = 1.3$  kg/m<sup>3</sup>), galleggia sull'acqua. Calcolare il volume totale,  $V$  e il volume immerso  $V_{imm}$ .

**Risposta.** Il volume del pallone è  $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 0.0335$  m<sup>3</sup>.

Detta  $\rho^{acqua} = 1000$  kg/m<sup>3</sup> la densità dell'acqua, la condizione di galleggiamento è  $\rho^{acqua}V_{imm} = m$ , quindi occorre calcolare la massa  $m$  del pallone. La superficie del pallone è  $4\pi r^2$ ; il volume di plastica è quindi  $4\pi r^2 h$ ; quindi la massa della plastica è  $m^{plas} = 4\pi r^2 h \rho^{plas} = 0.130$  kg. Invece, la massa dell'aria contenuta è  $m^{aria} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho^{aria} = 0.0435$  kg. La massa del pallone è  $m = m^{plas} + m^{aria} = 0.174$  kg. Quindi  $v_{imm} = \frac{m}{\rho^{acqua}} = 1.74 \cdot 10^{-5}$  m<sup>3</sup>.

La frazione di volume immerso è  $\frac{V_{imm}}{V} = 0.0052$  — molto piccola, circa 0.5%: il 99.5% del pallone emerge dall'acqua.

**Continuazione (\*)...** Qual è la profondità della parte immersa del pallone? Occorre conoscere la formula del volume di segmento sferico: per una sfera di raggio  $r$ , il segmento sferico di altezza  $h$  ha volume  $V^{segm.sfer} = \frac{\pi}{3}h^2(3r - h)$ .

Occorre quindi risolvere in  $h$  l'equazione  $V_{imm} = \frac{\pi}{3}h^2(3r - h)$ , che è di 3° grado, quindi non ovvia! Tuttavia, avendo osservato che  $V_{imm} \ll V$ , è ragionevole supporre che anche  $h \ll r$ , e quindi approssimare  $3r - h \simeq 3r$  — riservandoci poi di verificare se il valore trovato di  $h$  soddisfa questa approssimazione. Quindi

risolviamo  $V_{imm} = \pi r h^2$ , che dà  $h = \sqrt{\frac{V_{imm}}{\pi r}} = 0.005$  m = 5 mm. Effettivamente,

con il valore trovato,  $\frac{h}{3r} = 0.025$ , quindi la nostra approssimazione è “buona” al livello del %.

**Esercizio 21.6.** Una grossa chiatta, di superficie  $\Sigma = 200$  m<sup>2</sup>, con le fiancate verticali e il fondo piatto, quando è scarica è immersa nell'acqua di 30 cm. Calcolare la massa della chiatta. La chiatta viene caricata con 200 ton di carico, di quanto risulta immersa?

**Risposta.** Chiamiamo  $h_0 = 0.3$  m la parte immersa della chiatta. Il volume immerso è  $V_{imm} = \Sigma h_0 = 60$  m<sup>3</sup>, la spinta di Archimede è  $F_{gall} = \rho V_{imm} g$ . Questa deve bilanciare esattamente la forza di gravità  $F_g = -m_0 g$ . Quindi la massa della chiatta è  $m_0 = \rho V_{imm} = (1000$  kg/m<sup>3</sup>)(60 m<sup>3</sup>) = 60 000 kg = 60 ton.

Dopo il carico, la massa totale è  $m_{tot} = 260$  ton = 260 000 kg. La parte immersa  $h_{imm}$  si calcola allo stesso modo: il volume immerso  $V_{imm} = \Sigma h_{imm}$  deve essere tale che la spinta di Archimede bilanci il peso:  $\rho V_{imm} g = m_{tot} g$ , quindi  $V_{imm} = \frac{m_{tot}}{\rho}$  e  $h_{imm} = \frac{V_{imm}}{\Sigma} = \frac{m_{tot}}{\rho \Sigma} = \frac{260\,000 \text{ kg}}{(1000 \text{ kg/m}^3)(200 \text{ m}^2)} = 1.3$  m.

**Esercizio 21.7.** Un oggetto cilindrico di massa  $m = 15$  g, sezione  $\Sigma = 2$  cm<sup>2</sup> e altezza  $h = 15$  cm, è parzialmente immerso in un liquido (alcol, densità  $\rho = 810$  kg/m<sup>3</sup>), con l'asse disposto verticalmente. Dalla sua posizione di equilibrio di galleggiamento viene spinto leggermente in basso, quindi lasciato andare: si osserva che inizia ad oscillare verticalmente. Che tipo di moto ha? In quanto tempo  $T$  compie un'intera oscillazione?

**Risposta.** Le forze in gioco sono: la forza-peso  $F_g = -mg$  diretta verso il basso; la forza di Archimede  $F_{gall} = +\rho V_{imm}g$  diretta verso l'alto. Detta  $\Sigma$  la sezione del cilindro, la parte immersa arriva a profondità  $h_{imm} = \frac{V_{imm}}{\Sigma}$ . In generale

$$F_{tot} = F_g + F_{gall} = (-m + \rho V_{imm})g = (\rho \Sigma h_{imm} - m)g$$

All'equilibrio,  $F_{tot} = 0$ , quindi  $m = \rho \Sigma h_{imm}^{eq}$ . Intanto calcoliamo  $h_{imm}^{eq} = \frac{m}{\rho \Sigma} = 0.0926$  m = 9.26 cm — ok, va bene:  $h_{imm}^{eq} < h$ .

Ora, possiamo riscrivere

$$F_{tot} = \rho \Sigma (h_{imm} - h_{imm}^{eq})g$$

Conviene introdurre lo spostamento dall'equilibrio:

$$z = h_{imm}^{eq} - h_{imm}$$

In segno è scelto in modo che  $z > 0$  se l'oggetto emerge di più rispetto al punto di equilibrio,  $z < 0$  se sprofonda — così è coerente con la scelta del segno per  $F_{tot}$ . Quindi

$$F_{tot} = -\rho g \Sigma z$$

L'accelerazione è

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = a = \frac{F_{tot}}{m} = -\frac{\rho g \Sigma}{m} z$$

Questa è l'equazione di un moto oscillatorio armonico. La frequenza angolare è  $\Omega = \sqrt{\frac{\rho g \Sigma}{m}} = 10.29$  rad/s, quindi il periodo è  $T = \frac{2\pi}{\Omega} = 0.61$  s.

### Ghiaccio galleggiante che si scioglie

Consideriamo un blocco di ghiaccio di massa che galleggia nell'acqua, contenuta in un recipiente. Col passare del tempo, esso si scioglie. Alla fine, tutto il ghiaccio si sarà sciolto e si sarà mischiato con l'acqua che all'inizio era già liquida. Quindi abbiamo due effetti concorrenti:

- il ghiaccio che inizialmente emergeva, alla fine sarà fluito nell'acqua;
- il ghiaccio inizialmente immerso, sciogliendosi diminuisce di volume.



Alla fine dello scioglimento, il livello di acqua nel recipiente è cambiato?

**Risposta:** No. A causa della legge di Archimede. Vediamo perché.

Il ghiaccio di massa  $m$  avrà un volume totale  $V^{\text{ghiaccio}} = \frac{m}{\rho^{\text{ghiaccio}}}$ , ma la sua parte immersa ha volume  $V_{\text{imm}}^{\text{ghiaccio}} = \frac{m}{\rho}$ , essendo  $\rho$  la densità dell'acqua in cui galleggia. Essendo  $\rho^{\text{ghiaccio}} < \rho$ , allora  $V^{\text{ghiaccio}} > V_{\text{imm}}^{\text{ghiaccio}}$  — ovviamente! Quando il ghiaccio si sarà completamente trasformato in acqua, la sua massa  $m$  non sarà cambiata, ma la sua densità sarà ora diventata pari a quella dell'acqua, pertanto occuperà un volume  $V^{\text{ghiaccio sciolto}} = \frac{m}{\rho}$ . Quindi,  $V^{\text{ghiaccio sciolto}} = V_{\text{imm}}^{\text{ghiaccio}}$ , vale a dire che il ghiaccio, sciogliendosi, andrà a occupare un volume esattamente pari a quello della sua parte immersa prima dello scioglimento.

**Osservazione:** è noto che il surriscaldamento globale produce uno scioglimento delle calotte polari, artica e antartica, e questo porterà ad un innalzamento del livello degli oceani. Si stima che, se i ghiacciai dell'Antartide si sciogliessero completamente, gli oceani si alzerebbero di circa 50 m. Viceversa, poiché la calotta artica (la "banchisa polare") è costituita interamente da ghiacci galleggianti, il suo scioglimento non provocherebbe nessuna variazione di livello negli oceani.

## 21.4 Altimetro a pressione

La pressione atmosferica dipende da "quanto pesa" l'aria che sta sopra di noi. Ci aspettiamo che, salendo di quota, ci sia meno aria sopra di noi, e dunque che la pressione atmosferica diminuisca. Questo è un fatto noto, che può essere utilizzato per misurare la quota, per esempio durante un'escursione in montagna.

La terza delle Eq. (21.22) ci permette di essere più quantitativi. Riscriviamola per comodità

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \quad (21.30)$$

La densità dei gas però non è uniforme: essa è regolata dall'equazione di stato

$$PV = nRT \quad (21.31)$$

essendo  $P$  la pressione del gas,  $V$  il volume che occupa,  $T$  la temperatura (in gradi Kelvin),  $n$  il numero di moli,  $R = 8.314 \text{ Nm/K}$  la costante dei gas perfetti. Possiamo ricavare  $\rho$  dall'equazione di stato: un volume  $V$  che contiene  $n$  moli ha una massa  $n \cdot A$ , essendo  $A$  la massa di una mole. Pertanto

$$\rho = \frac{nA}{V} = \frac{A}{RT}P \quad (21.32)$$

L'atmosfera terrestre è composta al 78% di azoto (molecola  $N_2$ , massa molare  $A_{N_2} = 28$  g) e al 21% di ossigeno (molecola  $O_2$ , massa molare  $A_{O_2} = 32$  g), con un rimanente 1% di altri gas, dominati dall'argon (molecola monoatomica  $Ar$ , massa molare  $A_{Ar} = 40$  g). Pertanto la massa molare della miscela si può calcolare come una *media pesata* dei gas componenti, tenendo conto delle loro percentuali.

$$A = \frac{78 A_{N_2} + 21 A_{O_2} + 1 A_{Ar}}{100} = 28.96 \text{ g} = 0.02896 \text{ kg}$$

La densità dell'atmosfera terrestre può essere calcolata dall'Eq. (21.32) per temperatura e pressione fissate. Ci sono diversi standard in proposito, ne elenchiamo alcuni <sup>[3]</sup> qui in tabella:

standard	temperatura		pressione		densità (kg/m <sup>3</sup> )
	(°C)	(K)	(Atm)	(10 <sup>5</sup> Pa)	
IUPAC-STP	0	273.15	0.987	1	1.28
SATP	25	298.15	0.987	1	1.17
NIST	20	293.15	1	1.013	1.20

Normalmente si assume  $\rho = 1.3$  kg/m<sup>3</sup>.

Usando l'Eq. (21.32), l'Eq. (21.30) si può riscrivere come:

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{Ag}{RT} P \quad (21.33)$$

che è un'equazione differenziale nella funzione incognita  $P(z)$ . Si potrebbe pensare di integrare questa equazione — e da un punto di vista matematico è possibile: la soluzione sarebbe  $P(z) = P_0 e^{-\frac{Ag}{RT}z}$ , provare per credere! Tuttavia sarebbe fuorviante, perché così facendo si sta implicitamente assumendo che la temperatura  $T$  sia uguale a qualunque altezza — il che è notoriamente sbagliato!

Pertanto, consci del fatto che l'Eq. (21.33) è applicabile solo per dislivelli  $\Delta z$  sui quali si possa assumere che  $T$  è uniforme, procediamo in maniera approssimata, sostituendo la derivata  $\frac{dP}{dz}$  con un rapporto di differenze finite

<sup>3</sup> IUPAC=“International Union of Pure and Applied Chemistry”; STP=“Standard Temperature and Pressure”; SATP=“Standard Ambient Temperature and Pressure”; NIST=“National Institute of Standards and Technology”

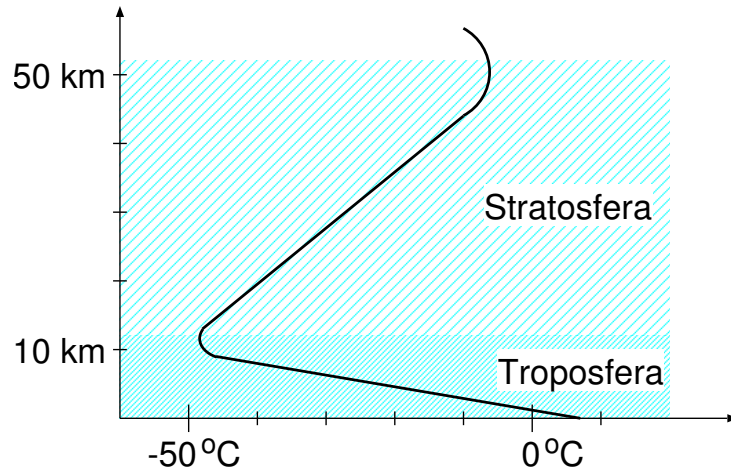


Figura 21.5: Andamento della temperatura media atmosferica in funzione della quota sul livello del mare.

$\frac{\Delta P}{\Delta z}$ , e scrivendo

$$\Delta z = - \underbrace{\left( \frac{RT}{Ag} \right)}_{\lambda} \frac{\Delta P}{P} \quad (21.34)$$

Ad una temperatura  $T = 273$  K (pari a circa  $0^\circ\text{C}$ ) si ottiene  $\lambda \simeq 7990$  m. Per  $T = 300$  K (corrispondente a circa  $27^\circ\text{C}$ )  $\lambda \simeq 8780$  m.

È quindi chiaro che l'Eq. (21.34) può essere usata per calcolare un dislivello  $\Delta z$ , misurando la pressione  $P$  alla partenza e le sue variazioni  $\Delta P$ . Tuttavia occorre conoscere anche la temperatura della colonna d'aria, altrimenti la stima di  $\Delta z$  può essere grossolana.

Possiamo tentare un calcolo un po' più raffinato, introducendo il *gradiente termico medio*, ovvero la variazione media di temperatura con l'altezza. Nella parte bassa dell'atmosfera, la *troposfera* (fino a  $\sim 13$  km di quota, vd Fig. 21.5), la temperatura si abbassa al crescere dell'altezza, di circa 6.5 gradi ogni 1000 metri:

$$\alpha = -\frac{dT}{dz} \simeq 6.5 \cdot 10^{-3} \text{ K/m}$$

ovvero  $T(z) = T_0 - \alpha z$ , con  $T_0 \simeq 20^\circ\text{C} \simeq 293$  K al livello del mare. L'Eq. (21.33) si può scrivere come:

$$\frac{dP}{P} = -\frac{Ag}{R} \frac{dz}{T_0 - \alpha z}$$

che si può integrare:

$$\begin{aligned} \int_{P_0}^P \frac{dP'}{P'} &= -\frac{Ag}{R} \int_0^z \frac{dz'}{T_0 - \alpha z'} \\ [\ln P']_{P_0}^P &= \frac{Ag}{R\alpha} [\ln(T_0 - \alpha z')]_0^z \\ \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) &= \frac{Ag}{R\alpha} \ln\left(\frac{T_0 - \alpha z}{T_0}\right) \\ P(z) &= P_0 \left(\frac{T_0 - \alpha z}{T_0}\right)^{\frac{Ag}{R\alpha}} \end{aligned}$$

Questa può essere invertita per ricavare l'altezza  $z$  sul livello del mare:

$$z = \frac{T_0}{\alpha} \left[ 1 - \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{R\alpha}{Ag}} \right] \quad \left( \frac{R\alpha}{Ag} \simeq 0.19 \right)$$

## 21.5 Moto stazionario di un liquido non viscoso

Consideriamo un liquido in moto stazionario: questo significa che i parametri del liquido possono cambiare da una posizione a un'altra, ma *non dipendono dal tempo*. In particolare possiamo assumere che

$$\begin{aligned} \vec{u} &\equiv \vec{u}(\vec{r}) & ; & \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0 \\ P &\equiv P(\vec{r}) & ; & \quad \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \end{aligned} \tag{21.35}$$

Supponiamo inoltre che il liquido scorra in un tubo sottile, cosicché in ogni sezione  $\Sigma$  del tubo la velocità  $\vec{u}$  possa essere considerata uniforme in tutti i punti.

### 21.5.1 Portata

Il volume di liquido che scorre nell'unità di tempo,  $Q \equiv \frac{dV}{dt}$ , si chiama *portata*. Se attraverso una sezione  $\Sigma$  il liquido scorre con velocità  $u$ , in un

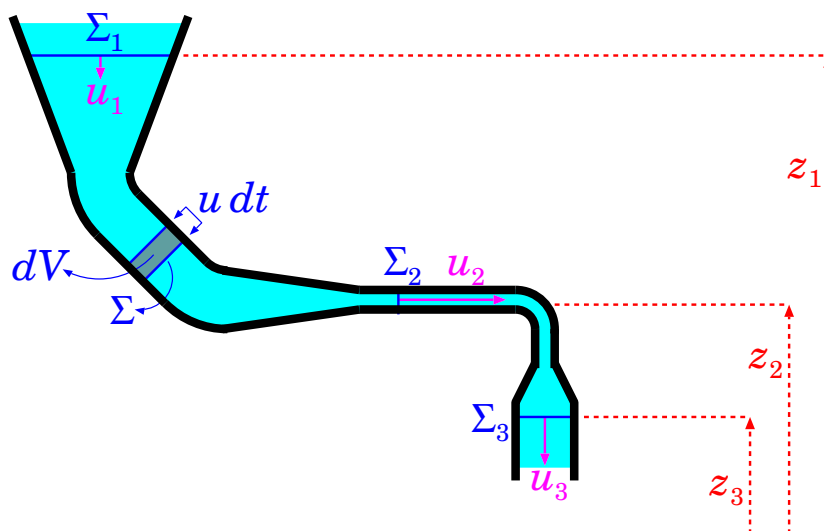


Figura 21.6: *Tubo percorso da un liquido in moto stazionario.*

tempo  $dt$  passa un volumetto  $dV = \Sigma \cdot u dt$  (vd Fig. 21.6), quindi la portata si può calcolare come

$$Q = \frac{dV}{dt} = \Sigma u \quad (\text{portata}) \quad (21.36)$$

Essendo il liquido incompressibile, il volume  $dV$  che attraversa una data sezione  $\Sigma_1$  deve essere lo stesso che attraversa qualunque altra sezione  $\Sigma_2$ . Pertanto la portata attraverso le due sezioni deve essere uguale:

$$Q_{\Sigma_1} = Q_{\Sigma_2} \quad (21.37)$$

Se così non fosse, si avrebbe nel tempo un aumento o una diminuzione del volume di liquido compreso fra le sezioni  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  — il che è assurdo, visto che questo volume è definito dalla geometria del tubo.

L'Eq. (21.37) può essere riscritta come:

$$\Sigma_1 u_1 = \Sigma_2 u_2 \quad (21.38)$$

Se la sezione è maggiore, la velocità è più bassa, e viceversa. Nell'esempio di Fig. 21.6,  $\Sigma_1 > \Sigma_3 > \Sigma_2$ , pertanto deve essere  $u_1 < u_3 < u_2$ .

### 21.5.2 Teorema di Bernoulli

Analizziamo la dinamica del movimento del liquido. Consideriamo un volumetto  $\delta V$  di liquido, soggetto alla forza totale (Eq. (21.17)):

$$\delta \vec{F} = \left( -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} \right) \delta V$$

La massa è  $\delta m = \rho \delta V$ , pertanto l'accelerazione del volumetto è:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{a} = \frac{\delta \vec{F}}{\delta m} = -\frac{\vec{\nabla} P}{\rho} + \vec{g} \quad (21.39)$$

Ciò significa che nel tempo  $dt$  la velocità del volumetto è cambiata di una quantità  $d\vec{u} = \vec{a} dt$ . Ma nello stesso tempo, il volumetto si è spostato di  $d\vec{r} = \vec{u} dt$ , e quindi si viene a trovare in una posizione diversa, dove la velocità media (che è supposta stazionaria, ricordiamo) è definita con un valore diverso, secondo l'Eq. (21.35):  $\vec{u}(\vec{r}) + d\vec{u} = \vec{u}(\vec{r} + d\vec{r})$ . Quindi possiamo vedere  $d\vec{u}$  da due punti di vista diversi: come variazione della velocità a causa delle forze agenti, oppure a causa del cambiamento di posizione. Per l'ipotesi di stazionarietà, i due risultati devono essere identici:

$$\vec{a} dt = d\vec{u} = \vec{u}(\vec{r} + d\vec{r}) - \vec{u}(\vec{r})$$

Se facciamo il prodotto scalare con  $\vec{u}$ , il primo membro diventa

$$\vec{u} \cdot \vec{a} dt = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \left( -\frac{\vec{\nabla} P}{\rho} + \vec{g} \right) dt = -\frac{d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} P}{\rho} + d\vec{r} \cdot \vec{g}$$

mentre il secondo diventa:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot d\vec{u} &= u_x du_x + u_y du_y + u_z du_z = d\left(\frac{u_x^2}{2}\right) + d\left(\frac{u_y^2}{2}\right) + d\left(\frac{u_z^2}{2}\right) \\ &= d\left(\frac{u^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Ora,

$$d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} P = dx \frac{\partial P}{\partial x} + dy \frac{\partial P}{\partial y} + dz \frac{\partial P}{\partial z}$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned} P(\vec{r} + d\vec{r}) - P(\vec{r}) &= P(x + dx, y + dy, z + dz) - P(x, y, z) \\ &= [P(x + dx, y + dy, z + dz) - P(x + dx, y + dy, z)] \\ &\quad + [P(x + dx, y + dy, z) - P(x + dx, y, z)] \\ &\quad + [P(x + dx, y, z) - P(x, y, z)] \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \end{aligned}$$

quindi

$$d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} P = dP$$

Inoltre,  $\rho$  per i liquidi è uniforme, quindi  $\frac{dP}{\rho} = d\left(\frac{P}{\rho}\right)$ . Infine,  $\vec{g} = -g\hat{z}$ , quindi  $d\vec{r} \cdot \vec{g} = -g dz$ . Mettendo tutto insieme si trova:

$$d\left(\frac{u^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz\right) = 0 \quad (21.40)$$

e quindi la quantità fra parentesi è uniforme lungo il tubo che trasporta il liquido:

$$\frac{u^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz \equiv \text{costante} \quad (21.41)$$

Questo risultato va sotto il nome di *teorema di Bernoulli*.

La quantità  $\left(\frac{u^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz\right)$  può essere considerata costante in due sensi:

- per due punti diversi (1) e (2) lungo il tubo:

$$\left(\frac{u^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz\right)_{(1)} = \left(\frac{u^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz\right)_{(2)}$$

- per un elemento  $\delta V$  di liquido che scorre nel tubo, a due istanti temporali  $t_1, t_2$ :

$$\left(\frac{u^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz\right)_{(t=t_1)} = \left(\frac{u^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz\right)_{(t=t_2)}$$

L'equivalenza fra queste due affermazioni deriva dall'ipotesi di stazionarietà: sia  $P$  che  $\vec{u}$  non devono dipendere dal tempo, ma solo dalla posizione  $\vec{r}$ . Quindi, la seconda scrittura si può derivare dalla prima, pensando a un elemento di liquido che si trova in (1) all'istante  $t = t_1$ , e successivamente si sposta in (2) all'istante  $t = t_2$ .

Per analizzare il flusso di liquido in un tubo, si fa uso del teorema di Bernoulli e della costanza della portata: date due sezioni  $\Sigma_1, \Sigma_2$ , abbiamo

$$\text{(sezione 1)} \qquad \text{(sezione 2)}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_1 u_1 &= \Sigma_2 u_2 \\ \frac{u_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} + gz_1 &= \frac{u_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho} + gz_2 \end{aligned}$$

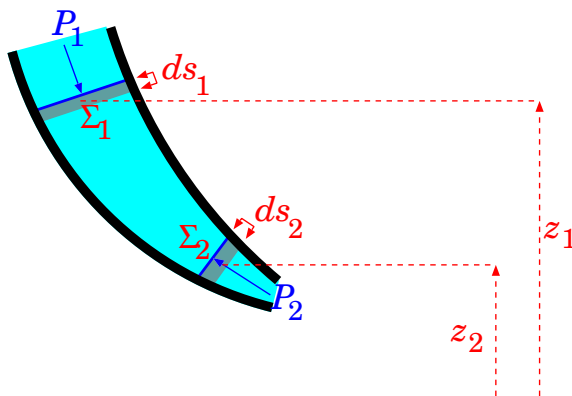


Figura 21.7: *Lavoro delle forze di pressione.*

Normalmente le quote  $z_1, z_2$  e le sezioni  $\Sigma_1, \Sigma_2$  sono note, perché dipendono dalla costruzione del tubo (vd Fig. 21.6). L'uso di queste equazioni può essere molteplice:

- si conoscono le pressioni  $P_1, P_2$  e si ricavano le velocità  $u_1, u_2$ ;
- si conoscono pressione e velocità ad una sezione (per esempio  $P_1, u_1$ ) e si ricavano quelle attraverso un'altra sezione.

### 21.5.3 Considerazioni energetiche

Il teorema di Bernoulli si può dedurre anche da considerazioni energetiche. Consideriamo una porzione di liquido fra le due sezioni  $\Sigma_1, \Sigma_2$ , come in Fig. 21.7. Su di esso agisce la forza di gravità, conservativa, e le forze di pressione, che consideriamo come forze esterne.

Durante il movimento, il liquido che si trova in prossimità della sezione  $\Sigma_1$  compie uno spostamento  $ds_1$ , mentre il liquido in prossimità della sezione  $\Sigma_2$  compie uno spostamento  $ds_2$ . Essendo il liquido incomprimibile, il volume  $dV$  di liquido spostato deve essere lo stesso in prossimità di  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ . La relazione fra queste quantità è:

$$\Sigma_1 ds_1 = dV = \Sigma_2 ds_2$$



Le forze di pressione su  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  sono:

$$\begin{aligned} F_1 &= P_1 \Sigma_1 \\ F_2 &= -P_2 \Sigma_2 \end{aligned}$$

dove i segni tengono conto del diverso orientamento delle 2 forze. Il lavoro fatto dalle forze di pressione è:

$$\delta \mathcal{W}^{(est)} = (\Sigma_1 P_1) ds_1 - (\Sigma_2 P_2) ds_2 = (P_1 - P_2) dV$$

Questo deve uguagliare la variazione dell'energia meccanica della porzione di liquido che stiamo considerando:

$$\delta \mathcal{W}^{(est)} = dE = d\mathcal{E} + d\mathcal{U}$$

Ora, per calcolare  $d\mathcal{E}$ ,  $d\mathcal{U}$  dovremmo considerare gli spostamenti di tutti gli strati di liquido compresi fra  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ . Tuttavia, a causa dell'ipotesi di stazionarietà, ciò è equivalente a supporre che lo strato adiacente a  $\Sigma_1$  si sposti direttamente fino a diventare adiacente a  $\Sigma_2$ . Quindi:

$$\begin{aligned} d\mathcal{E} &= \frac{dm}{2} (u_2^2 - u_1^2) = \rho dV \left( \frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} \right) \\ d\mathcal{U} &= dm g (z_2 - z_1) = \rho dV g (z_2 - z_1) \end{aligned}$$

Mettendo insieme tutto e semplificando via il  $dV$  si trova:

$$P_1 - P_2 = \rho \left( \frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} \right) + \rho g (z_2 - z_1)$$

che è equivalente all'Eq. (21.40).

#### 21.5.4 Esercizi su liquidi in moto stazionario

**Esercizio 21.8.** Si vuole travasare dell'olio da un grosso recipiente a delle damigiane, mediante l'uso di un imbuto conico, che ha diametro superiore  $D_1 = 15$  cm e diametro inferiore  $D_2 = 2$  cm. La densità dell'olio è  $\rho = 0.9$  g/cm<sup>3</sup>. Il livello dell'olio nell'imbuto viene mantenuto costante a  $h = 10$  cm durante la miscita. Quanto tempo occorre per riempire una damigiana di 5 litri? Si assuma un flusso stazionario e si trascurino gli attriti.

**Risposta.** Bisogna ovviamente calcolare la portata  $\mathcal{Q}$  dell'imbuto. Questa è uguale attraverso le sezioni superiore e inferiore:  $\mathcal{Q} = \Sigma_1 u_1 = \Sigma_2 u_2$ , essendo  $\Sigma_{1,2} = \pi \left( \frac{D_{1,2}}{2} \right)^2$ . Quindi occorre conoscere le velocità con cui l'olio fluisce. Il teorema di Bernoulli ci dice che:

$$\frac{u_2^2 - u_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} = g(z_1 - z_2)$$

Ora, la pressione ad entrambi gli estremi è quella atmosferica, quindi  $P_1 = P_2$ . Inoltre  $z_1 - z_2 = h$  è noto. Infine, possiamo esprimere  $u_1 = \frac{\Sigma_2}{\Sigma_1} u_2 = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 u_2$ . Quindi abbiamo:  $u_2^2 \left(1 - \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4\right) = 2gh$ ,

ovvero  $u_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - (D_2/D_1)^4}} = \sqrt{\frac{2(9.806 \text{ m/s}^2)(0.1 \text{ m})}{1 - (2/15)^4}} = 1.4 \text{ m/s}$ . La portata è

$Q = \Sigma_2 u_2 = \pi \left(\frac{D_2}{2}\right)^2 u_2 = 3.1415927 (0.01 \text{ m})^2 (1.4 \text{ m/s}) = 4.398 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ . Il volume da riempire è  $V = 5 \text{ l} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ , quindi il tempo necessario è  $\Delta t = \frac{V}{Q} = 11.37 \text{ s}$ .

**Esercizio 21.9.** In un tubo orizzontale di sezione variabile scorre dell'alcool etilico ( $\rho = 0.81 \text{ g/cm}^3$ ). Ai capi del tubo la pressione  $P_1$  è pari a quella atmosferica, il diametro del tubo è  $D_1 = 1 \text{ cm}$  e la velocità è  $u_1 = 1 \text{ m/s}$ . In una parte centrale il diametro si stringe fino a  $D_2$ : quanto deve valere  $D_2$  perché la pressione  $P_2$  si dimezzi rispetto a  $P_1$ ? È possibile trovare un diametro ancora più stretto  $D_3$  affinché la pressione si annulli?

**Risposta.** Il tubo è orizzontale, quindi la quota  $z$  è uguale ovunque, e l'equazione di Bernoulli si scrive:  $\frac{1}{\rho} (P_1 - P_2) = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2}$ , quindi  $u_2^2 = u_1^2 + \frac{2}{\rho} (P_1 - P_2)$ . Per avere  $P_2 =$

$0.5 P_1$  occorre che  $u_2 = \sqrt{u_1^2 + \frac{P_1}{\rho}} = \sqrt{(1 \text{ m/s})^2 + \frac{1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}}{810 \text{ kg/m}^3}} = 11.23 \text{ m/s}$ .

Dalla conservazione della portata,  $\pi \left(\frac{D_1}{2}\right)^2 u_1 = \pi \left(\frac{D_2}{2}\right)^2 u_2$ , si trova che

$$D_2 = D_1 \sqrt{\frac{u_1}{u_2}} = (1 \text{ cm}) \sqrt{\frac{1 \text{ m/s}}{11.23 \text{ m/s}}} = 0.298 \text{ cm}.$$

Per avere  $P_3 = 0$ , si ragiona nello stesso modo: deve essere  $u_3 = \sqrt{u_1^2 + 2 \frac{P_1}{\rho}} = \sqrt{(1 \text{ m/s})^2 + 2 \frac{1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}}{810 \text{ kg/m}^3}} = 15.84 \text{ m/s}$ .

$$\text{Quindi } D_3 = D_1 \sqrt{\frac{u_1}{u_3}} = (1 \text{ cm}) \sqrt{\frac{1 \text{ m/s}}{15.84 \text{ m/s}}} = 0.251 \text{ cm}.$$

**Osservazione.** Si potrebbe pensare che, con sezioni ancora più piccole, si ottengano velocità ancora più elevate, dunque pressioni negative — il che è privo di senso fisico! Quello che succede nella realtà, è che per  $P \rightarrow 0$  il liquido inizia a “bollire”, producendo dunque bolle di gas. Queste non sono più a densità costante, quindi il sistema non è più nelle condizioni di applicare le equazioni di Bernoulli e della portata.

**Esercizio 21.10.** La superficie dell'acqua di un bacino artificiale si trova a quota 1800 m sul livello del mare. Una condotta forzata raccoglie acqua dal fondo del

bacino e la porta ad una centrale elettrica situata a quota 1200 m sul livello del mare. Calcolare la velocità di uscita dell'acqua.

**Risposta.** Come sempre si usa l'equazione di Bernoulli, per le quote  $z_1 = 1800$  m e  $z_2 = 1200$  m:

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} + gz_1 = \frac{u_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho} + gz_2$$

Abbiamo due incognite,  $u_1, u_2$ , e una sola equazione. Apparentemente mancano i dati per scrivere l'equazione della portata. Tuttavia è logico considerare  $u_1 = 0$ , essendo la sezione a quota  $z_1$  (l'intera superficie dello specchio d'acqua) sicuramente molto maggiore della sezione a quota  $z_2$  (la sezione della condotta al livello della centrale). Per le pressioni, possiamo assumere  $P_2 - P_1 = \rho'g(z_1 - z_2)$ , con  $\rho' = 1.3$  kg/m<sup>3</sup> la densità dell'aria: si ottiene  $P_2 - P_1 = (1.3 \text{ kg/m}^3)(9.806 \text{ m/s}^2)(600 \text{ m}) = 7649$  Pa.

In conclusione, 
$$u_2 = \sqrt{2 \left( g\Delta z - \frac{\Delta P}{\rho} \right)} = 108.4 \text{ m/s.}$$

Una piccola osservazione: se avessimo trascurato la differenza di pressione dovuta all'atmosfera terrestre, avremmo trovato 108.5 m/s.

## 21.6 Dinamica dei fluidi: equazioni di Eulero (\*)

Questo capitolo vuole essere un'introduzione, per i lettori più curiosi (e arditi...), alla trattazione generale della fluidodinamica. Si consiglia prima una conoscenza dei campi vettoriali e degli operatori differenziali definiti su di essi — vedi Capitolo 20.

Finora abbiamo studiato la dinamica di un volumetto  $\delta V$  di fluido, soggetto a forze di volume e di superficie: questo approccio si chiama *punto di vista Lagrangiano*, e il volumetto  $\delta V$  si chiama per questo *elemento Lagrangiano di fluido*.

Un altro approccio è quello di considerare come oggetto di studio tutto il campo vettoriale  $\vec{u}(\vec{r}; t)$  delle velocità di deriva, come funzione della posizione  $\vec{r}$  e del tempo  $t$ . Questo approccio si chiama *punto di vista Euleriano*.

Una variazione  $d\vec{u}$  della velocità dell'elemento Lagrangiano può essere vista come dovuta sia al passare del tempo ( $dt$ ) che allo spostarsi nello spazio

$(d\vec{r})$ : pertanto

$$\begin{aligned} d\vec{u} &= \vec{u}(\vec{r} + d\vec{r}; t + dt) - \vec{u}(\vec{r}; t) \\ &= \vec{u}(x + dx, y + dy, z + dz; t + dt) - \vec{u}(x, y, z; t) \\ &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dt + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} dz \end{aligned}$$

Esprimendo  $dx = u_x dt$ ,  $dy = u_y dt$ ,  $dz = u_z dt$

$$d\vec{u} = \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} u_x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} u_y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} u_z \right) dt$$

quindi

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + u_x \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + u_z \frac{\partial \vec{u}}{\partial z}$$

Si suole chiamare  $\frac{d\vec{u}}{dt}$  la *derivata totale* di  $\vec{u}$  rispetto al tempo — per distinguerla dalla derivata parziale  $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ .

Ricordando che l'operatore gradiente è definito come

$$\vec{\nabla} \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

possiamo scrivere in forma compatta

$$u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \equiv \vec{u} \cdot \vec{\nabla}$$

e quindi

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \quad (21.42)$$

Ora l'equazione della dinamica, Eq. (21.21), si può scrivere come:

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right] = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} + \eta \nabla^2 \vec{u} \quad (21.43)$$

Questa è l'*equazione di Eulero* per la dinamica di un fluido.

Il significato di questa equazione è il seguente: se ad un dato istante iniziale  $t_0$  conosco il campo vettoriale delle velocità  $\vec{u}(\vec{r}; t_0)$  in ogni punto, e il campo scalare delle pressioni  $P(\vec{r}; t_0)$ , allora posso calcolare in ogni punto

$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ , e quindi dedurre il campo di velocità  $\vec{u}(\vec{r}; t_0 + dt)$  all'istante  $(t_0 + dt)$ . Iterando, si può studiare quindi come  $\vec{u}(\vec{r}; t)$  evolve nel tempo.

Un altro approccio potrebbe essere di studiare le *soluzioni stazionarie*, cioè quelle in cui  $\vec{u}$ ,  $\rho$ ,  $P$  non dipendono dal tempo:  $\vec{u} \equiv \vec{u}(\vec{r})$ ,  $P \equiv P(\vec{r})$ ,  $\rho \equiv \rho(\vec{r})$ ; in particolare,  $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0$ . Inoltre, si suppone che le *condizioni al contorno* siano note, ovvero si conoscono  $\vec{u}$ ,  $\rho$ ,  $P$  in ogni punto della superficie che delimita il volume in cui scorre il fluido (per esempio le pareti di un tubo). Con questi dati, si cerca di calcolare quanto valgono i campi  $\vec{u}(\vec{r})$ ,  $P(\vec{r})$ ,  $\rho(\vec{r})$  in ogni punto del fluido.

Va notato che, in generale, la soluzione di equazioni di questo genere è molto complessa, e richiede tecniche di calcolo analitico e/o numerico che trascendono lo scopo di questo testo.

L'Eq. (21.43) è vettoriale, pertanto fornisce 3 equazioni — una per ogni componente cartesiana. Le funzioni incognite sono  $\vec{u}(\vec{r}; t)$  (vettoriale, quindi con 3 componenti cartesiane),  $P(\vec{r}; t)$  e  $\rho(\vec{r}; t)$ , quindi in totale 5 funzioni incognite. Nel caso che il fluido sia un liquido,  $\rho$  diventa una costante e le incognite restano 4. In ogni caso occorre cercare (almeno) un'altra equazione.

Se consideriamo un volume  $V$  di spazio, contenente una massa  $M$  di fluido, essa vale:

$$M = \int_V dV' \rho(\vec{r}'; t)$$

Se tale massa varia nel tempo, tale variazione deve essere necessariamente dovuta a un flusso di massa attraverso la superficie chiusa  $\Sigma$  che delimita il volume  $V$ . Attraverso una porzione infinitesima  $\delta\Sigma$  di tale superficie, il volumetto di fluido che può passare in un tempo  $dt$  è

$$\delta V = -(\vec{u} dt) \cdot \hat{n} \delta\Sigma$$

e quindi la migrazione di massa è:

$$\delta m = \rho \delta V = -\rho \cdot (\vec{u} dt) \cdot \hat{n} \delta\Sigma$$

Pertanto la variazione totale di massa entro  $V$  è:

$$\frac{dM}{dt} = - \int_{\Sigma} \rho \vec{u} \cdot (\hat{n} d\Sigma) = -\Phi_{\Sigma}(\rho \vec{u})$$

Il “teorema della divergenza” consente di scrivere un integrale di flusso come integrale di volume:

$$\Phi_{\Sigma}(\rho \vec{u}) = \int_V dV' \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u})$$

quindi troviamo

$$\int_V dV' \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{dM}{dt} = - \int_V dV' \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u})$$

Siccome questa equazione deve valere per qualunque scelta di  $V$ , occorre che le funzioni integrande siano identiche:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (21.44)$$

Questa è l'*equazione di continuità*. Nel caso dei liquidi, in cui  $\rho$  è costante e uniforme ovunque, essa si riduce a

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (\text{liquidi}) \quad (21.45)$$

# Capitolo 22

## Moti in campi gravitazionali

La forza di gravità produce attrazione fra qualunque coppia di oggetti dotati di massa. È responsabile della caduta di un oggetto verso il basso, ma anche del moto orbitale della Luna intorno alla Terra, del moto dei pianeti intorno al Sole, dell'aggregazione delle stelle in galassie... Come si vede, una sola legge può descrivere in modo coerente fenomeni a prima vista molto diversi fra loro.

### 22.1 Gravitazione universale

La *legge della gravitazione universale*, formulata da Isaac Newton, è il primo esempio di “teoria unificata” della fisica.

Essa si formula così: *Due oggetti di masse  $m_1$  e  $m_2$ , sufficientemente piccoli rispetto alla distanza  $D$  che li separa, si attraggono con una forza proporzionale al prodotto delle masse, e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza:*

$$F = G \frac{m_1 m_2}{D^2} \quad (22.1)$$

vd Fig. 22.1 (sinistra). *La direzione di tale forza è lungo la retta che congiunge le due masse. La costante di proporzionalità  $G$  si chiama “costante gravitazionale universale” o “costante di Newton” ed è indipendente dalla natura delle masse. Il suo valore è:*

$$G = 6.67384 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2} \quad (22.2)$$

Il valore di  $G$  è molto piccolo! In effetti, la gravità è la più debole delle forze esistenti in natura. Nell'interazione fra atomi, molecole, ma anche fra oggetti di uso quotidiano, ha effetti del tutto trascurabili.

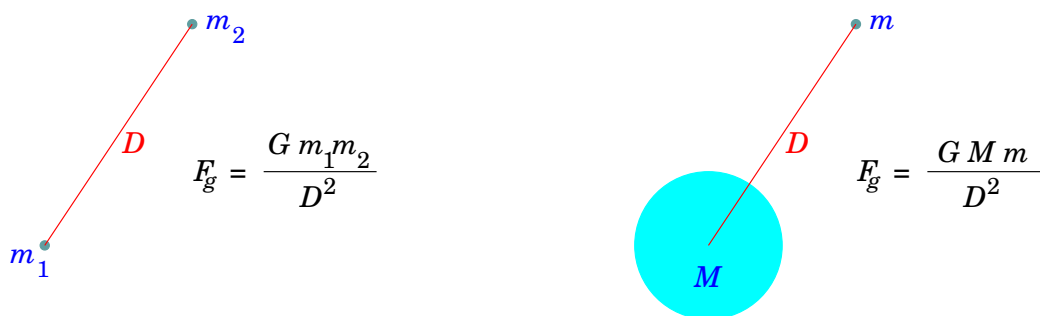


Figura 22.1: Forza di gravità: a sinistra, fra due masse puntiformi  $m_1$ ,  $m_2$  a distanza  $D$ ; a destra, fra una massa estesa sferica  $M$  e una massa puntiforme  $m$  posta a distanza  $D$  dal centro della massa sferica.

**Esercizio 22.1.** Calcolare la forza gravitazionale agente fra due masse di 1 kg, poste alla distanza di 1 m l'una dall'altra.

**Risposta.** applicando l'Eq. (22.1) si ottiene  $F = 6.67384 \cdot 10^{-11}$  N.

Allora, come fa la gravità a tenere insieme i sistemi planetari? La risposta sta nelle *enormi masse* che caratterizzano i pianeti e soprattutto le stelle.

### 22.1.1 Massa sferica non puntiforme

Conviene anticipare qui un risultato che dimostreremo più avanti, in Sezione 22.8. Se abbiamo un oggetto *esteso* di massa  $M$ , a *simmetria sferica*, e un oggetto di massa  $m$  puntiforme, esterno all'oggetto sferico, la forza gravitazionale fra essi è sempre data da

$$F_g = \frac{GMm}{D^2}$$

essendo  $D$  la distanza fra il centro di  $M$  e  $m$  — vd Fig. 22.1 (destra). Quindi, la massa  $M$  estesa sferica si comporta come se fosse tutta concentrata nel suo centro.

**Esercizio 22.2.** Un oggetto, lasciato cadere in prossimità della superficie terrestre, si muove di moto uniformemente accelerato verso il basso: l'accelerazione misurata è  $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$ . Approssimando la Terra come una sfera di raggio  $R_{\oplus} = 6371 \text{ km}$ , calcolarne la massa  $M_{\oplus}$ .

**Risposta.** Un oggetto cade con accelerazione  $g$ , pertanto se  $m$  è la sua massa, è soggetto ad una forza  $mg$ . Tale forza è dovuta all'attrazione gravitazionale fra le



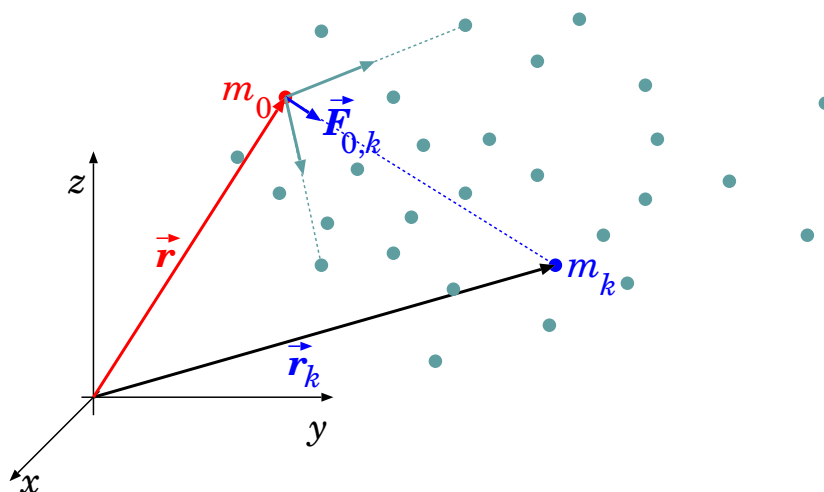


Figura 22.2: Forze gravitazionali su una massa-sonda  $m_0$ , prodotte da masse circostanti  $m_1, \dots, m_N$ . In evidenza, la  $k$ -esima massa  $m_k$  posta in posizione  $\vec{r}_k$ , che produce una forza  $\vec{F}_{0,k}$  sulla massa-sonda  $m_0$ .

due masse in gioco,  $m$  e  $M_\oplus$ , pertanto è calcolabile con l'Eq. (22.1):

$$mg = G \frac{mM_\oplus}{R_\oplus^2} \quad \Longrightarrow \quad M_\oplus = \frac{gR_\oplus^2}{G}$$

Osserviamo che il risultato non dipende dalla massa  $m$  dell'oggetto. Inserendo i dati si trova

$$M_\oplus = 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

La massa della Terra è circa 6000 miliardi di miliardi di tonnellate!

## 22.2 Il campo gravitazionale

Consideriamo un oggetto puntiforme di massa  $m_0$ , posizionato in  $\vec{r}$ : poiché useremo questa massa per calcolare (o misurare) la forza gravitazionale prodotta da altre masse, chiamiamo  $m_0$  *massa-sonda*.

La massa-sonda  $m_0$  sente la forza gravitazionale prodotta da un insieme di altre masse puntiformi  $m_1, \dots, m_n$ , poste rispettivamente nelle posizioni  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$  — vd Fig. 22.2.

L'intensità della forza gravitazionale prodotta da  $m_k$  su  $m_0$  è data dall'Eq. (22.1), in cui la distanza fra le due masse è data da  $|\vec{r} - \vec{r}_k|$ :

$$F_{0k} = G \frac{m_k m_0}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^2}$$

Questa è un'espressione scalare. Per combinare le azioni di tutte le masse  $m_1, \dots, m_n$  occorre trovare l'espressione vettoriale per la forza. Essa deve essere orientata lungo la direzione che congiunge le masse  $m_0$  e  $m_k$ , e diretta verso quest'ultima, poiché è sempre attrattiva. Pertanto  $\vec{F}_{0k}$  è diretta come  $-(\vec{r} - \vec{r}_k)$ .

$$\vec{F}_{0k} = -G \frac{m_k m_0}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^3} (\vec{r} - \vec{r}_k) \quad (22.3)$$

La forza gravitazionale totale prodotta dal sistema di masse  $m_1, \dots, m_n$  su  $m_0$  è

$$\vec{F}_0(\vec{r}) = -G m_0 \sum_k \frac{m_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^3} (\vec{r} - \vec{r}_k) \quad (22.4)$$

dove la scrittura  $\vec{F}_0(\vec{r})$  enfatizza che essa dipende sia dalla massa  $m_0$  che dalla posizione  $\vec{r}$ .

Qualunque sia la distribuzione delle masse  $m_1, \dots, m_n$ , la forza su  $m_0$  è sempre proporzionale ad  $m_0$ . Questo suggerisce di definire un'altra quantità, indipendente dalla massa-sonda: il *campo gravitazionale* definito come  $\vec{F}_0(\vec{r})/m_0$ :

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G \sum_k \frac{m_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^3} (\vec{r} - \vec{r}_k) \quad (22.5)$$

Questo dipende solo dalla posizione relativa del punto in cui lo si calcola rispetto al sistema di masse  $m_1, \dots, m_n$  che lo generano.

### 22.2.1 Massa inerziale e gravitazionale, principio di equivalenza

Abbiamo già osservato più volte che, se la massa-sonda non risente di altre forze oltre a quelle gravitazionali, la sua accelerazione *coincide* con il campo gravitazionale  $\vec{g}$ :

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_0}{m_0} = \vec{g}$$

Questa caratteristica è unica per la forza gravitazionale. La ragione risiede nella *identità fra la massa come inerzia dell'oggetto e come capacità di sentire forze gravitazionali*. Queste due proprietà si chiamano rispettivamente *massa*

*inerziale e massa gravitazionale*; potremmo definirle così:

$$\vec{F} = \underbrace{m}_{\text{massa inerziale}} \vec{a} \quad (\vec{F} \text{ forza qualunque})$$

$\hookrightarrow$  massa inerziale

$$\vec{F}_g = \underbrace{m_g}_{\text{massa gravitazionale}} \vec{g} \quad (\vec{F}_g \text{ forza gravitazionale})$$

$\hookrightarrow$  massa gravitazionale

In linea di principio, sarebbero due quantità diverse, ma la loro identità è stata provata sperimentalmente con altissima precisione: è una legge di natura, nota come *principio di equivalenza* <sup>[1]</sup>:

$$m \equiv m_g \quad (\text{principio di equivalenza})$$

## 22.3 Energia gravitazionale

*La forza gravitazionale è conservativa.* Quindi ammette un'energia potenziale  $\mathcal{U}(\vec{r})$ , tale che l'energia meccanica  $E = \mathcal{E} + \mathcal{U}(\vec{r})$  sia costante per un oggetto in moto nel campo gravitazionale.

Abbiamo già visto questo risultato nel Capitolo 13 (in particolare Sezione 13.7, Eq. (13.22)). Ripetiamo il ragionamento, per autoconsistenza di questo capitolo.

### 22.3.1 Campo centrale

Consideriamo il campo gravitazionale centrale generato da una massa  $M$ , per semplicità posta nell'origine  $O$  del nostro riferimento. La forma del campo gravitazionale diventa relativamente semplice:

$$\vec{g}(\vec{r}) = -GM \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (22.6)$$

Vogliamo calcolare il lavoro  $\mathcal{W}$  fatto dalla forza gravitazionale  $\vec{F} = m_0 \vec{g}$  lungo una linea  $\Gamma$  dalla posizione (1) alla posizione (2). Cominciamo con il

---

<sup>1</sup> Su questo principio Einstein fondò la Relatività Generale: si tratta di una teoria estremamente predittiva, che spiega quantitativamente una serie di osservazioni astrofisiche molto diverse fra loro, dall'anomalia dell'orbita di Mercurio, all'esistenza dei buchi neri, alle orbite di oggetti massicci come stelle di neutroni, fino alle onde gravitazionali, recentemente osservate.

calcolo del lavoro elementare  $\delta\mathcal{W}$  per uno spostamento da  $\vec{r}$  a  $\vec{r} + d\vec{r}$ :

$$\delta\mathcal{W} = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -GMm_0 \frac{\vec{r} \cdot d\vec{r}}{r^3}$$

Abbiamo già visto (vedi Sezione 13.7) come trattare forme differenziali del tipo  $\vec{r} \cdot d\vec{r}$  o  $r dr$ :

$$\vec{r} \cdot d\vec{r} = d\left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{2}\right) = d\left(\frac{r^2}{2}\right) = r dr$$

Pertanto si trova:

$$\delta\mathcal{W} = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -GMm_0 \frac{dr}{r^2}$$

È un risultato notevole! Il lavoro elementare dipende solo dalla distanza radiale  $r$  e dalla sua variazione  $dr$ , *non dalla direzione di  $d\vec{r}$* . La ragione di questo è che il campo  $\vec{g}(\vec{r})$  ha direzione radiale e dipendenza radiale. Qualunque campo  $\vec{f}(\vec{r}) = f(r)\hat{r}$  darebbe questo risultato.

Ora possiamo integrare il lavoro elementare sulla linea  $\Gamma$  da (1) a (2):

$$\mathcal{W}_{(1) \rightarrow (2)} = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -GMm_0 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = GMm_0 \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

(il calcolo dell'integrale è stato effettuato usando la funzione primitiva di  $1/r^2$ , che è  $-1/r$ ). In breve,  $\mathcal{W}$  non dipende dalla curva  $\Gamma$  ma solo dagli estremi (1) e (2) — anzi, solo dalle loro distanze radiali  $r_1, r_2$  dal centro.

Quindi un campo gravitazionale centrale prodotto da una massa puntiforme  $M$  è conservativo. L'energia potenziale  $\mathcal{U}$  deve soddisfare la relazione

$$\mathcal{U}(1) - \mathcal{U}(2) = \mathcal{W}_{(1) \rightarrow (2)} = GMm_0 \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

La scelta ovvia è:

$$\mathcal{U}(r) = -\frac{GMm_0}{r} \tag{22.7}$$

### 22.3.2 Generalizzazione

Essendo conservativa la forza gravitazionale prodotta da una massa puntiforme, anche quella prodotta da un sistema di masse lo è.

In effetti, se  $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ , allora il lavoro lungo una curva  $\Gamma$  da  $A$  a  $B$  è

$$\mathcal{W} = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} \left( \sum_i \vec{F}_i \right) \cdot d\vec{r} = \sum_i \int_{\Gamma} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}$$

(per l'ultimo passaggio: l'integrale di una somma è pari alla somma degli integrali — vd regole in Sezione 3.3). Ora  $\vec{F}_i$  è prodotta dalla massa  $i$ -esima, che si trova nella posizione  $\vec{r}_i$ . Pertanto, dall'Eq. (22.7), per traslazione,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \vec{F}_i \cdot d\vec{r} &= \mathcal{U}(|\vec{r}_A - \vec{r}_i|) - \mathcal{U}(|\vec{r}_B - \vec{r}_i|) \\ &= Gm_i m_0 \left( \frac{1}{|\vec{r}_B - \vec{r}_i|} - \frac{1}{|\vec{r}_A - \vec{r}_i|} \right) \end{aligned}$$

quindi

$$\mathcal{W} = Gm_0 \sum_i m_i \left( \frac{1}{|\vec{r}_B - \vec{r}_i|} - \frac{1}{|\vec{r}_A - \vec{r}_i|} \right)$$

Il lavoro dipende solo dai punti estremi  $\vec{r}_A$  e  $\vec{r}_B$ , e non dalla curva  $\Gamma$ . L'energia potenziale gravitazionale è

$$\mathcal{U}(\vec{r}) = -Gm_0 \sum_i \frac{m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad (22.8)$$

### 22.3.3 Energia potenziale vicino alla superficie terrestre

In prossimità della superficie terrestre, siamo abituati a scrivere la forza di gravità (o forza-peso) e la corrispondente energia potenziale come

$$\vec{F}_g = -mg\hat{z} \quad ; \quad \mathcal{U} = mgh \quad (\text{forza-peso})$$

Come si conciliano queste espressioni con

$$\vec{F}_g = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} \quad ; \quad \mathcal{U}_g = -\frac{GMm}{r}$$

trovate per il campo centrale?

In prossimità della superficie terrestre, ad un'altezza  $h$  da essa, possiamo scrivere la distanza  $r$  dal centro della Terra come

$$r = R + h$$

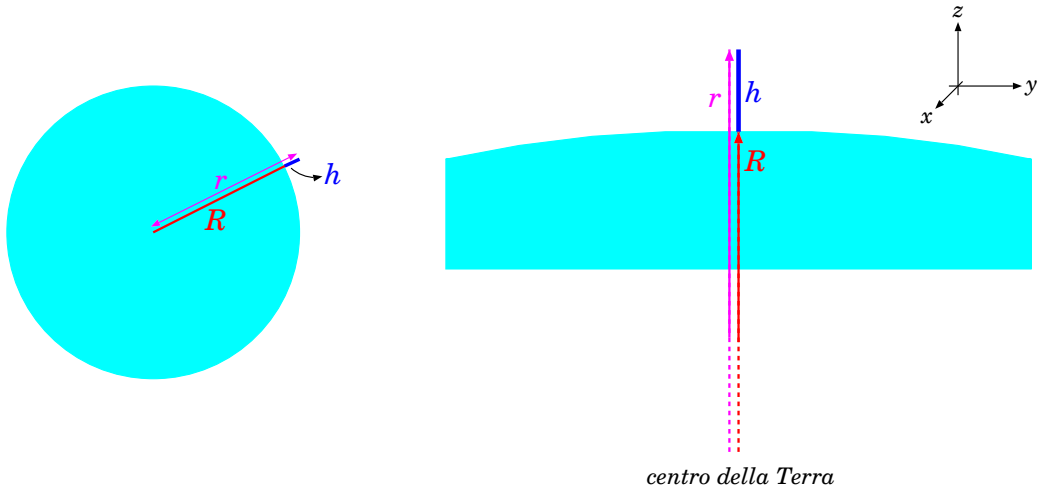


Figura 22.3: Relazione fra altezza  $h$  dal suolo, raggio  $R$  del pianeta, e distanza  $r$  dal centro del pianeta.

essendo  $R$  il raggio della Terra — vd Fig. 22.3. L'asse  $z$  è scelto orientato in verticale verso l'alto, pertanto localmente  $\hat{z} \equiv \hat{r}$ . Alla superficie deve essere  $-mg\hat{z} = -\frac{GMm}{R^2}\hat{r}$ , ovvero

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

Ora trattiamo l'energia potenziale:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_g &= -\frac{GMm}{R+h} = -\frac{GMm}{R\left(1+\frac{h}{R}\right)} = -\frac{GMm}{R}\left(1+\frac{h}{R}\right)^{-1} \\ &\simeq -\frac{GMm}{R}\left(1-\frac{h}{R}\right) = -\frac{GMm}{R} + \frac{GMm}{R^2}h \\ &= -\frac{GMm}{R} + mgh \end{aligned}$$

Quindi abbiamo ritrovato la familiare espressione  $mgh$ , più un termine additivo  $-\frac{GMm}{R}$ : questo però non deve preoccuparci, perché l'energia potenziale è sempre definita a meno di una costante additiva, che dipende da dove è stato scelto il suo “zero”.

A scanso di equivoci: l'energia potenziale generata da un oggetto sferico è sempre  $\mathcal{U}_g = -\frac{GMm}{r}$ . L'espressione  $\mathcal{U} = mgh$  è un'approssimazione, valida

solo per  $h \ll R$  — ricordiamo che il raggio della Terra è  $R = 6370$  km, e quindi, al limite, anche sul Monte Everest ( $h = 8.8$  km) l'approssimazione è ragionevole! Già non lo è più se consideriamo satelliti in orbita, tipicamente a  $h \gtrsim 200$  km.

### Accuratezza dell'approssimazione $mgh$

Usando i dati della Terra, vediamo come si discostano i valori di  $\mathcal{U}_g^{approx} = mgh$  rispetto a quelli esatti ottenuti come  $\mathcal{U}_g = GMm \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right)$ , a diverse altezze  $h$  dal suolo, per una massa  $m = 1$  kg:

$h$	$\mathcal{U}_g$ $GMm \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right)$	$\mathcal{U}_g^{approx}$ $mgh$	$\Delta_{rel}$ $\frac{\mathcal{U}_g^{approx} - \mathcal{U}_g}{\mathcal{U}_g}$	
100 m	980.58 J	980.60 J	$1.57 \cdot 10^{-5}$	
1000 m	9804.5 J	9806.0 J	$1.57 \cdot 10^{-4}$	
8840 m	86565 J	86685 J	$1.39 \cdot 10^{-3}$	<i>M.te Everest</i>
200 km	1.902 MJ	1.961 MJ	0.031	<i>orbita LEO</i>
400 km	3.690 MJ	3.922 MJ	0.063	<i>ISS</i>
36000 km	53.07 MJ	353.01 MJ	5.65	<i>orbita GEO</i>

Ad altezze comparabili con i rilievi terrestri, la discrepanza introdotta da  $mgh$  arriva al massimo allo 0.1%, sul Monte Everest. Per orbite basse (“LEO”) già si commetterebbe un errore di alcuni %, mentre per l’orbita geostazionaria (“GEO”) l’espressione  $mgh$  è totalmente inadeguata!

## 22.4 Potenziale gravitazionale

L’energia potenziale  $\mathcal{U}$  è sempre proporzionale alla massa-sonda  $m_0$ , pertanto è utile definire il *potenziale gravitazionale* come:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\mathcal{U}(\vec{r})}{m_0} \quad (22.9)$$

Per il campo centrale:

$$\Phi(r) = \frac{\mathcal{U}(r)}{m_0} = -\frac{GM}{r} \quad (\text{campo centrale}) \quad (22.10)$$

mentre per un generico sistema di masse  $m_i$  poste nelle posizioni  $\vec{r}_i$ :

$$\Phi(\vec{r}) = -G \sum_i \frac{m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad (22.11)$$

Così come la relazione fra forza e energia potenziale è:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\mathcal{U} \quad (22.12)$$

analogamente la relazione fra il campo gravitazionale  $\vec{g}$  e il potenziale gravitazionale  $\Phi$  è

$$\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi \quad (22.13)$$

Confrontando le due equazioni per il campo  $\vec{g}(\vec{r})$  e il potenziale  $\Phi(\vec{r})$ :

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G \sum_k \frac{m_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^3} (\vec{r} - \vec{r}_k) \quad ; \quad \Phi(\vec{r}) = -G \sum_i \frac{m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

si vede che il calcolo di  $\Phi(\vec{r})$  è di gran lunga più semplice, perché implica la somma di quantità scalari. Dovendo calcolare  $\vec{g}(\vec{r})$  generato da un sistema di masse, in generale è più conveniente calcolare  $\Phi(\vec{r})$  e poi fare  $\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi$ .

## 22.5 Il Sistema Solare

Il Sistema Solare è costituito dal Sole, *al centro*, da quattro piccoli pianeti rocciosi (Mercurio, Venere, Terra, Marte), quattro grandi pianeti gassosi (Giove, Saturno, Urano, Nettuno), diversi “planetoidi” (Cerere, Plutone, Eris, Sedna, ...), i satelliti dei pianeti (la Luna, Phobos e Deimos che orbitano intorno a Marte, le decine di satelliti dei pianeti gassosi), e infine una miriade di oggetti più piccoli (asteroidi, comete, ...) dislocati fino a distanze molto grandi. Le orbite degli otto pianeti e quella di Plutone sono rappresentate in scala, in Fig. 22.4: sono tutte *approssimativamente* circolari e *approssimativamente* co-planari.

In realtà sono *ellittiche*, con il Sole in un fuoco, e alcune (specialmente quella di Plutone) si discostano sensibilmente dal piano orbitale della Terra. Un’orbita ellittica è caratterizzata da una distanza minima  $r_{min}$  e una distanza massima  $r_{max}$  dal centro di gravità (il Sole, nel caso dei pianeti). I punti di minima e massima distanza si chiamano *perielio* e *aphelio*. Un’orbita ellittica è parametrizzata dall’*eccentricità*, definita come

$$\epsilon = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}} \quad (\text{eccentricità})$$

Plutone e gli altri planetoidi sono quelli con l’eccentricità più elevata. Eris ha il perielio a  $r_{min} \sim 6 \cdot 10^9$  km e l’aphelio a  $r_{max} \sim 16 \cdot 10^9$  km; per Sedna  $r_{min} \sim 11 \cdot 10^9$  km e l’aphelio a  $r_{max} \sim 140 \cdot 10^9$  km! I parametri dei principali oggetti del Sistema Solare sono riassunti in Tabella 22.1.



oggetto celeste	distanza dal Sole		massa		periodo orbitale		eccen.	incl. (gradi)
	( $10^6$ km)	(A.U.)	(kg)	( $M_{\oplus}$ )	(giorni)	(anni)		
Sole			$1.989 \cdot 10^{30}$	333 000				
Mercurio	57.9	0.390	$3.301 \cdot 10^{23}$	0.0552	$0.166 \cdot 10^{-6}$	88.87	0.243	7.00
Venere	108.2	0.723	$4.867 \cdot 10^{24}$	0.815	$2.448 \cdot 10^{-6}$	224.70	0.615	3.39
Terra	149.6	1	$5.972 \cdot 10^{24}$	1	$3.003 \cdot 10^{-6}$	365.25	1	0.00
Marte	227.9	1.524	$6.417 \cdot 10^{23}$	0.107	$0.323 \cdot 10^{-6}$	686.97	1.881	1.85
Giove	778.3	5.203	$1.899 \cdot 10^{27}$	318	$954.8 \cdot 10^{-6}$	4332.59	11.862	1.31
Saturno	1 427.0	9.539	$5.685 \cdot 10^{26}$	95.2	$285.9 \cdot 10^{-6}$	10 759.22	29.457	2.48
Urano	2 871.0	19.18	$8.682 \cdot 10^{25}$	14.5	$43.66 \cdot 10^{-6}$	30 799.10	84.323	0.77
Nettuno	4 497.1	30.06	$1.024 \cdot 10^{26}$	17.1	$51.51 \cdot 10^{-6}$	60 190.03	164.791	1.77
Plutone	5 913.0	39.53	$1.471 \cdot 10^{22}$	0.0025	$0.007 \cdot 10^{-6}$	90 465	247.680	17.14

Tabella 22.1: Parametri dei principali oggetti del Sistema Solare: masse, distanze dal Sole e periodi orbitali. L'acronimo A.U. ("astronomical units") indica la distanza Sole-Terra.

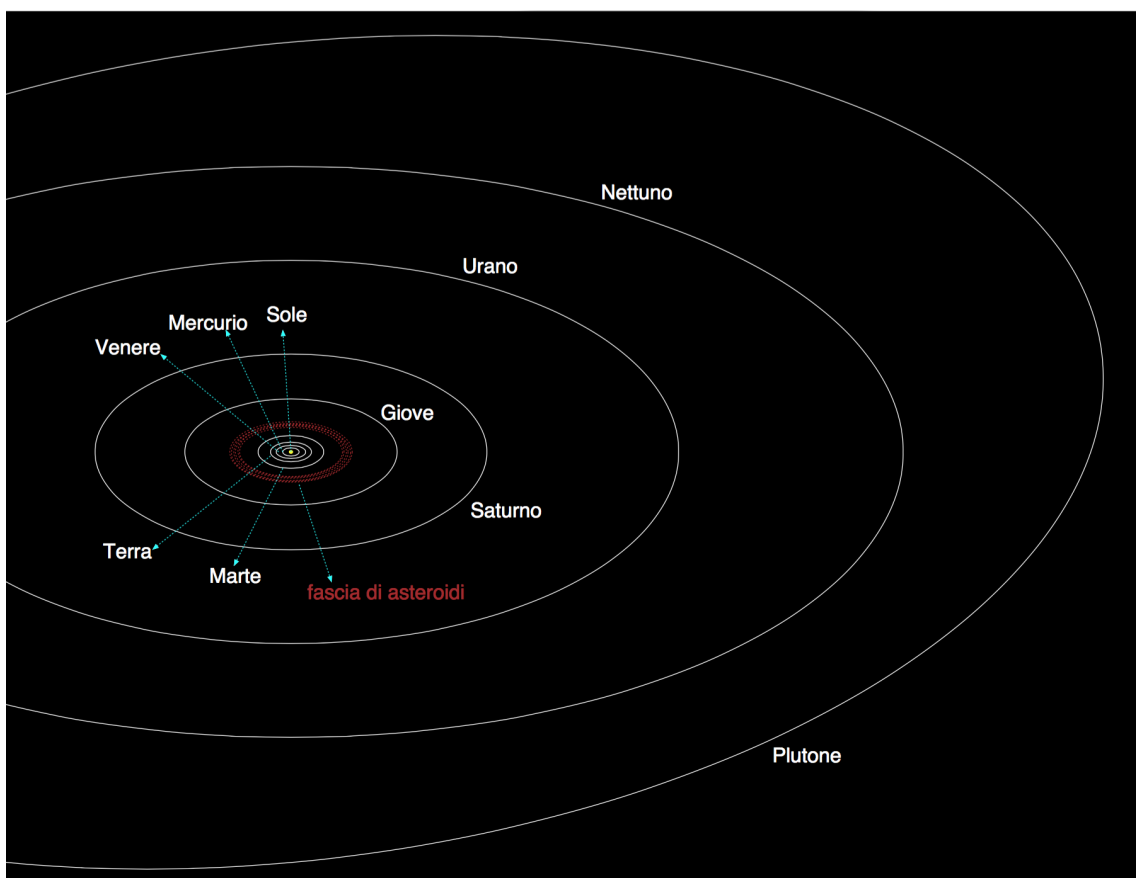


Figura 22.4: *Orbite dei pianeti del Sistema Solare.*

A rigore, tutti gli oggetti del Sistema Solare contribuiscono a generare il campo gravitazionale, secondo l'Eq. (22.5). Nella pratica, i satelliti risentono solo dell'attrazione gravitazionale del “loro” pianeta: l'orbita della Luna è controllata sostanzialmente dal campo gravitazionale generato dalla Terra. Viceversa, allontanandosi da un pianeta, l'effetto gravitazionale di gran lunga dominante è quello del Sole, che contiene più del 99.9% della massa totale del Sistema Solare. Per convincersi di queste affermazioni, basta costruire una mappa del potenziale gravitazionale generato dai corpi del Sistema Solare, facendo uso dell'Eq. (22.11):

$$\Phi(\vec{r}) = -G \sum_i \frac{m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Il risultato è in Fig. 22.5. Si assume che tutti i pianeti giacciono su un piano (approssimazione abbastanza ragionevole). Il Sole sta al centro, le coordinate sul piano orizzontale sono espresse in unità di distanza

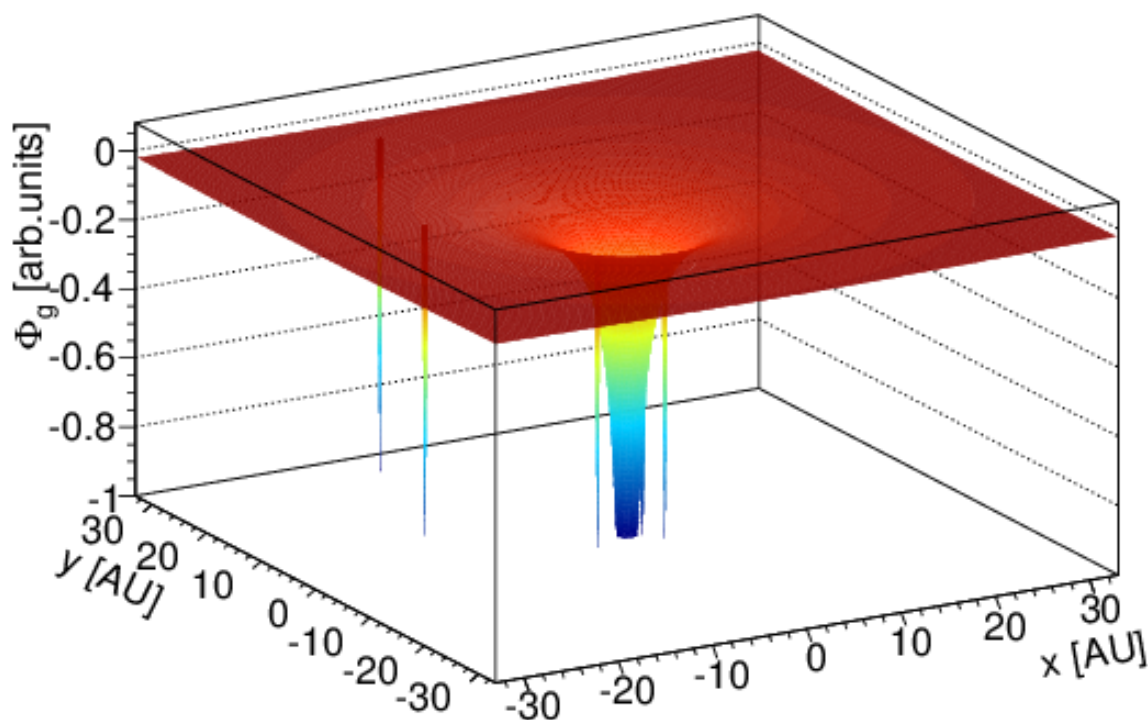


Figura 22.5: *Potenziale gravitazionale  $\Phi_g$  del Sistema Solare.*

Sole-Terra (A.U., “astronomical units”). L’asse verticale rappresenta il potenziale gravitazionale. Il grosso “pozzo gravitazionale” al centro è l’effetto gravitazionale del Sole; gli effetti dei singoli pianeti sono visibili come i piccoli “pozzetti” aghiformi. In figura sono ben visibili quelli di Giove, Saturno, Urano e Nettuno. Quelli dei 4 pianeti interni nella figura si confondono col pozzo del Sole: bisognerebbe ingrandire di più la zona centrale per vederli. È chiaro che, fatte salve le immediate vicinanze di un pianeta, tutto l’effetto gravitazionale è dato dal Sole.

Per queste ragioni, in prima approssimazione è utile e motivato concentrarsi sul campo gravitazionale generato da un solo corpo celeste (pianeta o stella che sia). Per esempio, il moto dei pianeti è descrivibile con buona approssimazione come se l’unica forza agente su ciascuno di essi fosse l’attrazione gravitazionale del Sole. Analogamente, il moto dei satelliti (naturali o artificiali) intorno a un pianeta è in prima approssimazione

descrivibile come se l'unica forza su ciascuno di essi fosse l'attrazione gravitazionale del pianeta. Questa approssimazione, poi, diventa via via più inefficace man mano che il sistema si complica. Per esempio, sistemi come quelli dei satelliti di Giove o Saturno sono molto più complessi: i satelliti più grossi (Ganimede, Europa, Callisto, Io per Giove; Titano per Saturno) perturbano le orbite dei satelliti minori; nel caso di Saturno, alcuni satelliti, pur piccolissimi, perturbano gli anelli del pianeta, che sono a loro volta formati da frammenti di rocce e ghiaccio.

È utile anche ricordare che il pianeta Nettuno, prima di essere osservato al telescopio, era stato ipotizzato per spiegare anomalie osservate nell'orbita di Urano, inspiegabili con la sola attrazione del Sole, ma anche aggiungendo tutte le correzioni dovute alle attrazioni degli altri pianeti allora noti (principalmente, Giove e Saturno). Due astronomi, Adams e Le Verrier, fecero i calcoli delle perturbazioni all'orbita ellittica ideale, per Giove, Saturno, e Urano. Poi confrontarono le loro previsioni con le osservazioni e si accorsero che, mentre per Giove e Saturno tutto era consistente, l'orbita di Urano mostrava delle accelerazioni e delle decelerazioni non previste. Spiegarono questo fatto ipotizzando l'esistenza di un ulteriore pianeta e ne calcolarono la posizione, quindi contattarono l'Osservatorio di Berlino, che puntò il telescopio... *et voilà!* Era il 24 settembre 1846. Questo è un esempio di come un modello fisico, costruito su numerose osservazioni, consente di fare una previsione che, se confermata dall'osservazione, rende il modello ancora più affidabile.

## 22.6 Campo gravitazionale di un oggetto esteso (\*)

Finora abbiamo considerato il campo generato da uno o più oggetti puntiformi. Generalizzando l'Eq. (22.5) si può ottenere il campo gravitazionale di un oggetto esteso.

In linea di principio, si potrebbe pensare al corpo esteso come formato da atomi, e utilizzare l'Eq. (22.5) per calcolare la somma vettoriale dei campi gravitazionali generati da ciascun atomo <sup>[2]</sup>... Ovviamente è un approccio poco pratico!

Si può quindi pensare alla materia come "diluata" nello spazio — vd Fig. 22.6 — in modo tale che un volumetto  $dV'$  molto piccolo — al limite

---

<sup>2</sup> ... o meglio ancora, generati da tutti gli elettroni negli atomi, e da tutti i quarks nei nuclei...!!

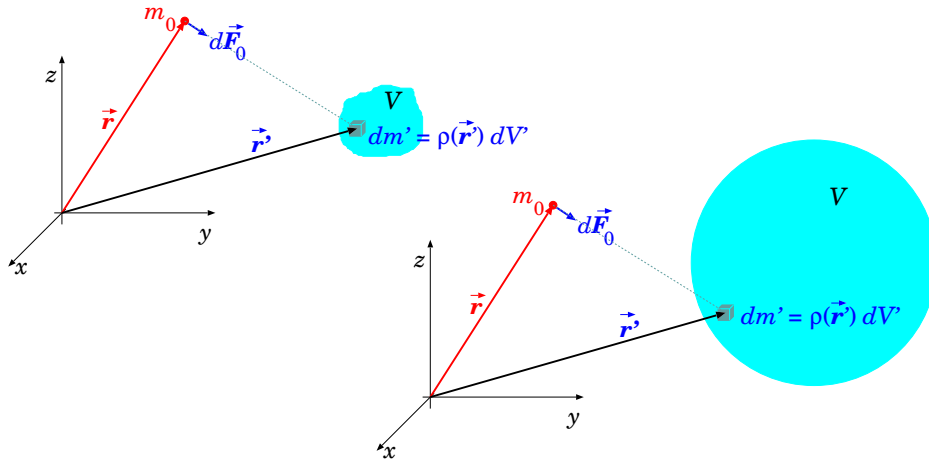


Figura 22.6: Calcolo del campo gravitazionale generato da un oggetto esteso, mediante la scomposizione in elementi infinitesimi di volume  $dV'$  e massa  $dm'$ .

infinitesimo — di materia contenga una massa  $dm'$ . L'idea intuitiva è che  $dm'$  sia direttamente proporzionale a  $dV'$  —  $dm' \propto dV'$ . La costante di proporzionalità viene chiamata *densità*,  $\rho$ , quindi:

$$dm' = \rho(\vec{r}') dV' \quad (22.14)$$

La dipendenza dalla posizione  $\vec{r}'$  del volumetto  $dV'$  sta a ricordare che in generale la densità non è costante. Si pensi a un pianeta come la Terra, che possiede un nucleo di ferro, uno strato roccioso (il “mantello” e la “crosta”) e poi uno strato gassoso (l'atmosfera): ovviamente  $\rho$  cambia sensibilmente da un luogo all'altro.

Il contributo del volumetto  $dV'$  al campo gravitazionale in una posizione  $\vec{r}$  è:

$$d\vec{g}(\vec{r}) = -G \frac{dm'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') = -G \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}')$$

(vd Fig. 22.6). La sommatoria nell'Eq. (22.5) può essere generalizzata ad un integrale sul volume totale  $V$  dell'oggetto esteso:

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G \int_V dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad (22.15)$$

L'Eq. (22.15), formalmente sempre valida, in generale implica calcoli complessi, che vanno risolti al computer con metodi numerici. Tuttavia, vi è

un risultato molto interessante, che vale quando l'oggetto esteso ha simmetria sferica: in tal caso il campo gravitazionale da esso generato all'esterno è *uguale* a quello che genererebbe se tutta la sua massa fosse concentrata in un punto nel centro. La motivazione risiede nel *teorema di Gauss*, che discuteremo nella Sezione 22.7; il caso a simmetria sferica è stato anticipato in Sezione 22.1.1, e sarà trattato in Sezione 22.8.

Si può fare un ragionamento analogo anche per il potenziale gravitazionale. Il contributo di una massa  $dm' = \rho(\vec{r}') dV'$  posta in  $\vec{r}'$  è:

$$d\Phi(\vec{r}) = -G \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

pertanto l'Eq. (22.11) si può generalizzare così:

$$\Phi(\vec{r}) = -G \int_V dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (22.16)$$

Anche in questo caso, l'integrazione è spesso difficile e va fatta con metodi numerici. D'altronde, questo calcolo è più facile di quello dell'Eq. (22.15), perché coinvolge quantità scalari, anziché vettoriali. Può risultare quindi conveniente calcolare prima  $\Phi(\vec{r})$ , e quindi

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi$$

## 22.7 Teorema di Gauss per il campo gravitazionale

*Nota:* per comprendere questa sezione è necessario aver studiato e capito il concetto di *flusso di un campo vettoriale*, spiegato nella Sezione 20.4. È anche necessario conoscere il concetto di *angolo solido*, introdotto in Sezione 4.6.

Il teorema di Gauss dice che il flusso del campo gravitazionale  $\vec{g}$  attraverso una superficie *chiusa*  $\Sigma_{\text{ch}}$  è uguale alla massa totale racchiusa all'interno della superficie,  $M^{(\text{int})}$ , moltiplicata per  $-4\pi G$ :

$$\Phi_{\Sigma_{\text{ch}}}(\vec{g}) = \oint_{\Sigma_{\text{ch}}} d\vec{\Sigma} \cdot \vec{g} = -4\pi G \cdot M^{(\text{int})} \quad (22.17)$$

Per dimostrare il teorema, consideriamo anzitutto il campo gravitazionale generato da una massa puntiforme  $m_k$ . Senza perdita di generalità, possiamo

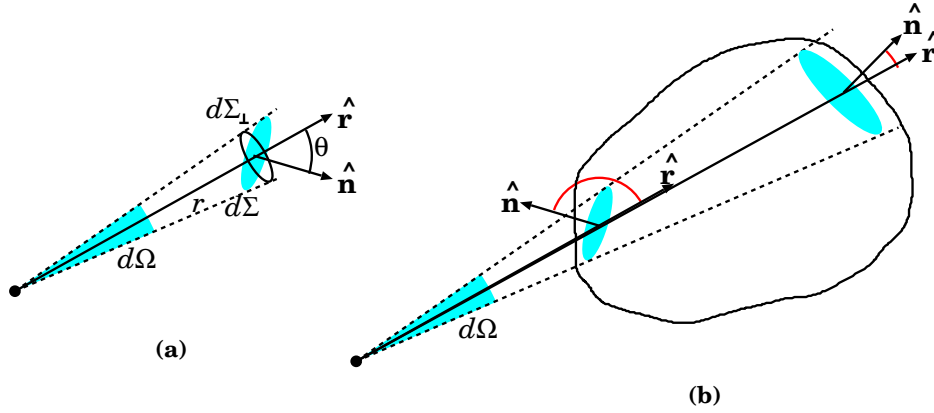


Figura 22.7: Illustrazioni per la dimostrazione del teorema di Gauss

scegliere l'origine dove la massa è localizzata, cosicché il campo nel punto  $\vec{r}$  è:

$$\vec{g}_k = -\frac{Gm_k}{r^2} \hat{r}$$

e il suo flusso attraverso una superficie infinitesima  $d\vec{\Sigma}$  è:

$$\vec{g}_k \cdot d\vec{\Sigma} = -\frac{Gm_k}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{n} d\Sigma$$

Ora, come mostrato in Fig. 22.7(a),  $\hat{r} \cdot \hat{n} d\Sigma = \cos\theta d\Sigma = d\Sigma_{\perp}$  è pari alla proiezione di  $d\Sigma$  perpendicolare alla direzione radiale  $\hat{r}$ , quindi, chiamando  $d\Omega$  l'angolo solido sotto cui  $d\Sigma$  è vista dall'origine,  $d\Sigma_{\perp} = r^2 d\Omega$ , e:

$$\vec{g}_k \cdot d\vec{\Sigma} = -Gm_k d\Omega$$

Quando si integra su tutta la superficie  $\Sigma_{\text{ch}}$ , se l'origine (e la massa  $m_k$ ) è all'interno della superficie, l'intero angolo solido è  $4\pi$ , e il risultato è:

$$\Phi_{\Sigma_{\text{ch}}}(\vec{g}_k) = -4\pi Gm_k \quad (m_k \text{ all'interno di } \Sigma_{\text{ch}})$$

mentre, se l'origine è esterna, possiamo sempre dividere  $\Sigma_{\text{ch}}$  in coppie di superfici infinitesime che sono sottese dallo stesso angolo solido  $d\Omega$  e danno contributi opposti al flusso (vedi Fig. 22.7(b)), cosicché il flusso totale è nullo:

$$\Phi_{\Sigma_{\text{ch}}}(\vec{g}_k) = 0 \quad (m_k \text{ all'esterno di } \Sigma_{\text{ch}})$$

Ora possiamo generalizzare il calcolo ad un generico campo gravitazionale  $\vec{g}$ , prodotto da un qualunque sistema di masse. Per masse puntiformi

$m_1, \dots, m_n$  decomponiamo  $\vec{g} = \sum_k \vec{g}_k$  e quindi suddividiamo a loro volta le masse esterne a  $\Sigma_{\text{ch}}$  da quelle interne:

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{g}) &= \sum_k \Phi(\vec{g}_k) \\ &= \sum_{k \text{ esterne}} \underbrace{\Phi(\vec{g}_k)}_{=0} + \sum_{k \text{ interne}} \underbrace{\Phi(\vec{g}_k)}_{=-4\pi G m_k} \\ &= -4\pi G \sum_{k \text{ interne}} m_k\end{aligned}$$

che dimostra l'Eq. (22.17).

Il risultato può anche essere esteso a una distribuzione di masse con densità  $\rho$ : in tal caso il teorema di Gauss si formula così:

$$\Phi_{\Sigma_{\text{ch}}}(\vec{g}) = -4\pi G \int_{(\text{dentro } \Sigma_{\text{ch}})} dV' \rho(\vec{r}') \quad (22.18)$$

## 22.8 Campo gravitazionale generato da un oggetto sferico

Finora abbiamo trattato il campo gravitazionale come generato da masse puntiformi — col che si intende molto piccole rispetto alle distanze fra esse.

Parlando del campo generato da un pianeta, o dal Sole, l'approssimazione è buona? Per esempio: il raggio del Sole è circa  $0.7 \cdot 10^6$  km, la distanza media di Mercurio dal centro del Sole è di circa  $60 \cdot 10^6$  km (circa 86 volte il raggio del Sole). Possiamo considerare il Sole come “puntiforme”?

O ancora peggio: l'accelerazione di gravità  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ , che rileviamo sulla superficie della Terra, può essere davvero descritta dalla legge  $GM_{\oplus}/R_{\oplus}^2$ ?? La Terra, vista dalla sua superficie, non può certo apparire puntiforme!

In effetti, una massa  $M$  sferica di raggio  $R$  genera al suo esterno (cioè per distanze  $r > R$  dal proprio centro) un campo gravitazionale *identico* a quello che genererebbe se fosse tutta concentrata al centro.

Consideriamo un oggetto esteso sferico, di raggio  $R$  e di massa  $M$ , dotato di simmetria sferica: ciò significa che la sua densità dipende solo dalla sua distanza  $r'$  dal centro, non dalla direzione:

$$\rho(\vec{r}') \equiv \rho(r') \quad (22.19)$$



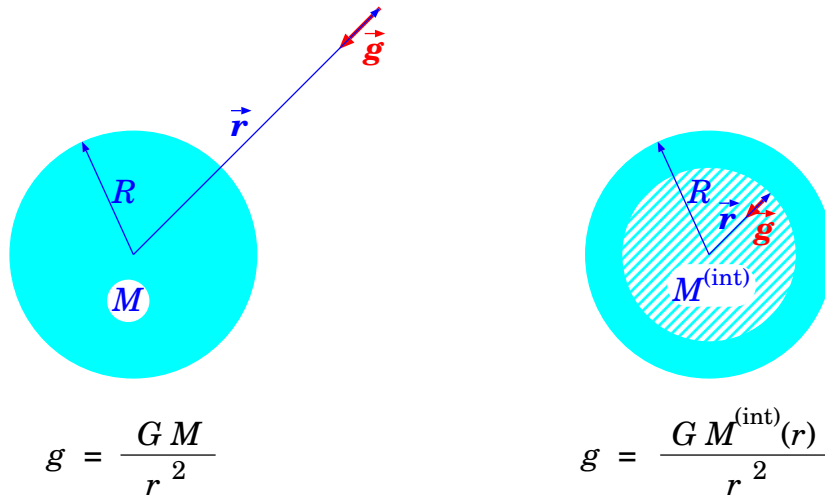


Figura 22.8: Campo generato da una massa estesa a simmetria sferica: a sinistra, esternamente alla massa; a destra, all'interno della massa.

come in Fig. 22.8. È una buona approssimazione per tutti gli oggetti celesti auto-gravitanti: potranno avere una densità che varia anche sensibilmente con la distanza dal centro, ma omogenea su ogni guscio sferico.

In tal caso, la forma del campo gravitazionale in un generico punto  $\vec{r}$  — misurato rispetto al centro dell'oggetto esteso — prende una forma notevole:

$$\vec{g}(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{GM}{r^2} \hat{r} & (\text{se } r \geq R) \\ -\frac{GM^{(\text{int})}(r)}{r^2} \hat{r} & (\text{se } r \leq R) \end{cases} \quad (22.20)$$

essendo  $M^{(\text{int})}(r)$  la parte della massa  $M$  contenuta all'interno di una sfera di raggio  $r$ . Questa può essere calcolata così: un guscio sferico, di raggio  $r'$  e spessore  $dr'$ , ha volume  $dV' = 4\pi (r')^2 dr'$  e quindi massa

$$dm' = \rho(r') dV' = 4\pi (r')^2 \rho(r') dr'$$

Quindi:

$$M^{(\text{int})}(r) = 4\pi \int_0^r (r')^2 \rho(r') dr' \quad (22.21)$$

In Fig. 22.9 sono mostrati i campi gravitazionali per 3 oggetti a simmetria sferica: un guscio, una sfera a densità uniforme, e una sfera formata di strati a diversa densità: quest'ultimo caso è un buon modello per un pianeta.

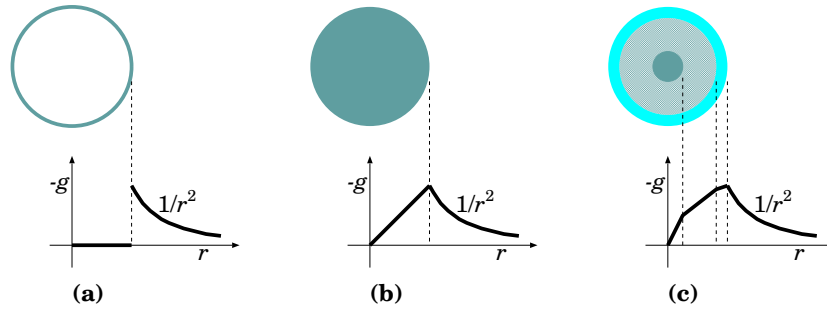


Figura 22.9: Esempi di campo gravitazionale per 3 configurazioni a simmetria sferica: (a) guscio sferico; (b) sfera a densità uniforme; (c) sfera con strati di densità decrescente dal centro verso la superficie. Ad una data distanza  $r$ , solo la massa interna  $M^{(\text{int})}(r)$  contribuisce a generare  $g(r)$ . Nei grafici, l'asse verticale rappresenta  $-g$ : il campo  $\vec{g}$  è sempre diretto verso il centro della sfera.

Il risultato dell'Eq. (22.20) può essere dimostrato rapidamente grazie al teorema di Gauss, come in Sezione 22.8.1. Si può anche procedere con il calcolo diretto, passando per il potenziale gravitazionale, come spiegato in Sezione 22.8.2: è un approccio molto più lungo, ma un esempio istruttivo di come l'uso del potenziale possa rendere percorribile un calcolo altrimenti terrificante!

### 22.8.1 Dimostrazione, con il teorema di Gauss

Data la simmetria della massa sferica, il campo  $\vec{g}$  da essa generato deve essere *centrale*:

$$\vec{g}(\vec{r}) = g(r)\hat{r}$$

Pertanto se prendiamo una superficie sferica chiusa  $\Sigma_{\text{ch}}$  di raggio  $r$  centrata nel centro della massa sferica, il flusso di  $\vec{g}$  attraverso di essa deve essere

$$\Phi_{\Sigma_{\text{ch}}}(\vec{g}) = 4\pi r^2 g(r)$$

(spiegazione:  $\vec{g}$  è radiale, mentre il vettore  $\hat{n}$  ortogonale alla superficie  $\Sigma_{\text{ch}}$  coincide con  $\hat{r}$ , dunque anch'esso radiale; inoltre essendo  $g(r)$  uniforme ovunque sulla superficie  $\Sigma_{\text{ch}}$ , è sufficiente moltiplicarlo per l'area della sfera, cioè  $4\pi r^2$ ).

Il teorema di Gauss ci dice che  $\Phi_{\Sigma_{\text{ch}}}(\vec{g}) = -4\pi GM^{(\text{int})}$ , quindi confrontando:

$$g(r) = -\frac{GM^{(\text{int})}}{r^2} \quad ; \quad \vec{g} = -\frac{GM^{(\text{int})}}{r^2}\hat{r}$$

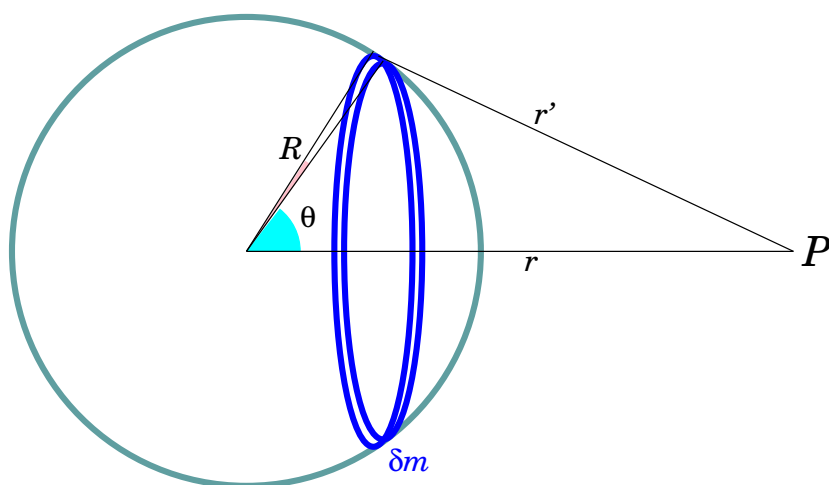


Figura 22.10: Schema per il calcolo del potenziale gravitazionale per un guscio sferico.

Se  $r > R$  (cioè siamo esterni alla massa sferica)  $M^{(\text{int})}$  coincide con tutta la massa.

Se invece ci troviamo all'interno della massa sferica ( $r < R$ ) allora solo la quantità di massa più interna contribuisce al campo gravitazionale, mentre quella esterna non dà nessun effetto.

### 22.8.2 Dimostrazione, usando il potenziale gravitazionale (\*)

L'integrale dell'Eq. (22.16) si può calcolare nel caso di un oggetto esteso a *simmetria sferica*, ovvero tale che la densità  $\rho$  dipenda solo dalla distanza dal suo centro geometrico:  $\rho(\vec{r}') \equiv \rho(r')$ .

Analizziamo anzitutto il campo di un *guscio sferico*, di raggio  $R$  e massa totale  $m$  <sup>[3]</sup>. Convieni lavorare con il potenziale gravitazionale,  $\Phi(r)$ , essendo  $r$  la distanza fra un generico punto  $P$  e il centro del guscio — vd Fig. 22.10. Riportiamo qui il risultato, posponendo la dimostrazione alla Sezione 22.8.3:

$$\Phi(r) = \begin{cases} -\frac{Gm}{r} & (\text{se } r \geq R) \\ -\frac{Gm}{R} & (\text{se } r \leq R) \end{cases} \quad (22.22)$$

<sup>3</sup> Si tratta di un oggetto ideale, inesistente su scala planetaria, ma utile come passaggio intermedio nei calcoli.

È un risultato notevole: all'esterno del guscio, il potenziale gravitazionale è uguale a quello che sarebbe generato da una massa  $m$  tutta concentrata nel centro. Quindi anche il campo gravitazionale  $\vec{g}$  deve essere dello stesso tipo. Invece, all'interno del guscio, il potenziale è costante; quindi il campo  $\vec{g}$  deve essere nullo.

$$\vec{g}(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{Gm}{r^2} \hat{r} & (\text{se } r > R) \\ 0 & (\text{se } r < R) \end{cases} \quad (22.23)$$

Ora possiamo calcolare il campo gravitazionale prodotto da un oggetto a simmetria sferica, di raggio  $R$ , con densità  $\rho(r')$ . Possiamo pensare all'oggetto come costituito da tanti gusci sferici: il generico guscio, di raggio  $r'$  e spessore  $dr'$ , ha volume  $dV' = 4\pi (r')^2 dr'$ , e quindi massa:

$$dm' = 4\pi (r')^2 dr' \rho(r')$$

La massa totale dell'oggetto sferico è

$$M = \int_{r'=0}^{r'=R} dm' = 4\pi \int_0^R dr' (r')^2 \rho(r')$$

Dall'Eq. (22.23), sappiamo che solo i gusci sferici con  $r' < r$  contribuiscono al campo gravitazionale, ciascuno con un contributo:

$$d\vec{g}'(\vec{r}) = -\frac{G dm'}{r^2} \hat{r}$$

Se  $r > R$ , tutti i gusci sferici contribuiscono, quindi:

$$\begin{aligned} \vec{g}(\vec{r}) &= \int_{r'=0}^{r'=R} d\vec{g}'(\vec{r}) = -\frac{G}{r^2} \hat{r} \int_{r'=0}^{r'=R} dm' \\ &= -\frac{GM}{r^2} \hat{r} \quad (r > R) \end{aligned}$$

Se invece  $r < R$ , solo i gusci sferici con  $r' < r$  contribuiscono:

$$\begin{aligned} \vec{g}(\vec{r}) &= \int_{r'=0}^{r'=r} d\vec{g}'(\vec{r}) = -\frac{G}{r^2} \hat{r} \int_{r'=0}^{r'=r} dm' \\ &= -\frac{G}{r^2} \underbrace{\left( 4\pi \int_0^r (r')^2 \rho(r') dr' \right)}_{M^{(\text{int})}(r)} \hat{r} \quad (r < R) \end{aligned}$$

La quantità

$$M^{(\text{int})}(r) = 4\pi \int_0^r (r')^2 \rho(r') dr'$$

è la parte di massa dell'oggetto contenuta nella sfera di raggio  $r$ : solo la massa interna contribuisce a generare campo gravitazionale a distanza  $r$  dal centro. In sintesi:

$$\vec{g}(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{GM}{r^2} \hat{r} & (\text{se } r \geq R) \\ -\frac{GM^{(\text{int})}(r)}{r^2} \hat{r} & (\text{se } r \leq R) \end{cases}$$

che è quanto scritto nell'Eq. (22.20).

### 22.8.3 Potenziale gravitazionale generato da un guscio sferico — dimostrazione (\*)

Individuiamo l'asse che collega il centro del guscio con il punto  $P$  in cui vogliamo calcolare  $\Phi$  — vd Fig. 22.10. Dividiamo poi il guscio in tanti anelli coassiali: ciascun anello è individuato dall'angolo polare  $\theta$ . I punti di ciascun anello sono distanti da  $P$ :

$$r' = \sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta}$$

(teorema di Carnot). Chiamiamo  $dm$  la massa dell'anello: il suo contributo a  $\Phi$  è:

$$d\Phi = -\frac{G dm}{r'}$$

Ora si tratta di sommare i contributi di tutti gli anelli che costituiscono il guscio sferico, cioè calcolare un integrale del tipo:

$$\Phi = -G \int \frac{dm}{r'}$$

Ciascun anello ha raggio  $\rho = R \sin \theta$  e larghezza  $R d\theta$ , dunque superficie  $d\Sigma = (2\pi\rho)(R d\theta) = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$ . Se chiamiamo  $\sigma = \frac{m}{4\pi R^2}$  la densità superficiale di massa — supposta costante — la massa  $dm$  dell'anello è:

$$dm = \sigma d\Sigma = \frac{m}{4\pi R^2} \cdot 2\pi R^2 \sin \theta d\theta = \frac{m}{2} \sin \theta d\theta$$

L'integrale per  $\Phi$  diventa:

$$\Phi = -\frac{Gm}{2} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta}}$$

Introduciamo  $\epsilon = \frac{R}{r}$  e  $\xi = \cos \theta$ . Allora  $d\xi = -\sin \theta d\theta$  e gli estremi di  $\xi$  sono  $+1$  (per  $\theta = 0$ ) e  $-1$  (per  $\theta = \pi$ ). L'integrale si può trasformare con i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned} \Phi &= -\frac{Gm}{2} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{r\sqrt{1 + \epsilon^2 - 2\epsilon \cos \theta}} \\ &= -\frac{Gm}{2r} \int_{\xi=+1}^{\xi=-1} \frac{-d\xi}{\sqrt{1 + \epsilon^2 - 2\epsilon\xi}} \\ &= -\frac{Gm}{2r} \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \frac{d\xi}{\sqrt{1 + \epsilon^2 - 2\epsilon\xi}} \\ &= -\frac{Gm}{2r} \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{1+\epsilon^2}{2\epsilon} - \xi}} \\ &= -\frac{Gm}{2r\sqrt{2\epsilon}} \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{1+\epsilon^2}{2\epsilon} - \xi}} \\ &= -\frac{Gm}{2r\sqrt{2\epsilon}} \left[ -2\sqrt{\frac{1+\epsilon^2}{2\epsilon} - \xi} \right]_{\xi=-1}^{\xi=+1} \\ &= \frac{Gm}{r\sqrt{2\epsilon}} \left( \sqrt{\frac{1+\epsilon^2}{2\epsilon} - 1} - \sqrt{\frac{1+\epsilon^2}{2\epsilon} + 1} \right) \\ &= \frac{Gm}{r\sqrt{2\epsilon}} \left( \frac{\sqrt{1+\epsilon^2 - 2\epsilon} - \sqrt{1+\epsilon^2 + 2\epsilon}}{\sqrt{2\epsilon}} \right) \\ &= \frac{Gm}{r2\epsilon} (|1 - \epsilon| - |1 + \epsilon|) \end{aligned}$$

Ora, per risolvere i valori assoluti, occorre distinguere due casi:

- se  $r \geq R$ , cioè  $P$  è esterno al guscio,  $\epsilon \leq 1$  e si ottiene

$$\Phi = \frac{Gm}{r2\epsilon}(-2\epsilon) = -\frac{Gm}{r}$$

- se  $r \leq R$ , cioè  $P$  è interno al guscio,  $\epsilon \geq 1$  e si ottiene

$$\Phi = \frac{Gm}{r2\epsilon}(-2) = -\frac{Gm}{r\epsilon} = -\frac{Gm}{R}$$

Quindi abbiamo trovato il risultato anticipato nell'Eq. (22.22).

## 22.9 Orbite circolari in un campo centrale

In un campo gravitazionale centrale

$$\vec{g}(\vec{r}) = -GM \frac{\vec{r}}{r^3}$$

sono possibili *orbite circolari*, con una velocità costante in modulo, e una velocità angolare  $\omega$ , che dipendono dal raggio  $r$  dell'orbita.

Un'orbita circolare di raggio  $r$  percorsa a velocità  $v$  è caratterizzata da una velocità angolare  $\omega$  e un'accelerazione centripeta  $a_n$  date da:

$$\omega = \frac{v}{r} \quad ; \quad a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

Pertanto deve esistere una forza centripeta, diretta verso il centro,  $F_n = ma_n = m\omega^2 r$ , che deve essere fornita dall'attrazione gravitazionale della massa  $M$ :  $F_g = \frac{GMm}{r^2}$ . Uguagliando le due espressioni si ottiene:

$$m\omega^2 r = m \frac{GM}{r^2}$$

ovvero:

$$\omega^2 r^3 = GM \quad (22.24)$$

Si può anche scrivere un'espressione equivalente in cui, al posto di  $\omega$ , compare il periodo orbitale  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ :

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \quad (22.25)$$

## 22.10 Esercizi sulle orbite circolari

**Esercizio 22.3.** *La Luna impiega 27.322 giorni per compiere un'orbita completa intorno alla Terra. Assumendo che l'orbita sia perfettamente circolare, calcolare la distanza Terra-Luna  $r_{\oplus\zeta}$ .*

**Risposta.** *La Luna compie una traiettoria circolare, quindi è soggetta ad una accelerazione centripeta  $a = \omega^2 r_{\oplus\zeta}$ . La velocità angolare è calcolabile dal periodo  $T = 27.322$  giorni = 2360621 s (1 giorno=24 ore; 1 ora=60 minuti; 1 minuto=60 secondi  $\implies$  1 giorno=86400 secondi)*

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2.6617 \cdot 10^{-6} \text{ rad/s}$$

Detta  $m$  la massa della Luna, la forza centripeta  $m\omega^2 r$  deve essere uguale alla forza gravitazionale fra Terra e Luna:

$$m\omega^2 r_{\oplus\zeta} = G \frac{mM_{\oplus}}{r_{\oplus\zeta}^2} \quad \Longrightarrow \quad r_{\oplus\zeta} = \sqrt[3]{\frac{GM_{\oplus}}{\omega^2}} = \sqrt[3]{\frac{GM_{\oplus}T^2}{4\pi^2}}$$

Facendo uso di  $M_{\oplus} = 5.97 \cdot 10^{24}$  kg calcolata nell'esempio precedente, ed inserendo gli altri dati, troviamo:

$$r_{\oplus\zeta} = 3.83 \cdot 10^8 \text{ m} = 383\,000 \text{ km}$$

**Esercizio 22.4.** La distanza Terra-Sole è misurata pari a  $r_{\oplus\odot} = 149.60 \cdot 10^6$  km. La Terra impiega un anno (cioè circa 365.25 giorni) a compiere un'intera orbita intorno al Sole. Assumendo che l'orbita sia perfettamente circolare, calcolare la massa del Sole  $M_{\odot}$ .

**Risposta.** L'accelerazione centripeta della Terra intorno al Sole è  $a = \omega^2 r_{\oplus\odot}$ , essendo  $\omega = 2\pi/T$ , e  $T = 31\,557\,600$  s (ricordiamo che 1 giorno = 86 400 secondi). Uguagliando la forza centripeta  $M_{\oplus}\omega^2 r_{\oplus\odot}$  all'attrazione gravitazionale si trova:

$$M_{\oplus}\omega^2 r_{\oplus\odot} = G \frac{M_{\odot}M_{\oplus}}{r_{\oplus\odot}^2} \quad \Longrightarrow \quad M_{\odot} = \frac{\omega^2 r_{\oplus\odot}^3}{G} = \frac{4\pi^2 r_{\oplus\odot}^3}{GT^2}$$

Inserendo i dati si trova:

$$M_{\odot} = 1.99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

La massa del Sole è 2 miliardi di miliardi di miliardi di tonnellate! Ovvero, circa 333 000 masse terrestri!

**Esercizio 22.5.** A causa del principio di azione-reazione, se il Sole attrae la Terra anche la Terra attrae il Sole. In effetti entrambi ruotano intorno ad un centro comune, il loro baricentro. Qual è il raggio dell'orbita solare? *NOTA:* questo esercizio è abbastanza accademico: infatti per calcolare il moto del Sole bisognerebbe, insieme alla Terra, considerare tutti gli altri pianeti del Sistema Solare. Qui stiamo "facendo finta" che il sistema Terra-Sole sia isolato.

**Risposta.** La distanza Terra-Sole è  $r_{\oplus\odot} = 149.60 \cdot 10^6$  km. Chiamiamo  $r_{\oplus}$  e  $r_{\odot}$  rispettivamente i raggi delle orbite terrestre e solare. Essi sono le distanze dal baricentro comune, pertanto devono soddisfare la relazione  $r_{\oplus}M_{\oplus} = r_{\odot}M_{\odot}$ . Inoltre  $r_{\oplus} + r_{\odot} = r_{\oplus\odot}$ . Eliminando  $r_{\oplus}$  fra le due equazioni si trova:

$$r_{\odot} \left(1 + \frac{M_{\odot}}{M_{\oplus}}\right) = r_{\oplus\odot} \quad \Longrightarrow \quad r_{\odot} = \left(\frac{M_{\oplus}}{M_{\oplus} + M_{\odot}}\right) r_{\oplus\odot}$$

Nella somma  $M_{\oplus} + M_{\odot}$  la massa della Terra è del tutto trascurabile! Con ottima approssimazione possiamo scrivere

$$r_{\odot} \simeq \frac{M_{\oplus}}{M_{\odot}} r_{\oplus\odot} = 3 \cdot 10^{-6} \cdot r_{\oplus\odot} = 449 \text{ km}$$



In un anno il Sole compirebbe un'orbita di raggio 449 km — molto piccola rispetto al proprio raggio, che è 696 000 km: per rendere l'idea, è 109 volte il raggio della Terra, oppure quasi il doppio della distanza Terra-Luna.

**Osservazione.** Proviamo a ripetere il ragionamento considerando il Sole e Giove, che è il pianeta più grosso del Sistema Solare, e trascurando tutti gli altri pianeti. La distanza Sole-Giove è  $r_{\text{J}\odot} \simeq 779 \cdot 10^6$  km, la massa di Giove è  $M_{\text{J}} = 1.899 \cdot 10^{27}$  kg (circa 318 volte la massa terrestre). In questo caso, il raggio dell'orbita solare intorno al baricentro Sole-Giove è:

$$r_{\odot} \simeq \frac{M_{\text{J}}}{M_{\text{J}} + M_{\odot}} r_{\text{J}\odot} = \frac{1}{1049} 779 \cdot 10^6 \text{ km} \simeq 742 000 \text{ km}$$

Il centro attorno cui orbita il Sole è appena esterno alla sua superficie.

**Esercizio 22.6.** Un satellite artificiale si chiama “geostazionario” (GEO = “geosynchronous equatorial orbit”) se ha un'orbita equatoriale, ed il suo periodo orbitale coincide con il periodo di rotazione terrestre, cosicché il satellite sta sempre sulla verticale dello stesso luogo sulla superficie terrestre. A che altezza dal suolo si trova? Con che velocità si muove?

**Risposta.** Detto  $r$  il raggio della sua orbita, la sua accelerazione centripeta deve essere  $a_n = \omega^2 r = \frac{GM}{r^2}$ . Confrontando con l'accelerazione di gravità alla superficie terrestre,  $g = \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2}$ , troviamo  $\omega^2 r = g \frac{R_{\oplus}^2}{r^2}$  con  $R_{\oplus} = 6371$  km e  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86400 \text{ s}} = 7.27 \cdot 10^{-5}$  rad/s. Quindi

$$r = \left( \frac{g R_{\oplus}^2}{\omega^2} \right)^{1/3} = 4.223 \cdot 10^7 \text{ m} \simeq 42 000 \text{ km}$$

L'altezza dal suolo è  $r - R_{\oplus} = 3.586 \cdot 10^7 \text{ m} \simeq 36 000 \text{ km}$ . La velocità orbitale è  $v = \omega r \simeq 3 \text{ km/s}$ .

**Esercizio 22.7.** La Stazione Spaziale Internazionale (International Space Station, ISS) ha una massa  $m = 450 000$  kg e si muove su un'orbita approssimativamente circolare intorno alla Terra, ad un'altezza dal suolo  $h = 420$  km. Come molti dei satelliti artificiali, si trova su un'orbita piuttosto bassa (LEO = “low Earth orbit”), se paragonata al raggio della Terra.

Si calcoli il periodo  $T$  della sua orbita e la sua velocità  $v$ . Assumendo che tutte le sue componenti siano state lanciate da basi equatoriali, quanta energia è stata necessaria per metterla in orbita?

**Risposta.** Il raggio dell'orbita della ISS è  $r = R_{\oplus} + h \simeq (6371 + 420) \text{ km} = 6.791 \cdot 10^6 \text{ m}$ . Potremmo calcolare il periodo dalla relazione  $\frac{GM_{\oplus}}{r^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} r$ , ma possiamo anche semplificarci la vita, se confrontiamo l'accelerazione centripeta

$a_n = \omega^2 r = \frac{GM_{\oplus}}{r^2}$  della ISS con l'accelerazione di gravità  $g = \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2}$ . Eliminando  $GM_{\oplus}$  fra queste due espressioni si trova:

$$\omega^2 r = g \frac{R_{\oplus}^2}{r^2} = 8.63 \text{ m/s}^2$$

da cui  $\omega = \sqrt{g \frac{R_{\oplus}^2}{r^3}} = 1.13 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$  e quindi  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 5570 \text{ s}$  — la ISS compie un'orbita intera intorno alla Terra in circa un'ora e mezza! In effetti, a volte è possibile vederla ad occhio nudo, la sera quando siamo già in ombra ma la ISS è ancora illuminata dai raggi solari: appare come una stella molto brillante ed in rapidissimo movimento, che “sorge” e “tramonta” in pochi minuti. La sua velocità orbitale è  $v = \omega r = 7.65 \cdot 10^3 \text{ m/s}$  — circa 27,500 km/h, ovvero un po' più di 7 km/s. Veloce, no? Per confronto, un aereo di linea viaggia ad una velocità di crociera di 900 km/h.

Per la domanda sull'energia ragioniamo così: quando il materiale era ancora a Terra, la sua energia meccanica era  $E_0 = \mathcal{U}_0 + \mathcal{E}_0 = -\frac{GMm}{R_{\oplus}} + \frac{m}{2}(\omega_{\oplus} R_{\oplus})^2$ , dove il secondo termine, di energia cinetica, è calcolato considerando la rotazione terrestre, con  $\omega_{\oplus} = \frac{2\pi}{T_{\oplus}} = \frac{2\pi}{86400 \text{ s}} = 7.27 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$ . Abbiamo rispettivamente

$$\mathcal{U}_0 = -\frac{GMm}{R_{\oplus}} = -2.815 \cdot 10^{13} \text{ J} \quad ; \quad \mathcal{E}_0 = \frac{m}{2}(\omega_{\oplus} R_{\oplus})^2 = 4.827 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Analogamente da quando la ISS si trova in orbita,

$$\mathcal{U} = -\frac{GMm}{r} = -2.641 \cdot 10^{13} \text{ J} \quad ; \quad \mathcal{E} = \frac{m}{2}(\omega r)^2 = 1.325 \cdot 10^{13} \text{ J}$$

L'energia ceduta alla ISS per metterla in orbita è dunque  $\Delta E = (\mathcal{U} + \mathcal{E}) - (\mathcal{U}_0 + \mathcal{E}_0) = 1.494 \cdot 10^{13} \text{ J}$ . È interessante calcolare separatamente le variazioni di energia potenziale e cinetica:  $\Delta \mathcal{U} = 0.174 \cdot 10^{13} \text{ J}$  e  $\Delta \mathcal{E} = 1.320 \cdot 10^{13} \text{ J}$ . Contrariamente a quanto ci si poteva aspettare, la maggior parte di energia non viene impiegata nel “sollevare” la ISS fino all'orbita, ma nel darle la velocità sufficiente a rimanere sull'orbita!

## 22.11 Orbite ellittiche: le Leggi di Keplero

Come già accennato, in realtà le traiettorie di orbite chiuse, in un campo gravitazionale centrale, sono *ellittiche*.

Più precisamente, le orbite dei pianeti nel Sistema Solare sono governate da leggi empiriche, formulate da Johannes von Kepler negli anni 1609–19, e che si enunciano così:

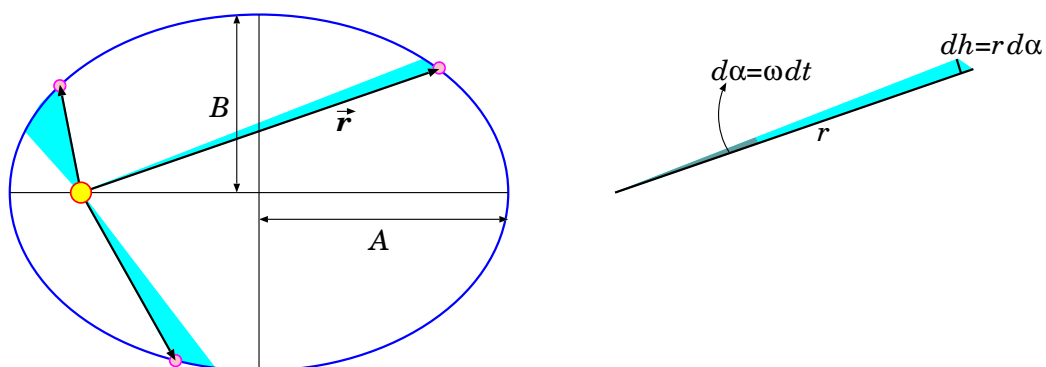


Figura 22.11: Orbite planetarie attorno al Sole (l'eccentricità è molto esagerata, per motivi illustrativi). La "legge delle aree" di Keplero è illustrata dalle zone azzurre, che hanno aree uguali se percorse in tempi uguali.

- [K1] le orbite dei pianeti sono ellissi, con il Sole posto in un fuoco;
- [K2] la velocità orbitale è tale che il raggio vettore Sole-pianeta traccia aree uguali in tempi uguali — qualitativamente diremmo che quando il pianeta è più vicino al Sole si muove più rapidamente;
- [K3] per tutti i pianeti, il periodo orbitale  $T$  e il semiasse maggiore  $A$  dell'orbita sono tali che  $T^2 \propto A^3$ :

$$\frac{A^3}{T^2} = K \quad (22.26)$$

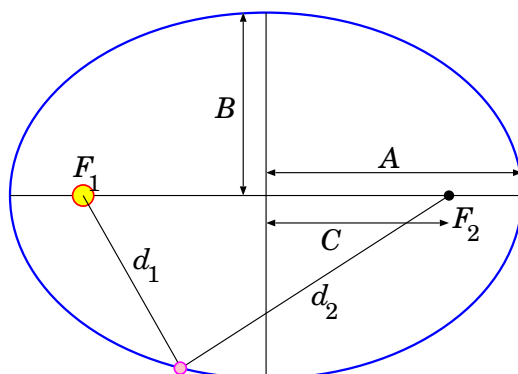
essendo  $K$  una costante universale per tutti i pianeti.

La legge [K2] — la cosiddetta "legge delle aree", si può formulare come relazione fra la distanza  $r$  dal Sole e la velocità angolare istantanea  $\omega$ . Infatti, guardando un qualunque "triangoloide" azzurro della Fig. 22.11, l'angolo al centro percorso in un tempo  $dt$  è pari a  $d\alpha = \omega dt$ , la "base" del triangolo è  $r$ , e l'"altezza" è  $dh = r d\alpha$  — a rigore,  $r d\alpha$  sarebbe un archetto di cerchio, ma essendo  $d\alpha$  scelto infinitesimo, l'archetto tende a un segmento ortogonale a  $r$ . Quindi, l'area del triangoloide è calcolabile come

$$d\Sigma = \frac{r dh}{2} = \frac{r^2 \omega}{2} dt \quad (22.27)$$

Ora, consideriamo due punti (1) e (2) dell'orbita, e due aree  $d\Sigma_1$ ,  $d\Sigma_2$  descritte nello stesso tempo  $dt$ . La legge [K2] dice che  $d\Sigma_1 = d\Sigma_2$ , quindi deve essere  $r_1^2 \omega_1 = r_2^2 \omega_2$ . Pertanto la legge può essere riformulata come

$$r^2 \omega = \text{costante} \quad (22.28)$$

Figura 22.12: *Proprietà geometriche dell'ellisse.*

Abbiamo già incontrato questo risultato, parlando di forze radiali (Sezione 15.2.3) e di campi centrali (Sezione 15.2.4): è conseguenza della conservazione del momento angolare: in particolare, viene dall'Eq. (15.15), che qui riportiamo:

$$\omega r^2 = \frac{L}{m} \quad (\text{campo gravitazionale centrale}) \quad (22.29)$$

Le 3 leggi di Keplero sono deducibili dalla legge di Newton della gravitazione universale, Eq. (22.1). La deduzione verrà trattata nella Sezione 22.14.

Il caso dell'orbita circolare, trattato nella Sezione 22.9, è ovviamente un caso-limite dell'orbita ellittica. Esso soddisfa la condizione  $T^2 \propto A^3$  — si ottiene dall'Eq. (22.25), ricordando che in tal caso il semiasse maggiore coincide con il raggio dell'orbita,  $A \equiv R$ . Inoltre, anche la legge delle aree è soddisfatta: infatti, nell'orbita circolare,  $\omega$  e  $r \equiv R$  sono entrambi costanti.

### 22.11.1 Proprietà geometriche dell'ellisse

Ricordiamo qui le proprietà geometriche di una ellisse.

*Dati due punti  $F_1$  e  $F_2$  e una distanza  $2A$ , un'ellisse è un luogo di punti tali che la somma delle distanze da  $F_1$  e  $F_2$  sia  $2A$ .*

La forma dell'ellisse è come in Fig. 22.12. L'asse maggiore è di lunghezza  $2A$  — per rendersene conto basta applicare la definizione a uno dei punti estremi dell'ellisse — quelli in cui l'ellisse interseca l'asse maggiore.

L'asse minore dell'ellisse è di lunghezza  $2B$ . La distanza fra i due fuochi si chiama  $2C$ . Prendendo un punto dell'ellisse all'intersezione dell'asse minore,

si vede subito che

$$A^2 = B^2 + C^2$$

Le distanze minima e massima da uno dei fuochi sono:

$$\begin{aligned} r_{min} &= A - C \\ r_{max} &= A + C \end{aligned}$$

da cui si deduce che l'eccentricità è:

$$\epsilon = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}} = \frac{C}{A} = \sqrt{1 - \left(\frac{B}{A}\right)^2}$$

L'area dell'ellisse è

$$\Sigma = \pi AB = \pi A^2 \sqrt{1 - \epsilon^2}$$

## 22.12 Come è stata scoperta la gravitazione universale?

Ai tempi di Newton, la conoscenza osservativa dei moti celesti era molto approfondita. Galileo aveva dimostrato con l'osservazione che i pianeti girano intorno al Sole, ed aveva scoperto quattro satelliti orbitanti intorno a Giove: all'epoca chiamati "lune Medicee", oggi nominati Io, Europa, Ganimede, Callisto, o collettivamente "satelliti Galileiani". Inoltre Johannes Kepler aveva analizzato in grande dettaglio il moto dei pianeti, deducendo le tre famose leggi — vd Sezione 22.11.

Inoltre, la distanza Terra-Luna era nota, con una certa precisione. In effetti, il raggio della Terra è noto sin dall'antichità (misura di Eratostene, IV secolo a.C.). Dall'osservazione dell'ombra della Terra durante le eclissi di Luna, si poteva dedurre la proporzione fra raggio terrestre e raggio lunare, dunque anche il raggio della Luna era calcolabile. Infine, misurando l'angolo sotto il quale si osserva il disco lunare dalla Terra (circa  $0.5^\circ$ ) si poteva risalire alla distanza Terra-Luna.

Newton dunque aveva molti dati empirici alla mano: la formulazione della gravitazione universale è stata il risultato dell'unificazione di tutte queste osservazioni in un'unica teoria. Non solo: come si è detto, essa è in grado di spiegare anche la caduta di oggetti verso la superficie terrestre.

Senza ripercorrere la via storica che ha portato Newton alla formulazione, cerchiamo in modo logico di capire come arrivarci, con alcune semplificazioni. Poiché avremo a che fare con forze prodotte da un oggetto (“sorgente”) su un altro (“sonda”), useremo notazioni del tipo  $F_{(\text{sonda})}^{(\text{sorgente})}$ .

- Semplifichiamo le leggi di Keplero, assumendo che le orbite siano circolari — è un caso limite, naturalmente. Con raggio orbitale  $r$  costante, la legge delle aree dice banalmente che la velocità angolare  $\omega$  non cambia lungo l’orbita. Chiamando  $M$  la massa del Sole e  $m$  quella del pianeta, la forza centripeta sul pianeta deve essere

$$F = m\omega^2 r = m \frac{4\pi^2}{T^2} r$$

La terza legge per orbite circolari può essere riscritta come  $T^2 = \frac{r^3}{K_{\odot}}$ , cosicché per sostituzione di  $T^2$  troviamo:

$$F^{\odot} = 4\pi^2 K_{\odot} \frac{m}{r^2} \quad (22.30)$$

La legge della proporzionalità inversa al quadrato della distanza è già trovata. La costante  $K_{\odot}$  è la stessa per tutti i pianeti, ma in generale dipende dall’attrazione del Sole: in questa fase del ragionamento non sappiamo ancora come.

- L’osservazione dei quattro satelliti Galileiani mostra orbite con raggi diversi e periodi diversi, ma tutte obbediscono ad una legge  $T^2 = \frac{r^3}{K_{\text{J}}}$ . Quindi anche l’attrazione di Giove deve seguire una legge  $1/r^2$ .
- Dal moto della Luna intorno alla Terra, che avviene con periodo di 27.3 giorni, e dal raggio dell’orbita  $r_{\oplus\text{L}} \simeq 384\,000$  km, si deduce che l’accelerazione centripeta della Luna deve essere

$$a_{\text{L}} = \frac{4\pi^2}{T^2} r_{\oplus\text{L}} \simeq 2.7 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

L’accelerazione alla superficie terrestre (quindi a  $R_{\oplus} \simeq 6\,400$  km dal centro della Terra) è  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ . Se l’attrazione terrestre che tiene in orbita la Luna fosse della stessa natura di quella che fa cadere gli oggetti a terra, e avesse sempre una dipendenza da  $\frac{1}{r^2}$ , dovremmo aspettarci che

$$a_{\text{L}} \cdot r_{\oplus\text{L}}^2 = g \cdot R_{\oplus}^2$$

In effetti, troviamo che

$$\begin{aligned} a_{\zeta} \cdot r_{\oplus\zeta}^2 &= 4.0 \cdot 10^{14} \text{ m}^3\text{s}^{-2} \\ g \cdot R_{\oplus}^2 &= 4.0 \cdot 10^{14} \text{ m}^3\text{s}^{-2} \end{aligned}$$

quindi effettivamente anche i valori di  $a_{\zeta}$  e  $g$  sono in accordo con una legge  $1/r^2$ , che questa volta riguarda l'attrazione della Terra.

$$F^{\oplus} = 4\pi^2 K_{\oplus} \frac{m}{r^2} \quad (22.31)$$

- Il principio di azione-reazione ci viene incontro: se il Sole attrae la Terra, anche la Terra deve attrarre il Sole con forza uguale e contraria. La forza che il Sole esercita sulla Terra è:

$$F_{\oplus}^{\odot} = 4\pi^2 K_{\odot} \frac{m_{\oplus}}{r^2}$$

Ipotizzando che la forza che la Terra esercita sul Sole sia della stessa natura di quella esercitata sulla Luna e sugli oggetti vicini alla sua superficie, essa deve essere pari a:

$$F_{\odot}^{\oplus} = 4\pi^2 K_{\oplus} \frac{M_{\odot}}{r^2}$$

Uguagliando  $F_{\oplus}^{\odot} = F_{\odot}^{\oplus}$  si ottiene:

$$m_{\oplus} K_{\odot} = M_{\odot} K_{\oplus} \quad \implies \quad \frac{K_{\odot}}{K_{\oplus}} = \frac{M_{\odot}}{m_{\oplus}}$$

Quindi le  $K$  che quantificano l'attrazione sono proporzionali alle masse degli oggetti che causano l'attrazione:

$$4\pi^2 K_{\odot} = GM_{\odot} \quad ; \quad 4\pi^2 K_{\oplus} = GM_{\oplus}$$

In particolare, la forza Terra-Sole risulta:

$$F_{\oplus\odot} = G \frac{M_{\odot} M_{\oplus}}{r_{\oplus\odot}^2} \quad (22.32)$$

La costante universale  $G$  è ancora ignota.

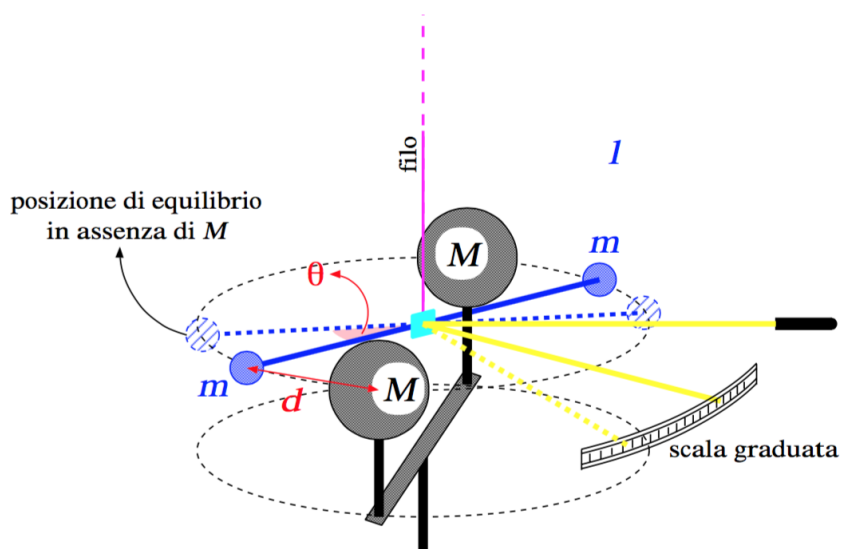


Figura 22.13: Schema della bilancia di torsione di Cavendish, utilizzata per misurare la costante  $G$ .

### 22.12.1 Misura della costante $G$

Il valore di  $G$  è piuttosto difficile da ottenere, essendo la gravità così debole rispetto ad altre forze. L'idea di base è di partire dall'Eq. (22.1), e misurare la forza agente fra masse note poste a distanza nota.

L'apparato utilizzato è una *bilancia di torsione*, come in Fig. 22.13. Due masse leggere  $m$ , sospese agli estremi dell'apparato mobile, con bracci di lunghezza  $\ell$ , risentono l'attrazione gravitazionale di altre due masse  $M$  molto più grosse.

L'apparato mobile è sospeso da un filo che ha costante di torsione elastica  $k$ , cioè se il filo subisce una torsione di un angolo  $\theta$ , esso esercita un'azione elastica di richiamo dell'apparato descritta dal momento torcente:

$$M_{el} = -k\theta \quad (22.33)$$

La costante elastica  $k$  del filo viene determinata facendo oscillare (in torsione) l'apparato mobile: detto  $I$  il momento di inerzia dell'apparato mobile, si dovrebbe avere un moto armonico descritto dall'equazione

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = M_{el} = -k\theta$$



dunque con frequenza angolare  $\Omega = \sqrt{\frac{k}{I}}$ , ovvero periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}} \quad (22.34)$$

Il momento di inerzia può essere calcolato per un apparato mobile in cui l'asta che sostiene le masse  $m$  abbia massa trascurabile: in tal caso  $I = 2m\ell^2$ . Misurando  $T$  si ricava  $k$ .

Le masse  $m$  subiscono forze gravitazionali

$$F_g = G\frac{Mm}{d^2} \quad (22.35)$$

ad opera delle masse  $M$ , essendo  $d$  la distanza che le separa. Il sistema viene montato in modo tale che la congiungente  $m$ - $M$  sia ortogonale ai bracci  $\ell$ , cosicché il momento torcente gravitazionale è

$$M_g = 2\ell F_g = G \cdot \frac{2\ell m M}{d^2} \quad (22.36)$$

La condizione di equilibrio, che non produce rotazioni, si ha quando il momento torcente totale è nullo:

$$0 = M_g + M_{el} = G \cdot \frac{2\ell m M}{d^2} - k\theta \quad (22.37)$$

Pertanto, conoscendo  $m$ ,  $M$ ,  $k$  e misurando  $\theta$ ,  $d$  si può ricavare  $G$ .

La misura di  $\theta$  viene effettuata osservando lo spostamento di un fascio di luce riflesso da uno specchietto montato sull'apparato mobile, per evitare un contatto diretto che potrebbe perturbare la misura.

Questa misura fu condotta per la prima volta dal fisico inglese Henry Cavendish a fine '700.

## 22.13 Moti in un campo gravitazionale centrale

Consideriamo il campo generato da una massa  $M$ , e per comodità scegliamo l'origine  $O$  del nostro riferimento coincidente con la posizione di  $M$ . L'espressione del campo gravitazionale è data nell'Eq. (22.6):

$$\vec{g}(\vec{r}) = -GM\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Il moto di una massa-sonda in un campo gravitazionale centrale ammette sempre una soluzione analitica. Abbiamo già trattato il caso particolare dell'orbita circolare. Qui analizziamo i casi più generali.

### 22.13.1 Costanti del moto

Il moto in un campo gravitazionale centrale è caratterizzato da due *costanti del moto*:

- l'energia meccanica:

$$E = \mathcal{E} + \mathcal{U}(r) = \frac{m}{2}v^2 - \frac{GMm}{r} \quad (22.38)$$

- il momento angolare,  $\vec{L}$ ; in particolare:

$$L = |\vec{L}| = m\omega r^2 \quad (22.39)$$

La conservazione del momento angolare deriva dalla centralità del campo di forza, e garantisce che l'orbita giaccia su un piano che contiene il centro di gravità (come spiegato in Sezione 15.2.3).

Questa considerazione ci consente di lavorare con le coordinate polari  $r, \phi$ , introdotte nella Sezione 4.5.1, Eq. (4.16)

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \\ y &= r \sin \phi \end{aligned} \quad (22.40)$$

La *velocità angolare*  $\omega$  e la *velocità radiale*  $v_r$  sono date da:

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} \quad ; \quad v_r = \frac{dr}{dt}$$

Calcoliamo le componenti  $v_x, v_y$  della velocità in coordinate polari:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{d(r \cos \phi)}{dt} \\ &= \frac{dr}{dt} \cos \phi + r \frac{d(\cos \phi)}{dt} = v_r \cos \phi - r \sin \phi \frac{d\phi}{dt} \\ &= v_r \cos \phi - \omega r \sin \phi \\ v_y &= \frac{d(r \sin \phi)}{dt} \\ &= \frac{dr}{dt} \sin \phi + r \frac{d(\sin \phi)}{dt} = v_r \sin \phi + r \cos \phi \frac{d\phi}{dt} \\ &= v_r \sin \phi + \omega r \cos \phi \end{aligned} \quad (22.41)$$

### 22.13.2 Regione cinematicamente accessibile

L'energia potenziale è sempre definita negativa:

$$\mathcal{U}(r) = -\frac{GMm}{r} < 0$$

Nel limite  $r \rightarrow +\infty$ , cioè quando l'oggetto orbitante si allontani infinitamente dal centro di gravità, l'energia potenziale tende ad annullarsi:  $\mathcal{U}(r) \xrightarrow[r \rightarrow +\infty]{} 0$ .

Inoltre sappiamo che l'energia cinetica è sempre positiva:  $\mathcal{E} \geq 0$ . D'altra parte, per ogni moto dotato di momento angolare, l'energia cinetica non può mai annullarsi — altrimenti sarebbe  $v = 0$  e quindi si annullerebbe il momento angolare. Più in dettaglio: scomponiamo la velocità  $\vec{v}$  nelle sue componenti radiale e azimuthale:

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{dr}{dt} \\ v_\phi &= \omega r = \frac{L}{mr} \end{aligned}$$

Ora,

$$\mathcal{E} = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}(v_r^2 + v_\phi^2) \geq \frac{m}{2}v_\phi^2 = \frac{L^2}{2mr^2}$$

ovvero

$$\mathcal{E} \geq \frac{L^2}{2mr^2}$$

Quindi, detta  $E$  l'energia meccanica del sistema,

$$\mathcal{E} = E - \mathcal{U}(r) = E + \frac{GMm}{r}$$

la disuguaglianza trovata per  $\mathcal{E}$  diventa:

$$\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \leq E \quad (22.42)$$

Questa disequazione definisce la *regione cinematicamente accessibile* al moto.

La situazione è quella illustrata in Fig. 22.14(a sinistra). Sia l'energia potenziale,  $\mathcal{U}(r) = -\frac{GMm}{r}$ , che il termine  $\frac{L^2}{2mr^2}$  sono raffigurati in funzione della distanza  $r$  dal centro di gravità. La prima è negativa ed attrattiva, mentre il secondo è positivo e produce un effetto repulsivo: per questo viene

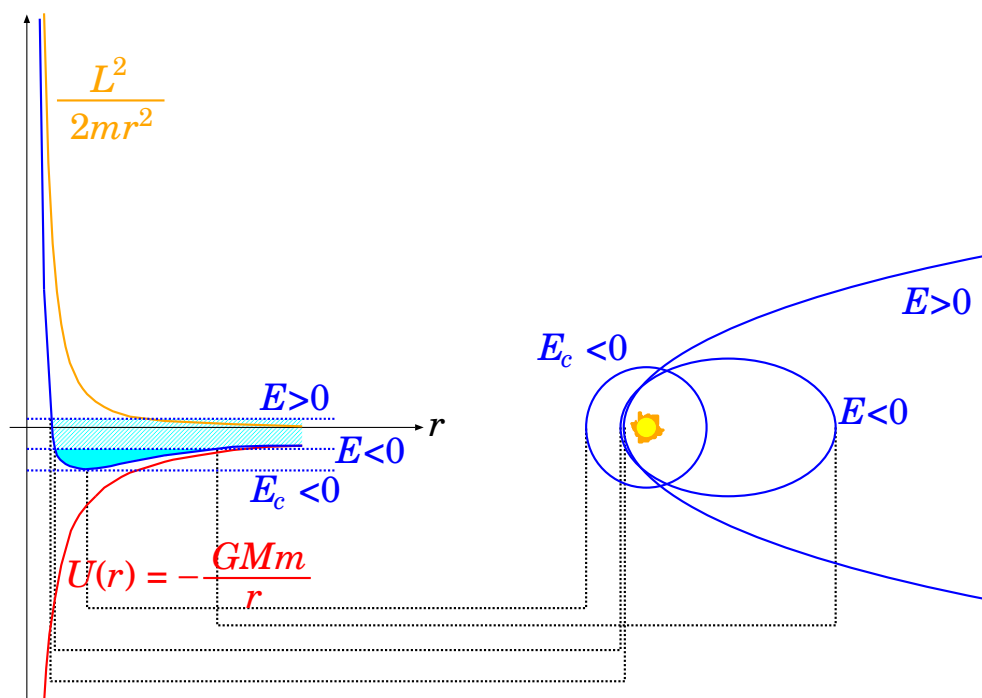


Figura 22.14: A sinistra: grafico dell'energia potenziale  $U(r)$  (in rosso), del "potenziale centrifugo"  $\frac{L^2}{2mr^2}$  (in verde), e della loro somma (in blu), in funzione della distanza  $r$  dal centro di gravità. La regione cinematicamente accessibile è indicata con colore uniforme per un caso  $E < 0$  (moto confinato), e con un tratteggio per  $E > 0$  (moto non confinato). A destra: esempi di orbite nel campo gravitazionale. Per  $E < 0$  le orbite sono chiuse ed ellittiche (circolari come caso-limite), mentre per  $E > 0$  sono aperte (paraboliche o iperboliche).

chiamato *potenziale centrifugo*. I due termini hanno dunque caratteristiche opposte. Tuttavia, a causa della diversa dipendenza da  $r$ , a grande distanze domina l'energia potenziale ( $\propto -\frac{1}{r}$ ), mentre più vicino al centro di gravità è preponderante il potenziale centrifugo ( $\propto +\frac{1}{r^2}$ ).

Per un'energia meccanica  $E < 0$  il moto è confinato e presenta una distanza minima e una distanza massima. Queste si possono ricavare direttamente dall'Eq. (22.42), nel caso-limite dell'uguaglianza. Si ottiene

$$-2mEr^2 - 2GMm^2r + L^2 = 0$$

le cui due soluzioni sono:

$$\begin{aligned} r_{min} &= \frac{GMm^2 - \sqrt{(GMm^2)^2 + 2mEL^2}}{-2mE} \\ r_{max} &= \frac{GMm^2 + \sqrt{(GMm^2)^2 + 2mEL^2}}{-2mE} \end{aligned} \quad (E < 0) \quad (22.43)$$

Nel caso-limite in cui  $(GMm^2)^2 + 2mEL^2 = 0$ , le due soluzioni diventano identiche:  $r_{min} = r_{max}$ . Quindi un solo valore di  $r$  è possibile, e l'orbita diventa necessariamente circolare. Questo avviene per

$$\begin{aligned} E_c &= -\frac{G^2M^2m^3}{2L^2} \\ r_c &= -\frac{GMm}{2E_c} = \frac{L^2}{GMm^2} \end{aligned} \quad (22.44)$$

Per un'energia meccanica  $E > 0$  il moto non è confinato, l'oggetto può arrivare a distanza infinita, però esiste sempre un valore minimo della distanza, oltre il quale non è possibile avvicinarsi ulteriormente. Questo valore si trova come fatto per il caso  $E < 0$ , però ora, con  $E > 0$ , solo una delle soluzioni dell'Eq. (22.43) è positiva, e quindi fisicamente sensata:

$$r_{min} = \frac{-GMm^2 + \sqrt{(GMm^2)^2 + 2mEL^2}}{2mE} \quad (E > 0) \quad (22.45)$$

È interessante notare che, sia per orbite confinate ( $E < 0$ ) che per orbite aperte ( $E > 0$ ), l'oggetto non può mai raggiungere il centro di gravità. Il *potenziale centrifugo* lo impedisce. In particolare, i pianeti, pur attratti dal Sole, non possono cadervi sopra, così come la Luna non può cadere sulla Terra.

### 22.13.3 Parametri dell'orbita ellittica

Nel caso di orbite confinate, dalle Eq. (22.43) si possono ricavare alcuni parametri utili dell'orbita ellittica:

$$A = \frac{r_{min} + r_{max}}{2} = \frac{GMm^2}{-2mE} \quad (22.46)$$

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{min} + r_{max}} = \frac{\sqrt{(GMm^2)^2 + 2mEL^2}}{GMm^2} \\ \epsilon^2 &= 1 + \frac{2mEL^2}{(GMm^2)^2} = 1 - \frac{L^2}{AGMm^2}\end{aligned}\quad (22.47)$$

## 22.14 Soluzione generale del moto in un campo centrale

Le proprietà esposte nelle sezioni precedenti consentono di semplificare di molto la soluzione delle equazioni del moto.

### 22.14.1 Equazione radiale

Anzitutto, grazie alla conservazione del momento angolare, il problema da tridimensionale diventa bidimensionale, e può essere trattato con le coordinate:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \phi \\ y &= r \sin \phi\end{aligned}$$

Inoltre, l'Eq. (22.29)

$$\omega = \frac{L}{mr^2}$$

consente di ridurre ulteriormente il problema ad una dimensione: quella radiale,  $r$ . Introduciamo le seguenti notazioni:

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} \quad ; \quad \ddot{r} \equiv \frac{d^2r}{dt^2}$$

Riscriviamo le equazioni della velocità, Eq. (22.41):

$$\begin{aligned}v_x &= \dot{r} \cos \phi - \frac{L}{mr} \sin \phi \\ v_y &= \dot{r} \sin \phi + \frac{L}{mr} \cos \phi\end{aligned}\quad (22.48)$$

e poi deriviamole rispetto a  $t$ , per ottenere le componenti dell'accelerazione. Pronti? Attenti ai calcoli!

$$\begin{aligned} a_x = \frac{dv_x}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \dot{r} \cos \phi - \frac{L}{mr} \sin \phi \right) \\ &= \ddot{r} \cos \phi - \dot{r} \omega \sin \phi - \frac{L}{mr} \omega \cos \phi + \frac{L}{mr^2} \dot{r} \sin \phi \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \dot{r} \sin \phi + \frac{L}{mr} \cos \phi \right) \\ &= \ddot{r} \sin \phi + \dot{r} \omega \cos \phi - \frac{L}{mr} \omega \sin \phi - \frac{L}{mr^2} \dot{r} \cos \phi \end{aligned}$$

Ricordando che  $\omega = \frac{L}{mr^2}$ , i termini in  $\dot{r}$  si annullano, lasciando:

$$\begin{aligned} a_x &= \left( \ddot{r} - \frac{L^2}{m^2 r^3} \right) \cos \phi \\ a_y &= \left( \ddot{r} - \frac{L^2}{m^2 r^3} \right) \sin \phi \end{aligned} \quad (22.49)$$

Ora ragioniamo sulla forza centrale:  $\vec{F} = F(r)\hat{r}$ , quindi per componenti:

$$\begin{aligned} ma_x = F_x &= F(r) \cos \phi \\ ma_y = F_y &= F(r) \sin \phi \end{aligned}$$

Per confronto con le Eq. (22.49) si ottiene:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \ddot{r} = \frac{F(r)}{m} + \frac{L^2}{m^2 r^3} \quad (22.50)$$

Questa è l'*equazione radiale del moto in un campo centrale*. Risolvendola, si trova la legge oraria  $r = r(t)$  che dice come evolve nel tempo la distanza dal centro di forza. Dopodiché la velocità angolare,  $\omega(t) = \frac{L}{m \cdot (r(t))^2}$ , può essere integrata per ottenere la legge oraria  $\phi = \phi(t)$ .

## 22.14.2 Traiettoria

Senza risolvere l'equazione del moto, Eq. (22.50), si può comunque scrivere un'equazione differenziale per la traiettoria, che metta in relazione  $r, \phi$ . Osserviamo che per una qualunque grandezza  $A(\phi)$  si può porre

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\phi} \cdot \frac{d\phi}{dt} = \frac{dA}{d\phi} \omega = \frac{L}{mr^2} \cdot \frac{dA}{d\phi}$$

In altre parole possiamo scrivere una *identità operatoriale*

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{L}{mr^2} \frac{d}{d\phi} \quad (\text{valida per moti in campo centrale}) \quad (22.51)$$

Applicando due volte l'identità Eq. (22.51) si ottiene:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} r \right) = \frac{L}{mr^2} \frac{d}{d\phi} \left( \frac{L}{mr^2} \frac{d}{d\phi} r \right) = \frac{L^2}{m^2} \frac{1}{r^2} \frac{d}{d\phi} \left( \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} \right)$$

Introducendo  $u \equiv \frac{1}{r}$  abbiamo  $du = -\frac{dr}{r^2}$ , quindi

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{L^2}{m^2} u^2 \frac{d^2 u}{d\phi^2} \quad \left( u \equiv \frac{1}{r} \right)$$

Sostituendo nell'Eq. (22.50) si ottiene

$$-\frac{L^2}{m^2} u^2 \frac{d^2 u}{d\phi^2} = \frac{F(1/u)}{m} + \frac{L^2}{m^2} u^3$$

ovvero

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = -\frac{m}{L^2} \frac{F(1/u)}{u^2} \quad \left( u \equiv \frac{1}{r} \right)$$

Questa equazione prende una forma particolarmente semplice nel caso gravitazionale, essendo  $F(r) = -\frac{GMm}{r^2}$ , ovvero  $F(1/u) = -GmMu^2$ . Pertanto,

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{Gm^2 M}{L^2} \equiv K \quad (22.52)$$

la cui soluzione (provare per credere!) è

$$u(\phi) = K_0 \cos \phi + K$$

dove  $K_0$  dipende dalle condizioni iniziali e per convenzione viene scelto  $\geq 0$ . Passando al raggio  $r$  si trova:

$$r(\phi) = \frac{1}{K + K_0 \cos \phi} \quad \left( K \equiv \frac{Gm^2 M}{L^2} \right) \quad (22.53)$$

Distinguiamo diversi casi:

- $K_0 = 0$ : in questo caso,  $r$  è ovviamente indipendente da  $\phi$ , quindi l'orbita è *circolare*, con raggio

$$r = \frac{1}{K} = \frac{L^2}{Gm^2 M} \quad (22.54)$$



22.14. SOLUZIONE GENERALE DEL MOTO IN UN CAMPO CENTRALE601

- $0 < K_0 < K$ : in tal caso il denominatore è sempre positivo ed il moto è confinato: c'è un raggio massimo e uno minimo:

$$r_{max} = \frac{1}{K - K_0} \quad ; \quad r_{min} = \frac{1}{K + K_0} \quad (22.55)$$

- $K_0 = K$ : il denominatore può annullarsi per  $\cos \phi = -1$ , quindi il raggio diventa infinito: esiste sempre un raggio minimo  $r_{min} = \frac{1}{2K}$  ma non un raggio massimo, l'orbita si allontana indefinitamente dal centro di gravità.
- $K_0 > K$ : in tal caso il denominatore può annullarsi per  $\cos \phi = -\frac{K}{K_0}$ , ma può anche diventare negativo se  $\cos \phi < -\frac{K}{K_0}$ : poiché questa situazione non è fisica — darebbe  $r < 0$  — questa zona angolare è proibita, il moto deve essere confinato a  $\cos \phi \geq -\frac{K}{K_0}$

L'Eq. (22.53) descrive una traiettoria conica (cioè ellittica, o parabolica, o iperbolica) con il centro di gravità in un fuoco. Per capirlo, passiamo alle coordinate cartesiane:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi = \frac{\cos \phi}{K_0 \cos \phi + K} \\ y &= r \sin \phi = \frac{\sin \phi}{K_0 \cos \phi + K} \end{aligned}$$

Dalla 1<sup>a</sup> si può ricavare

$$\cos \phi = \frac{Kx}{1 - K_0x}$$

e anche

$$K_0 \cos \phi + K = \frac{\cos \phi}{x} = \frac{K}{1 - K_0x}$$

Lavorando poi sulla 2<sup>a</sup>:

$$\begin{aligned} \sin \phi &= y(K_0 \cos \phi + K) = \frac{Ky}{1 - K_0x} \\ 1 - \cos^2 \phi = \sin^2 \phi &= \left( \frac{Ky}{1 - K_0x} \right)^2 \\ 1 - \left( \frac{Kx}{1 - K_0x} \right)^2 &= \left( \frac{Ky}{1 - K_0x} \right)^2 \\ (1 - K_0x)^2 - (Kx)^2 &= (Ky)^2 \end{aligned}$$

La geometria analitica ci insegna che un'equazione di 2° grado nelle coordinate  $x, y$  descrive effettivamente una conica <sup>[4]</sup>. Più nel dettaglio, occorre esplicitare i coefficienti di  $x^2$ ,  $y^2$ ,  $xy$ , per trovare una forma del tipo  $ax^2 + bxy + cy^2$ ; poi si calcola  $\Delta = b^2 - 4ac$ : se  $\Delta > 0$  la traiettoria è un'iperbole, se  $\Delta = 0$  è una parabola, se  $\Delta < 0$  è un'ellisse <sup>[5]</sup>. Nel nostro caso abbiamo

$$(K^2 - K_0^2)x^2 + K^2y^2 = 1 - 2K_0x$$

e quindi  $\Delta = 4(K_0^2 - K^2)K^2$ . Ricordando che  $K, K_0$  sono entrambi  $\geq 0$ , abbiamo i 3 casi:

- $K_0 < K \implies \Delta < 0$ : traiettoria ellittica
- $K_0 = K \implies \Delta = 0$ : traiettoria parabolica
- $K_0 > K \implies \Delta > 0$ : traiettoria iperbolica

Ovviamente, nel primo caso il moto è confinato, mentre negli altri due non lo è — a conferma di quanto abbiamo già discusso.

### 22.14.3 La 3<sup>a</sup> legge di Keplero

Riconsideriamo il caso dell'orbita ellittica: possiamo calcolare l'eccentricità,  $\epsilon = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}}$ , facendo uso delle Eq. (22.55), da cui troviamo  $\epsilon = \frac{K_0}{K}$ . Quindi possiamo riscrivere la soluzione generale, Eq. (22.53), come:

$$r(\phi) = \left( \frac{L^2}{Gm^2M} \right) \frac{1}{1 + \epsilon \cos \phi} \quad (22.56)$$

<sup>4</sup> Una curva conica è ottenuta intersecando un cono con un piano. L'equazione cartesiana di un cono, con asse lungo  $z$ , si scrive  $z^2 = k^2(x^2 + y^2)$ , dunque un'equazione di 2° grado in  $(x, y, z)$ . Il piano che lo interseca è della forma  $z = \alpha x + \beta y$ , dunque un'equazione di 1° grado in  $(x, y, z)$ . Eliminando la  $z$ , si ottiene un'equazione di 2° grado in  $(x, y)$ .

<sup>5</sup> L'equazione completa sarebbe  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ . Vogliamo vedere se la curva arriva a distanze infinite (iperbole o parabola) o se è confinata (ellisse). Se esistono punti che si allontanano indefinitamente, per essi la parte  $dx + ey + f$  diventa trascurabile, pertanto l'equazione si approssima arbitrariamente bene con  $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$ . Introduciamo  $t = \frac{y}{x}$ , dividiamo l'equazione per  $x^2$ , troviamo  $ct^2 + bt + a = 0$ , da risolvere per  $t$ . Il discriminante è  $\Delta = b^2 - 4ac$ . Per  $\Delta > 0$  abbiamo due soluzioni distinte  $t_1, t_2$ , che indicano 2 direzioni distinte lungo le quali la curva va all'infinito: sono i 2 asintoti dell'iperbole; per  $\Delta = 0$  le due soluzioni coincidono: è il caso della parabola; infine per  $\Delta < 0$  non esistono soluzioni, ovvero la curva non va all'infinito: quindi si tratta di un'ellisse.

Abbiamo visto che il raggio vettore del pianeta in orbita descrive aree uguali in tempi uguali:

$$d\Sigma = \frac{r^2 d\phi}{2} = \frac{r^2 \omega}{2} dt = \frac{L}{2m} dt$$

L'area totale di un'orbita ellittica, di semiassi  $A$ ,  $B$ , è

$$\Sigma = \pi AB$$

In una ellisse, la relazione fra l'eccentricità e i semiassi è  $\epsilon = \frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{A}$ , da cui  $B = A\sqrt{1 - \epsilon^2}$ . Quindi l'area dell'orbita diventa

$$\Sigma = \pi A^2 \sqrt{1 - \epsilon^2}$$

Il tempo  $T$  necessario a percorrerla è dato da

$$\begin{aligned} \Sigma &= \int_0^T dt \frac{d\Sigma}{dt} = \frac{L}{2m} T \\ T &= \frac{2m}{L} \cdot \pi A^2 \sqrt{1 - \epsilon^2} = 2\pi \frac{m}{L} A^2 \sqrt{1 - \epsilon^2} \end{aligned}$$

Utilizzando l'Eq. (22.47) si trova  $1 - \epsilon^2 = \frac{L^2}{AGMm^2}$ . Quindi

$$T = \frac{2m}{L} \cdot \pi A^2 \cdot \frac{L}{\sqrt{AGMm^2}} = 2\pi \sqrt{\frac{A^3}{GM}}$$

ovvero

$$\frac{A^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \quad (22.57)$$

e anche la 3<sup>a</sup> legge di Keplero è dimostrata.

## 22.15 Problemi di voli spaziali

### Velocità di fuga da un pianeta

La velocità di fuga  $v_\infty$  da un pianeta è definita come la velocità minima necessaria perché un oggetto, lanciato in verticale, possa raggiungere una distanza infinita. Perché il moto non sia confinato l'energia meccanica deve essere  $E \geq 0$ . Quindi la velocità di fuga si calcola nel caso-limite  $E = 0$ .

Detta  $M$  la massa del pianeta e  $R$  il suo raggio, alla superficie del pianeta (senza contare la rotazione!) l'energia meccanica di un oggetto di massa  $m$  è:

$$E = \mathcal{E} + \mathcal{U} = \frac{m}{2} v^2 - \frac{GMm}{R}$$

La velocità di fuga si ottiene imponendo  $E = 0$ , quindi  $v_\infty^2 = 2\frac{GM}{R}$ , da cui

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Se invece vogliamo considerare anche la rotazione del pianeta, con velocità angolare  $\omega$ , mettiamoci nel caso più vantaggioso: un lancio dall'equatore. Quindi la velocità ha una componente orizzontale  $v_h = \omega R$  e una verticale  $v_\infty$ . Dopo il lancio, il momento angolare  $L$  si conserva; al momento del lancio  $L = m\omega R^2 = mRv_h$ . L'energia meccanica al momento del lancio si scrive

$$E = \frac{m}{2}(v_h^2 + v_\infty^2) - \frac{GMm}{R}$$

Imponendo  $E = 0$  si trova

$$\begin{aligned} \left(\frac{L}{mR}\right)^2 + v_\infty^2 &= \frac{2GM}{R} \\ v_\infty &= \sqrt{\frac{2GM}{R} - \left(\frac{L}{mR}\right)^2} = \sqrt{\frac{2GM}{R} - (\omega R)^2} \quad (\text{all'equatore}) \end{aligned}$$

In linea di principio, sarebbe più vantaggioso lanciare da una base astronautica equatoriale, poiché la velocità di fuga è minore. In pratica, la differenza è trascurabile. Consideriamo l'esempio della Terra:  $M = 6 \cdot 10^{24}$  kg,  $R = 6370$  km,  $\omega = 7.27 \cdot 10^{-5}$  rad/s. Si trova:

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = 11.2 \text{ km/s}$$

La correzione per la rotazione è  $\omega R = 463$  m/s, molto più piccola di  $v_\infty$ , pertanto dà effetto trascurabile.

---

### Velocità di fuga dal Sole, partendo dall'orbita di un pianeta

---

Il risultato, trovato per la velocità di fuga da un pianeta, non tiene conto della presenza del Sole: abbiamo visto infatti che il "pozzo gravitazionale" del pianeta è dominante solo in prossimità del pianeta stesso. Volendo fuggire dal Sistema Solare, occorre utilizzare una formula analoga, ma usando come  $M$  la massa del Sole e al posto di  $R$  la distanza Sole-pianeta. Per esempio, per la Terra,

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{r_\oplus}} = 42.2 \text{ km/s}$$

Questa è la velocità che si dovrebbe dare a una sonda spaziale che dovesse uscire dal Sistema Solare, una volta che abbia già abbandonato il pozzo gravitazionale

terrestre. Considerando la velocità orbitale della Terra, 30 km/s, la sonda dovrebbe essere lanciata con velocità 12 km/s tangenzialmente alla Terra stessa.

---

### Viaggio Terra-Marte — traiettoria di Hohmann

---

Supponiamo che le orbite della Terra e di Marte siano circolari, con raggi rispettivamente  $r_{\oplus} = 149.6 \cdot 10^6$  km e  $r_{\text{M}} = 227.9 \cdot 10^6$  km. Si vuole lanciare un'astronave dalla Terra, che parta tangente all'orbita terrestre, e con un'orbita ellittica raggiunga al proprio aphelio l'orbita di Marte. Con che velocità  $v_{\oplus}$  deve partire? Con che velocità  $v_{\text{M}}$  raggiungerà l'orbita di Marte? Quanto tempo impiega l'astronave per giungere a destinazione?

**Risposta.** L'orbita dell'astronave è tangente a quella della Terra al suo perielio, pertanto la sua velocità è ortogonale al raggio Sole-astronave. L'ortogonalità si ha anche all'aphelio. Pertanto il momento angolare, che è conservato, si può scrivere

$$L = m_0 r_{\oplus} v_{\oplus} = m_0 r_{\text{M}} v_{\text{M}}$$

(essendo  $m_0$  la massa dell'astronave). La conservazione dell'energia meccanica inoltre mi dà:

$$E = \frac{m_0}{2} v_{\oplus}^2 - \frac{GM_{\odot} m_0}{r_{\oplus}} = \frac{m_0}{2} v_{\text{M}}^2 - \frac{GM_{\odot} m_0}{r_{\text{M}}}$$

Abbiamo un problema con due equazioni e due incognite:  $v_{\oplus}$  e  $v_{\text{M}}$ . Possiamo eliminare  $v_{\text{M}}$  dalla prima equazione — la più semplice — ottenendo

$$v_{\text{M}} = \frac{r_{\oplus}}{r_{\text{M}}} v_{\oplus}$$

La seconda equazione diventa:

$$\begin{aligned} v_{\oplus}^2 \left[ 1 - \left( \frac{r_{\oplus}}{r_{\text{M}}} \right)^2 \right] &= 2GM_{\odot} \left( \frac{1}{r_{\oplus}} - \frac{1}{r_{\text{M}}} \right) \\ v_{\oplus}^2 \frac{r_{\text{M}}^2 - r_{\oplus}^2}{r_{\text{M}}^2} &= 2GM_{\odot} \frac{r_{\text{M}} - r_{\oplus}}{r_{\text{M}} r_{\oplus}} \\ v_{\oplus}^2 \frac{r_{\text{M}} + r_{\oplus}}{r_{\text{M}}} &= 2GM_{\odot} \frac{1}{r_{\oplus}} \\ v_{\oplus} &= \sqrt{\frac{2GM_{\odot} r_{\text{M}}}{r_{\oplus} (r_{\text{M}} + r_{\oplus})}} \end{aligned}$$

Inserendo i dati per  $G = 6.67384 \cdot 10^{-11}$  Nm<sup>2</sup>kg<sup>-2</sup>,  $M_{\odot} = 1.99 \cdot 10^{30}$  kg,  $r_{\oplus}$ ,  $r_{\text{M}}$  si trova

$$\begin{aligned} v_{\oplus} &= 3.274 \cdot 10^4 \text{ m/s} \simeq 32.7 \text{ km/s} \\ v_{\text{M}} &= 2.149 \cdot 10^4 \text{ m/s} \simeq 21.5 \text{ km/s} \end{aligned}$$

Per rispondere all'ultima domanda usiamo la 3<sup>a</sup> legge di Keplero: il periodo  $T$ , lungo un'orbita completa di semiasse maggiore  $A = \frac{r_{\oplus} + r_{\sigma}}{2} = 188.8 \cdot 10^6$  km, soddisfa l'equazione  $T^2 = K_{\odot} A^3$ ; analogamente l'orbita terrestre ha un periodo  $T_{\oplus} = 1$  anno che soddisfa  $T_{\oplus}^2 = K_{\odot} r_{\oplus}^3$ . Per confronto,  $T = T_{\oplus} \left( \frac{A}{r_{\oplus}} \right)^{3/2} = 1.42$  anni. Questo sarebbe il periodo di un'orbita completa, ma visto che ci interessa solo l'andata dalla Terra a Marte, cioè dal perielio all'aphelio, il tempo è la metà.

In conclusione, il viaggio dalla Terra a Marte dura 0.71 anni, ovvero 8 mesi e mezzo.

### Fionda gravitazionale

La “fionda gravitazionale” — o “gravity assist” — è una tecnica usata per accelerare una sonda spaziale, fino a farle raggiungere pianeti esterni. Dare subito l'energia cinetica necessaria a raggiungere l'orbita esterna con una traiettoria di Hohmann sarebbe troppo dispendioso. Pertanto si lancia la sonda verso un pianeta, per effettuare un “fly-by” durante il quale la sonda viene “trainata” e deviata dalla gravità del pianeta. Lo scopo è di aumentare l'energia cinetica della sonda, in modo da farla allontanare di più dal Sole.

Come esempio, consideriamo le missioni Pioneer 10 e 11, e le missioni Voyager 1 e 2. Le traiettorie sono rappresentate in Fig. 22.15, e le date principali sono riassunte nella tabella seguente:

missione	lancio	fly-by			
		Giove	Saturno	Urano	Nettuno
Pioneer 10	15/07/1972	3/12/1973			
Pioneer 11	5/04/1973	2/12/1974	1/09/1979		
Voyager 1	5/09/1977	5/03/1979	12/11/1980		
Voyager 2	20/08/1977	9/07/1979	25/08/1981	24/01/1986	25/08/1989

*Problema:* se la gravità è conservativa, come fa ad aumentare l'energia cinetica della sonda, da prima a dopo del fly-by? Osserviamo intanto che il pianeta non è fermo, per cui non possiamo limitarci a considerare solo l'energia della sonda...

Per capire il problema, studiamo il moto in due diversi sistemi di riferimento:  $SR$  nel Sistema Solare, e  $SR'$  solidale con il pianeta — che si muove con velocità  $\vec{v}_P$  rispetto a  $SR$ . Chiamiamo  $\vec{v}_{in}$ ,  $\vec{v}_{out}$  le velocità della sonda prima e dopo il fly-by, in entrambi i casi quando è sufficientemente lontana da poter trascurare la gravità del pianeta. Nel  $SR'$  tali velocità sono  $\vec{v}'_{in}$ ,  $\vec{v}'_{out}$ . Nel  $SR'$  il pianeta appare fermo, e per la conservazione dell'energia deve essere  $\mathcal{E}'_{in} = \mathcal{E}'_{out}$ , ovvero  $(v'_{in})^2 = (v'_{out})^2$ . Nel  $SR$ , invece, il pianeta si muove, quindi in generale sarà

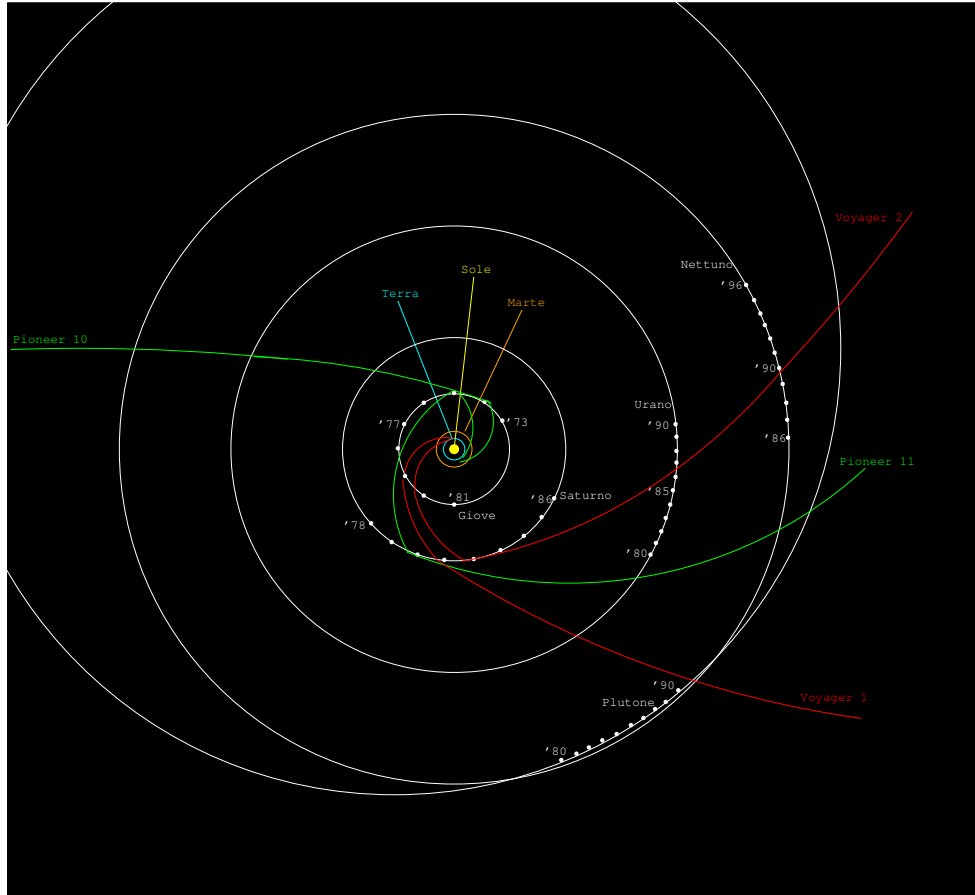


Figura 22.15: Traiettorie delle sonde spaziali Pioneer e Voyager.

$(v_{in})^2 \neq (v_{out})^2$ :

$$\begin{aligned}
 v_{out}^2 - v_{in}^2 &= (\vec{v}'_{out} + \vec{v}_P)^2 - (\vec{v}'_{in} + \vec{v}_P)^2 \\
 &= [(v'_{out})^2 + v_P^2 + 2\vec{v}'_{out} \cdot \vec{v}_P] - [(v'_{in})^2 + v_P^2 + 2\vec{v}'_{in} \cdot \vec{v}_P] \\
 &= 2(\vec{v}'_{out} - \vec{v}'_{in}) \cdot \vec{v}_P \\
 \Delta\mathcal{E} &= \frac{m}{2}(v_{out}^2 - v_{in}^2) \\
 &= m(\vec{v}'_{out} - \vec{v}'_{in}) \cdot \vec{v}_P
 \end{aligned}$$

Nel  $SR'$ ,  $v'_{in} = v'_{out} = v'$ . Possiamo chiamare  $\theta'_{in}$ ,  $\theta'_{out}$  gli angoli formati da  $\vec{v}'_{in}$ ,  $\vec{v}'_{out}$  con  $\vec{v}_P$ . Quindi

$$\Delta\mathcal{E} = mv'v_P(\cos\theta'_{out} - \cos\theta'_{in})$$

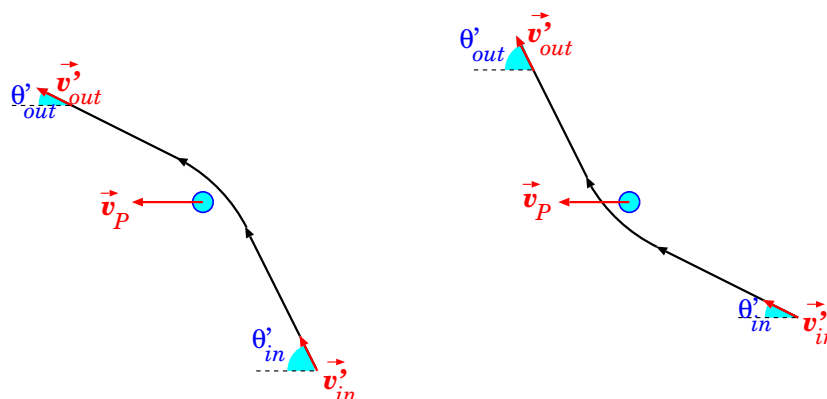


Figura 22.16: Schema della fionda gravitazionale. A sinistra,  $\cos \theta'_{out} > \cos \theta'_{in}$  e c'è un guadagno di energia cinetica; a destra invece  $\cos \theta'_{out} < \cos \theta'_{in}$  e c'è una perdita.

Il guadagno di energia cinetica dipende dagli angoli  $\theta'_{in}$ ,  $\theta'_{out}$  — vedi Fig. 22.16. Si può avere un aumento o una perdita di energia, a seconda di come avviene il fly-by: se la sonda passa “dietro” al pianeta viene accelerata, se passa “davanti” viene frenata. Infine, osserviamo che l'energia meccanica del sistema pianeta-sonda si deve conservare: la sonda acquisisce (o perde) energia cinetica a spese (o a vantaggio) di quella del pianeta, ma l'effetto sul pianeta è del tutto invisibile, a causa della sua massa enormemente maggiore di quella della sonda.

## 22.16 Maree

Le maree sono dovute ad effetti gravitazionali. Nel caso della Terra, esse sono dovute principalmente alla Luna, e secondariamente al Sole. Il livello del mare tende a salire quando la Luna è alta (e questo è intuitivo, la gravità della Luna “attrae” il mare verso di sè), ma anche dal lato opposto della Terra — e questo non è per niente intuitivo. . .

Per studiare bene il fenomeno, occorre considerare che la Terra *non* è un sistema inerziale, in quanto soggetta alla gravità della Luna, quindi esistono anche forze fittizie.

Con riferimento alla Fig. 22.17, chiamiamo  $r_0$  la distanza del baricentro della Luna dal baricentro della Terra, e  $M$ ,  $m$  le masse della Terra e della Luna. Inoltre chiamiamo  $r$  la distanza di un generico oggetto di massa  $m_0$  dal centro della Luna — questo oggetto potrebbe essere per esempio una porzione di acqua nel mare.



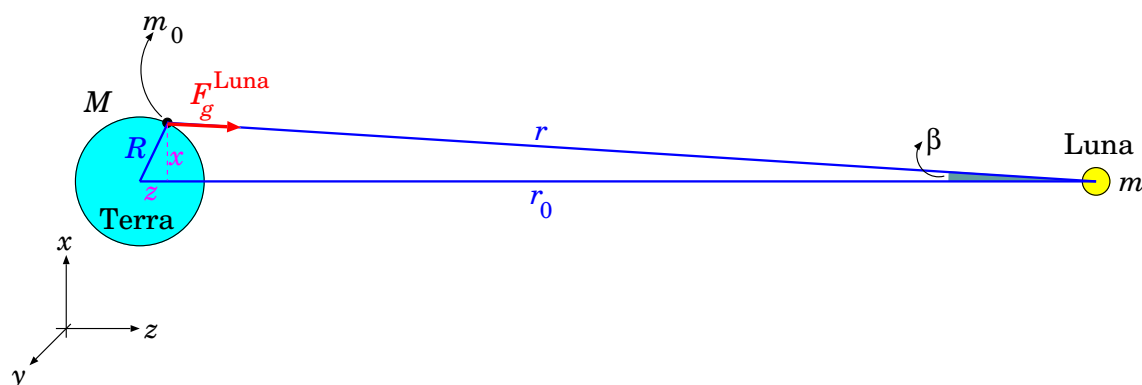


Figura 22.17: Parametri nel calcolo delle maree.

Adottiamo un SR  $(O; x, y, z)$  con centro nel centro della Terra e asse  $z$  orientato verso il centro della Luna. Il baricentro della Luna si trova in  $(0, 0, r_0)$ .

Poniamo  $m_0$  nella posizione  $(x, 0, z)$  — abbiamo posto  $y = 0$ , ma questo non è un problema, poiché il problema è simmetrico per rotazione intorno all'asse Terra–Luna. Calcoliamo le forze agenti su  $m_0$ . Abbiamo l'attrazione gravitazionale terrestre, il cui modulo è:

$$F_g^{\text{Terra}} = \frac{GMm_0}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (22.58)$$

Poi abbiamo la gravità della Luna, che in modulo vale:

$$F_g^{\text{Luna}} = \frac{Gmm_0}{r^2} \quad (22.59)$$

Scrivendola per componenti:

$$F_{g,z}^{\text{Luna}} = F_g^{\text{Luna}} \cos \beta \quad ; \quad F_{g,x}^{\text{Luna}} = -F_g^{\text{Luna}} \sin \beta$$

Ora, l'angolo  $\beta$ , formato fra le congiungenti Luna–Terra e Luna– $m_0$ , è molto piccolo. Sicuramente  $\tan \beta \leq \frac{R}{r_0}$ ; per il problema in esame,  $R = 6370$  km e  $r_0 = 384000$  km, quindi  $\tan \beta \leq 0.0166$  rad =  $0.95^\circ$ . Possiamo quindi approssimare

$$\cos \beta \simeq 1 \quad ; \quad \sin \beta \simeq \tan \beta \simeq \beta \simeq \frac{x}{r_0}$$

Inoltre <sup>[6]</sup>:

$$r \simeq r_0 - z$$

---

<sup>6</sup>  $r_0 = z + r \cos \beta$ , con  $\cos \beta \simeq 1$

Quindi

$$\begin{aligned} F_g^{\text{Luna}} &= \frac{Gmm_0}{(r_0 - z)^2} = \frac{Gmm_0}{r_0^2 \left(1 - \frac{z}{r_0}\right)^2} \\ &\simeq \frac{Gmm_0}{r_0^2} \left(1 + 2\frac{z}{r_0}\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} F_{g,z}^{\text{Luna}} &\simeq F_g^{\text{Luna}} \\ &\simeq \frac{Gmm_0}{r_0^2} \left(1 + 2\frac{z}{r_0}\right) \\ F_{g,x}^{\text{Luna}} &\simeq -F_g^{\text{Luna}} \frac{x}{r_0} \\ &\simeq -\frac{Gmm_0}{r_0^2} \left(1 + 2\frac{z}{r_0}\right) \frac{x}{r_0} \\ &\simeq -\frac{Gmm_0}{r_0^2} \frac{x}{r_0} \end{aligned} \tag{22.60}$$

(nell'ultimo passaggio abbiamo trascurato il termine  $\propto \frac{z}{r_0} \frac{x}{r_0} \leq \left(\frac{R}{r_0}\right)^2$ )

Infine, esiste anche la forza fittizia, dovuta all'accelerazione che tutta la Terra subisce a causa della Luna. Tale accelerazione è diretta verso  $+\hat{z}$  e vale:

$$a_z^{(SR)} = \frac{Gm}{r_0^2}$$

quindi la forza fittizia è <sup>[7]</sup>:

$$F_z^{\text{fitt}} = -m_0 a_z^{(SR)} = -\frac{Gmm_0}{r_0^2} \tag{22.61}$$

---

<sup>7</sup> L'asse  $z$  è stato scelto come *istantaneamente* orientato verso la Luna, ma il suo orientamento è fisso nello spazio — non segue il moto orbitale della Luna. Abbiamo fatto questa scelta perché ci interessano qui solo gli effetti gravitazionali della Luna, e questi dipendono solo dalla sua distanza istantanea dalla Terra, non suo moto. Per questa ragione, nel calcolo della forza fittizia non compaiono tutti i termini rotatori.

La forza di marea è l'effetto combinato di  $\vec{F}_g^{\text{Luna}}$  e  $\vec{F}^{\text{fitt}}$ . Lungo  $x$  c'è solo  $\vec{F}_g^{\text{Luna}}$ :

$$F_x^{\text{marea}} = F_{g,x}^{\text{Luna}} = -\frac{Gmm_0}{r_0^3} x$$

mentre lungo  $z$

$$\begin{aligned} F_z^{\text{marea}} &= F_{g,z}^{\text{Luna}} + F_z^{\text{fitt}} \\ &\simeq \frac{Gmm_0}{r_0^2} \left(1 + 2\frac{z}{r_0}\right) - \frac{Gmm_0}{r_0^2} = 2\frac{Gmm_0}{r_0^3} z \end{aligned}$$

Possiamo ora estendere anche alla componente  $y$ , che sarà analoga alla componente  $x$ :

$$\begin{aligned} F_x^{\text{marea}} &= -\frac{Gmm_0}{r_0^3} x \\ F_y^{\text{marea}} &= -\frac{Gmm_0}{r_0^3} y \\ F_z^{\text{marea}} &= 2\frac{Gmm_0}{r_0^3} z \end{aligned} \tag{22.62}$$

La forza di marea produce uno schiacciamento nel piano  $(x, y)$  e un allungamento nella direzione  $z$ .

L'effetto è inversamente proporzionale al *cubo* della distanza dalla Luna, e direttamente proporzionale alla distanza dal centro della Terra. Se siamo sulla faccia della Terra che “guarda verso la Luna”,  $z > 0$  e  $F_z^{\text{marea}} > 0$ , ovvero l'acqua appare attratta dalla Luna. Se invece siamo sulla faccia opposta,  $z < 0$  e  $F_z^{\text{marea}} < 0$ , ovvero l'acqua appare respinta dalla Luna. In realtà, la Luna attrae sempre, e la forza fittizia “respinge” sempre, però nel primo caso prevale l'attrazione lunare, mentre nel secondo prevale la “repulsione” della forza fittizia. In entrambi i casi, l'acqua sale.

Si tratta comunque di valori molto piccoli. Nel sistema Terra-Luna,  $m = 7.3 \cdot 10^{22}$  kg, e assumendo  $|z| = R$  troviamo  $|F_z^{\text{marea}}| = 2\frac{Gm}{r_0^3} R \simeq 1.1 \cdot 10^{-6}$  m/s<sup>2</sup>. Le accelerazioni di marea sono 7 ordini di grandezza più piccole di  $g = 9.806$  m/s<sup>2</sup>: non producono effetti osservabili sui singoli oggetti.

Tuttavia, l'effetto complessivo produce cambiamenti nel livello del mare.

---

### Esempio: livello delle maree in un pianeta-oceano

---

*Immaginiamo un pianeta interamente sommerso da un oceano. Di quanto sale l'acqua?*

La superficie dell'acqua si dispone in modo da essere equipotenziale, ma qui l'energia potenziale deve descrivere sia la gravità del pianeta che la forza di marea. L'energia potenziale della gravità del pianeta è

$$\mathcal{U}_g^{\text{pianeta}} = -\frac{GMm_0}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

La forza di marea può essere facilmente descritta da un'energia potenziale

$$\mathcal{U}^{\text{marea}} = \frac{Gmm_0}{2r_0^3} (x^2 + y^2 - 2z^2)$$

(è facile verificare che  $\vec{F}^{\text{marea}} = -\vec{\nabla}\mathcal{U}^{\text{marea}}$ ). Quindi possiamo definire un potenziale efficace

$$\Phi = \frac{\mathcal{U}_g^{\text{pianeta}} + \mathcal{U}^{\text{marea}}}{m_0} = G \left[ \frac{m}{2r_0^3} (x^2 + y^2 - 2z^2) - \frac{M}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right]$$

Chiamiamo  $h$  l'altezza dell'acqua rispetto al raggio  $R$  del pianeta:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R + h$$

Consideriamo alcuni punti particolari:

- lungo l'asse pianeta-luna:

$$h = h_2 \quad ; \quad x = y = 0 \quad ; \quad z = \pm(R + h_2)$$

- sul piano trasverso all'asse pianeta-luna:

$$h = h_1 \quad ; \quad z = 0 \quad ; \quad x^2 + y^2 = (R + h_1)^2$$

La condizione equipotenziale diventa quindi:

$$\frac{m}{2r_0^3} (R + h_1)^2 - \frac{M}{R + h_1} = -\frac{m}{r_0^3} (R + h_2)^2 - \frac{M}{R + h_2}$$

Conviene definire  $\xi_{1,2} = \frac{h_{1,2}}{R}$ , cosicché

$$\frac{mR^2}{2r_0^3} (1 + \xi_1)^2 - \frac{M}{R(1 + \xi_1)} = -\frac{mR^2}{r_0^3} (1 + \xi_2)^2 - \frac{M}{R(1 + \xi_2)}$$

Normalmente  $|\xi_{1,2}| \ll 1$ , cosicché possiamo fare la solita approssimazione  $(1 + \xi)^\alpha \simeq 1 + \alpha\xi$ :

$$\begin{aligned} \frac{mR^2}{2r_0^3} (1 + 2\xi_1) - \frac{M}{R} (1 - \xi_1) &= -\frac{mR^2}{r_0^3} (1 + 2\xi_2) - \frac{M}{R} (1 - \xi_2) \\ \frac{mR^3}{2Mr_0^3} (1 + 2\xi_1) + \xi_1 &= -\frac{mR^3}{Mr_0^3} (1 + 2\xi_2) + \xi_2 \end{aligned}$$

Poi introduciamo  $K = \frac{mR^3}{Mr_0^3}$ . Poiché  $m < M$  e  $R \ll r_0$ ,  $K$  è un parametro molto piccolo! L'equazione diventa:

$$\frac{K}{2} + (K + 1)\xi_1 = -K + (1 - 2K)\xi_2$$

Assumendo  $K \ll 1$  otteniamo quindi:

$$\xi_2 - \xi_1 = \frac{3}{2}K$$

Il dislivello fra alta marea e bassa marea diventa quindi:

$$\begin{aligned} \Delta h = h_2 - h_1 &= (\xi_2 - \xi_1)R = \frac{3}{2}KR \\ &= \frac{3mR^4}{2Mr_0^3} \end{aligned}$$

---

### Esempio: con i parametri del sistema Terra-Luna

---

Inseriamo i dati del problema: distanza Terra-Luna  $r_0 = 384\,000$  km; raggio della Terra  $R = 6370$  km; massa della Terra  $M = 6 \cdot 10^{24}$  kg; massa della Luna  $m = 7.3 \cdot 10^{22}$  kg. Si ottiene  $K = 5.55 \cdot 10^{-8}$  (molto piccolo, come avevamo supposto! dunque l'approssimazione  $K \ll 1$  è legittima) e  $\Delta h = 0.53$  m.

Anche il Sole esercita maree sulla Terra. Possiamo calcolarle, ponendo  $r_0 = 150 \cdot 10^6$  km (distanza Terra-Sole) e  $m = 2 \cdot 10^{30}$  kg (massa del Sole). Si ottiene  $K = 2.55 \cdot 10^{-8}$  e  $\Delta h = 0.24$  m. Nonostante la massa del Sole sia enormemente più grande di quella della Luna, l'effetto è abbattuto dalla distanza, anch'essa molto più grande, e dalla dipendenza  $\frac{1}{r_0^3}$ . L'effetto mareale massimo si ottiene quando Sole e Luna sono allineati, oppure opposti rispetto alla Terra. L'effetto complessivo è la somma dei due:  $\Delta h \simeq 0.8$  m.

Ci si può sorprendere dei valori trovati così piccoli: in effetti è noto che in certi luoghi della Terra le maree possono raggiungere anche la decina di metri! Va però ricordato che il nostro calcolo tratta il mare come se ricoprisse interamente la Terra. Quello che succede in realtà è che il moto della massa d'acqua è influenzato dalle caratteristiche morfologiche dei fondali e della costa, che fanno sì da modificare il moto dell'onda di marea che sopraggiunge, talvolta comportandosi da barriere e quindi provocandone l'innalzamento.

---

### Effetti mareali fra pianeta e satelliti

---

Le maree — a dispetto del nome — non sono un fenomeno che interessa soltanto i mari. In effetti, da quanto detto finora, dovrebbe essere chiaro che la gravità che un oggetto esercita su un altro tende a “stirarlo” nella direzione congiungente i due oggetti. Anche questi si chiamano “effetti di marea”. Siccome gli oggetti celesti

(pianeti, satelliti) sono in rotazione, l'effetto è che l'asse lungo cui si esercita la marea cambia in continuazione rispetto all'oggetto che la subisce, e quindi anche le deformazioni indotte cambiano. Questo provoca movimenti nella struttura dell'oggetto celeste, che dissipano energia per attrito, e tendono a rallentare la rotazione dell'oggetto.

Un esempio di questo fenomeno ci è ben noto: la Luna volge sempre la stessa faccia verso la Terra. Cioè il suo periodo di rotazione propria e quello di rivoluzione intorno alla Terra coincidono. Questa non è un'assurda coincidenza. È dovuta al fatto che le forze di marea che la Terra esercita sulla Luna hanno rallentato la rotazione di quest'ultima, fino a "bloccarla" nella sua posizione attuale. Qui per "bloccare" non intendiamo che la rotazione sia arrestata, ma che sia sincrona con la rivoluzione. Anche la Luna rallenta la rotazione della Terra, ma l'effetto è più piccolo, e quindi la Terra gira ancora su sé stessa.

Anche i satelliti di Marte, Phobos e Deimos, sono "bloccati dalle maree" <sup>[8]</sup>, e volgono sempre la stessa faccia verso il pianeta.

Un altro esempio, ancora più eclatante, è dato da Plutone e Caronte. Plutone, nonostante sia un pianeta nano, ha diversi satelliti, di cui uno di massa confrontabile a quella del pianeta stesso. In effetti il sistema Plutone-Caronte potrebbe essere quasi considerato un pianeta doppio. Ebbene, le forze mareali fra i due corpi hanno rallentato le rotazioni di entrambi, fino a "bloccarli": ora Plutone e Caronte si rivolgono sempre la stessa faccia mentre ruotano intorno al loro comune baricentro.

### Aumento della distanza Terra-Luna

L'effetto mareale della Luna sulla Terra è causa dell'allontanamento dei due oggetti. Vediamo perché. L'energia meccanica  $E$  del sistema tende a diminuire, a causa degli attriti prodotti dalle deformazioni indotte nella Terra dalla marea lunare: quindi  $dE < 0$ . Nello stesso tempo, il momento angolare totale  $L$  del sistema si conserva: quindi ad un rallentamento della rotazione terrestre deve corrispondere un aumento del momento angolare dell'orbita lunare.

Chiamiamo  $M$ ,  $m$  le masse di Terra e Luna,  $r$  la loro distanza,  $v$  la velocità orbitale della Luna,  $I$ ,  $\omega$  rispettivamente il momento di inerzia e la velocità angolare della Terra. L'energia meccanica e il momento angolare del sistema sono:

$$\begin{aligned} E &= \frac{I\omega^2}{2} + \frac{m}{2}v^2 - \frac{GMm}{r} \\ L &= I\omega + mvr \end{aligned}$$

Inoltre ricordiamo che per orbite circolari (come è quella della Luna) vale:

$$v^2 = \frac{GM}{r} \quad (*)$$

<sup>8</sup> In inglese si dice "tidally locked", essendo "tide" la marea. Non saprei come rendere esattamente in italiano... a volte si trova scritto "bloccati marealmente".

cosicché l'energia meccanica si può riscrivere:

$$E = \frac{I\omega^2}{2} - \frac{GMm}{2r}$$

e la sua variazione diventa:

$$dE = I\omega d\omega + \frac{GMm}{2r^2} dr$$

Analogamente, procediamo per il momento angolare: da (\*) si ricava che  $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$  e  $vr = \sqrt{GMr}$ , quindi

$$L = I\omega + m\sqrt{GMr}$$

e dalla sua conservazione:

$$\begin{aligned} 0 = dL &= I d\omega + \frac{m}{2} \sqrt{\frac{GM}{r}} dr \\ &= I d\omega + \frac{mv}{2} dr \end{aligned}$$

Inserendo questo risultato nella variazione dell'energia — e usando ancora (\*):

$$\begin{aligned} dE &= -\omega \frac{mv}{2} dr + \frac{GMm}{2r^2} dr \\ &= \frac{m}{2} \left( -\omega v + \frac{GM}{r^2} \right) dr \\ &= \frac{m}{2} \left( -\omega v + \frac{v^2}{r} \right) dr \\ &= -\frac{mv}{2} \left( \omega - \frac{v}{r} \right) dr \end{aligned}$$

Ora, osserviamo che  $\frac{v}{r} \equiv \omega_{orb}$  è la velocità angolare orbitale della Luna, pertanto possiamo riscrivere:

$$dE = -\frac{mv}{2} (\omega - \omega_{orb}) dr$$

La condizione  $dE < 0$  si traduce in una condizione su  $dr$  a seconda del segno di  $(\omega - \omega_{orb})$ :

$$\begin{aligned} \omega > \omega_{orb} &\implies dr > 0 \\ \omega < \omega_{orb} &\implies dr < 0 \end{aligned}$$

Il sistema Terra-Luna rientra nel primo caso: il periodo di rotazione della Terra è  $23^h 56^{min}$  mentre il periodo orbitale della Luna è 27.3 giorni. Quindi, effettivamente,  $dr > 0$ , ovvero la Luna si sta allontanando dalla Terra.

Esistono altri sistemi in cui si verifica la situazione opposta. Per esempio, Phobos orbita intorno a Marte più rapidamente di quanto il pianeta ruoti su sé stesso, quindi  $\omega_{orb} > \omega$ : in effetti Phobos si avvicina lentamente a Marte. L'avvicinamento può avvenire anche se il satellite ha un'orbita "retrograda" rispetto alla rotazione del pianeta, cioè  $\omega_{orb} < 0 < \omega$ , e nello stesso tempo  $v = \omega_{orb}r < 0$ .

---

### Effetti mareali in stelle binarie: supernovae I-a

---

Le forze di marea si manifestano anche nei sistemi di stelle binarie. Se una delle due stelle è molto massiva e compatta (per esempio una nana bianca) e l'altra è estesa (per esempio una gigante) e le orbite sufficientemente vicine, la stella compatta "allunga" la stella estesa per effetto di marea, e può arrivare a "succhiare" materia da essa: si crea un flusso di materia dalla stella estesa a quella compatta, con quest'ultima che si accresce via via. In alcuni casi, la stella compatta acquisisce massa sufficiente da superare il "limite di Chandrasekhar", cioè il limite dopo il quale la forza di gravità fa collassare la nana bianca. Il fenomeno produce una supernova. È un caso astrofisico molto interessante, in quanto si può sapere con precisione la massa della stella — il limite è di circa  $1.4 M_{\odot}$  (1.4 masse solari) — e quindi si sa calcolare la luminosità assoluta della supernova. Osservando la luminosità apparente si può risalire alla distanza. Questo tipo di supernovae (tipo I-a) costituiscono quindi delle "candele" di riferimento per misurare distanze astronomiche, allo stesso modo delle stelle Cefeidi, ma ovviamente molto più potenti, e quindi molto più adatte a misurare distanze molto più grandi (fino a miliardi di anni-luce).

## 22.17 Punti Lagrangiani

Abbiamo visto come risolvere il moto di due corpi che interagiscono gravitazionalmente. Quando i corpi diventano 3, in generale il problema non ha soluzioni analitiche.

Esiste però una situazione — anche interessante nell'ambito astrofisico e astronautico — in cui si può analizzare il moto di un oggetto leggero, in presenza di altri due oggetti molto più pesanti: per esempio, un sistema Sole-Giove-asteroide, oppure Terra-Luna-satellite (artificiale), o anche Sole-pianeta-satellite. In generale, abbiamo 3 corpi, di masse  $m_0$ ,  $m$ ,  $M$  tali che  $M \gg m \gg m_0$ . In questi casi, ovviamente, la presenza di  $m_0$  non influisce per niente sul moto di  $m$  e  $M$ , e quest'ultimo può essere considerato in quiete.

Si può mostrare che esistono nello spazio delle posizioni in cui  $m_0$  rimane "fermo" rispetto al sistema  $M-m$  — nel senso che il sistema  $M-m-m_0$  ruota come se fosse rigido. Queste posizioni sono note come "punti Lagrangiani".



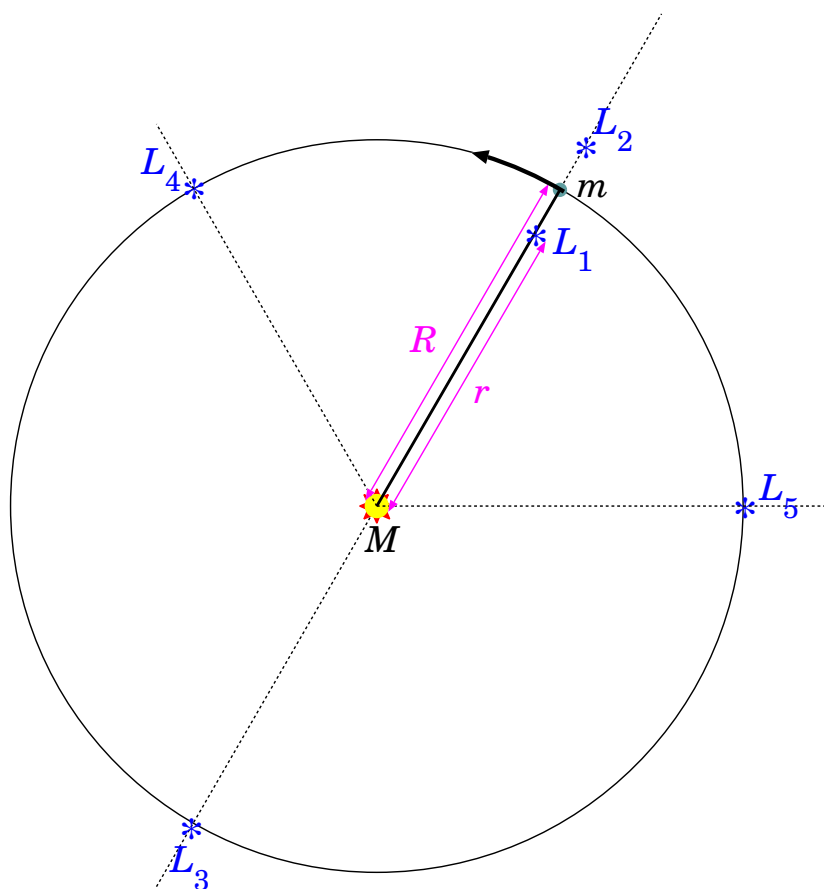


Figura 22.18: I 5 punti lagrangiani.

Essi sono 5: 3 sono allineati sull'asse  $M$ - $m$ , gli altri 2 si trovano sull'orbita di  $m$  ma rispettivamente  $60^\circ$  davanti o dietro, come illustrato in Fig. 22.18.

I punti  $L_1$ ,  $L_2$  sono di particolare interesse: un osservatorio nello spazio in  $L_1$  è ideale per osservare il Sole: resta “vicino” alla Terra e mai eclissato da essa. Invece un osservatorio in  $L_2$  è ideale per l'osservazione dello spazio profondo, trovandosi sempre in eclisse, e quindi protetto dalla radiazione solare. Detta  $R$  la distanza di  $m$  da  $M$ , la distanza  $r$  dei punti  $L_1$ ,  $L_2$  da  $M$  è pari a

$$r = R \left( 1 \pm \sqrt[3]{\frac{m}{3M}} \right)$$

I punti  $L_4$ ,  $L_5$  sono spesso visibili nel Sistema Solare: per esempio, Giove è “accompagnato” lungo la sua orbita da due gruppetti di asteroidi: i “Greci” in  $L_4$  e i “Troiani” in  $L_5$ .

### 22.17.1 Calcolo dei punti $L_1$ e $L_2$

Analizziamo il caso in cui  $m$  compie un'orbita circolare di raggio  $R$  intorno a  $M$ . Sappiamo che la velocità angolare è tale che

$$\omega^2 = \frac{GM}{R^3}$$

Vogliamo trovare i punti Lagrangiani  $L_1$ ,  $L_2$  sull'asse  $M$ - $m$ . Chiamiamo  $r$  genericamente la distanza di uno di questi punti da  $M$ . Se vi poniamo una massa  $m_0$ , essa è soggetta alle forze gravitazionali di  $M$  e  $m$ , pertanto ha un'energia potenziale

$$\mathcal{U}_g = -\frac{GMm_0}{r} - \frac{Gmm_0}{|r-R|}$$

D'altra parte, il sistema di riferimento in cui l'asse  $M$ - $m$  è fermo, è un sistema in rotazione con velocità angolare  $\omega$ , pertanto bisogna anche considerare una forza centrifuga (fittizia)

$$F_c = m_0 \omega^2 r$$

che può essere descritta attraverso un'energia potenziale

$$\mathcal{U}_c = -\frac{m_0 \omega^2 r^2}{2}$$

(provare per credere:  $F_c = -\frac{\partial \mathcal{U}_c}{\partial r}$ ). Quindi otteniamo un'energia potenziale efficace

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{eff} &= \mathcal{U}_g + \mathcal{U}_c \\ &= -m_0 \left[ \frac{GM}{r} + \frac{Gm}{|r-R|} + \frac{\omega^2 r^2}{2} \right] \quad (\text{inserendo il valore di } \omega^2) \\ &= -Gm_0 \left[ \frac{M}{r} + \frac{m}{|r-R|} + \frac{M r^2}{R^3} \right] \end{aligned}$$

Trovare i punti di equilibrio significa risolvere  $\frac{\partial \mathcal{U}_{eff}}{\partial r} = 0$  — si tratta di un'equazione algebrica di 5° grado, e può essere risolta solo per via numerica. Pertanto procediamo con delle approssimazioni basate sul buonsenso... Essendo  $M \gg m$ , ci aspettiamo che i punti Lagrangiani siano molto più vicini a  $m$ , in modo che il suo effetto gravitazionale possa essere simile a quello di  $M$ . Pertanto parametrizziamo

$$r = R(1 + \epsilon)$$

e assumiamo che  $\epsilon$  sia “piccolo”. L’energia potenziale efficace diventa quindi:

$$\mathcal{U}_{eff} = -\frac{G m_0}{R} \left[ \frac{M}{1+\epsilon} + \frac{m}{|\epsilon|} + \frac{M}{2}(1+\epsilon)^2 \right]$$

e il punto di equilibrio si trova imponendo  $\frac{\partial \mathcal{U}_{eff}}{\partial \epsilon} = 0$  [9]:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial \mathcal{U}_{eff}}{\partial \epsilon} &= -\frac{G m_0}{R} \left[ -\frac{M}{(1+\epsilon)^2} - \operatorname{sgn}(\epsilon) \frac{m}{\epsilon^2} + M(1+\epsilon) \right] \\ &\simeq \frac{G m_0}{R} \left[ M(1-2\epsilon) + \operatorname{sgn}(\epsilon) \frac{m}{\epsilon^2} - M(1+\epsilon) \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &\simeq \frac{G m_0}{R} \left[ -3M\epsilon + \operatorname{sgn}(\epsilon) \frac{m}{\epsilon^2} \right] \end{aligned}$$

L’approssimazione ( $\simeq$ ) consiste nello scrivere  $(1+\epsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\epsilon$  [10], in questo caso con l’esponente  $\alpha = -2$ .

A questo punto è evidente che la soluzione è:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \pm \sqrt[3]{\frac{m}{3M}} \\ r &= R \left( 1 \pm \sqrt[3]{\frac{m}{3M}} \right) \end{aligned}$$

Quindi abbiamo 2 punti Lagrangiani: uno posto fra  $m$  e  $M$  ( $\epsilon < 0$ ) e uno posto oltre  $m$  ( $\epsilon > 0$ ).

---

### Esempio: punti Lagrangiani fra Terra e Sole

---

La massa del Sole è  $M \simeq 2 \cdot 10^{30}$  kg e la massa della Terra  $m \simeq 6 \cdot 10^{24}$  kg. La distanza Terra-Sole è  $R \simeq 150 \cdot 10^6$  km.

Con le formule trovate, abbiamo  $\epsilon \simeq 0.01$ , ovvero i punti Lagrangiani si trovano a circa  $1.5 \cdot 10^6$  km dalla Terra.

Da notare che, a posteriori, il risultato  $\epsilon \simeq 0.01$  consente l’approssimazione fatta: la parte trascurata è infatti  $\mathcal{O}(\epsilon^2) \approx 10^{-4}$ .

---

<sup>9</sup> È utile ricordare che  $|\epsilon| = \operatorname{sgn}(\epsilon) \cdot \epsilon$ , essendo  $\operatorname{sgn}(\epsilon)$  il segno di  $\epsilon$ , che vale  $\pm 1$  a seconda che  $\epsilon$  sia positivo o negativo. La funzione  $\epsilon \rightarrow |\epsilon|$  è derivabile ovunque, tranne per  $\epsilon = 0$ , e  $\frac{d|\epsilon|}{d\epsilon} = \operatorname{sgn}(\epsilon)$ .

<sup>10</sup> In generale,  $f(1+\epsilon) \simeq f(1) + f'(1)\epsilon$ ; per  $f(1+\epsilon) \equiv (1+\epsilon)^\alpha$  ovviamente  $f(1) = 1$  e  $f'(1) = \alpha$ .



## Capitolo 23

# Relatività speciale

L'elettromagnetismo, formulato dalle equazioni di Maxwell (1865), prevede l'esistenza di onde elettromagnetiche che devono viaggiare a velocità costante  $c$ , indipendentemente dal moto della sorgente che le ha emesse o dell'osservatore che le riceve. Sperimentalmente, questa previsione è ben verificata, e sappiamo che  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s — la *velocità della luce*.

Viceversa, le trasformazioni di Galileo per le velocità (Eq. (16.15), Sezione 16.3.1) ci dicono che le velocità di uno stesso oggetto, viste da due sistemi di riferimento (SR) diversi, seguono la relazione:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}^{(SR)}$$

Questa trasformazione è in palese contraddizione con la universalità di  $c$ .

Va ricordato che le trasformazioni di Galileo erano ben consolidate, da un paio di secoli. Le equazioni di Maxwell erano più recenti, ma la loro validità era difficile da mettere in dubbio, data la loro potenza nel descrivere la varietà dei fenomeni elettromagnetici in un contesto coerente ed unificato.

Per conciliare la situazione, era stato ipotizzato che le onde elettromagnetiche si propagassero attraverso un mezzo, l'*etere luminifero*, e che le equazioni di Maxwell valessero in un SR privilegiato, cioè quello solidale con l'etere luminifero. In questa logica, la velocità della luce sarebbe  $c$ , isotropa, nel SR dell'etere, mentre in qualunque altro SR si trasformerebbe secondo le trasformazioni di Galileo. In particolare, il SR solidale con la Terra, orbitando intorno al Sole con velocità  $u \simeq 30$  km/s, dovrebbe muoversi nell'etere, pertanto sarebbe possibile osservare la luce propagarsi con velocità diversa da  $c$  <sup>[1]</sup>. L'esperimento di Michelson-Morley (Sezione 23.1) mostrò che la velocità della luce, vista dalla Terra, è sempre  $c$ .

---

<sup>1</sup> Si potrebbe ipotizzare che l'etere sia "trascinato" dal moto della Terra? No: se così fosse, non osserveremmo l'*aberrazione stellare* (vd Sezione 16.2.3).

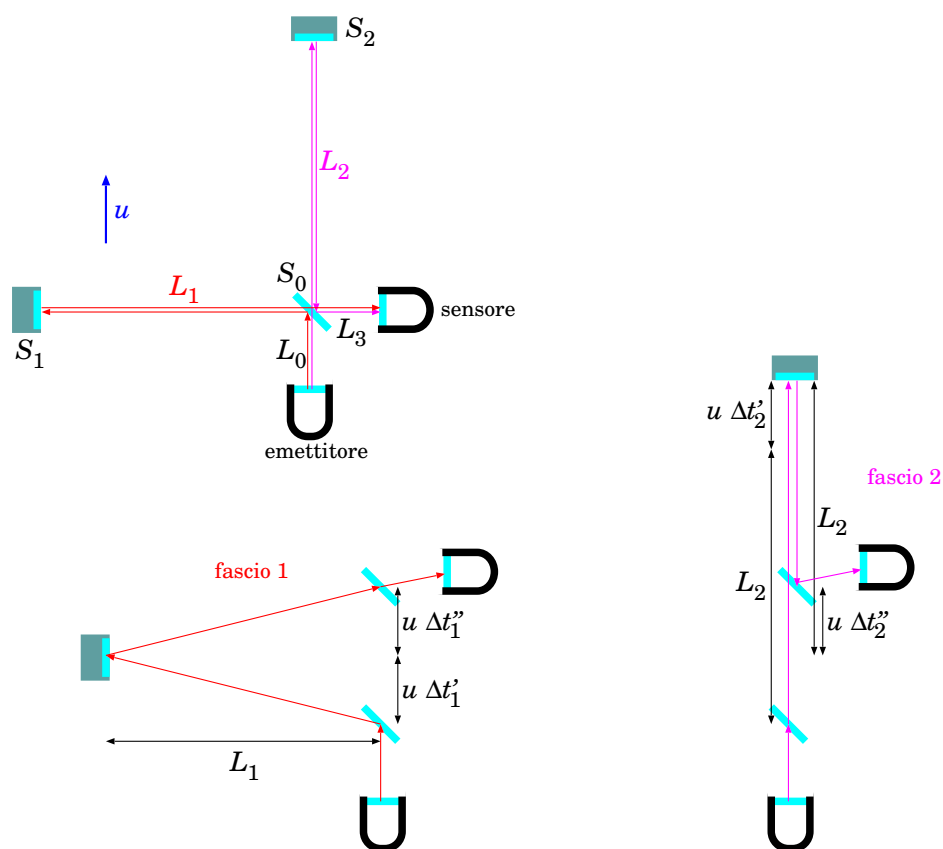


Figura 23.1: *Apparato di Michelson–Morley. In alto: apparato in quiete rispetto al SR della Terra (la freccia  $u$  indica il moto della Terra lungo la sua orbita). In basso: percorsi dei fasci di luce (1) e (2), osservati nel SR in cui la Terra si muove lungo la sua orbita.*

Quindi, fu necessario rivisitare le trasformazioni di Galileo... Questa fu la genesi della *Relatività* di Einstein.

## 23.1 Esperimento di Michelson-Morley

Negli anni 1881-87, A.A.Michelson e E.Morley realizzarono esperimenti atti a misurare la distorsione della velocità della luce a causa del moto della Terra attraverso l'etere.

### 23.1.1 L'apparato

L'apparato è mostrato in Fig. 23.1. Una sorgente di luce monocromatica manda un fascio contro uno specchio obliquo semiriflettente ( $S_0$ ), che separa il fascio in due parti: una parte (1) viene deflessa verso uno specchio ( $S_1$ ) a distanza  $L_1$ , quindi completamente riflessa fino al ricevitore; un'altra parte (2) viene trasmessa verso uno specchio ( $S_2$ ) a distanza  $L_2$ , quindi completamente riflessa e poi deflessa fino allo stesso ricevitore. Nel ricevitore i due fasci si sovrappongono. Mediante la costruzione di una figura di interferenza è possibile misurare lo sfasamento fra i tempi di arrivo  $t_1$  e  $t_2$  dei due fasci.

Proviamo a prevedere lo sfasamento temporale  $\Delta t = t_1 - t_2$ , in vari casi. Osserviamo che i tratti  $L_0$  e  $L_3$  sono comuni ad entrambi i fasci, quindi non contribuiscono allo sfasamento. Occupiamoci solo dei percorsi  $L_1$ ,  $L_2$ .

- *Apparato in quiete rispetto all'etere.* Il tempo  $t_1$  è dato da  $t_1 = \frac{2L_1}{c}$ ; analogamente  $t_2 = \frac{2L_2}{c}$ . Lo sfasamento dunque è

$$\Delta t = \frac{2(L_1 - L_2)}{c}$$

- *Apparato in moto nell'etere, lungo la direzione di  $L_2$ :* è il caso mostrato in Fig. 23.1.

Cominciamo con il raggio (1). Detto  $t'_1$  il tempo per andare da  $S_0$  a  $S_1$ , la distanza da percorrere è  $\sqrt{L_1^2 + (ut'_1)^2}$ , quindi  $(ct'_1)^2 = (L_1)^2 + (ut'_1)^2$ . Risolvendo per  $t'_1$  si trova:

$$t'_1 = \frac{L_1}{\sqrt{c^2 - u^2}}$$

Si può ragionare analogamente per  $t''_1$ , il tempo per tornare da  $S_1$  a  $S_0$ : la distanza da percorrere è  $\sqrt{L_1^2 + (ut''_1)^2}$ , quindi  $(ct''_1)^2 = (L_1)^2 + (ut''_1)^2$ . Risolvendo per  $t''_1$  si trova:

$$t''_1 = \frac{L_1}{\sqrt{c^2 - u^2}}$$

Si conclude che il tempo totale per il percorso (1) è

$$t_1 = t'_1 + t''_1 = \frac{2L_1}{\sqrt{c^2 - u^2}}$$

Ora consideriamo il raggio (2). Detto  $t'_2$  il tempo per andare da  $S_0$  a  $S_2$ , la distanza da percorrere è  $L_2 + ut'_2$ , quindi  $ct'_2 = L_2 + ut'_2$ . Risolvendo per  $t'_2$  si trova:

$$t'_2 = \frac{L_2}{c - u}$$

Analogamente, detto  $t''_2$  il tempo per tornare da  $S_2$  a  $S_0$ , la distanza da percorrere è  $L_2 - ut''_2$ , quindi  $ct''_2 = L_2 - ut''_2$ . Risolvendo per  $t''_2$  si trova:

$$t''_2 = \frac{L_2}{c + u}$$

Quindi il tempo totale per il percorso (2) è

$$t_2 = t'_2 + t''_2 = \frac{2L_2 c}{c^2 - u^2}$$

Lo sfasamento fra i percorsi (1) e (2) risulta quindi

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2L_1}{\sqrt{c^2 - u^2}} - \frac{2L_2 c}{c^2 - u^2}$$

- *Apparato in moto nell'etere, lungo la direzione di  $L_1$* : è quello che si otterrebbe ruotando di  $90^\circ$  l'apparato mostrato in Fig. 23.1. Non c'è bisogno di rifare tutti i conti: basti pensare che questa volta  $L_1$  è parallelo al moto e  $L_2$  è perpendicolare, pertanto:

$$t_1 = \frac{2L_1 c}{c^2 - u^2} \quad ; \quad t_2 = \frac{2L_2}{\sqrt{c^2 - u^2}}$$

e quindi

$$\Delta t = \frac{2L_1 c}{c^2 - u^2} - \frac{2L_2}{\sqrt{c^2 - u^2}}$$

Riassumiamo:

$$u \parallel L_2 \implies \Delta t_{[u \parallel L_2]} = \frac{2L_1}{\sqrt{c^2 - u^2}} - \frac{2L_2 c}{c^2 - u^2}$$

$$u \parallel L_1 \implies \Delta t_{[u \parallel L_1]} = \frac{2L_1 c}{c^2 - u^2} - \frac{2L_2}{\sqrt{c^2 - u^2}}$$



Nell'esperimento, M&M provarono entrambe le configurazioni,  $u \parallel L_2$  e  $u \parallel L_1$ . Si aspettavano di trovare una differenza di sfasamenti:

$$\begin{aligned} \Delta t_{MM} &= \Delta t_{[u \parallel L_1]} - \Delta t_{[u \parallel L_2]} \\ &= \frac{2}{c^2 - u^2} \left[ L_1(c - \sqrt{c^2 - u^2}) + L_2(c - \sqrt{c^2 - u^2}) \right] \\ &= 2(L_1 + L_2) \frac{c - \sqrt{c^2 - u^2}}{c^2 - u^2} \\ &= \frac{2(L_1 + L_2)}{c} \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - (u/c)^2}}{1 - (u/c)^2} \\ &\simeq \frac{L_1 + L_2}{c} \left( \frac{u}{c} \right)^2 + \mathcal{O} \left( \left( \frac{u}{c} \right)^4 \right) \end{aligned}$$

### 23.1.2 La misura

Per quantificare, i percorsi  $L_1$ ,  $L_2$  erano dell'ordine di 10 m — ottenuti facendo riflettere i raggi di luce più volte per allungarne i percorsi effettivi. Assumendo  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s e  $u = 3 \cdot 10^4$  m/s, si otterrebbe  $\Delta t_{MM} = 6.67 \cdot 10^{-16}$  s. Si tratta di uno sfasamento temporale piccolissimo! Come misurarlo?

L'idea fu di usare l'*interferometria*. Anzitutto occorre “tradurre” uno sfasamento temporale in una differenza di cammini geometrici: poiché i segnali si propagano a velocità  $c$ , devono arrivare sfasati in distanza di

$$\Delta \ell_{MM} = c \Delta t_{MM}$$

Con i numeri dati, si ottiene  $\Delta \ell_{MM} = 2 \cdot 10^{-7}$  m = 0.2  $\mu\text{m}$ . Poi, occorre trovare una lunghezza-campione di ordine di grandezza simile. Fortunatamente, le lunghezze d'onda della luce visibile sono  $\lambda \approx 0.5 \mu\text{m}$ .

Quindi, si tratta di misurare  $\frac{\Delta \ell_{MM}}{\lambda}$ : nota  $\lambda$  si estrae poi  $\Delta \ell_{MM}$ .

In questa sezione non abbiamo spazio per entrare nei dettagli dell'interferometria. Accenniamo solo che, essendo la luce fatta di onde, queste possono sovrapporsi in fase (creste alte con creste alte) formando interferenza costruttiva, oppure in opposizione di fase (creste alte con creste basse) formando interferenza distruttiva. La figura osservata mostrerà rispettivamente dei massimi e dei minimi di luminosità — vd Fig. 23.2 (alto). Quando le due onde arrivano sfasate, le frange luminose si spostano, come indicato in Fig. 23.2 (basso): dallo spostamento delle frange si può risalire allo sfasamento in unità di lunghezze d'onda.

Siccome due onde provengono da sorgenti diverse — separate da una distanza  $\rho$  — il loro sfasamento dipende dall'angolo da cui si osservano.

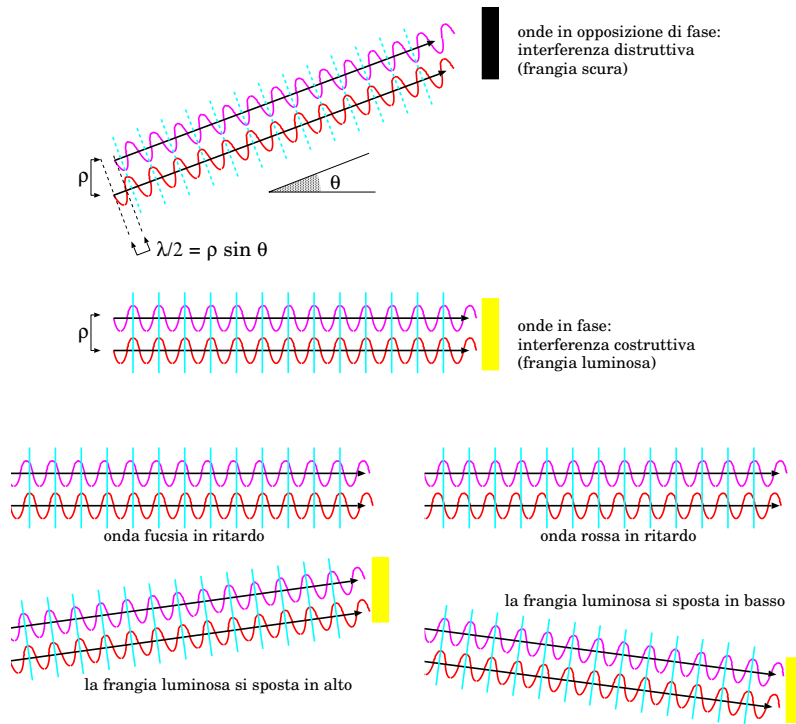


Figura 23.2: Schema per mostrare la misura degli sfasamenti mediante interferometria. In alto: come si costruisce una figura di interferenza, con frange luminose quando le onde arrivano in fase e frange scure quando arrivano in opposizione di fase. In basso: spostamenti delle frange luminose causati da sfasamenti delle due onde.

Si può individuare una distanza angolare  $\Delta\theta_{\lambda/2}$  fra i massimi e i minimi della figura di interferenza, e metterla in corrispondenza con uno sfasamento  $\frac{\lambda}{2}$ . Uno eventuale spostamento  $\Delta\theta$  osservato nelle frange, corrisponderebbe

ad uno sfasamento  $\Delta\ell$  fra le due onde tale che:  $\frac{\Delta\ell}{\lambda/2} = \frac{\Delta\theta}{\Delta\theta_{\lambda/2}}$  ovvero

$\Delta\ell = \frac{\lambda}{2} \frac{\Delta\theta}{\Delta\theta_{\lambda/2}}$  Poiché  $\lambda$  è nota e  $\Delta\theta$ ,  $\Delta\theta_{\lambda/2}$  sono entrambe misurabili, si può risalire a  $\Delta\ell$ .

### 23.1.3 Conclusioni

L'esperimento di M&M non rilevò alcuno sfasamento  $\Delta\ell_{MM}$ . Per quanto ripetuto negli anni, con apparati via via più sensibili, il risultato era sempre lo stesso. Ci sono tre possibili interpretazioni:

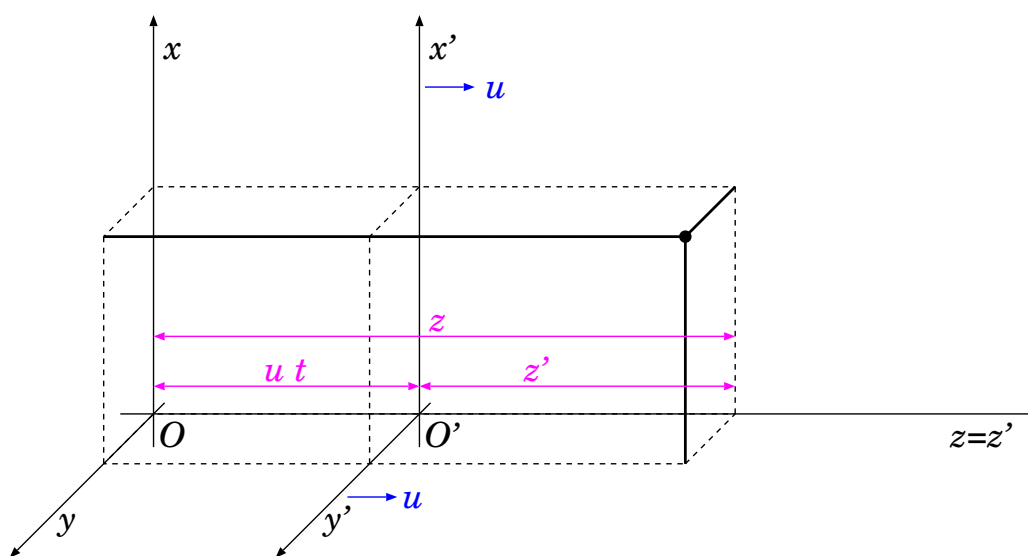


Figura 23.3: Sistemi in moto traslatorio relativo, con velocità  $\vec{v}^{(SR)} \equiv u\hat{z}$ .

- la velocità  $u$  della Terra nell'etere è nulla — ma sarebbe veramente paradossale: la Terra non è nemmeno inerziale, inverte la direzione del moto ogni 6 mesi;
- l'etere è trascinato dalla Terra, cosicché, almeno *localmente*,  $u = 0$ : abbiamo già anticipato che, se così fosse, non osserveremmo l'aberrazione stellare;
- l'ipotesi che esista un etere luminifero, rispetto al quale definire la velocità della luce, è errata.

Scartate le prime due, non resta che la terza. Quindi:

- l'etere non esiste: le equazioni di Maxwell devono valere in tutti i sistemi di riferimento;
- in particolare, la velocità della luce deve essere  $c$  in qualunque SR;
- ne segue che le trasformazioni di Galileo, almeno per la velocità della luce, non sono applicabili.

## 23.2 Critica alle trasformazioni di Galileo

Nel Capitolo 16, Sezione 16.3.1, abbiamo visto come si trasformano le coordinate e le componenti della velocità da un sistema di riferimento (SR)

$(O; x, y, z)$  a un SR  $(O'; x', y', z')$  che si muove di moto traslatorio rispetto il primo, con velocità costante. Scegliamo gli assi e le origini dei due SR in modo che la velocità relativa dei due SR sia diretta lungo  $\hat{z}$ , cioè  $\vec{v}^{(SR)} = u \hat{z}$ , che gli assi  $z, z'$  siano sovrapposti, e che all'istante  $t = 0$  le due origini coincidano:  $O \equiv O'$ . La situazione è quella rappresentata in Fig. 23.3.

In questo caso,

$$\vec{r}^{(SR)} = ut \hat{z}$$

Quindi le trasformazioni della posizione, Eq. (16.14), diventano:

$$\begin{aligned} x(t) &= x'(t) \\ y(t) &= y'(t) \\ z(t) &= z'(t) + ut \end{aligned} \quad (\text{trasformazioni di Galileo}) \quad (23.1)$$

e le trasformazioni delle velocità, Eq. (16.15), diventano:

$$\begin{aligned} v_x &= v'_x \\ v_y &= v'_y \\ v_z &= v'_z + u \end{aligned} \quad (\text{trasformazioni di Galileo}) \quad (23.2)$$

Le Eq. (23.2) sono conseguenza delle Eq. (23.1). Queste ultime, se le analizziamo a fondo, si basano su due ipotesi. La prima è che

[1] è possibile usare un tempo  $t$  assoluto per entrambi i SR.

Inoltre, quando scriviamo  $z(t) = z'(t) + ut$ , dobbiamo ricordare che  $z$  e  $u$  sono misurate rispetto a  $(O; x, y, z)$ , mentre  $z'$  è misurato rispetto a  $(O'; x', y', z')$ . Eppure sommiamo queste quantità... Dunque dobbiamo anche ipotizzare che

[2] una lunghezza misurata in un SR è valida anche in un altro SR.

Bene: come vedremo, entrambe queste ipotesi, per quanto ragionevoli, *non sono vere!* O meglio: sono vere con ottima approssimazione, finché abbiamo a che fare con velocità molto minori di  $c$ . Ma si mostrano in contraddizione con la universalità di  $c$ , pertanto non possono essere esatte.

### 23.3 Trasformazioni del tempo e dello spazio

Occorre rivisitare le trasformazioni di coordinate, tenendo conto che:

- la velocità della luce,  $c$ , è universale, vale a dire è la stessa in qualunque SR;

- le leggi della fisica devono essere le stesse per SR che si muovono di moto relativo traslatorio con velocità uniforme (*principio di relatività*): cioè, è impossibile trovare un esperimento che consenta di dire che uno dei due SR è in quiete e l'altro in moto;
- la regola per le trasformazioni di coordinate deve ridursi alle trasformazioni di Galileo, nel limite di velocità molto inferiori a  $c$ .

Un commento sulla notazione: siccome nei capitoli successivi faremo spesso uso di diversi SR, per alleggerire il testo indicheremo spesso il SR  $(O; x, y, z)$  come  $SR$  e il SR  $(O'; x', y', z')$  come  $SR'$ .

Siccome stiamo mettendo in dubbio che esista un tempo “assoluto”, conviene introdurre due variabili-tempo,  $t$  e  $t'$ , una per ciascun SR. Pertanto, le nuove trasformazioni di coordinate dovranno coinvolgere anche il tempo:

$$(t'; x', y', z') \xrightarrow[\text{dipendente da } u]{\text{trasformazione}} (t; x, y, z)$$

In generale, si definisce un *evento* come un processo fisico che avviene estremamente localizzato nel tempo e nello spazio. Quindi, in un dato sistema di riferimento  $SR$ , un evento è rappresentabile come una quaterna di coordinate spazio-temporali  $(t; x, y, z)$ ; analogamente, in un sistema di riferimento  $SR'$ , lo stesso evento è rappresentato da  $(t'; x', y', z')$ .

Anticipiamo qui le conseguenze della invarianza di  $c$ , per poi trattarle precisamente nelle prossime sezioni:

- la simultaneità di due eventi non è più un concetto assoluto, ovvero due eventi che appaiono simultanei in un SR possono accadere in tempi diversi, se visti da un altro SR; in particolare, la simultaneità è mantenuta solo se la separazione spaziale fra i due eventi è ortogonale alla direzione del moto relativo dei due SR;
- la “crisi” della simultaneità affligge anche la definizione di distanza: infatti la distanza fra due eventi è definita assumendo che le posizioni dei due eventi siano considerate allo stesso istante, ma se “lo stesso istante” è un concetto relativo al SR... anche le lunghezze vanno “in crisi”; l'unico caso in cui la lunghezza è preservata è quello in cui lo è anche la simultaneità, cioè quando la separazione spaziale fra i due eventi è ortogonale alla direzione del moto;

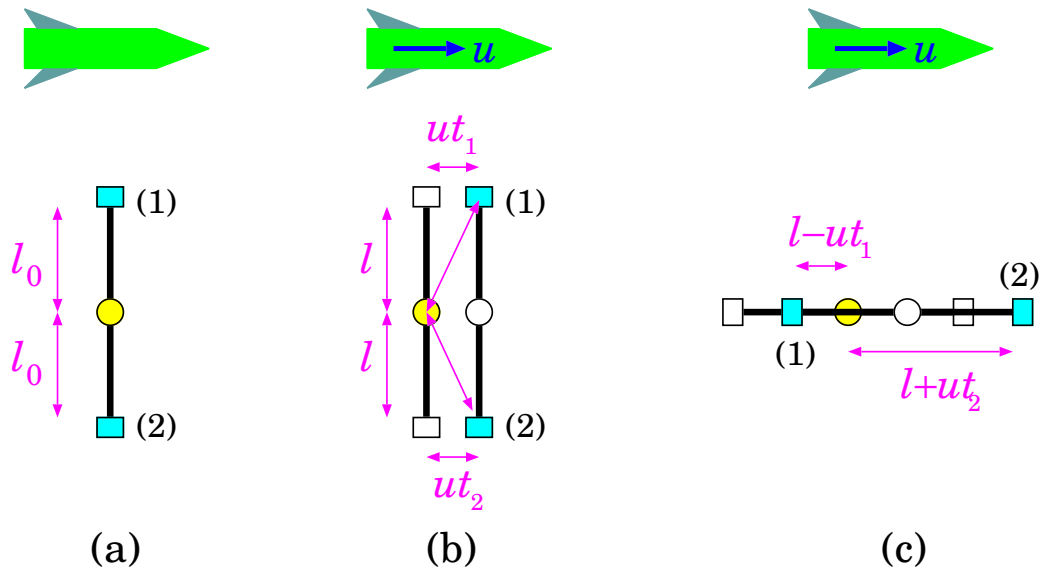


Figura 23.4: Apparato per definire la simultaneità di due eventi (1) e (2): (a) nel SR dell'astronave; (b) nel SR della Terra, quando l'apparato è ortogonale alla direzione di moto dell'astronave; (c) nel SR della Terra, quando l'apparato è parallelo alla direzione di moto dell'astronave.

- l'invarianza delle lunghezze ortogonali al moto e l'invarianza della velocità della luce per conseguenza portano alla dilatazione del tempo per sistemi in moto;
- l'invarianza della velocità della luce e la dilatazione del tempo hanno per conseguenza la contrazione delle lunghezze parallele al moto.

### 23.3.1 Simultaneità

In generale, due eventi (1) e (2) si definiscono *simultanei* se avvengono allo stesso tempo:  $t_{(1)} = t_{(2)}$ . Questa banalissima definizione però non è universale, come vedremo subito.

Immaginiamo un'astronave che viaggia a velocità  $\vec{v} = u\hat{z}$  rispetto a noi che siamo sulla Terra. Le coordinate spazio-temporali nel nostro SR sono  $(t; x, y, z)$ , mentre quelle adottate dall'equipaggio dell'astronave sono  $(t'; x', y', z')$ . Sull'astronave c'è un apparato, solidale con essa, formato da un'asta di lunghezza  $2l_0$ , al cui centro c'è un flash che emette due lampi di luce, e ai due estremi sono poste fotocellule che li rilevano. La situazione è raffigurata in Fig. 23.4. Nel SR dell'astronave, definiamo  $t' = 0$  l'istante in

cui i due lampi vengono emessi, e chiamiamo (1) e (2) gli eventi in cui ciascun lampo di luce raggiunge una delle fotocellule. Un osservatore sull'astronave dirà che:

$$t'_{(1)} = \frac{\ell_0}{c} \quad ; \quad t'_{(2)} = \frac{\ell_0}{c}$$

Siccome  $t'_{(1)} = t'_{(2)}$ , i due eventi sono simultanei — Fig. 23.4 (a).

Ora osserviamo lo stesso processo nel SR della Terra. Anche qui definiamo il “nostro” tempo in modo che a  $t = 0$  osserviamo partire i due lampi di luce. Quand'è che questi raggiungono le fotocellule? Dipende da come l'apparato è orientato rispetto al moto dell'astronave — Fig. 23.4 (b,c). In entrambi i casi, le fotocellule si sono spostate lungo  $\hat{z}$  di una distanza  $ut$ , mentre la luce viaggiava per raggiungerle.

Se l'apparato è montato perpendicolare alla direzione del moto, come in Fig. 23.4 (b), l'evento (1) ha luogo dopo un tempo  $t_{(1)}$ , durante il quale il lampo di luce ha percorso a velocità  $c$  una distanza pari a  $\sqrt{\ell^2 + (ut_{(1)})^2}$ . Si noti che per ora indichiamo con  $\ell$  (non  $\ell_0$ ) la lunghezza dell'apparato: non sappiamo se appare uguale nei due SR. Quindi il tempo  $t_{(1)}$  deve essere tale che:

$$ct_{(1)} = \sqrt{\ell^2 + (ut_{(1)})^2}$$

Risolvendo per  $t_{(1)}$  si trova:

$$t_{(1)} = \frac{\ell}{\sqrt{c^2 - u^2}}$$

Un ragionamento del tutto analogo, per l'evento (2), porta a concludere che

$$t_{(2)} = \frac{\ell}{\sqrt{c^2 - u^2}}$$

Pertanto  $t_{(1)} = t_{(2)}$ , dunque i due eventi sono simultanei nel SR della Terra.

Ora vediamo che succede se l'apparato è montato parallelo alla direzione del moto dell'astronave, come in Fig. 23.4 (c). Mentre la luce si propaga verso la fotocellula posteriore, questa “le corre incontro”, quindi, detto  $t_{(1)}$  l'istante in cui la luce la raggiunge, la distanza si è accorciata di  $ut_{(1)}$ . Poiché la luce viaggia sempre con velocità  $c$ , deve essere:

$$ct_{(1)} = (\ell - ut_{(1)})$$

e risolvendo per  $t_{(1)}$ :

$$t_{(1)} = \frac{\ell}{c + u}$$

Per la fotocellula anteriore, invece, il percorso della luce si è allungato: detto  $t_{(2)}$  l'istante in cui la luce la raggiunge, la distanza si è allungata di  $ut_{(2)}$ . Quindi:

$$ct_{(2)} = (\ell + ut_{(2)})$$

e risolvendo per  $t_{(2)}$ :

$$t_{(2)} = \frac{\ell}{c - u}$$

In questo caso,  $t_{(1)} \neq t_{(2)}$ , dunque i due eventi *non sono simultanei* nel SR della Terra.

Riassumiamo: abbiamo considerato due eventi, che in un SR (quello dell'astronave) appaiono in quiete e simultanei. Se osservati da un altro SR, la loro simultaneità non è più garantita. In particolare, abbiamo visto che:

- se la loro separazione spaziale è ortogonale alla velocità di spostamento, restano simultanei;
- se invece la loro separazione spaziale è lungo la velocità di spostamento, non sono più simultanei;

### 23.3.2 Trasformazioni delle lunghezze ortogonali al moto

Un oggetto che in quiete ha lunghezza  $\ell_0$ , se visto in moto in una direzione ortogonale alla sua lunghezza, appare sempre di lunghezza  $\ell_0$ . Vediamo perché.

Scegliamo un SR  $SR' \equiv (O'; x', y', z')$ , rispetto al quale l'oggetto è in quiete e disposto perpendicolare all'asse  $z'$ . La *lunghezza* dell'oggetto,  $\ell_0$ , è definita come la distanza dei suoi estremi. E questo è facile. . .

Ora osserviamo lo stesso oggetto da un SR  $SR \equiv (O; x, y, z)$ , rispetto al quale  $SR' \equiv (O'; x', y', z')$  si muove con velocità  $u\hat{z}$ . L'osservatore definisce la lunghezza  $\ell$  dell'oggetto come la distanza fra i due estremi, *osservati nello stesso istante*. Questa precisazione di *simultaneità* è necessaria: visto che l'oggetto è in moto non possiamo assolutamente pensare di considerare i due estremi in due istanti diversi! Teniamo a mente che qui entra il concetto di simultaneità, con tutte le cautele espresse nella Sezione 23.3.1.



Ora immaginiamo che i due osservatori,  $O$  e  $O'$ , solidali con  $SR$  e  $SR'$ , si dotino di due oggetti uguali,  $(a)$  e  $(b)$ , entrambi di lunghezza  $\ell_0$ : il confronto fra le lunghezze viene fatto sovrapponendo i due oggetti in quiete e controllando che gli estremi combacino. Poi uno dei due oggetti viene messo in moto, solidale a  $SR'$ . Entrambi gli oggetti sono disposti in modo che siano perpendicolari al moto relativo dei SR.

L'osservatore  $O$  osserva l'oggetto  $(b)$  in moto, misurando una lunghezza  $\ell^{(b)}$ , e la confronta con il suo oggetto in quiete, di lunghezza  $\ell_0$ . La misura di  $\ell_0$  è banale — l'oggetto  $(a)$  è in quiete — mentre la misura di  $\ell^{(b)}$  implica che i due estremi vengano “fotografati” allo stesso istante, cioè simultaneamente. L'osservatore  $O'$ , analogamente, misura l'oggetto  $(b)$  in quiete e trova  $\ell_0$ , mentre per misurare la lunghezza  $\ell^{(a)}$  deve “fotografare” gli estremi di  $(a)$  allo stesso istante.

Ora la situazione dei due osservatori è perfettamente simmetrica:

- da  $SR$  si osserva  $(a)$  in quiete di lunghezza  $\ell_0$ , e  $(b)$  in moto con velocità  $u$  e di lunghezza  $\ell_b$ ;
- da  $SR'$  si osserva  $(a)$  in moto con velocità  $u$  e di lunghezza  $\ell_a$ , mentre  $(b)$  è in quiete di lunghezza  $\ell_0$ ;
- essendo gli oggetti disposti perpendicolarmente al moto relativo, la richiesta di *simultaneità* è ben definita, nel senso che ciò che uno dei due osservatori chiama “simultaneo” lo è anche per l'altro.

Questa simmetria implica che  $\ell_a = \ell_b$ , ovvero la distorsione della lunghezza dipende solo dalla velocità relativa  $|u|$  dei due SR: il segno di  $u$  non deve entrare, altrimenti violerebbe l'isotropia dello spazio.

Supponiamo, per assurdo, che  $O$  trovi che  $\ell^{(b)} \neq \ell_0$  — per esempio  $\ell_0 > \ell^{(b)}$ . Questo significa che, se i due oggetti sono disposti in modo da passarsi a fianco l'uno dell'altro e che i loro estremi inferiori combacino, l'estremo superiore di  $(a)$  deve essere più in alto dell'estremo superiore di  $(b)$  — estremi “fotografati” nello stesso istante. L'osservatore  $O'$  non potrà che concordare con questa affermazione — visto che i due osservatori concordano con la simultaneità — e quindi dovrà dire che  $\ell^{(a)} > \ell_0$ . Quindi abbiamo  $\ell^{(b)} < \ell_0 < \ell^{(a)}$ , il che è in contraddizione con  $\ell_a = \ell_b$ . Un ragionamento analogo esclude che possa essere  $\ell_0 < \ell^{(b)}$ . Pertanto resta:

$$\ell^{(a)} = \ell_0 = \ell^{(b)}$$

### 23.3.3 Trasformazioni del tempo

Immaginiamo che vengano costruiti due orologi identici, così fatti. Ciascuno ha un flash che può emettere un lampo di luce, che viaggia per una distanza

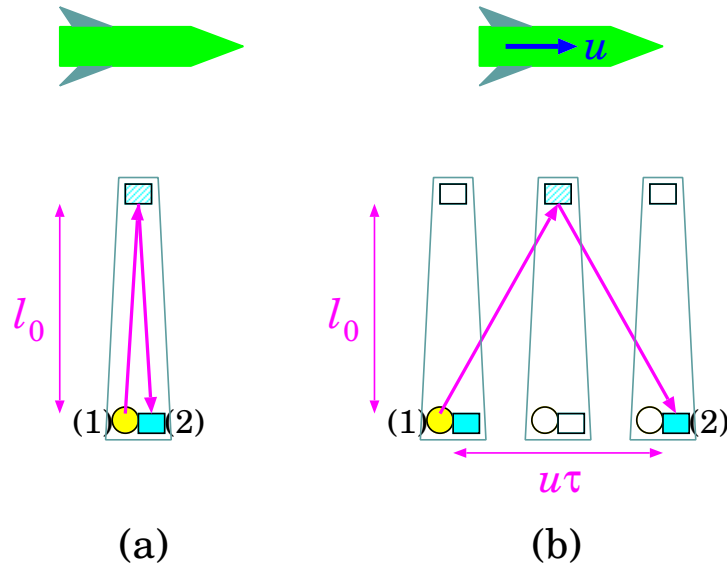


Figura 23.5: Orologio “a luce” solidale con l’astronave, montato perpendicolare alla direzione di volo: (a) visto dall’astronave; (b) visto da Terra.

$l_0$  alla fine della quale è posto uno specchio che rimanda il lampo indietro verso il flash. Vicinissimo al flash c’è una fotocellula che rileva l’arrivo della luce. Appena la riceve, comanda al flash di emettere un altro lampo... e così via. L’unità di tempo (il “tic” dell’orologio) è definita come il tempo trascorso fra due flash, e deve valere

$$\tau_0 = \frac{2l_0}{c} \quad (23.3)$$

Questi orologi vengono usati in due SR: uno sulla Terra e uno su un’astronave che passa vicino alla Terra con velocità  $u$  costante, come mostrato in Fig. 23.5.

Gli orologi vengono entrambi montati ortogonali alla direzione del moto dell’astronave. Questo serve a garantire che le loro lunghezze rimangano uguali, anche quando sono osservati in movimento — vd Sezione 23.3.2.

Al momento in cui i due osservatori si passano vicini l’uno all’altro, azzerano i loro conteggi di tempo, cosicché  $t = 0$  e  $t' = 0$ .

Stabilito che le lunghezze di entrambi gli orologi appaiono pari a  $l_0$ , per ciascun osservatore, vediamo come ci appare il tempo  $t'$ , misurato dall’orologio sull’astronave, se visto funzionare da Terra. Per l’osservatore dell’astronave, il “tic” dura

$$\tau_0 = \frac{2l_0}{c}$$

L'osservatore a Terra vede una durata diversa del "tic": osserva infatti una durata  $\tau$  più lunga, poiché la luce deve viaggiare una distanza maggiore, pari a  $\sqrt{(2\ell_0)^2 + (u\tau)^2}$ . Pertanto deve essere

$$c\tau = \sqrt{(2\ell_0)^2 + (u\tau)^2}$$

e risolvendo per  $\tau$  si trova:

$$\tau = \frac{2\ell_0}{\sqrt{c^2 - u^2}}$$

Confrontando con quanto trovato per  $\tau_0$  abbiamo trovato

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \tau_0 = \gamma \tau_0 \quad \left( \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \right) \quad (23.4)$$

Abbiamo appena trovato la famosa legge della *dilatazione relativistica dei tempi*. Il tempo misurato dall'osservatore sull'astronave, visto da Terra, appare dilatato di un fattore

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \quad (23.5)$$

Questo parametro, sempre  $\geq 1$  e divergente per  $u \rightarrow c$ , è il *parametro di Lorentz* — o  *$\gamma$  di Lorentz* — e ci accompagnerà per tutta la Relatività.

Una riflessione: perché i tempi sono diversi? Se i due osservatori sono perfettamente equivalenti, perché da Terra si vede un tempo dilatato rispetto all'astronave? In effetti, la situazione non è del tutto simmetrica: l'orologio esaminato è fermo rispetto all'astronave, non rispetto a Terra, dunque i due SR non sono equivalenti. Si potrebbe riformulare lo stesso concetto dicendo che i due eventi (1) e (2), corrispondenti all'emissione e alla ricezione della luce, nel SR dell'astronave sono nella stessa posizione, mentre nel SR della Terra hanno una separazione spaziale lungo la direzione del moto relativo.

### 23.3.4 Trasformazioni delle lunghezze parallele al moto

Ora riconsideriamo l'orologio "a luce" sull'astronave, ma montato in modo che sia parallelo alla direzione di volo, come in Fig. 23.6. In questo caso, non abbiamo più nessuna garanzia che la sua lunghezza ( $\ell_0$  rispetto all'astronave) appaia invariata rispetto alla Terra: pertanto la indicheremo genericamente con  $\ell$ .

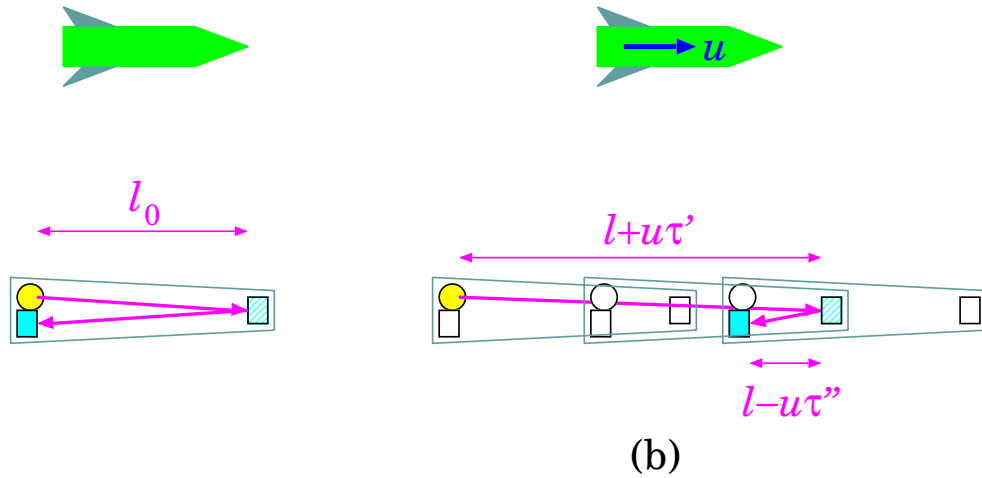


Figura 23.6: Orologio “a luce” solidale con l’astronave, montato parallelo alla direzione di volo: (a) visto dall’astronave; (b) visto da Terra.

Nel SR dell’astronave, il “tic” ha sempre durata  $\tau_0 = \frac{2\ell_0}{c}$ , e sappiamo che visto da Terra appare invece come  $\tau = \gamma \tau_0$ . Possiamo suddividere  $\tau$  in due sotto-intervalli  $\tau'$  e  $\tau''$ , durante i quali il lampo di luce rispettivamente raggiunge lo specchio, e poi ritorna verso la fotocellula:

$$\tau = \tau' + \tau''$$

le distanze percorse nei due tratti sono rispettivamente  $\ell + u\tau'$  e  $\ell - u\tau''$ . Quindi le relazioni sono:

$$c\tau' = \ell + u\tau' \quad ; \quad c\tau'' = \ell - u\tau''$$

che risolte danno:

$$\tau' = \frac{\ell}{c - u} \quad ; \quad \tau'' = \frac{\ell}{c + u}$$

Pertanto

$$\tau = \tau' + \tau'' = \frac{2c\ell}{c^2 - u^2} = \frac{2\ell}{c} \cdot \gamma^2$$

Confrontando con:

$$\tau = \gamma \cdot \tau_0 = \gamma \cdot \frac{2\ell_0}{c}$$

otteniamo

$$\ell = \frac{\ell_0}{\gamma} = \sqrt{1 - (u/c)^2} \ell_0 \quad (23.6)$$

Questa è la famosa equazione della *contrazione relativistica delle lunghezze*.

Osservazione: la contrazione delle lunghezze vale solo nella direzione del moto relativo. Abbiamo visto che le lunghezze nelle direzioni trasversali al moto relativo restano invariate.

### 23.3.5 Riassunto

Riassumiamo quanto visto finora.

grandezza	visto in quiete	visto in moto	effetto
tempo	$\Delta t'$	$\Delta t = \gamma \Delta t'$	dilatazione
lunghezza $\perp$ moto	$\Delta x'$ $\Delta y'$	$\Delta x = \Delta x'$ $\Delta y = \Delta y'$	invarianza
lunghezza $\parallel$ moto	$\Delta z'$	$\Delta z = \frac{\Delta z'}{\gamma}$	contrazione

## 23.4 Le trasformazioni di Lorentz

Ora possiamo costruire le trasformazioni

$$(t'; x', y', z') \xrightarrow[\text{dipendente da } u]{\text{trasformazione}} (t; x, y, z)$$

che dovranno sostituire le trasformazioni di Galileo, Eq. (23.1).

Consideriamo un evento che, nel SR  $(O'; x', y', z')$ , ha coordinate spaziotemporali  $(t'; x', y', z')$ . Le coordinate  $x'$ ,  $y'$  possono essere pensate come separazioni spaziali dell'evento, rispettivamente dai piani  $(y', z')$  e  $(x', z')$ . In entrambi i casi, si tratta di separazioni spaziali ortogonali alla direzione del moto relativo dei due SR, pertanto sono uguali anche se viste nel SR  $(O; x, y, z)$ :

$$\begin{aligned} x &= x' \\ y &= y' \end{aligned}$$

Ora consideriamo la coordinata  $z'$ : essa è la separazione spaziale dell'evento dal piano  $(x', y')$ , pertanto è parallela alla direzione del moto relativo dei due SR. Poiché essa è vista in quiete nel SR  $(O'; x', y', z')$ , essa apparirà contratta

nel SR  $(O; x, y, z)$ , quindi apparirà  $\frac{z'}{\gamma}$ . Per trovare la coordinata  $z$ , occorre sommare la distanza del piano  $(x', y')$  dal piano  $(x, y)$ , che vale  $ut$ . Pertanto:

$$z = ut + \frac{z'}{\gamma} \quad (*)$$

Inoltre, il SR  $(O; x, y, z)$  si muove con velocità  $-u$  lungo  $z$  rispetto al SR  $(O'; x', y', z')$ , quindi deve esistere un'equazione analoga alla  $(*)$  in cui si scambiano  $z \leftrightarrow z'$  e  $t \leftrightarrow t'$ , e contemporaneamente  $u \rightarrow -u$ :

$$z' = -ut' + \frac{z}{\gamma} \quad (**)$$

Possiamo quindi risolvere le equazioni  $(*)$  e  $(**)$  per trovare  $z$ ,  $t$  in funzione di  $z'$ ,  $t'$ . Da  $(**)$  immediatamente segue

$$z = \gamma(z' + ut')$$

Quindi da  $(*)$ :

$$\begin{aligned} ut &= z - \frac{z'}{\gamma} = \gamma(z' + ut') - \frac{z'}{\gamma} = \gamma \left[ ut' + \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) z' \right] \\ &= \gamma \left[ ut' + \frac{u^2}{c^2} z' \right] \\ t &= \gamma \left( t' + \frac{u}{c^2} z' \right) \end{aligned}$$

Abbiamo dunque trovato le trasformazioni cercate:

$$\begin{aligned} t &= \gamma \left( t' + \frac{u}{c^2} z' \right) \\ x &= x' \\ y &= y' \\ z &= \gamma(z' + ut') \end{aligned} \quad \text{(trasformazioni di Lorentz)} \quad (23.7)$$

Queste sono le *trasformazioni di Lorentz*.

Possiamo riscriverle in maniera un po' più "estetica", esprimendo i tempi come  $ct$ ,  $ct'$  — in questo modo le equazioni diventano un po' più simmetriche, e le 4 coordinate spazio-temporali  $(ct; x, y, z)$  diventano omogenee:

$$\begin{aligned} ct &= \gamma \left( ct' + \frac{u}{c} z' \right) \\ x &= x' \\ y &= y' \\ z &= \gamma \left( z' + \frac{u}{c} ct' \right) \end{aligned} \quad \text{(trasformazioni di Lorentz)} \quad (23.8)$$

### 23.4.1 Lorentz vs Galileo

Confrontiamo una per una le trasformazioni di Lorentz con le analoghe trasformazioni di Galileo, esplicitando  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}$ :

trasformazioni di Lorentz	trasformazioni di Galileo
$t = \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \left( t' + \frac{u}{c^2} z' \right)$	$t = t'$
$x = x'$	$x = x'$
$y = y'$	$y = y'$
$z = \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} (z' + ut')$	$z = z' + ut$

Qui vediamo chiaramente che le trasformazioni di Lorentz si riducono alle trasformazioni di Galileo, nel limite  $u \ll c$ . Quindi, le trasformazioni di Galileo non sono *sbagliate!* — sono un'approssimazione. Quanto buona è questa approssimazione? Oppure: perché per 3 secoli di fisica nessuno si era mai accorto di questa inesattezza?

Vediamo quali sono le velocità con cui abitualmente abbiamo a che fare. Un aereo in volo fa circa 900 km/h = 250 m/s. La velocità del suono in aria è circa 340 m/s. La velocità media delle molecole in un gas a temperatura ambiente è dell'ordine di  $\approx 10^3$  m/s. In ogni caso, sono velocità estremamente piccole, rispetto a  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s. La velocità più alta con cui abbiamo a che fare è quella della Terra in orbita intorno al Sole: circa 30 000 m/s. Si tratta comunque di  $\frac{1}{10000}$  (un decimo di millesimo!) della velocità della luce.

### 23.4.2 Dilatazione dei tempi (di nuovo)

Una volta stabilite le trasformazioni di Lorentz, possiamo ri-dedurre la legge di dilatazione dei tempi, Eq. (23.4), già vista in Sezione 23.3.3.

Consideriamo un orologio, fermo (“in quiete”) rispetto a  $SR'$  che fa due “tic” successivi, separati da una durata temporale  $\tau_0$ . Chiamiamo (1), (2)

gli eventi in cui avvengono i due “tic”. Nel  $SR'$  avremo:

$$\begin{aligned}\Delta x' &= x'_{(2)} - x'_{(1)} = 0 \\ \Delta y' &= y'_{(2)} - y'_{(1)} = 0 \\ \Delta z' &= z'_{(2)} - z'_{(1)} = 0 \\ \Delta t' &= t'_{(2)} - t'_{(1)} = \tau_0\end{aligned}$$

(ricordiamo che l'orologio è fermo in  $SR'$ ).

Ora consideriamo un altro  $SR$ , rispetto al quale  $SR'$  si muove con velocità  $u$  lungo l'asse  $z$ . Applichiamo le trasformazioni di Lorentz, Eq. (23.7), in particolare quella per il tempo:

$$\begin{aligned}t_{(1)} &= \gamma \left( t'_{(1)} + \frac{u}{c^2} z'_{(1)} \right) \\ t_{(2)} &= \gamma \left( t'_{(2)} + \frac{u}{c^2} z'_{(2)} \right) \\ &\text{(sottraendo la prima dalla seconda)} \\ \Delta t &= \gamma \left( \Delta t' + \frac{u}{c^2} \Delta z' \right) = \gamma \tau_0\end{aligned}$$

ovvero, nel  $SR$ , i due “tic” appaiono separati da un intervallo temporale

$$\tau = \gamma \tau_0$$

### 23.4.3 Contrazione delle lunghezze (di nuovo)

Per la contrazione delle lunghezze, il discorso è un po' più sottile.

Consideriamo  $SR$  e  $SR'$ , con il secondo che si muove rispetto al primo con velocità  $u$  lungo l'asse  $z$ . Consideriamo una barra, in quiete rispetto a  $SR'$ , di lunghezza  $\ell_0$ , disposta lungo l'asse  $z$ .

Un osservatore solidale con  $SR'$ , per misurare  $\ell_0$ , sceglie due eventi, (1') e (2'), che hanno coordinate spaziali negli estremi della barra, e coordinate temporali coincidenti:

$$\begin{aligned}x'_{(2')} - x'_{(1')} &= 0 \\ y'_{(2')} - y'_{(1')} &= 0 \\ z'_{(2')} - z'_{(1')} &= \ell_0 \\ t'_{(2')} - t'_{(1')} &= 0\end{aligned}$$

Se ora applicassimo le trasformazioni di Lorentz, Eq. (23.7), alle coordinate  $z$ ,  $t$ , troveremmo:

$$\begin{aligned}z_{(2')} - z_{(1')} &= \gamma (z'_{(2')} - z'_{(1')} + u(t'_{(2')} - t'_{(1')})) = \gamma \ell_0 \\ t_{(2')} - t_{(1')} &= \gamma \left( t'_{(2')} - t'_{(1')} + \frac{u}{c^2} (z'_{(2')} - z'_{(1')}) \right) = \gamma \frac{u}{c^2} \ell_0\end{aligned}$$



quindi la quantità  $z_{(2')} - z_{(1')}$  non sarebbe una misura della lunghezza della barra nel  $SR$ , perché gli estremi non vengono considerati allo stesso tempo:  $t_{(2')} \neq t_{(1')}$ .

Per fare la misura in  $SR$ , occorre scegliere due eventi, (1) e (2), che abbiano coordinate spaziali negli estremi della barra, e coordinate temporali coincidenti in  $SR$ , ovvero:

$$\begin{aligned} t_{(2)} - t_{(1)} &= 0 \\ z_{(2)} - z_{(1)} &= \ell \end{aligned}$$

Qui  $\ell$  è la lunghezza della barra in  $SR$ : dobbiamo collegarla alla lunghezza  $\ell_0$  misurata in  $SR'$ . Per fare questo usiamo le trasformazioni inverse delle Eq. (23.7): non c'è bisogno di invertire le equazioni, basta rimpiazzare  $u \rightarrow -u$ :

$$\begin{aligned} t'_{(2)} - t'_{(1)} &= \gamma \left( t_{(2)} - t_{(1)} - \frac{u}{c^2} (z_{(2)} - z_{(1)}) \right) = -\gamma \frac{u}{c^2} \ell \\ z'_{(2)} - z'_{(1)} &= \gamma (z_{(2)} - z_{(1)} - u(t_{(2)} - t_{(1)})) = \gamma \ell \end{aligned}$$

La prima equazione evidenzia che, in  $SR'$ , gli eventi, (1), (2) *non sono simultanei* — nessuna meraviglia, ovviamente, ma allora le coordinate degli estremi della barra,  $z'_{(2)}$ ,  $z'_{(1)}$ , vengono prese in due istanti diversi. È un problema? In verità no, perché, abbiamo supposto che la barra sia in quiete rispetto a  $SR'$ , pertanto le coordinate dei suoi estremi sono costanti, non importa a che istante le rileviamo <sup>[2]</sup>, quindi  $z'_{(2)} - z'_{(1)}$  è esattamente la lunghezza della barra misurata in  $SR'$ ,  $z'_{(2)} - z'_{(1)} = \ell_0$ , e la seconda equazione dà quindi:

$$\ell = \frac{\ell_0}{\gamma}$$

che coincide con l'Eq. (23.6), già dedotta in Sezione 23.3.4.

---

### “Paradosso” sulla contrazione delle lunghezze

---

*Supponiamo di avere due astronavi identiche (a) e (b), entrambe di lunghezza  $\ell_0$ . Queste vanno in giro per le loro missioni, a velocità confrontabili con  $c$ , e*

---

<sup>2</sup> Possiamo scrivere

$$z'_{(2)} = z'_2(t'_2) \quad ; \quad z'_{(1)} = z'_1(t'_1)$$

ma  $z'_1$ ,  $z'_2$  non dipendono da  $t$ , pertanto banalmente

$$z'_{(2)} - z'_{(1)} = z'_2 - z'_1 = \ell_0$$

poi si incontrano in un rendez-vous spaziale, passandosi una di fianco all'altra con velocità relativa  $u$ . Nel SR solidale con (a), le lunghezze delle due astronavi appaiono:

$$\ell_a^{(a)} = \ell_0 \quad ; \quad \ell_b^{(a)} = \frac{\ell_0}{\gamma}$$

essendo  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}$ . Analogamente, nel SR solidale con (b) si osserva:

$$\ell_a^{(b)} = \frac{\ell_0}{\gamma} \quad ; \quad \ell_b^{(b)} = \ell_0$$

Dunque, ciascuna astronave “vede” l'altra accorciata. Se le code delle astronavi sono allineate, ciascuna astronave dirà che la sua prua è più avanzata dell'altra. Chi ha ragione?

**Risposta:** in breve, entrambe hanno ragione, il problema sta sempre nella mancanza di una simultaneità assoluta, ovvero valida per tutti i sistemi di riferimento. Vediamo il dettaglio.

Nel SR <sup>(a)</sup> gli estremi dell'astronave (a) sono  $z_{1a}^{(a)}$  e  $z_{2a}^{(a)}$  (1  $\equiv$  coda, 2  $\equiv$  prua), mentre per l'astronave (b) sono  $z_{1b}^{(a)}$  e  $z_{2b}^{(a)}$ . Ad un certo istante, le code delle astronavi coincidono:  $z_{1a}^{(a)} = z_{1b}^{(a)}$ . Per semplificarci la vita, definiamo  $t^{(a)} = 0$  tale istante, e definiamo l'origine dell'asse-z sulle code coincidenti, cosicché  $z_{1a}^{(a)} = z_{1b}^{(a)} = 0$ . Le prue delle astronavi si trovano dunque in  $z_{2a}^{(a)} = \ell_0$  e  $z_{2b}^{(a)} = \frac{\ell_0}{\gamma}$ , ovvero  $z_{2b}^{(a)} < z_{2a}^{(a)}$ .

Se applichiamo le trasformazioni di Lorentz agli eventi 1a, 2a, 1b, 2b, per passare al SR <sup>(b)</sup> — ricordando che  $t_{1a}^{(a)} = t_{2a}^{(a)} = t_{1b}^{(a)} = t_{2b}^{(a)} = 0$  — troviamo:

$$\begin{aligned} z_{1a}^{(b)} &= \gamma \left( z_{1a}^{(a)} + ut_{1a}^{(a)} \right) = 0 \\ z_{2a}^{(b)} &= \gamma \left( z_{2a}^{(a)} + ut_{2a}^{(a)} \right) = \gamma \ell_0 \\ \Delta z_a^{(b)} &= \gamma \ell_0 \\ \\ z_{1b}^{(b)} &= \gamma \left( z_{1b}^{(a)} + ut_{1b}^{(a)} \right) = 0 \\ z_{2b}^{(b)} &= \gamma \left( z_{2b}^{(a)} + ut_{2b}^{(a)} \right) = \ell_0 \\ \Delta z_b^{(b)} &= \ell_0 \end{aligned}$$

*D'altra parte*

$$\begin{aligned} t_{1a}^{(b)} &= \gamma \left( t_{1a}^{(a)} + \frac{u}{c^2} z_{1a}^{(a)} \right) = 0 \\ t_{2a}^{(b)} &= \gamma \left( t_{2a}^{(a)} + \frac{u}{c^2} z_{2a}^{(a)} \right) = \gamma \frac{u\ell_0}{c^2} \\ t_{1b}^{(b)} &= \gamma \left( t_{1b}^{(a)} + \frac{u}{c^2} z_{1b}^{(a)} \right) = 0 \\ t_{2b}^{(b)} &= \gamma \left( t_{2b}^{(a)} + \frac{u}{c^2} z_{2b}^{(a)} \right) = \frac{u\ell_0}{c^2} \end{aligned}$$

quindi i 4 istanti  $t_{1a}^{(b)}$ ,  $t_{2a}^{(b)}$ ,  $t_{1b}^{(b)}$ ,  $t_{2b}^{(b)}$  non sono più simultanei nel  $SR^{(b)}$ .

*In breve:* nel  $SR^{(a)}$  la prua dell'astronave (b) è più arretrata per la contrazione relativistica dell'astronave (b) in moto; nel  $SR^{(b)}$  la prua dell'astronave (b) è comunque più arretrata, ma la spiegazione è che viene rilevata ad un istante precedente —  $t_{2b}^{(b)} < t_{2a}^{(b)}$ .

Si noti infine che non ha nessun senso usare i valori calcolati di  $\Delta z_a^{(b)}$ ,  $\Delta z_b^{(b)}$  per calcolare le lunghezze delle astronavi nel  $SR^{(b)}$ , perché gli estremi sono stati rilevati in istanti diversi:  $t_{1a}^{(b)} \neq t_{2a}^{(b)}$  e  $t_{1b}^{(b)} \neq t_{2b}^{(b)}$ .

## 23.5 Lo spazio-tempo e i quadrivettori

Quando si affronta la Relatività, si suole dire che “lo spazio e il tempo sono unificati in uno spazio-tempo 4-dimensionale”. Che cosa vuol dire?

Le trasformazioni di Lorentz “mischiano” lo spazio e il tempo. Questo significa che queste due grandezze non possono essere considerate come totalmente scollegate l'una dall'altra. Esse sono le coordinate dello *spazio-tempo*. Questo non è un concetto solo astratto: viene dalla Fisica, quindi è intrinseco della struttura dell'universo in cui viviamo.

Facciamo un'analogia: un parallelepipedo di spigoli  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  viene considerato come un oggetto 3-dimensionale — e non come un insieme di facce rettangolari 2-dimensionali, o di spigoli 1-dimensionali — semplicemente perché l'esperienza ci insegna che lo stesso oggetto, se visto da un angolo diverso, ci appare ruotato, con gli spigoli obliqui, quindi in un nuovo sistema di assi cartesiani l'estensione lungo  $x'$  (o  $y'$ , o  $z'$ ) è data in generale da una combinazione delle estensioni  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ . Per questo diciamo che le 3 dimensioni spaziali sono “unificate” in uno spazio 3-dimensionale.

Lo stesso discorso vale per lo spazio e il tempo: però, anziché vedere un oggetto da un angolo diverso, bisogna vederlo da una velocità diversa.

La nostra percezione visiva di 3-dimensionalità viene dal fatto che abbiamo due occhi, che possono vedere lo stesso oggetto da due angoli diversi

(specialmente se la sua distanza non è troppo grande rispetto alla separazione degli occhi). Per avere una percezione dello spazio-tempo, occorrerebbe avere due occhi che si muovono a diverse velocità, non trascurabili rispetto a  $c$ ! Ovviamente non siamo dotati di questo “senso”, il che ci rende il concetto di spazio-tempo assolutamente non intuitivo... e dobbiamo affidarci agli strumenti matematici!

### 23.5.1 Quadrivettori

Nello spazio-tempo, un “punto” — o meglio, un *evento*, come abbiamo già introdotto — è identificato da una quaterna di coordinate:  $(ct; x, y, z)$ . La scelta di usare  $ct$  anziché  $t$  è per avere 4 coordinate omogenee. Così come, nello spazio 3-dimensionale, un punto è individuato da un vettore-posizione  $\vec{r} \equiv (x, y, z)$ , anche nello spazio-tempo 4-dimensionale, un evento è individuato dal *quadrivettore*  $(ct; x, y, z)$ . Così come nello spazio 3-dimensionale le 3 coordinate  $(x, y, z)$  formano un vettore perché hanno precise proprietà di trasformazione per rotazione degli assi, analogamente *nello spazio-tempo, le 4 coordinate  $(ct; x, y, z)$  formano un quadrivettore perché hanno precise proprietà di trasformazione per cambiamenti di SR — le trasformazioni di Lorentz.*

La quaterna  $(ct; x, y, z)$  costituisce il nostro prototipo di 4-vettore. Vedremo che esistono molte altre grandezze cinematiche che possono essere espresse come quaterne di quantità,  $A \equiv (A_t; A_x, A_y, A_z)$ , che seguono le stesse trasformazioni per cambiamenti di SR. In tal caso anch'esse sono chiamate quadrivettori:

$$A \equiv (A_t; A_x, A_y, A_z) \quad \text{è un quadrivettore} \quad \iff \quad \begin{cases} A_t = \gamma \left( A'_t + \frac{u}{c} A'_z \right) \\ A_x = A'_x \\ A_y = A'_y \\ A_z = \gamma \left( A'_z + \frac{u}{c} A'_t \right) \end{cases} \quad (23.9)$$

Nello spazio 3-dimensionale, ogni legge fisica scritta in formato vettoriale — per esempio  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ ,  $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ , etc — è manifestamente invariante per rotazioni. Viceversa, siccome le leggi fisiche sono invarianti per rotazione, cerchiamo sempre di scriverle in formalismo vettoriale.

In modo analogo, siccome le leggi fisiche devono essere invarianti per cambiamenti di SR che si muovono di moto relativo uniforme — *il principio di relatività* — si cerca il più possibile di scriverle in forma quadrivettoriale.

Per qualunque quadrivettore  $A \equiv (A_t; A_x, A_y, A_z)$ , si definisce la *norma*:

$$\|A\|^2 = (A_t)^2 - (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2) \quad (23.10)$$

Notare il segno “-” davanti alle 3 componenti “spaziali”.

Dalle trasformazioni, Eq. (23.9), è immediato mostrare che la norma è invariante per trasformazioni di Lorentz:

$$(A_t)^2 - (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2) = (A'_t)^2 - ((A'_x)^2 + (A'_y)^2 + (A'_z)^2)$$

### 23.5.2 Distanza fra eventi

Considerazione (forse ovvia): anche lo spostamento 4-dimensionale fra due eventi (1) e (2) è un quadrivettore. Infatti, definendo

$$\begin{aligned} \Delta(ct) &= ct_{(2)} - ct_{(1)} \\ \Delta x &= x_{(2)} - x_{(1)} \\ \Delta y &= y_{(2)} - y_{(1)} \\ \Delta z &= z_{(2)} - z_{(1)} \end{aligned}$$

la trasformazione di  $(\Delta(ct); \Delta x, \Delta y, \Delta z)$  per cambiamento di SR è:

$$\begin{aligned} \Delta(ct) &= \gamma \left( \Delta(ct') + \frac{u}{c} \Delta z' \right) \\ \Delta x &= \Delta x' \\ \Delta y &= \Delta y' \\ \Delta z &= \gamma \left( \Delta z' + \frac{u}{c} \Delta(ct') \right) \end{aligned}$$

(si ricava banalmente dalle trasformazioni di Lorentz per ciascuno dei due eventi (1) e (2)).

### 23.5.3 Causalità

Si dice che due eventi (1) e (2) sono *connessi da causalità* se l'evento (2) è conseguenza dell'evento (1). Per esempio, nell'evento (1) viene prodotta una particella in una interazione, e nell'evento (2) essa a sua volta interagisce producendo altri fenomeni.

Buon senso vorrebbe che (1) avvenisse prima di (2) — altrimenti sarebbe un bel paradosso! D'altra parte, sappiamo che il tempo non è assoluto! Se in un SR  $\Delta t' \equiv t'_{(2)} - t'_{(1)} > 0$  — come desidereremmo — chi ci assicura che in un altro SR  $\Delta t \equiv t_{(2)} - t_{(1)}$  non diventi  $< 0$ ? Vediamo:

$$\Delta t = \gamma \left( \Delta t' + \frac{u}{c^2} \Delta z' \right) = \gamma \Delta t' \left( 1 + \frac{u}{c^2} \frac{\Delta z'}{\Delta t'} \right)$$

Qui  $\frac{\Delta z'}{\Delta t'}$  rappresenta la velocità, nel SR  $(O'; x', y', z')$ , con cui l'effetto dell'evento (1) si propaga per produrre l'evento (2). Ora, se tutte le velocità coinvolte sono inferiori — o al massimo uguali — a  $c$ , abbiamo  $|u| < c$  e  $\left| \frac{\Delta z'}{\Delta t'} \right| \leq c$ , e quindi  $\Delta t$  non può mai diventare  $< 0$ . La causalità è quindi garantita universale, in tutti i SR, ovvero l'evento (1) è sempre anteriore all'evento (2), da qualunque SR lo si osservi.

Viceversa, se la propagazione dell'effetto da (1) a (2) fosse *super-luminale*, cioè se  $\left| \frac{\Delta z'}{\Delta t'} \right| > c$ , in alcuni SR la sequenza temporale (1)  $\rightarrow$  (2) potrebbe apparire invertita, (2)  $\rightarrow$  (1), e la causa avverrebbe dopo l'effetto.

### ————— **Esempio: i “neutrini superluminali”** —————

*Ai Laboratori Nazionali del Gran Sasso sono collocati numerosi esperimenti che rivelano il passaggio di neutrini. I neutrini sono particelle estremamente leggere — fino a poche decine di anni fa si riteneva fossero privi di massa — e molto debolmente interagenti: la probabilità che un neutrino interagisca nel rivelatore — e produca un segnale — è molto piccola, pertanto questi rivelatori sono in generale caratterizzati da una grossa massa di materiale sensibile. Alcuni esperimenti hanno la possibilità di rivelare neutrini prodotti ai laboratori del CERN, vicino a Ginevra, e sparati proprio in direzione del Gran Sasso, per una distanza di circa 730 km. [Nota: i neutrini attraversano tranquillamente il suolo senza arrestarsi: non c'è bisogno di scavare una galleria sotterranea di 730 km, come aveva affermato una tristemente nota Ministra dell'Istruzione — sic!] Essendo molto leggeri, essi viaggiano “sostanzialmente” alla velocità della luce — anche se a rigore dovrebbero essere appena un po' più lenti: pertanto percorrono il tragitto CERN – Gran Sasso in circa 2.4 ms.*

*Nel 2011, uno degli esperimenti del Gran Sasso aveva “osservato” neutrini dal CERN che sembravano essere “superluminali”, ovvero viaggiavano a velocità superiore a quella della luce. Va notato che si trattava di una misura molto delicata, in cui gli orologi al CERN e al Gran Sasso dovevano essere ben sincronizzati, e la precisione della distanza fra i due laboratori molto accurata. La precisione sulla distanza ammonta a circa 20 cm, ed è ottenuta tramite GPS fra due antenne posizionate in ciascun laboratorio, più le distanze antenna-sorgente al CERN e antenna-rivelatore al Gran Sasso, entrambe ottenute con triangolazioni multiple (non si può mettere un'antenna GPS attaccata al rivelatore del Gran Sasso, perché si trova sotto la montagna...). L'istante in cui vengono prodotti i neutrini è noto con precisione dei nanosecondi. La misura del tempo di volo mostrava un anticipo dei neutrini, rispetto a quanto atteso dalla velocità luminale, pari a  $\Delta t = -(60 \pm 10)$  ns, dove l'incertezza sperimentale comprende i diversi effetti sistematici considerati. L'osservazione si è poi rivelata errata dopo pochi mesi:*

era un errore strumentale, dovuto ad un connettore optoelettronico che introduceva un "bias" nella misura. Un effetto sistematico che non era stato considerato, dunque. Vale la pena fare un commento generale: gli effetti sistematici non sono sempre ovvi da individuare: in genere, un effetto sistematico è la conseguenza di un dettaglio trascurato, o semplificato, o parzialmente ignoto nel modello che usiamo per analizzare dei dati: questa constatazione ci dice quanto sia delicata la sua stima.

Tuttavia, prima della soluzione dell'arcano, c'è stato un bel fermento nella comunità scientifica. Se il risultato fosse stato vero, avrebbe aperto un bel vaso di Pandora: voleva dire che in un qualche SR sarebbe stato possibile osservare la produzione dei neutrini al CERN dopo che questi fossero stati rivelati al Gran Sasso...

---

### Segnali superluminali: saranno mai possibili?

---

Attualmente, i segnali più veloci che si sia mai riusciti a trasmettere sono a mezzo di onde elettromagnetiche, e viaggiano alla velocità della luce. Nessuno è mai riuscito a trasmettere un segnale (non importa di che natura) a velocità superluminale. Possiamo sperare che in futuro si riuscirà mai a superare questo limite? MOLTO PROBABILMENTE, NO. Vediamo perché.

Riconsideriamo l'apparato di Fig. 23.4: esso genera due eventi, (1) e (2), che per costruzione sono simultanei se osservati in un SR solidale con l'apparato. Viceversa, se sono osservati da un osservatore che si muove verso sinistra (e vede l'apparato spostarsi a destra), (1) apparirà prima di (2). Se invece sono osservati da un osservatore che si muove verso destra, (2) apparirà prima di (1). Quando i ricevitori  $R_1$ ,  $R_2$  rilevano rispettivamente gli eventi (1), (2), fanno rispettivamente "BIP-1" e "BIP-2". Quali di questi due "BIP" venga emesso prima, dipende dall'osservatore, ma entrambi vengono emessi.

Supponiamo ora che un inventore abbia costruito un sistema per trasmettere segnali istantaneamente da un punto a un altro dello spazio. Immaginiamo dunque di applicare al nostro apparato due sistemi di trasmissione istantanea: ciascun ricevitore, quando rileva il suo evento, oltre a fare il suo "BIP", trasmette istantaneamente un segnale di spegnimento all'altro ricevitore, che quindi non rivelerà niente. Di conseguenza, l'osservatore che si sposta a sinistra sentirà solo "BIP-1", mentre l'osservatore che si sposta verso destra sentirà solo "BIP-2". Possibile che il "BIP" prodotto dall'apparato dipenda dall'osservatore? Questi due "BIP" potrebbero a loro volta innescare procedure completamente diverse: decisamente paradossale...

Nota: abbiamo parlato di segnali istantanei. Anche se non lo fossero, basterebbe che fossero superluminali, e che i due ricevitori fossero sufficientemente lontani fra loro, per ottenere lo stesso paradosso.

In conclusione: se un inventore annunciasse di aver prodotto segnali superluminali, dovremmo accogliere la notizia con una buona dose di scetticismo...

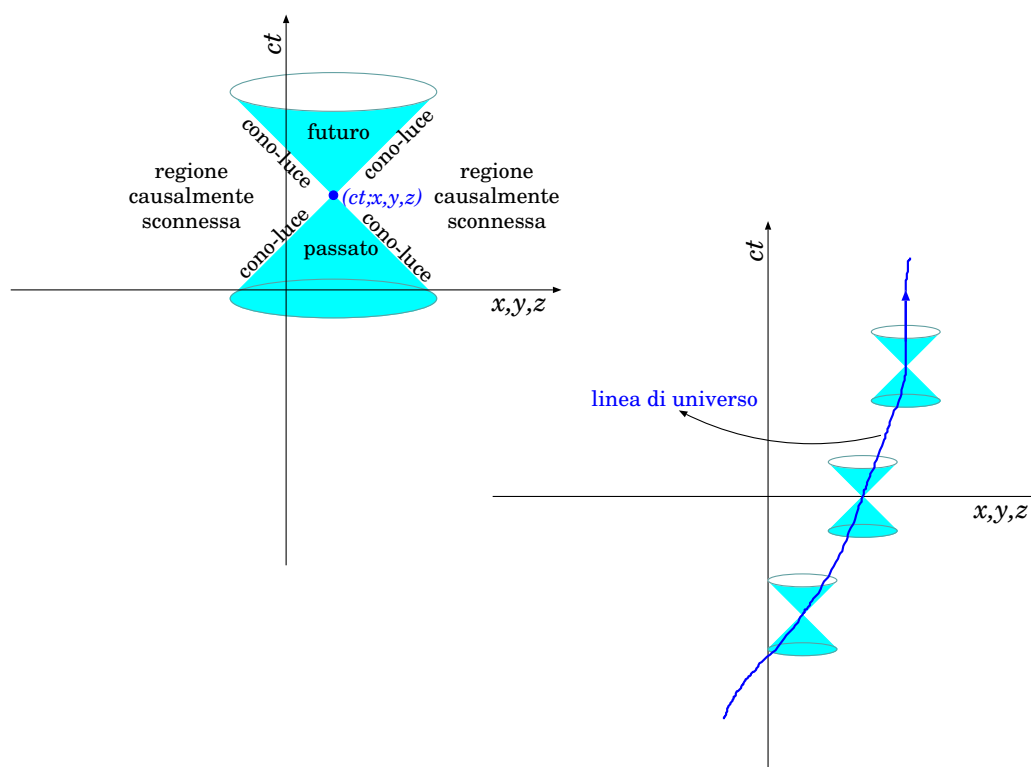


Figura 23.7: Grafici spazio-temporali. A sinistra: un evento  $(ct; x, y, z)$  con il suo cono-luce. A destra: una “linea di universo”.

### 23.5.4 Grafici spaziotemporali

Le coordinate spazio-temporali sono rappresentate in uno spazio-tempo 4-dimensionale  $(ct; x, y, z)$  — per esigenze grafiche, si suole “compattare” le coordinate spaziali  $(x, y, z)$  lungo un solo asse orizzontale, e si rappresenta la coordinata temporale  $ct$  lungo l’asse verticale, come in Fig. 23.7.

Dato un evento  $(ct; x, y, z)$ , si può definire il suo *cono-luce*, come l’insieme di tutti i punti  $(ct'; x', y', z')$  tali che:

$$c^2(t' - t)^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 \quad (\text{cono-luce}) \quad (23.11)$$

ovvero di tutti i punti che possono essere collegati a  $(ct; x, y, z)$  da un segnale che viaggia alla velocità della luce. Nella Fig. 23.7, è disegnato come un cono a due falde, con la direttrice a  $45^\circ$ .

All’interno del cono-luce, si possono individuare due regioni, rispettivamente di *passato assoluto* e *futuro assoluto*:



$$\left. \begin{aligned} c^2(t' - t)^2 &> (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 \\ t' &< t \end{aligned} \right\} \quad (\text{passato}) \\
 \left. \begin{aligned} c^2(t' - t)^2 &> (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 \\ t' &> t \end{aligned} \right\} \quad (\text{futuro}) \quad (23.12)$$

Entrambe le regioni sono caratterizzate da  $(c\Delta t)^2 > (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$ , cioè ogni punto al loro interno può essere connesso a  $(ct; x, y, z)$  da spostamenti a velocità  $< c$ . In tal caso, le condizioni  $t' < t$  o  $t' > t$  non vengono alterate dalle trasformazioni di Lorentz — da qui il nome di passato o futuro “assoluti”. Inoltre, ogni punto all’interno di queste regioni può essere causalmente connesso con  $(ct; x, y, z)$ .

La regione esterna al cono-luce invece è costituita da punti che non sono causalmente connessi a  $(ct; x, y, z)$ , poiché sarebbero collegati ad esso da spostamenti a velocità  $> c$ .

$$c^2(t' - t)^2 < (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 \quad (\text{regione causalmente sconnessa}) \quad (23.13)$$

Allo scorrere del tempo  $t$ , un oggetto nella posizione  $(x(t), y(t), z(t))$  traccia una sorta di “traiettoria” nello spazio-tempo: questa si chiama *linea di universo* [3].

Poiché un oggetto si muove sempre con velocità  $\leq c$ , la sua linea di universo deve sempre giacere all’interno del proprio cono-luce, in tutti i suoi punti, come illustrato sempre in Fig. 23.7.

### 23.5.5 Grafici delle trasformazioni di Lorentz

Anche le trasformazioni di Lorentz possono essere rappresentate in forma grafica, come in Fig. 23.8.

Anzitutto, fissati come ortogonali gli assi  $(z, ct)$ , si devono ricavare gli assi  $(z', ct')$ .

- L’asse  $ct'$  è quello degli eventi che appaiono fermi in  $z' = 0$  nel SR  $(O'; x', y', z')$ : pertanto essi si muovono con velocità  $u$  rispetto al SR  $(O; x, y, z)$ . Quindi l’equazione dell’asse  $ct'$  nel SR  $(O; x, y, z)$  è  $z = ut$ , ovvero  $ct = \frac{c}{u}z$ : una retta con coefficiente angolare  $\frac{c}{u}$ .

<sup>3</sup> In inglese “world line”. Forse la traduzione letterale, “linea di mondo”, suonava un po’ brutta...?

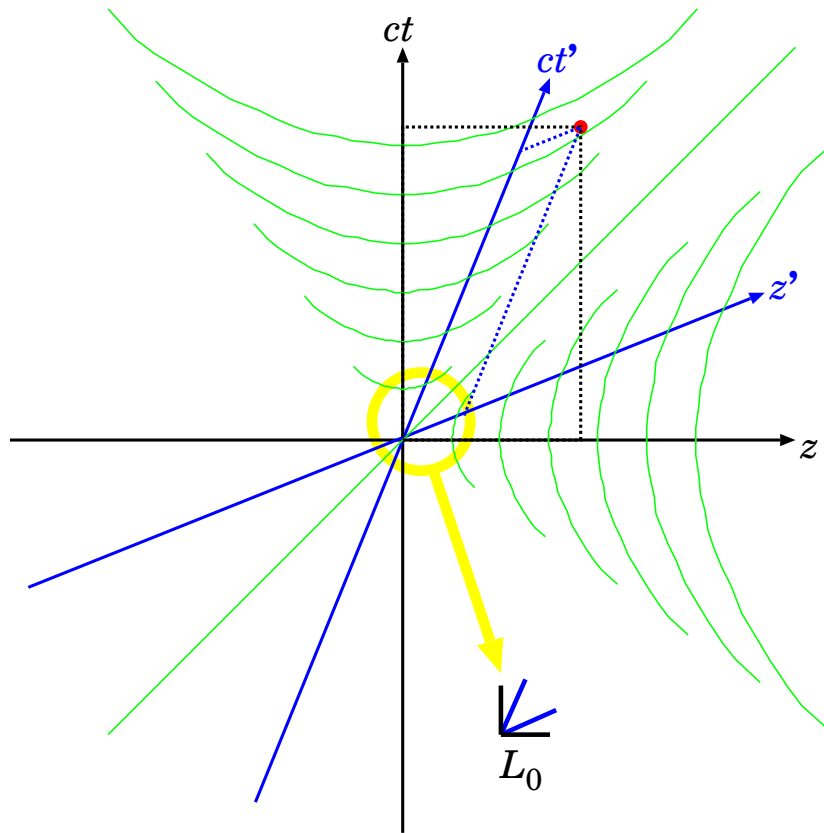


Figura 23.8: *Rappresentazione grafica delle trasformazioni di Lorentz.*

- L'asse  $z'$  è quello degli eventi che accadono tutti “contemporaneamente” a  $t' = 0$  nel SR  $(O'; x', y', z')$ . Siccome la simultaneità non è assoluta, gli stessi eventi avvengono in tempi  $t$  diversi se visti dal SR  $(O; x, y, z)$ . La trasformazione di Lorentz dice che  $ct' = \gamma \left( ct - \frac{u}{c}z \right)$ , quindi ponendo  $t' = 0$  otteniamo l'equazione dell'asse  $z'$ , che nel SR  $(O; x, y, z)$  è  $ct = \frac{u}{c}z$ .

Le coordinate di un evento nei due SR si ottengono mediante proiezioni parallele del punto dell'evento sui rispettivi assi.

Come unità di misura si adotta una scala omogenea per  $(z, ct)$  e per  $(z', ct')$  — chiamiamola  $L_0$ , può essere il metro, l'anno-luce, ... Ogni osservatore, nel suo SR, metterà tacche sugli assi spaziate da questa distanza  $L_0$ . Come appaiono queste tacche, poste sugli assi  $(z', ct')$ , nel grafico visto dal SR  $(O; x, y, z)$ ? Occorre ricordare che la quantità  $(c \Delta t)^2 - (\Delta z)^2$  è invariante per trasformazioni di Lorentz, pertanto:

- lungo l'asse  $ct'$ ,  $\Delta z' = 0$  e  $\Delta(ct') = L_0$ , quindi  $(c \Delta t)^2 - (\Delta z)^2 = L_0^2$ ;
- lungo l'asse  $z'$ ,  $\Delta(ct') = 0$  e  $\Delta z' = L_0$ , quindi  $(c \Delta t)^2 - (\Delta z)^2 = -L_0^2$ .

In entrambi i casi, si tratta di equazioni di iperboli equilateri, con asintoti in  $ct = \pm z$ . Quindi, disegnate le tacche sugli assi  $(z, ct)$ , si possono disegnare rami di iperbole passanti per esse, e dove questi intersecano gli assi  $(z', ct')$  si ottengono le altre tacche — esse appariranno quindi più lunghe, rispetto a quelle su  $(z, ct)$ .

## 23.6 Il tempo proprio

Il *tempo proprio* di un SR è il tempo misurato da un orologio in quiete rispetto a tale SR.

Se consideriamo un oggetto che si muove con velocità  $v$  (con  $v < c$ ) in un SR  $(O; x, y, z)$ , possiamo sempre considerare un SR  $(O'; x', y', z')$  solidale con l'oggetto, nel quale immaginare di porre un orologio che misura lo scorrere del tempo proprio. La velocità relativa dei due SR in questo caso è precisamente  $v$ . Quando è passato un intervallino di tempo proprio  $d\tau$ , nel SR  $(O; x, y, z)$  è passato un tempo

$$dt = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} d\tau = \gamma d\tau \quad (23.14)$$

Possiamo dare un'altra definizione di *tempo proprio* — ovviamente equivalente alla precedente. Se un oggetto nel tempo  $dt$  ha compiuto uno spostamento  $d\vec{r} \equiv (dx, dy, dz)$ , definiamo:

$$d\tau = \sqrt{(dt)^2 - \frac{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}{c^2}} \quad (23.15)$$

L'equivalenza si vede sviluppando:

$$(d\tau)^2 = (dt)^2 \left[ 1 - \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{c^2} \right] = (dt)^2 \left[ 1 - \frac{v^2}{c^2} \right]$$

che è equivalente all'Eq. (23.14).

Il tempo proprio è un *invariante relativistico*. Ciò significa che ha lo stesso valore, anche se misurato in SR diversi.

Questo fatto si deduce immediatamente dalla sua definizione, nella forma dell'Eq. (23.15), che è semplicemente la norma di  $\left( dt; \frac{dx}{c}, \frac{dy}{c}, \frac{dz}{c} \right)$ . Oppure,

si può dedurre anche ragionando sulla prima definizione che abbiamo dato: è il tempo misurato nel SR solidale con l'oggetto, quindi non può dipendere da SR esterni.

### Particelle relativistiche che decadono

Molte particelle subatomiche sono soggette a decadimenti in particelle più leggere. Ne sono alcuni esempi il pione carico, che decade in muone e neutrino:  $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm \nu_\mu$ , oppure lo stesso muone che decade in elettrone e una coppia di neutrini:  $\mu^\pm \rightarrow e^\pm \nu_e \nu_\mu$ . Il decadimento di una particella è del tutto aleatorio: la probabilità che esso avvenga in un intervallo di tempo  $dt$  è indipendente dalla storia pregressa della particella, e direttamente proporzionale a  $dt$ :

$$dP_{\text{decay}} = \Gamma dt$$

La costante di proporzionalità  $\Gamma$  si chiama larghezza di decadimento. Se una particella è stata prodotta ad un istante  $t = 0$ , la probabilità che non sia ancora decaduta dopo un tempo  $t$  si può calcolare così: dividiamo l'intervallo  $[0; t]$  in  $N = \frac{t}{dt}$  (tanti!) intervallini di lunghezza  $dt$ . La probabilità che la particella NON decada in ciascuno di questi intervallini è  $(1 - dP_{\text{decay}})$ , pertanto la probabilità che essa NON decada in  $[0; t]$  è  $P_{\text{alive}}(t) = (1 - dP_{\text{decay}})^N = (1 - \Gamma dt)^{(t/dt)}$ . Ora introduciamo  $\epsilon = dt/t$  e quindi  $\Gamma dt = \epsilon \Gamma t$ : sfruttando la proprietà dell'esponenziale,  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (1 + \alpha \epsilon)^{1/\epsilon} = e^\alpha$ , otteniamo  $P_{\text{alive}}(t) = (1 - \epsilon \Gamma t)^{1/\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} e^{-\Gamma t}$ . Quindi,

$$P_{\text{alive}}(t) = e^{-\Gamma t} \equiv e^{-t/\tau} \quad \left( \tau \equiv \frac{1}{\Gamma} \right)$$

essendo  $\tau$  la "vita media" della particella.

Dato un numero  $N_0$  di particelle iniziali in quiete, il numero di particelle ancora non decadute dopo un tempo  $t$  segue la stessa legge esponenziale:

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$$

Di solito le vite medie sono relativamente brevi: per il pione  $\tau \simeq 2.6 \cdot 10^{-8}$  s, mentre per il muone  $\tau \simeq 2.2 \cdot 10^{-6}$  s.

Quando un raggio cosmico primario (tipicamente, un protone) entra nell'alta atmosfera terrestre, interagisce con i nuclei atomici del gas, producendo una cascata di "particelle secondarie", fra cui un'abbondanza di pioni. Questi decadono in muoni, che arrivano fino a terra, attraversando da decine a centinaia di chilometri. D'altronde la distanza media percorsa da una particella di vita media  $\tau$  a velocità  $v$  è  $\langle \ell \rangle = v\tau$  — anche per muoni con velocità prossima a quella della luce si troverebbe  $\langle \ell \rangle = c\tau \simeq 600$  m. Il fatto che i muoni arrivino a terra sarebbe inspiegabile, senza relatività. In effetti, quello che succede è che la loro vita media,

osservata da terra, non è  $\tau$ , bensì  $\gamma\tau = \frac{\tau}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$ , pertanto  $\langle \ell \rangle = \gamma c\tau$ . Per osservare muoni a terra, occorre che  $\gamma$  sia almeno  $\approx 100$ . Che velocità occorre per realizzare questo  $\gamma$ ? Ricavando  $\frac{v}{c}$  da  $\gamma$  troviamo:

$$\begin{aligned}\frac{v}{c} &= \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \simeq 1 - \frac{1}{2\gamma^2} \\ \frac{c-v}{c} &= \frac{1}{2\gamma^2}\end{aligned}$$

La quantità  $\frac{c-v}{c}$  ci dice di quanto (poco!) si discosta  $v$  da  $c$ , in rapporto al valore di  $c$ : per  $\gamma \approx 100$  si trova  $\frac{c-v}{c} \simeq 5 \cdot 10^{-5}$  — 5 parti su 100 000!!

## 23.7 Trasformazioni delle velocità

Ora vediamo come si trasformano le velocità. Nel SR ( $O; x, y, z$ ) un oggetto si sposta di  $d\vec{r} \equiv (dx, dy, dz)$  nel tempo  $dt$ ; analogamente nel SR ( $O'; x', y', z'$ ) il suo spostamento è descritto da  $d\vec{r}' \equiv (dx', dy', dz')$  e avviene nel tempo  $dt'$ . Ciascun differenziale  $d\dots$  si ricava semplicemente dalle Eq. (23.7):

$$\begin{aligned}dt &= \gamma \left( dt' + \frac{u}{c^2} dz' \right) \\ dx &= dx' \\ dy &= dy' \\ dz &= \gamma (dz' + u dt')\end{aligned}$$

Ora basta dividere. Per  $v_x$ :

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{\gamma \left( dt' + \frac{u}{c^2} dz' \right)} = \frac{\frac{dx'}{dt'}}{\gamma \left( 1 + \frac{u}{c^2} \frac{dz'}{dt'} \right)} \\ &= \frac{v'_x}{\gamma \left( 1 + \frac{u v'_z}{c^2} \right)}\end{aligned}$$

e analogamente per  $v_y$ . Invece per  $v_z$ :

$$\begin{aligned} v_z &= \frac{dz}{dt} = \frac{\gamma(dz' + u dt')}{\gamma\left(dt' + \frac{u}{c^2} dz'\right)} = \frac{\gamma\left(\frac{dz'}{dt'} + u\right)}{\gamma\left(1 + \frac{u}{c^2} \frac{dz'}{dt'}\right)} \\ &= \frac{v'_z + u}{1 + \frac{u v'_z}{c^2}} \end{aligned}$$

In sintesi abbiamo trovato:

$$\begin{aligned} v_x &= \sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2} \frac{v'_x}{\left(1 + \frac{u v'_z}{c^2}\right)} \\ v_y &= \sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2} \frac{v'_y}{\left(1 + \frac{u v'_z}{c^2}\right)} \\ v_z &= \frac{v'_z + u}{1 + \frac{u v'_z}{c^2}} \end{aligned} \tag{23.16}$$

Decisamente più complicate delle analoghe non-relativistiche! Però è facile verificare che, nel limite  $u \ll c$ , esse si riducono a quelle non-relativistiche:

$$\begin{aligned} v_x &= v'_x \\ v_y &= v'_y \\ v_z &= v'_z + u \end{aligned} \quad (\text{non-relativistiche})$$

### Invarianza della velocità della luce

Vediamo se le trasformazioni delle Eq. (23.16) descrivono correttamente l'universalità della velocità della luce: se  $(v'_x)^2 + (v'_y)^2 + (v'_z)^2 = c^2$ , quanto vale  $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ ?

**Risposta:**

$$\begin{aligned} v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 &= \frac{\left[1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2\right] [(v'_x)^2 + (v'_y)^2] + (v'_z + u)^2}{\left(1 + \frac{u v'_z}{c^2}\right)^2} \\ &= c^2 \frac{[c^2 - u^2] [c^2 - (v'_z)^2] + c^2 (v'_z + u)^2}{(c^2 + u v'_z)^2} \\ &= c^2 \end{aligned}$$

(come ci si aspettava ...)

---

**Composizione di velocità relativistiche**

---

Un oggetto si muove con velocità  $v'_z = \frac{3}{4}c$  nel SR  $(O'; x', y', z')$ , il quale trasla con velocità uniforme  $u = \frac{3}{4}c$  rispetto al SR  $(O; x, y, z)$ . Come appare la velocità  $v_z$ ?

**Risposta:** secondo la 3<sup>a</sup> delle Eq. (23.16),

$$v_z = \frac{\frac{3}{4}c + \frac{3}{4}c}{1 + \frac{3}{4} \frac{3}{4}} = \frac{24}{25}c$$

Quindi  $v_z$  è prossimo a  $c$ , ma in ogni caso  $v_z < c$ .

**Osservazione 1:** secondo le trasformazioni di Galileo, sarebbe risultato:  $v_z = v'_z + u = \frac{3}{2}c$  ovvero  $v_z > c$ .

**Osservazione 2:** il risultato è del tutto generale: date due velocità  $v'_z$ ,  $u$ , con  $0 \leq v'_z \leq c$  e  $0 \leq u \leq c$ , la loro composizione  $v_z = \frac{v'_z + u}{1 + \frac{u v'_z}{c^2}}$  è sempre  $\leq c$ .

Vediamo perché. Conviene esprimere le velocità come frazioni della velocità della luce, quindi dobbiamo dimostrare che:

$$\frac{v_z}{c} = \frac{\frac{v'_z}{c} + \frac{u}{c}}{1 + \frac{u v'_z}{c^2}} \leq 1$$

Chiamiamo  $\alpha \equiv \frac{v'_z}{c}$ ,  $\beta \equiv \frac{u}{c}$ , con  $\alpha, \beta \in [0; 1]$ . Allora

$$\begin{aligned} (1 - \alpha)(1 - \beta) &\geq 0 \\ 1 + \alpha\beta &\geq \alpha + \beta \\ \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta} &\leq 1 \end{aligned}$$

(c.v.d.)

### 23.7.1 Quadrivelocità

La complicazione della trasformazione delle velocità — Eq. (23.16) — è dovuta soprattutto alla presenza di  $dt$  al denominatore, che tra l'altro introduce una dipendenza da  $v'_z$  anche per  $v_x$ ,  $v_y$ . Questa riflessione suggerisce di definire una “variante” della velocità, chiamata *quadrivelocità*,

definita usando il *tempo proprio*  $d\tau$  al denominatore. Ricordando che  $dt = \gamma d\tau$ :

$$\begin{aligned} U_t &= \frac{c dt}{d\tau} = \gamma c \\ U_x &= \frac{dx}{d\tau} = \gamma v_x \\ U_y &= \frac{dy}{d\tau} = \gamma v_y \\ U_z &= \frac{dz}{d\tau} = \gamma v_z \end{aligned} \quad \left( \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right) \quad (23.17)$$

[nota: qui  $\gamma$  non si riferisce a una trasformazione di Lorentz, ma al moto dell'oggetto.]

La quadrivelocità è manifestamente un quadrivettore, essendo definita come rapporto fra un quadrivettore,  $(c dt; dx, dy, dz)$ , e un Lorentz-invariante,  $d\tau$ .

Le sue 4 componenti non sono tutte indipendenti: in effetti, la sua norma è

$$\|U\|^2 = (U_t)^2 - (U_x^2 + U_y^2 + U_z^2) = c^2$$

Inoltre, per  $v \ll c$ , le 3 componenti spaziali si riducono alla velocità:

$$\begin{aligned} U_x &\xrightarrow{v \ll c} v_x \\ U_y &\xrightarrow{v \ll c} v_y \\ U_z &\xrightarrow{v \ll c} v_z \end{aligned}$$

## 23.8 Viaggi a velocità relativistiche

### 23.8.1 Viaggio verso una stella

Iniziamo con un problema semplice: un'astronave si allontana con velocità  $u$  dalla Terra per raggiungere una stella a distanza  $\ell$  — distanza misurata dal SR della Terra. Quanto tempo dura il viaggio, secondo un osservatore sulla Terra? E quanto tempo passa sull'astronave?

Il problema si può risolvere sia nel SR della Terra (chiamato  $SR$ ), sia in quello dell'astronave ( $SR'$ ). Cominciamo con il primo. Ovviamente il tempo



trascorso, misurato da Terra, è  $\Delta t = \frac{\ell}{u}$ . Il tempo misurato sull'astronave è equivalente al tempo proprio — l'orologio sull'astronave è in quiete visto da  $SR'$ . Pertanto  $\Delta t' \equiv \Delta \tau = \sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2} \Delta t = \sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2} \frac{\ell}{u}$ .

Ora ragioniamo nel SR dell'astronave. L'astronave è “ferma” e l'Universo le scorre intorno a velocità  $u$ . La lunghezza del viaggio è  $\ell' \neq \ell$ . Per calcolarla, ricordiamo che la lunghezza  $\ell$  è misurata in quiete in  $SR$ , pertanto in  $SR'$  appare contratta:  $\ell' = \sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2} \ell$ . Pertanto il tempo necessario perché

“la destinazione raggiunga l'astronave” è  $\Delta t' = \frac{\ell'}{u} = \sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2} \frac{\ell}{u}$ .

Il risultato trovato in  $SR'$  è identico rispetto a quello trovato in  $SR$ . E così deve essere, se nei due SR devono valere le stesse leggi della fisica: è il principio di relatività.

### 23.8.2 Viaggio verso una stella e ritorno

Immaginiamo che due orologi identici vengano posti rispettivamente sulla Terra (orologio  $a$ ) e su un'astronave (orologio  $b$ ) che compie un lungo viaggio interstellare, a velocità prossima a quella della luce, per poi tornare indietro sulla Terra. Se alla partenza i due orologi sono azzerati simultaneamente, al ritorno essi segneranno tempi diversi, a causa della dilatazione temporale osservata da Terra per l'orologio in movimento. Schematizziamo il problema così:

- *evento (0)*: l'astronave parte da Terra, i due orologi segnano  $\tau_a^{(0)} = 0$  e  $\tau_b^{(0)} = 0$ ;
- l'astronave, dopo una breve ed intensa accelerazione, viaggia a velocità costante  $u$  fino ad un pianeta, in orbita attorno a una stella, a distanza  $\ell$  da Terra;
- *evento (1)*: l'astronave decelera rapidamente in prossimità del pianeta; i due orologi segnano tempi  $\tau_a^{(1)}$  e  $\tau_b^{(1)}$ ;
- l'astronave accelera rapidamente, quindi ritorna verso Terra con velocità costante  $u$ ;
- *evento (2)*: l'astronave raggiunge la Terra; i due orologi segnano tempi  $\tau_a^{(2)}$  e  $\tau_b^{(2)}$ .

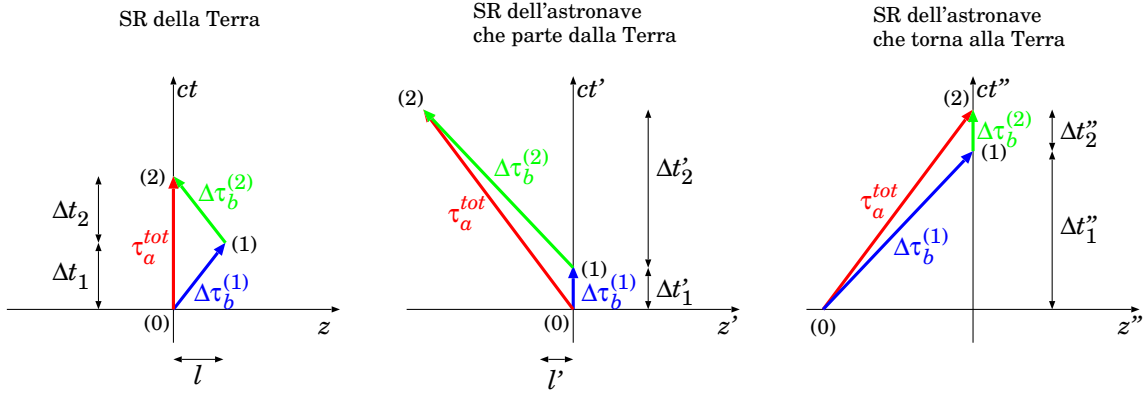


Figura 23.9: *Viaggio di andata e ritorno, visto da 3 sistemi di riferimento: dalla Terra (a sinistra); dall'astronave che si allontana (al centro); dall'astronave che si avvicina (a destra).*

I periodi di accelerazione sono brevi e si assume che il loro effetto sulle distorsioni temporali sia trascurabile. La situazione è quella illustrata in Fig. 23.9 (a sinistra).

Alla fine, come sono i tempi propri  $\tau_a^{tot}$  e  $\tau_b^{tot}$ , misurati dagli orologi (a) e (b)?

La risposta, vista dal SR della Terra, è semplice. L'astronave ha compiuto un viaggio di lunghezza  $\ell$  a velocità  $u$ , fino alla destinazione, pertanto ha impiegato un tempo  $\Delta t_1 = \frac{\ell}{u}$ . Poi ha impiegato un tempo uguale  $\Delta t_2 = \frac{\ell}{u}$  per tornare. Poiché nel SR della Terra l'orologio  $a$  è in quiete, il tempo  $t$  corrisponde al tempo proprio  $\tau_a$ . Quindi:

$$\begin{aligned} \Delta\tau_a^{(1)} &= \frac{\ell}{u} \quad ; \quad \Delta\tau_a^{(2)} = \frac{\ell}{u} \\ \tau_a^{tot} &= \frac{2\ell}{u} \end{aligned} \tag{23.18}$$

L'astronave è in movimento: a causa della dilatazione relativistica dei tempi, qualunque intervallo di tempo  $\Delta\tau_b$  misurato sull'astronave, a Terra appare  $\Delta t = \gamma \Delta\tau_b$ , con  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}$ . Quindi:

$$\begin{aligned} \Delta\tau_b^{(1)} &= \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \frac{\ell}{u} \quad ; \quad \Delta\tau_b^{(2)} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \frac{\ell}{u} \\ \tau_b^{tot} &= \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \frac{2\ell}{u} \end{aligned} \quad (23.19)$$

Sull'astronave è trascorso meno tempo che sulla Terra.

Secondo la Relatività, i tempi propri sono invarianti, pertanto il risultato ottenuto, che è stato calcolato nel SR della Terra, deve essere valido per tutti i SR.

### 23.8.3 Il “paradosso” dei gemelli

Il risultato trovato nella Sezione precedente viene spesso descritto così: se abbiamo due gemelli, di cui uno resta sulla Terra e l'altro fa il viaggio in astronave, al suo ritorno il gemello viaggiatore sarà più giovane di quello che è rimasto a casa.

Ma se uno vede il problema dal punto di vista dell'astronave, può descrivere il tutto in maniera apparentemente simmetrica, sostenendo che la Terra si allontana a velocità  $u$  per una distanza  $\ell$ , quindi torna indietro: alla fine dovrebbe essere trascorso meno tempo sulla Terra che sull'astronave. Questo è il cosiddetto “paradosso dei due gemelli”: se un gemello resta sulla Terra e l'altro compie il viaggio interstellare, quando si ritrovano chi è invecchiato di più?

In realtà il problema *non è simmetrico!* Il gemello (o l'orologio) sull'astronave ha subito accelerazioni e decelerazioni ... Però, attenzione: abbiamo supposto che queste avessero effetti trascurabili sulle distorsioni temporali.

Possiamo liberarci del tutto delle accelerazioni, se modifichiamo il nostro problema così:

- *evento (0)*: l'astronave passa in volo ravvicinato alla Terra, con velocità costante  $u$ , e sincronizza il suo orologio con quello terrestre;
- *evento (1)*: dopo aver viaggiato una distanza  $\ell$ , l'astronave incrocia un'altra astronave che viaggia verso la Terra con velocità  $u$ , e la seconda astronave sincronizza il proprio orologio con quello della prima;
- *evento (2)*: la seconda astronave raggiunge la Terra.

Qui tutte le velocità sono costanti, non ci sono accelerazioni, nemmeno per tempi brevissimi.

Però questo esempio aiuta a capire dove la simmetria si rompe: *i SR non sono 2 ma 3*: uno è quello della Terra, che chiamiamo  $SR$ ; gli altri due sono quelli delle astronavi, in allontanamento ( $SR'$ ) e in avvicinamento ( $SR''$ ). Questa osservazione aiuta a risolvere il paradosso in maniera quantitativa.

Ragionando dal punto di vista di  $SR'$ . La Terra si allontana con velocità  $-u$ . L'astronave è ferma, e l'universo le scorre intorno. La distanza Terra-destinazione, vista dall'astronave, è contratta, pertanto vale  $\ell' = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \ell$ . Quindi l'astronave raggiunge la destinazione — anzi: la destinazione raggiunge l'astronave! — in un tempo  $\Delta t'_1 = \frac{\ell'}{u} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \frac{\ell}{u}$ . Siccome l'orologio  $b$  è in quiete rispetto a  $SR'$ , il suo tempo proprio coincide con  $t'$ , pertanto

$$\Delta\tau_b^{(1)} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \frac{\ell}{u} \quad (23.20)$$

Osserviamo che per  $\Delta\tau_b^{(1)}$  abbiamo trovato lo stesso valore che avevamo calcolato dal  $SR$  della Terra — Eq. (23.19).

Poi l'astronave di andata incrocia quella di ritorno, che si muove verso la Terra con velocità  $-v'$ . La seconda astronave ha velocità  $-u$  rispetto alla Terra, la quale a sua volta si muove con velocità  $-u$  rispetto a  $SR'$ . Pertanto  $-v'$  si ottiene componendo le velocità:

$$-v' = \frac{-u - u}{1 + \left(\frac{-u}{c} \cdot \frac{-u}{c}\right)} = -2u \frac{c^2}{c^2 + u^2}$$

Qual è il tempo  $\Delta t'_2$  che l'astronave di ritorno impiega per raggiungere la Terra? La posizione finale della Terra è stata raggiunta viaggiando a velocità  $-u$  per un tempo  $\Delta t'_1 + \Delta t'_2$ , quindi si trova a  $z' = -u(\Delta t'_1 + \Delta t'_2)$ . L'astronave di ritorno deve viaggiare la stessa distanza in un tempo  $\Delta t'_2$  a velocità  $-v'$ , quindi:

$$-u(\Delta t'_1 + \Delta t'_2) = z' = -v' \Delta t'_2$$

Risolvendo per  $\Delta t'_2$  e usando  $v' - u = \frac{2uc^2}{c^2 + u^2} - u = u \frac{c^2 - u^2}{c^2 + u^2}$  si trova:

$$\Delta t'_2 = \Delta t'_1 \frac{u}{v' - u} = \Delta t'_1 \frac{c^2 + u^2}{c^2 - u^2}$$

Ci interessa calcolare il tempo proprio

$$\begin{aligned}\Delta\tau_b^{(2)} &= \Delta t'_2 \sqrt{1 - \left(\frac{v'}{c}\right)^2} = \Delta t'_2 \sqrt{1 - \frac{4u^2c^2}{(c^2 + u^2)^2}} \\ &= \Delta t'_2 \frac{c^2 - u^2}{c^2 + u^2} = \Delta t'_1 = \Delta\tau_b^{(1)}\end{aligned}$$

Osserviamo che  $\Delta\tau_b^{(2)} = \Delta\tau_b^{(1)}$ : anche questo risultato era già stato trovato nel SR della Terra — Eq. (23.19).

Resta infine da calcolare  $\tau_a^{tot}$ . Esso vale

$$\begin{aligned}\tau_a^{tot} &= (\Delta t'_1 + \Delta t'_2) \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \Delta t'_1 \left(1 + \frac{c^2 + u^2}{c^2 - u^2}\right) \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \\ &= \left[ \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \frac{\ell}{u} \right] \frac{2c^2}{c^2 - u^2} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \\ &= \frac{2\ell}{u}\end{aligned}$$

e anche  $\tau_a^{tot}$  torna consistente con quanto calcolato nel SR della Terra — Eq. (23.18).

## 23.9 Effetto Doppler

L'effetto Doppler è un fenomeno che si manifesta quando una sorgente di segnale  $S$ , di frequenza propria  $\nu_S$ , viene osservata da un osservatore  $O$  che la vede in movimento, con velocità  $u$ . L'osservatore rileva un segnale di frequenza  $\nu_O \neq \nu_S$ , e precisamente:

- se la sorgente si avvicina ( $u < 0$ ), si osserva  $\nu_O > \nu_S$  (aumento di frequenza, “blue-shift”);
- se la sorgente si allontana ( $u > 0$ ), si osserva  $\nu_O < \nu_S$  (diminuzione di frequenza, “red-shift”).

I termini “blue-shift” e “red-shift” sono riferiti alla radiazione luminosa: il blu ha frequenze più alte del rosso.

La ragione dell'effetto Doppler si spiega guardando la Fig. 23.10. La sorgente emette segnale con frequenza  $\nu_S$ : possiamo pensare che emetta tanti “ping” a distanze di tempo

$$\tau_S = \frac{1}{\nu_S}$$

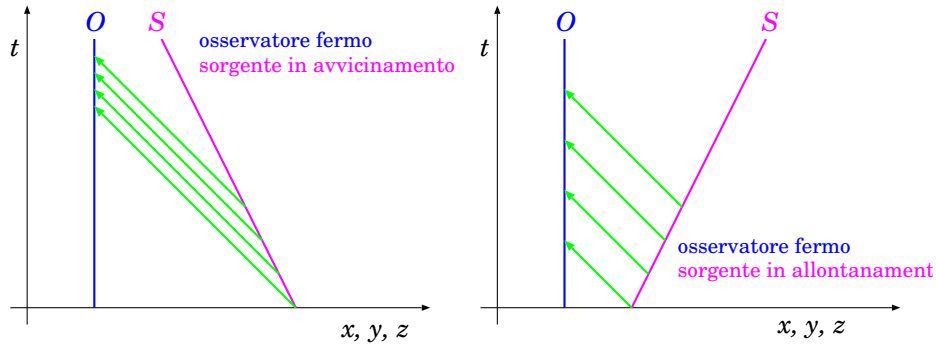


Figura 23.10: Schema per capire l'effetto Doppler. A sinistra: la sorgente  $S$  si avvicina, quindi ogni “ping” deve viaggiare una distanza minore del precedente; di conseguenza l'osservatore riceve i “ping” più ravvicinati. A destra: la sorgente  $S$  si allontana, quindi ogni “ping” deve viaggiare una distanza maggiore del precedente; di conseguenza l'osservatore riceve i “ping” più diradati.

L'osservatore riceve i “ping” a intervalli di tempo  $\tau_O$ , che possono essere calcolati tenendo conto di due effetti. Anzitutto, c'è la dilatazione del tempo, per cui l'osservatore osserverebbe tempi

$$\tau'_S = \frac{\tau_S}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}$$

Inoltre, nel caso di  $S$  in avvicinamento, la sorgente “corre dietro al segnale”, quindi i “ping” successivi devono percorrere una distanza minore per arrivare all'osservatore. Viceversa vale per  $S$  in allontanamento.

Se  $S$  invia due “ping” agli istanti  $t_1, t_2$ , i due segnali raggiungono  $O$  agli istanti  $t'_1, t'_2$ , avendo viaggiato distanze  $\ell_1 = c(t'_1 - t_1)$ ,  $\ell_2 = c(t'_2 - t_2)$ . La relazione fra tali distanze è  $\ell_2 - \ell_1 = u(t_2 - t_1)$ . Pertanto

$$u(t_2 - t_1) = \ell_2 - \ell_1 = c[(t'_2 - t_2) - (t'_1 - t_1)]$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \tau_O &\equiv t'_2 - t'_1 = \left(1 + \frac{u}{c}\right) (t_2 - t_1) \\ &= \left(1 + \frac{u}{c}\right) \tau'_S = \frac{1 + (u/c)}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \tau_S \\ &= \tau_S \cdot \sqrt{\frac{1 + (u/c)}{1 - (u/c)}} \end{aligned}$$

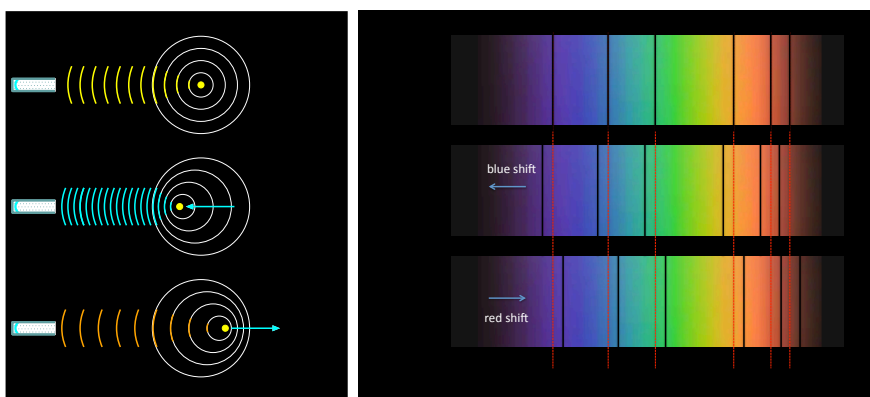


Figura 23.11: *Effetto Doppler in astrofisica. A sinistra: il moto dell'oggetto "comprime" (in avvicinamento) o "dilata" (in allontanamento) la distanza fra le creste d'onda, producendo rispettivamente un aumento o una diminuzione di frequenza. A destra: righe spettrali di un oggetto celeste in quiete (in alto), in avvicinamento (al centro) e in allontanamento (in basso).*

Da qui si ricava la variazione di frequenza dovuta all'effetto Doppler:

$$\nu_O = \nu_S \cdot \sqrt{\frac{1 - (u/c)}{1 + (u/c)}} \quad (23.21)$$

Come si nota: per avvicinamento  $\nu_O > \nu_S$ , mentre per allontanamento  $\nu_O < \nu_S$ .

Si suole anche scrivere

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_S} \equiv \frac{\nu_O - \nu_S}{\nu_S} = \sqrt{\frac{1 - (u/c)}{1 + (u/c)}} - 1 \quad (23.22)$$

### 23.9.1 L'effetto Doppler in astrofisica

L'effetto Doppler è molto usato in astrofisica, per determinare la velocità di avvicinamento o allontanamento di oggetti celesti. Ogni oggetto celeste che emette luce ha uno spettro di frequenze sostanzialmente continuo, emesso negli strati più interni, con alcune righe nere, corrispondenti a frequenze precise di assorbimento da parte degli atomi più superficiali — come in Fig. 23.11. La posizione delle righe di assorbimento è caratteristica del tipo di oggetto. Oggetti in avvicinamento o allontanamento mostrano una struttura delle righe di assorbimento simile a quella di un oggetto fermo, ma

traslata verso il blu se si tratta di avvicinamento, verso il rosso se si tratta di allontanamento — *blue shift* e *red shift* rispettivamente.

La misura simultanea di posizione e velocità delle stelle ha consentito di comprendere la forma della nostra galassia, la Via Lattea.

## 23.10 Dinamica relativistica

Nella meccanica Newtoniana, la quantità di moto è definita come  $\vec{p} = m\vec{v}$ , e la sua variazione nel tempo è data da  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ . Se queste relazioni fossero vere anche in Relatività, avremmo la situazione che, applicando una forza costante ad un oggetto per un tempo sufficientemente lungo, la sua quantità di moto crescerebbe indefinitamente e la sua velocità ad un certo punto supererebbe la velocità della luce — il che NON SUCCEDE in natura.

Un analogo discorso si applicherebbe all'energia cinetica,  $\mathcal{E} = \frac{m}{2}v^2$ . Applicando una forza  $F$  costante per uno spostamento  $\Delta s$  sufficientemente lungo, otterremmo un aumento di energia cinetica  $\Delta\mathcal{E} = F\Delta s$  grande a piacere, che corrisponderebbe nuovamente ad una velocità super-luminale.

Occorre dunque rivisitare le definizioni di quantità di moto e di energia cinetica, tenendo conto dei vincoli imposti dalla Relatività.

### 23.10.1 Quantità di moto ed energia relativistiche

Vogliamo cercare una definizione di quantità di moto che sia compatibile con la relatività e che, nel limite di piccole velocità, si riduca a  $\vec{p} = m\vec{v}$ . Inoltre, la conservazione della quantità di moto deve valere in tutti i SR inerziali (*principio di relatività*), dunque vorremmo cercare di scriverla in una forma quadrivettoriale. Ci serve quindi un quadrivettore di tipo:

$$p \equiv (p_t; p_x, p_y, p_z)$$

dove per basse velocità

$$\begin{array}{l} p_x \xrightarrow{v \ll c} m v_x \\ p_y \xrightarrow{v \ll c} m v_y \\ p_z \xrightarrow{v \ll c} m v_z \end{array}$$

Tutto ciò porta naturalmente a scegliere  $p = mU$ , ovvero, per le componenti spaziali:

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad (23.23)$$



Ora resta da capire che cos'è la componente-tempo

$$p_t \equiv mc\gamma$$

che finora è stata introdotta per completare la struttura quadrivettoriale e garantire la trasformabilità fra SR. Per fare questo, consideriamo l'evoluzione nel tempo di  $\vec{p}$  e  $p_t$ . Anzitutto

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Poi, osserviamo che la norma di  $p$ ,

$$||p||^2 = m^2||U||^2 = (mc)^2$$

è costante, pertanto

$$(p_t)^2 - (\vec{p})^2 = (mc)^2$$

Derivando rispetto a  $t$ :

$$\begin{aligned} 2p_t \frac{dp_t}{dt} &= 2\vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} \\ 2mc\gamma \frac{dp_t}{dt} &= 2m\gamma\vec{v} \cdot \vec{F} \\ c \frac{dp_t}{dt} &= \vec{v} \cdot \vec{F} \end{aligned}$$

Ora,  $\vec{v} \cdot \vec{F}$  è la potenza  $\mathcal{P}$  erogata dalla forza, quindi è la derivata dell'energia cinetica  $\mathcal{E}$ . Pertanto abbiamo trovato:

$$\frac{d(\gamma mc^2)}{dt} = \mathcal{P} = \frac{d\mathcal{E}}{dt}$$

ovvero

$$\gamma mc^2 = \mathcal{E} + \text{costante}$$

La costante è facilmente determinabile, se consideriamo che per  $v = 0$  abbiamo  $\gamma = 1$  e  $\mathcal{E} = 0$ . Quindi abbiamo

$$\begin{aligned} E &\equiv \gamma mc^2 \\ &= cp_t = mc^2 + \mathcal{E} \end{aligned} \tag{23.24}$$

Abbiamo trovato il significato fisico anche di  $p_t$ : la quantità  $E = cp_t = \gamma mc^2$  è un'energia, detta *energia relativistica*. Essa è pari a un termine costante ( $mc^2$ ) più l'energia cinetica.

Il termine costante  $mc^2$  si suole chiamare *energia a riposo*, oppure *energia di massa*, poiché è direttamente proporzionale alla massa dell'oggetto.

Quanto vale l'energia cinetica, in Relatività? Ovviamente la risposta è

$$\mathcal{E} = mc^2(\gamma - 1) = mc^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1 \right)$$

Nel limite  $v \ll c$ ,  $\gamma = \left[ 1 - \left( \frac{v}{c} \right)^2 \right]^{-1/2} \simeq 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{v}{c} \right)^2$ , pertanto

$$\mathcal{E} \xrightarrow{v \ll c} mc^2 \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{v}{c} \right)^2 - 1 \right] = \frac{m}{2} v^2$$

Ancora una volta, verifichiamo che nel limite di basse velocità la fisica relativistica tende a quella Newtoniana.

Possiamo ora definire il *quadrivettore energia-impulso*, o semplicemente *quadrimpulso* <sup>[4]</sup> come:

$$\begin{aligned} p &= \left( \frac{E}{c}; \vec{p} \right) \\ &= (\gamma mc; \gamma m\vec{v}) \end{aligned} \tag{23.25}$$

Osservazione: con questa ridefinizione,  $\mathcal{E}$  e  $\vec{p}$  non sono più limitati superiormente, a causa del fattore  $\gamma$  che può crescere indefinitamente, pur rimanendo  $v < c$ . L'andamento di  $\mathcal{E}$  e  $\vec{p}$  in funzione della velocità è mostrato in Fig. 23.12.

### 23.10.2 Conservazione dell'energia relativistica

Quando abbiamo studiato i sistemi di punti — nel regime non relativistico — abbiamo visto che la conservazione della quantità di moto osservata in SR diversi portava a dedurre la conservazione della massa — vd Sezione 17.6. Ora ripetiamo la discussione, per il caso relativistico.

<sup>4</sup> In inglese, “four-momentum”.

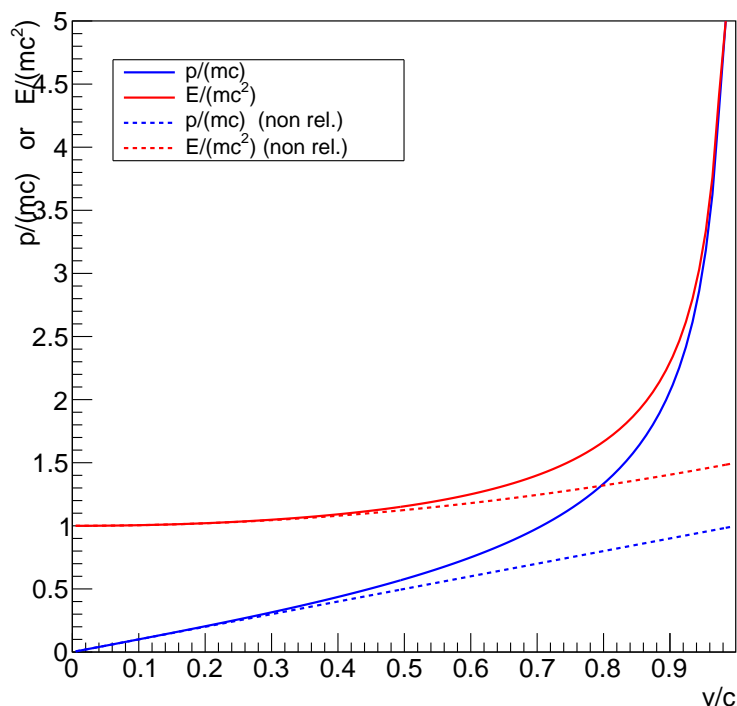


Figura 23.12: *Andamento dell'impulso e dell'energia relativistici in funzione di  $v/c$ . Le quantità sono rappresentate rispettivamente come  $\frac{p}{mc}$  e  $\frac{E}{mc^2}$ , per avere grafici adimensionali e indipendenti dalla massa  $m$ . Si vede che sia  $E$  che  $p$  divergono per  $v \rightarrow c$ . Le linee tratteggiate mostrano l'andamento non-relativistico delle stesse quantità.*

La conservazione della quantità di moto, in una generica reazione in cui particelle  $i$  nello stato iniziale si trasformano in particelle  $f$  dello stato finale, si può scrivere come  $\sum_i \vec{p}_i = \sum_f \vec{p}_f$ . Concentriamoci sulla direzione  $z$  e scriviamo la conservazione in due SR:

$$\sum_i p_{i,z} = \sum_f p_{f,z} \quad (*)$$

$$\sum_i p'_{i,z} = \sum_f p'_{f,z} \quad (**)$$

Ora tutti i  $p_z$  sono componenti- $z$  di quadriimpulsi, quindi si devono

trasformare come:

$$p_z = \gamma \left( p'_z + \frac{u}{c} E' \right)$$

Applicando la trasformazione di Lorentz all'equazione (\*):

$$\begin{aligned} \sum_i \gamma \left( p'_{i,z} + \frac{u}{c^2} E'_i \right) &= \sum_f \gamma \left( p'_{f,z} + \frac{u}{c^2} E'_f \right) \\ \gamma \left( \sum_i p'_{i,z} \right) + \gamma \frac{u}{c^2} \left( \sum_i E'_i \right) &= \gamma \left( \sum_f p'_{f,z} \right) + \gamma \frac{u}{c^2} \left( \sum_f E'_f \right) \end{aligned}$$

e confrontando con (\*\*) si ottiene

$$\sum_i E'_i = \sum_f E'_f$$

Riassumendo: dalla conservazione della quantità di moto e dal principio di relatività abbiamo dedotto la *conservazione dell'energia relativistica* <sup>[5]</sup>.

### 23.10.3 Quadriimpulso, massa, velocità

Ricordiamo che le componenti della quadrivelocità non sono tutte indipendenti: infatti  $\|U\|^2 = c^2$ . Allora deve valere un'equazione analoga per il quadriimpulso: ricordando che  $p = mU$ ,

$$\|p\|^2 = (mc)^2$$

Possiamo scrivere questa condizione ricordando che  $\|p\|^2 \equiv (p_t)^2 - |\vec{p}|^2$  ed esplicitando  $p_t \equiv \frac{E}{c}$ :

$$\left( \frac{E}{c} \right)^2 - |\vec{p}|^2 = (mc)^2 \quad (23.26)$$

Questa equazione fra energia, quantità di moto e massa è *utilissima!* Ricordatela sempre!

Riportiamo alcune altre relazioni molto utili da ricordare, e facili da verificare:

$$\vec{v} = \frac{c^2 \vec{p}}{E} \quad (23.27)$$

<sup>5</sup> Osservazione: essendo  $E/c$  la componente- $t$  del quadriimpulso, sarebbe stato strano se non fosse conservata, visto che le altre 3 componenti lo sono...

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} \quad (23.28)$$

L'ultima permette di esprimere il tempo proprio in funzione del tempo osservato. Ricordiamo che  $\Delta t = \gamma \Delta \tau$ , quindi:

$$\Delta t = \frac{E}{mc^2} \Delta \tau \quad (23.29)$$

Possiamo ora classificare le particelle sulla base della loro massa e/o velocità:

- *bradioni*: particelle dotate di massa ( $m > 0$ ), in base all'Eq. (23.26), devono sempre avere  $E > c|\vec{p}|$ , e quindi in base all'Eq. (23.27)  $v < c$ . L'argomento è reversibile, pertanto:

$$m > 0 \quad \iff \quad v < c$$

Quindi: *particelle dotate di massa possono solo andare a velocità subluminali*. Per quanto le si acceleri, non possono mai raggiungere o oltrepassare la velocità della luce.

- *fotoni*: particelle prive di massa ( $m = 0$ ), in base all'Eq. (23.26), devono sempre avere  $E = c|\vec{p}|$ , e quindi in base all'Eq. (23.27)  $v = c$ . Anche questo argomento è reversibile, pertanto:

$$m = 0 \quad \iff \quad v = c$$

Quindi: *particelle prive di massa possono solo andare alla velocità della luce*. Qualunque interazione subiscano, possono modificare la loro energia, ma mai la loro velocità. In particolare non possono essere "fermati". Facciamo infine notare che, in questo caso ( $m = 0$  e  $v = c$ ),  $\gamma \rightarrow \infty$ , quindi le Eq. (23.23), Eq. (23.24), Eq. (23.25) diventano inutilizzabili, poiché prendono la forma indeterminata  $0 \cdot \infty$ .

- *tachioni*: sono ipotetiche particelle "super-luminali", ovvero con  $v > c$ . *Non sono mai state osservate*, e se mai esistessero creerebbero non pochi problemi con la *causalità* (vd Sezione 23.5.3). Cionondimeno, vediamo che caratteristiche dovrebbero avere. In base all'Eq. (23.27) deve essere  $E < c|\vec{p}|$ , quindi per l'Eq. (23.26), deve essere  $m^2 < 0$ , cioè *la massa deve essere un numero immaginario!*

### 23.10.4 Conversioni massa $\leftrightarrow$ energia

In relatività, la conservazione della massa non è garantita. Anzi, in generale, non è valida! La non-conservazione della massa, insieme alla conservazione dell'energia relativistica, implica la non-conservazione dell'energia cinetica:

$$\begin{aligned}\sum E &= \sum mc^2 + \sum \mathcal{E} \\ 0 &= \Delta\left(\sum E\right) = \Delta\left(\sum m\right)c^2 + \Delta\left(\sum \mathcal{E}\right)\end{aligned}$$

In un urto relativistico, massa ed energia cinetica non si conservano, ma si conserva la loro somma, ovvero:

$$\Delta\mathcal{E}_{tot} = -\Delta m_{tot} \cdot c^2 \quad (23.30)$$

Questa relazione viene intesa così: *la massa è una forma di energia, e come tale può convertirsi in altre forme di energia.*

#### Reattori nucleari

*Le centrali nucleari (e anche le armi! sfortunatamente...) sfruttano la conversione massa $\rightarrow$ energia. Per esempio, in una fissione nucleare, nuclei di uranio  ${}^{235}_{92}\text{U}$  si spaccano per produrre nuclei più leggeri. La somma delle masse dei prodotti finali è leggermente inferiore alla massa iniziale,  $\Delta m \simeq -3 \cdot 10^{-28}$  kg. È una quantità molto piccola, conviene esprimerla in unità di massa atomica u.m.a. =  $1.66 \cdot 10^{-27}$  kg, ottenendo  $\Delta m \simeq -0.2$  u.m.a. L'energia liberata per una singola fissione è  $(-\Delta m)c^2 \simeq 3 \cdot 10^{-11}$  J.*

*Il difetto di massa relativa è  $\frac{\Delta m}{m} \simeq -0.00085$ . L'energia liberata per unità di massa dunque è  $\frac{\Delta\mathcal{E}}{m} = -\frac{\Delta m}{m}c^2 \simeq 7.7 \cdot 10^{13}$  J/kg. Ovvero, la fissione di 1 kg di  ${}^{235}_{92}\text{U}$  produce un'energia di circa  $7.7 \cdot 10^{13}$  J. Indubbiamente notevole... Tale energia, che abbiamo espresso come energia cinetica dei prodotti di fissione, a livello macroscopico si manifesta come energia termica: questa a sua volta può poi essere convertita in energia meccanica attraverso turbine, e poi in energia elettrica.*

#### Fusione nucleare

*Nuclei atomici leggeri (precisamente, più leggeri del ferro) possono unirsi per formare nuclei più pesanti, la cui massa è però leggermente inferiore alla somma delle masse iniziali. Il difetto di massa è compensato dalla liberazione di energia. Esaminiamo il processo di fusione nucleare dominante all'interno di stelle come il Sole — vd Fig. 1.3: 6 protoni reagiscono formando un nucleo di  ${}^4_2\text{He}$  e 2 protoni, quindi il difetto di massa è  $\Delta m = m_{{}^4_2\text{He}} - 4m_p$ . La massa del nucleo di elio è  $m_{{}^4_2\text{He}} = 4.002602$  u.m.a. Poiché 1 u.m.a =  $1.6605389 \cdot 10^{-27}$ , otteniamo  $m_{{}^4_2\text{He}} = 6.64648 \cdot 10^{-27}$  kg. La massa del protone è  $m_p = 1.6726218 \cdot 10^{-27}$ . Quindi*

il difetto di massa ammonta a  $\Delta m = -0.044 \cdot 10^{-27}$  kg. Pertanto l'energia liberata è  $\Delta \mathcal{E} = -\Delta m c^2 = 3.96 \cdot 10^{-12}$  J. La si può anche esprimere in elettronVolt:  $\Delta \mathcal{E} = 24.7$  MeV.

Il difetto di massa relativa è  $\frac{\Delta m}{4m_p} \simeq -0.0066$ . L'energia liberata per unità di massa dunque è  $\frac{\Delta \mathcal{E}}{m} = -\frac{\Delta m}{m} c^2 \simeq 5.9 \cdot 10^{14}$  J/kg. Ovvero, la fusione di 1 kg di idrogeno produce un'energia di circa  $6 \cdot 10^{14}$  J.

Si tratta di un'energia molto maggiore di quella prodotta con la fissione dell'uranio. Inoltre, il reagente (idrogeno) è un elemento molto comune, ed il prodotto della reazione (elio) è un materiale che non ha impatti negativi sull'ambiente. Se potessimo realizzare la fusione nucleare controllata, avremmo una fonte di energia pulita e virtualmente illimitata... Il problema è che tale fusione può essere innescata solo a temperature di circa 100 milioni di gradi... A tali temperature, gli atomi di idrogeno si sono tutti ionizzati, formando un plasma di elettroni e protoni in moto rapidissimo. Per tenerli confinati è necessario utilizzare potenti campi magnetici, realizzati con i tokamak.

### ————— Collisioni di particelle ad alta energia —————

Per studiare le proprietà fondamentali delle particelle elementari, queste vengono fatte "reagire" fra di loro. Più precisamente, particelle leggere e stabili vengono accelerate con campi elettrici e portate a collisione. Particelle leggere, come elettroni e positroni, interagendo producono stati finali contenenti particelle più massive di quelle iniziali, e spesso in numero maggiore — vd Fig. 23.13. Chiaramente  $\sum_i m_i \neq \sum_f m_f$ . Parte dell'energia cinetica iniziale è stata convertita in massa.

In fisica delle particelle, si suole misurare le masse  $m$  attraverso il loro equivalente in energia,  $mc^2$ . Unità di misura tipiche dell'energia sono l'"elettron-Volt",  $1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19}$  J, e i suoi multipli,  $\text{MeV} \equiv 10^6 \text{ eV}$  e  $\text{GeV} \equiv 10^9 \text{ eV}$ . Le masse di alcune particelle sono:

particella		massa
elettrone	$e^-$	0.511 MeV
protone	$p$	938.3 MeV
neutrone	$n$	939.6 MeV
pione carico	$\pi^\pm$	139.6 MeV
pione neutro	$\pi^0$	135.0 MeV
bosone elettrodebole carico	$W^\pm$	80.385 GeV
bosone elettrodebole neutro	$Z$	91.188 GeV

All'acceleratore LEP, funzionante presso il CERN negli anni 1989-99, si acceleravano elettroni ( $e^-$ ) e positroni ( $e^+$ ) fino a raggiungere energie  $E = 103$  GeV ( $1 \text{ GeV} = 1.602 \cdot 10^{-10}$  J). Nelle collisioni spesso si formavano "getti" di adroni, in numero  $n_{had}$  variabile. Più raramente si formavano coppie  $W^+W^-$ ,

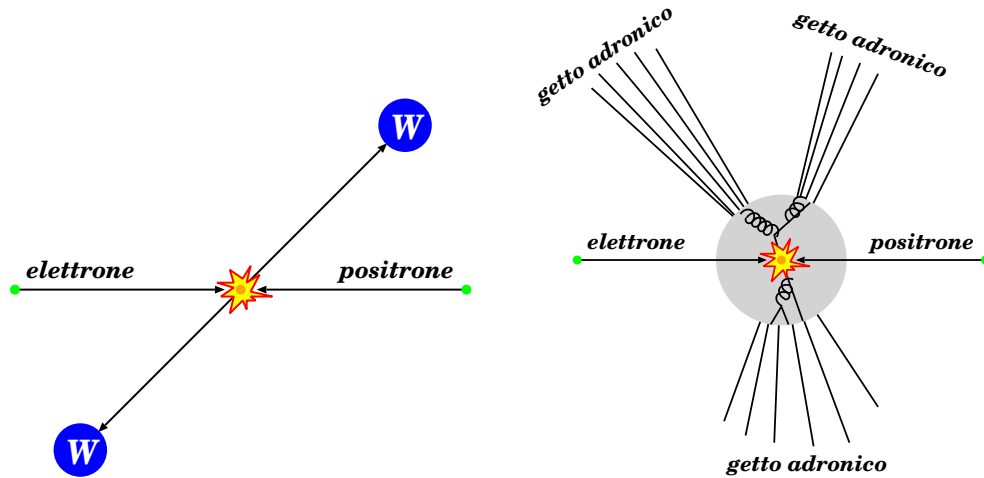


Figura 23.13: Esempi di collisioni elettrone-positrone ( $e^+e^-$ ) ad energie relativistiche: dall'interazione possono emergere particelle molto più massive ( $W^+W^-$ , a sinistra) oppure numerose particelle di masse intermedie (adroni, a destra). In entrambi i casi, l'energia relativistica totale si conserva. Parte dell'energia cinetica iniziale di  $e^+e^-$  è stata convertita in massa, per produrre le particelle nello stato finale.

oppure  $ZZ$ . Data l'energia  $E$  di una particella, e la massa  $m$ , possiamo calcolare la sua velocità: anzitutto  $E = \gamma mc^2$ , da cui  $\frac{E}{mc^2} = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$ . Risolvendo,

$$\beta \equiv \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2}$$

(abbiamo preferito esprimere la velocità come frazione di  $c$ : in regime relativistico è molto più conveniente!)

Calcoliamo le velocità tipiche delle particelle a LEP. Per gli elettroni e positroni accelerati, facendo il calcolo con la calcolatrice con i valori dati di  $m$ ,  $E$  troveremmo  $\beta_e = 1$ . Proviamo a fare meglio:  $\beta_e \simeq 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2 = 1 - 1.23 \cdot 10^{-11} \simeq 0.9999999999877$  — insomma, di fatto  $v = c$  al meglio di qualunque sensibilità sperimentale immaginabile!

Per gli stati  $W^+W^-$ , l'energia totale si conserva, e per simmetria ciascuna  $W$  ne prende metà, ovvero ciascuna  $W$  ha la stessa energia dell' $e^\pm$  iniziale. La velocità delle  $W$  è quindi  $\beta_W = 0.625$  — decisamente più lente, “solo” 188 000 km/s. Analogamente, per gli stati  $ZZ$ , si trova  $\beta_Z = 0.465$ .

Per gli stati multi-adronici, facciamo un calcolo medio: la molteplicità media degli adroni era  $\langle n_{had} \rangle \simeq 35$ , e la maggioranza degli adroni erano



pioni — per 2/3 carichi, il rimanente 1/3 neutri. L'energia media per adrone era quindi  $\langle E_h \rangle = \frac{2E}{\langle n_{had} \rangle} \simeq 6 \text{ GeV}$ . Come massa media consideriamo  $m_h \simeq \frac{2m_{\pi^\pm} + m_{\pi^0}}{3} \simeq 138 \text{ MeV}$ . Pertanto, si trova  $\beta_\pi \approx 0.9997$ . Abbiamo usato il segno “ $\approx$ ” per ricordare che in realtà  $\beta_\pi$  ha uno spettro molto vasto, dovuto al fatto che  $n_{had}$  è molto variabile da evento a evento, e anche nello stesso evento le velocità dei singoli pioni sono molto distribuite. In effetti, i pioni sono molto più abbondanti a energie sotto il GeV — con  $E_\pi = 0.5 \text{ GeV}$  si troverebbe  $\beta_\pi \simeq 0.96$ . Ricordiamo che i pioni carichi hanno vita media  $\tau_{\pi^\pm} = 2.6 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ . A causa della dilatazione temporale, prima di decadere percorrono in media un cammino  $\langle \ell \rangle = \beta_\pi \gamma_\pi c \tau_{\pi^\pm} = \beta_\pi \frac{E_\pi}{m_\pi} c \tau_{\pi^\pm}$ . Per  $E_\pi = 0.5 \text{ GeV}$  e  $\beta_\pi \simeq 0.96$  si trova  $\langle \ell \rangle \simeq 26 \text{ m}$ : confrontato con le dimensioni tipiche dei rivelatori — circa 2 m a LEP — i pioni carichi di fatto attraversano tutto il rivelatore prima di decadere, producendo “tracce” osservabili.

### 23.10.5 Annichilazione materia-antimateria

Quando una particella incontra la sua antiparticella (per esempio elettrone-positrone, oppure protone-antiprotone, oppure ancora quark-antiquark, ...) avviene il fenomeno della annichilazione: le 2 particelle “scompaiono” e loro masse si trasformano in energia elettromagnetica, cioè in fotoni ( $\gamma$ ). Per esempio:

$$e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma \quad ; \quad q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma$$

Si noti che i fotoni devono essere (almeno) due. Un processo del tipo

$$e^+e^- \rightarrow \gamma \quad (\text{impossibile!})$$

è impossibile. Se lo fosse, il 4-impulso del fotone finale dovrebbe essere pari al 4-impulso totale del sistema  $e^+e^-$  iniziale. Poiché la massa del fotone è nulla, facendo uso delle Eq. (23.26), Eq. (23.27)

$$E^2 - c^2|\vec{p}|^2 = (mc^2)^2 \quad ; \quad c\vec{p} = E\frac{\vec{v}}{c}$$

avremmo:

$$\begin{aligned}
 0 &= (m_\gamma c^2)^2 = E_\gamma^2 - c^2 |\vec{\mathbf{p}}_\gamma|^2 = (E_{e^+} + E_{e^-})^2 - c^2 (\vec{\mathbf{p}}_{e^+} + \vec{\mathbf{p}}_{e^-})^2 \\
 &= \underbrace{E_{e^+}^2 - c^2 |\vec{\mathbf{p}}_{e^+}|^2}_{(m_e c^2)^2} + \underbrace{E_{e^-}^2 - c^2 |\vec{\mathbf{p}}_{e^-}|^2}_{(m_e c^2)^2} \\
 &\quad + 2 \left( E_{e^+} E_{e^-} - \underbrace{(c\vec{\mathbf{p}}_{e^+})}_{\left(E_{e^+} \frac{\vec{\mathbf{v}}_{e^+}}{c}\right)} \cdot \underbrace{(c\vec{\mathbf{p}}_{e^-})}_{\left(E_{e^-} \frac{\vec{\mathbf{v}}_{e^-}}{c}\right)} \right) \\
 &= 2(m_e c^2)^2 + 2 E_{e^+} E_{e^-} \left( 1 - \underbrace{\frac{v_{e^+} v_{e^-} \cos \alpha}{c^2}}_{\leq 1} \right) \\
 &\geq 2(m_e c^2)^2
 \end{aligned}$$

ovvero,  $m_e^2 \leq 0$  — che è chiaramente falso!

In molti casi, l'annichilazione produce uno stato di energia elettromagnetica per un brevissimo tempo, che poi si ri-materializza in una nuova coppia particella-antiparticella: per esempio

$$e^+ e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \mu^+ \mu^- \quad ; \quad q\bar{q} \rightarrow \gamma^* \rightarrow \mu^+ \mu^-$$

In tal caso lo stato intermedio ( $\gamma^*$ ) viene descritto come un “fotone virtuale” — è un fotone che non potrebbe esistere, perché avrebbe “massa”  $m_{\gamma^*} = \sqrt{(E_{e^+} + E_{e^-})^2 - c^2 (\vec{\mathbf{p}}_{e^+} + \vec{\mathbf{p}}_{e^-})^2} > 0$ . In effetti, esiste solo per un brevissimo tempo, quantificabile come  $\Delta t_{\gamma^*} \approx \frac{\hbar}{m_{\gamma^*} c^2}$ , essendo  $\hbar = 1.0545717 \cdot 10^{-34}$  Js la *costante di Planck* — un tempo impossibile da misurare.

*Un'osservazione importante:* l'annichilazione, oltre che essere un fenomeno relativistico, è anche *quantistico*: in fisica “classica” non esiste la “scomparsa” di particelle. In effetti, la teoria che descrive bene questi fenomeni è la *Teoria dei Campi Quantistici*.

### 23.10.6 Decadimenti di particelle

In natura abbiamo poche particelle “stabili”: elettroni, protoni, fotoni, neutrini. I neutroni sono instabili se isolati, possono “stabilizzarsi” all'interno

di certi nuclei atomici. Tutte le altre particelle, se prodotte in interazioni, decadono rapidamente in altre particelle più leggere:

$$X \longrightarrow x_1 x_2 \cdots x_n \quad (23.31)$$

e pertanto non sono direttamente osservabili: ciò che il rivelatore vede sono i prodotti del decadimento,  $x_1 x_2 x_3 \cdots x_n$ , e da questi si deve dedurre qual era la particella  $X$  prodotta nell'interazione.

In quanto segue, si userà l'*utilissima* Eq. (23.26):

$$E^2 = c^2 |\vec{p}|^2 + (mc^2)^2$$

Anzitutto, mostriamo che il decadimento  $X \longrightarrow x_1 x_2 \cdots x_n$  è possibile solo se:

$$m_X > \sum_{i=1}^n m_i \quad (\text{se } X \longrightarrow x_1 x_2 \cdots x_n) \quad (23.32)$$

Dalla conservazione dell'energia,  $E_X = \sum_i E_{x_i}$ . Nel SR in cui  $X$  è in quiete,  $E_X = m_X c^2$ . Inoltre, per ciascun prodotto di decadimento,  $E_{x_i} = \sqrt{c^2 |\vec{p}_{x_i}|^2 + (m_{x_i} c^2)^2} > m_{x_i} c^2$  — assumiamo che  $x_i$  sia sempre in movimento, ovvero  $|\vec{p}_{x_i}| > 0$ . Ne segue che  $m_X = \frac{\sum_i E_{x_i}}{c^2} > \sum_i m_{x_i}$ .

Per verificare se un insieme di particelle  $x_1 x_2 \cdots x_n$  possono provenire dal decadimento di una particella  $X$ , se ne misurano i 4-impulsi ( $E_{x_i}; c\vec{p}_{x_i}$ ) e se ne costruisce una grandezza che si chiama "massa invariante":

$$m_{inv} = \frac{1}{c^2} \sqrt{\left( \sum_i E_{x_i} \right)^2 - c^2 \left| \sum_i \vec{p}_{x_i} \right|^2} \quad (23.33)$$

Se le particelle  $x_1 x_2 \cdots x_n$  provengono dal decadimento di  $X$ , deve essere  $E_X = \sum_i E_{x_i}$  e  $\vec{p}_X = \sum_i \vec{p}_{x_i}$ , pertanto deve essere anche

$$m_{inv} = \frac{1}{c^2} \sqrt{E_X^2 - c^2 |\vec{p}_X|^2} \equiv m_X \quad (\text{se } X \longrightarrow x_1 x_2 \cdots x_n) \quad (23.34)$$

ovvero, la massa invariante è uguale alla massa della particella che è decaduta. Se invece  $x_1 x_2 \cdots x_n$  non provengono dal decadimento  $X$ , il valore di  $m_{inv}$  è sostanzialmente casuale. Possiamo vedere un esempio in Fig. 23.14,

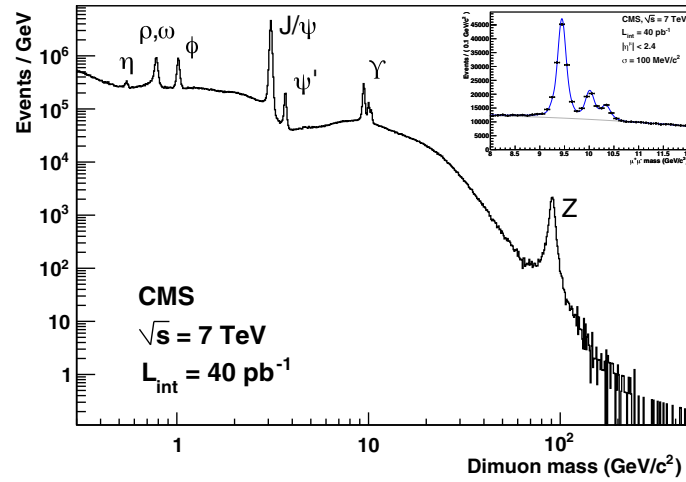


Figura 23.14: Spettro di massa invariante per coppie  $\mu^+\mu^-$  osservato dall'esperimento CMS al CERN, dalle collisioni protone-protone generata a LHC. I “picchi” (o “risonanze”) corrispondono alla produzione di particelle a breve vita media, che decadono rapidamente in  $\mu^+\mu^-$ . Lo spettro continuo sottostante è dovuto a produzione di coppie  $\mu^+\mu^-$  “non risonanti”. [Figura tratta da <https://arxiv.org/abs/1206.4071>, Fig.3]

dove la distribuzione di massa invariante di coppie  $\mu^+\mu^-$  presenta “picchi” (o “risonanze”) dovute alla produzione di particelle a breve vita media ( $\eta$ ,  $\rho$ ,  $\omega$ ,  $\phi$ ,  $J/\psi$ ,  $\psi'$ ,  $\Upsilon$ ,  $Z$ ): in ciascun caso, il valore della massa invariante al picco è misura della massa della particella. Il fondo continuo sotto i picchi è dovuto alla produzione “non risonante” di coppie  $\mu^+\mu^-$ , tipicamente da annichilazione quark-antiquark:  $q\bar{q} \rightarrow \gamma^* \rightarrow \mu^+\mu^-$  [6].

### La scoperta del bosone di Higgs

Senza nessuna pretesa di rigore (questo non è un testo di Quantum Field Theory — QFT...) si potrebbe raccontare il “campo di Higgs” come un “mare” che permea uniformemente lo spazio-tempo. Tutte le particelle devono attraversarlo, e quindi interagire con esso — alcune particelle interagiscono più intensamente, altre meno, altre per niente. Se non ci fosse il campo di Higgs, tutte le particelle avrebbero massa nulla e viaggerebbero solo alla velocità della luce. Incidentalmente, non ci sarebbero gli atomi, e nemmeno i protoni e i neutroni, perché non si riuscirebbero a formare stati legati dei loro costituenti. L'interazione con il campo di Higgs conferisce massa alle particelle: più intensa è l'interazione, maggiore è la massa conferita.

<sup>6</sup> Essendo lo stato intermedio un “fotone virtuale”  $\gamma^*$ , ma sua “massa”  $m_{\gamma^*}$  non ha un valore definito, pertanto non produce un picco.

In QFT, ad ogni tipo di particella è associato un campo quantistico. Le particelle sono “stati eccitati” del rispettivo campo, cioè si ottengono dando ad esso opportune quantità di energia e impulso. Così, per esempio, i fotoni  $\gamma$  (e anche i fotoni virtuali  $\gamma^*$ ) sono eccitazioni del campo elettromagnetico. Analogamente, i “bosoni di Higgs” sono particelle, ottenute eccitando il campo di Higgs. La differenza, fondamentale, è che mentre in assenza di fotoni, il campo elettromagnetico è ovunque identicamente nullo nello spazio-tempo, al contrario il campo di Higgs è ovunque uniformemente non nullo, anche in assenza di eccitazioni.

Allo stesso modo in cui una coppia particella-antiparticella può annichilare in un fotone virtuale ( $X\bar{X} \rightarrow \gamma^* \rightarrow \dots$ ), è possibile — sebbene molto più raro — una annichilazione in una particella di Higgs:  $X\bar{X} \rightarrow H \rightarrow x_1 \dots x_n$ . Al contrario del fotone virtuale, il bosone di Higgs ha una massa ben definita: è stata misurata pari a  $m_H c^2 = 125$  GeV. Quindi la massa invariante dei prodotti finali,  $x_1 \dots x_n$ , deve essere osservabile come un picco — la cui larghezza è sostanzialmente dovuta alle incertezze strumentali.

Sono possibili molti modi di decadimento del bosone di Higgs. Fra questi, due sono piuttosto rari, ma facilmente distinguibili sperimentalmente:

$$H \rightarrow \gamma\gamma \quad ; \quad H \rightarrow ZZ^* \rightarrow \ell_1^+ \ell_1^- \ell_2^+ \ell_2^-$$

Il primo è un decadimento in 2 fotoni, che avviene nello 0.2% dei casi. Il secondo è un decadimento in due bosoni elettrodeboli  $Z$ : si noti che (almeno) uno dei due deve essere “virtuale”, ovvero con una “massa” diversa da  $m_Z$  — altrimenti, essendo  $m_H = 125$  GeV e  $m_Z = 91$  GeV, avremmo  $m_H < 2m_Z$  e il decadimento non sarebbe possibile — vd Eq. (23.32). Ciascuno dei due bosoni- $Z$  poi a sua volta decade in una coppia di leptoni carichi,  $\ell^+ \ell^-$  — ciascuna coppia può essere  $e^+ e^-$  oppure  $\mu^+ \mu^-$ . Questo tipo di decadimento del bosone di Higgs avviene nello 0.01% dei casi.

Osservare eventi in cui vengono prodotte coppie  $\gamma\gamma$ , o 4pletti  $\ell_1^+ \ell_1^- \ell_2^+ \ell_2^-$ , non è sufficiente a osservare il bosone di Higgs, perché esistono molti altri meccanismi che possono dare luogo agli stessi stati finali. Pertanto si costruiscono gli spettri di massa invariante, rispettivamente  $m_{\gamma\gamma}$  e  $m_{4\ell}$ . L'esperimento ATLAS al CERN ha osservato gli spettri mostrati in Fig. 23.15 — analoghe osservazioni sono state ottenute da CMS. La presenza di un eccesso di eventi osservato intorno a 125 GeV indica la presenza di una “risonanza”, ovvero di una particella con tale massa che decade negli stati finali osservati.

### 23.10.7 Nota sulla “massa relativistica”

La massa  $m$  di una particella non è alterata dal suo stato di moto. Ciò che cambia con il moto sono l'energia e la quantità di moto relativistiche:

$$E = \gamma mc^2 \quad ; \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

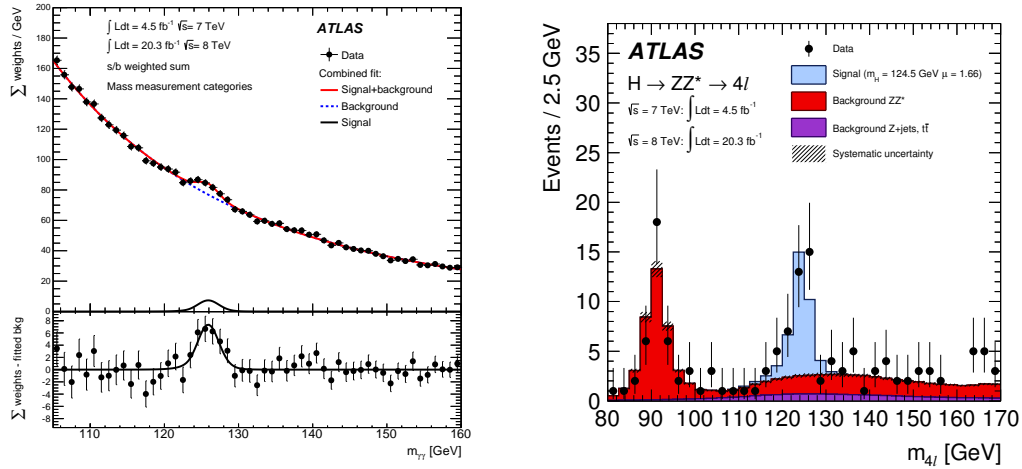


Figura 23.15: Spettri di massa invariante,  $m_{\gamma\gamma}$  (a sinistra) e  $m_{4l}$  (a destra), ottenuti dall'esperimento ATLAS al CERN, nella ricerca del bosone di Higgs. Si noti l'eccesso di eventi osservato intorno a 125 GeV. [Figure tratte da <https://arxiv.org/abs/1406.3827>, Fig.4 e 6a]

Alcuni testi introducono il concetto di “massa relativistica”:

$$m_{rel} \equiv \gamma m = \frac{E}{c^2} \quad (\text{ATTENZIONE!})$$

È un concetto poco utile e fuorviante. Vediamo perché.

Anzitutto è inutile, poiché non è nient'altro che l'energia  $E$  divisa per  $c^2$  — insomma, non aggiunge niente. Inoltre, il fatto che si possa scrivere  $\vec{p} = m_{rel}\vec{v}$  potrebbe far pensare, ERRONEAMENTE, che  $m_{rel}$  descriva l'inerzia dell'oggetto in regime relativistico, ovvero

$$\vec{F} = m_{rel}\vec{a} \quad (\text{SBAGLIATO!})$$

Usiamo  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$  e  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ . Distinguiamo i casi di forza centripeta e forza tangenziale.

- *Forza centripeta*: in questo caso  $\vec{F} \perp \vec{p}$ , quindi cambia solo la direzione di  $\vec{p}$ , mentre  $|\vec{p}|$  è costante. In particolare  $v$  e  $\gamma$  sono costanti. Allora:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(\gamma m \vec{v}) = \gamma m \frac{d\vec{v}}{dt} = \gamma m \vec{a}$$

- *Forza tangenziale*: in questo caso  $\vec{F} \parallel \vec{p}$ , quindi non cambia la direzione di  $\vec{p}$ , mentre  $|\vec{p}|$  cambia. Possiamo trattare il problema come

1-dimensionale, nella direzione in cui giacciono  $\vec{p}$ ,  $\vec{F}$ .

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{d}{dt} \left[ mv \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} \right] = \frac{d}{dv} \left[ mv \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} \right] \cdot \frac{dv}{dt} \\
 &= m \cdot \left[ \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} + v \left( -\frac{1}{2} \right) \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-3/2} \left( -\frac{2v}{c^2} \right) \right] \cdot a \\
 &= m \cdot \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-3/2} \cdot a = \gamma^3 ma
 \end{aligned}$$

Quindi abbiamo visto che per forze centripete l'inerzia è  $\gamma m$ , mentre per forze tangenziali l'inerzia è  $\gamma^3 m$ . Questa proprietà "direzionale" dell'inerzia non è contemplata nella "massa relativistica" che abbiamo introdotto.

In conclusione: il concetto di "massa relativistica" è deprecato. Se lo incontrate in letteratura sapete a che cosa si riferisce, ma meglio non usarlo. . .