

Corso di Cosmologia

Laurea Triennale in Astronomia

Anno Accademico 2018-19

Prof. A. Franceschini

PREFAZIONE

Le presenti note si riferiscono a contenuti del corso di Cosmologia della Laurea Triennale in Astronomia (Universita' di Padova) negli Anni Accademici dal 2005 in poi.

Ulteriori approfondimenti sui vari argomenti trattati possono trovarsi nei seguenti testi:

1. M.S. Longair, *Galaxy Formation*, Springer
2. M. Rowan-Robinson, *Cosmology*, Oxford University Press
3. P. Schneider, *Extragalactic Astronomy & Cosmology*, Springer
4. S. Weinberg, *Gravitation & Cosmology*.

Altri testi utili per i corsi successivi della Laurea Magistrale:

5. P.J.E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology*, Princeton University Press
6. J.A. Peacock, *Cosmological Physics*, Cambridge University Press
7. P. Coles & F. Lucchin, *Cosmology*

INDICE

1. Capitolo 1. Introduzione. Universo locale e sue principali componenti
 1. Universo locale e principali strutture visibili.
 2. Plasmi diffusi e raggi cosmici
 3. Radiazioni cosmiche di fondo
 4. Neutrini cosmici
 5. Antimateria
 6. Materia oscura
 7. Energia oscura
 8. Radiazione gravitazionale
 9. Interazioni tra le varie componenti
 10. APPENDICE 1A: Domini spettrali per la cosmologia

2. Capitolo 2. Una componente cosmologica fondamentale: le galassie
 1. Tipologie di galassie
 2. Popolazioni stellari in galassie. Relazioni strutturali fondamentali delle stelle
 3. Efficienza della produzione di energia in stelle, tempi di vita stellare
 4. Spettri e distribuzioni spettrali d'energia delle galassie. Sintesi spettrale
 5. Effetti della presenza di elementi pesanti (metallicità del plasma stellare)
 6. Effetti del mezzo interstellare. Assorbimento ed emissione di polveri
 7. Analisi spettrofotometriche di galassie

3. Capitolo 3. Analisi statistiche di popolazioni di sorgenti cosmiche
 1. Descrittori statistici delle popolazioni di sorgenti cosmiche
 2. Funzioni di luminosità delle galassie
 3. Stimatori statistici della funzione di luminosità delle galassie: lo stimatore $1/V_{\max}$
 4. Masse in stelle delle galassie. Funzioni di massa stellare delle galassie
 5. Densità cosmica media di luminosità e massa in galassie
 6. APPENDICE 3A: applicazioni del criterio di massima verosimiglianza

4. Capitolo 4. Proprietà evolutive delle sorgenti cosmiche
 1. Evidenze di evoluzione delle sorgenti cosmiche

5. Capitolo 5. Struttura generale dell'Universo: basi empiriche per teorie e modelli cosmologici
 1. Isotropia nella distribuzione di galassie e sorgenti cosmiche
 2. Struttura 3D dell'Universo: distanze cosmiche, legge di Hubble
 3. Test di omogeneità dell'Universo da analisi 3D
 4. Struttura temporale: un Universo di età finita
 5. Il paradosso di Olbers.

6. [Capitolo 6. Struttura generale dell'Universo: geometria di uno spazio-tempo in espansione](#)
 1. Legge generale di espansione. Significato della legge di Hubble
 2. Il Principio Cosmologico
 3. Sistema di coordinate comoving. Fattore di scala cosmico $R(t)$
 4. Dalla teoria della Relativita' Speciale alla Generale
 5. Spazi curvi isotropi
 6. La metrica di Robertson-Walker
 7. Proprieta' geometriche dello spazio-tempo descritto dalla metrica di Robertson-Walker
 8. Appendice 6A: funzioni iperboliche

7. [Capitolo 7. Dinamica Cosmica](#)
 1. Trattazione Newtoniana
 2. Teoria della gravitazione di Einstein. Equazioni del campo gravitazionale e dinamica cosmica
 3. Soluzioni delle equazioni dinamiche. Modelli cosmologici
 4. Parametri cosmologici
 5. Relazione tra parametri cosmologici e geometria
 6. Stato attuale dell'Universo. Densita' media di materia gravitante. Universo dominato dalla materia
 7. Eta' dell'Universo
 8. Il modello dello Stato Stazionario
 9. Appendice 7A: Cenni alla teoria della Relativita' Generale. Equazioni del moto e del campo gravitazionale. Deduzione relativistica delle equazioni dinamiche

8. [Capitolo 8. Alcuni Osservabili Cosmologici](#)
 1. L'osservabile fondamentale: il redshift cosmologico
 2. La distanza di luminosita'
 3. Densita' di flusso. La correzione K
 4. Diagrammi di Hubble. Vincoli sul parametro q_0
 5. Distanza di diametro angolare. Brillanza superficiale
 6. Relazioni tempo-redshift
 7. Appendice A: la relazione di Mattig

9. [Capitolo 9. Conteggi di Sorgenti. Radiazioni Cosmiche di Fondo](#)
 1. Calcolo dei volumi cosmici
 2. Conteggi di sorgenti nel limite di bassi redshift
 3. Conteggi di radio-sorgenti brillanti. Evidenze di un universo evolutivo
 4. Espressioni per i conteggi nel caso piu' generale
 5. Radiazioni cosmiche di fondo. Contributo di popolazioni di sorgenti
 6. Storia cosmica della formazione delle stelle, degli elementi pesanti e delle galassie.
 7. Soluzione del paradosso di Olbers
 8. Un caso di interesse: il fondo residuo diffuso nel vicino IR. Le prime luci, Stelle di Popolazione III?
 9. Appendice 9A: relazioni approssimate distanza-tempo-redshift

10. [Capitolo 10. Leggi Generalizzate della Dinamica Cosmica. Costante Cosmologica](#)
 1. Diagrammi di Hubble delle Supernove di tipo 1A. Espansione accelerata dell'Universo
 2. Equazioni di campo modificate della Relativita' Generale. Costante cosmologica

3. Interpretazioni della costante cosmologica
4. Il parametro Ω_Λ . Nuove equazioni dinamiche
5. Soluzioni generali della dinamica cosmica
6. Il nuovo modello standard dell'Universo
7. Interpretazioni alternative dell'accelerazione dell'Universo

11. Capitolo 11. Breve Storia Termica. Big Bang. Prime Fasi Evolutive.

1. Evoluzione del contenuto di materia ed energia dell'Universo
2. Epoca della Equivalenza. Universi dominati dalla radiazione
3. Equazioni dinamiche generalizzate con materia, fotoni, energia oscura
4. Radiazione Cosmica di Fondo nelle Microonde (Radiazione Fossile). Osservazioni
5. Epoca della ricombinazione
6. Universo primordiale. Nucleosintesi primordiale
7. Predizioni della nucleosintesi primordiale. Confronto con i dati
8. Breve sguardo d'insieme sui primi istanti dell'Universo

12. Capitolo 12. Nuclei Galattici Attivi (*facoltativo*)

1. Principali categorie di galassie attive e Nuclei Galattici Attivi
2. Nuclei Galattici Attivi radio-emittenti. Le Radiogalassie
3. Emissione non-termica di sincrotrone (richiami)
4. Proprieta' morfologiche e spettroscopiche delle radiogalassie
5. Energetica dell'emissione delle radiogalassie
6. Nuclei Galattici Attivi radio-quieti
7. Quasar e galassie di Seyfert.

1. INTRODUZIONE.

Di che cosa si interessa la *cosmologia*? E' la disciplina che studia l'Universo nel quale ci troviamo, ossia l'insieme delle realta' (*eventi*) spazio-temporali che ci circondano. Si tratta evidentemente di una disciplina alquanto unica, la scienza che studia il "tutto esistente". Come e' ovvio, questo *tutto* ha una dimensione spaziale ed una temporale: la cosmologia studia quindi la struttura e le componenti dell'Universo oggi, come lo possiamo attualmente osservare, ma allo stesso tempo indaga l'origine e la storia evolutiva dello stesso. Anticipiamo che in questo corso svilupperemo una estesa indagine in particolare sull'Universo attuale e vicino, le sue componenti generali e le sue caratteristiche, la sua geometria, e le modalita' osservative, mentre solo nella Sez. 11 effettueremo un breve *excursus* sulla sua storia evolutiva. Corsi successivi della Laurea Magistrale saranno dedicati allo studio delle origini, ovviamente una materia ancora piu' complessa.

La cosmologia costituisce il punto di arrivo, il punto focale di una varieta' di discipline fisiche e astronomiche, un lungo cammino iniziato quasi 500 anni fa con le prime osservazioni astronomiche, anche se la data di inizio vera e propria puo' essere piu' precisamente collocata a 400 anni fa con le prime osservazioni al cannocchiale di Galilei tra fine 1609 e primi 1610. La cosmologia e' una disciplina alquanto unica, che ingloba praticamente tutte le conoscenze fisiche, dalla meccanica classica e quantistica, alla fisica delle particelle elementari, all'astrofisica stellare e galattica, e molto altro. Ultimamente si e' verificata una interessante convergenza di interessi tra cosmologia e la branca della fisica che studia la natura ultima delle forze e tenta di comprendere i meccanismi fondamentali che regolano i fenomeni naturali. Questa convergenza sfrutta il fatto che la cosmologia permette di studiare ambienti cosmici nei quali la materia raggiunge valori dei parametri fisici e termodinamici, quali temperatura, pressione, densita' ed energia, assolutamente non ottenibili nei laboratori terrestri. E' in queste condizioni estreme che oggi si ritiene prendano forma le forze fondamentali, differenziandosi da quella che si considera la forza unificata che opero' nei primissimi istanti di vita dell'Universo.

Essendo la "scienza del tutto", la cosmologia si colloca in una posizione alquanto unica anche nei confronti di discipline quali la filosofia, che pure hanno lo scopo di studiare e comprendere la natura, l'origine e l'organizzazione del mondo. La cosmologia si puo' pertanto considerare come la frontiera delle scienze fisiche. Certamente la frontiera delle scienze astronomiche, anche in considerazione del fatto che essa necessita e sfrutta la strumentazione astrofisica piu' avanzata.¹

¹ Si puo' considerare che l'astrofisica oggi abbia tre principali "frontiere". La cosmologia, frontiera delle scienze fisiche (esplorazione del mondo per quanto riguarda i suoi meccanismi di funzionamento e la sua origine e storia evolutiva. L'esplorazione dei sistemi planetari (sistema solare ma soprattutto studio di pianeti extrasolari, alla ricerca dell'esistenza di condizioni favorevoli alla vita e della vita stessa); in questa confluiscono interessi delle scienze anche biologiche (origine della vita). Una terza frontiera e' quella dell'astrofisica delle alte e altissime energie, per l'interesse di

Introduzione. Componenti Fondamentali. Canali di Informazione Cosmologica. 1.6

Cominciamo così un lungo cammino che ci porterà in tre anni ad una esplorazione approfondita dell'Universo. Quello attuale è un corso di base, lo sviluppo completo della tematica avverrà nell'ambito della Laurea Magistrale. Uno degli aspetti che verranno nel presente corso particolarmente discussi riguardano le nostre stesse capacità di indagine e descrizione dell'Universo, che non sono assolutamente garantite *a-priori*, data la straordinarietà e vastità dell'oggetto dell'indagine. I fondamenti osservativi e teorici della nostra descrizione del cosmo saranno parte fondamentale della nostra discussione, così come una rigorosa e completa definizione degli osservabili cosmologici.

I contenuti del corso sono così riassunti, per Sezioni. La Sez. 1, l'attuale, fornisce una breve rassegna delle componenti principali dell'Universo attuale e dei principali canali di informazione cosmologica. Sez. 2 sviluppa una discussione riassuntiva delle principali caratteristiche della componente fondamentale dell'Universo, le galassie e le popolazioni stellari che le costituiscono: l'osservazione di campioni di galassie lontane forniscono il modo principale di osservazione dell'Universo visibile. La Sez. 3 riassume i principali test statistici e li applica per stimare alcune quantità che caratterizzano l'Universo e le sue componenti. La Sez. 4, utilizzando le tecniche discusse nella precedente, menziona uno degli aspetti più notevoli recentemente messi in luce, ovvero la caratteristica di rapida evoluzione temporale che l'Universo e alcune sue componenti mostrano. La Sez. 5 raccoglie una serie di dati sulle caratteristiche generali dell'Universo, sia locale che lontano, necessarie per impostare una descrizione quantitativa dello stesso. Su questa base empirica, i fondamenti geometrici di tale descrizione sono definiti nella successiva Sez. 6. La Sez. 7 affronta il problema di stabilire le caratteristiche dinamiche dell'Universo; un'appendice di questa riassume alcuni aspetti della teoria relativistica della gravità (la teoria della Relatività Generale) che fornisce uno schema fisico-matematico completo ed auto-consistente nell'ambito del quale rappresentare le caratteristiche dinamiche dell'Universo, appendice utile per chi volesse approfondire il tema. La Sez. 8 deduce e descrive gli osservabili cosmologici fondamentali. La Sez. 9 applica le definizioni degli osservabili per analizzare i conteggi numerici di sorgenti cosmiche e studiare il loro contributo alle radiazioni cosmiche di fondo. Sez. 10 riporta alcune osservazioni che hanno recentemente richiesto una significativa revisione della nostra rappresentazione e descrizione del cosmo. Sez. 11 fornisce un breve ma molto significativo riassunto delle principali fasi evolutive dell'Universo e menziona alcuni metodi di indagine dell'Universo primordiale. Infine, la Sez. 12 discute brevemente una categoria di sorgenti cosmiche di natura molto particolare e di grande interesse astrofisico e cosmologico: i Nuclei Galattici Attivi.

1.1 Universo locale e principali strutture visibili. Barioni condensati in galassie.

Per iniziare ad orientarci nel cosmo, effettuiamo una breve escursione partendo dal nostro sistema di riferimento terrestre. Se leviamo lo sguardo in una notte stellata, possibilmente da un sito remoto d'alta montagna, effettuiamo la piu' elementare osservazione cosmologica: un agglomerato di circa 100 miliardi di stelle, che ospita tra tutte queste il nostro Sole e il Sistema Solare si mostra come una nebulosita' biancastra che fascia l'intero cielo, la Via Lattea. Galilei per primo, usando il suo cannocchiale alla fine del 1609, stabili' che questa non era una struttura gassosa, ma "pulviscolo di stelle". Un'immagine notevole di questa struttura e' stata ottenuta dal satellite IRAS a lunghezze d'onda infrarosse, con fotoni quindi che non risentono per nulla l'effetto di estinzione di polveri presenti nel piano Galattico.

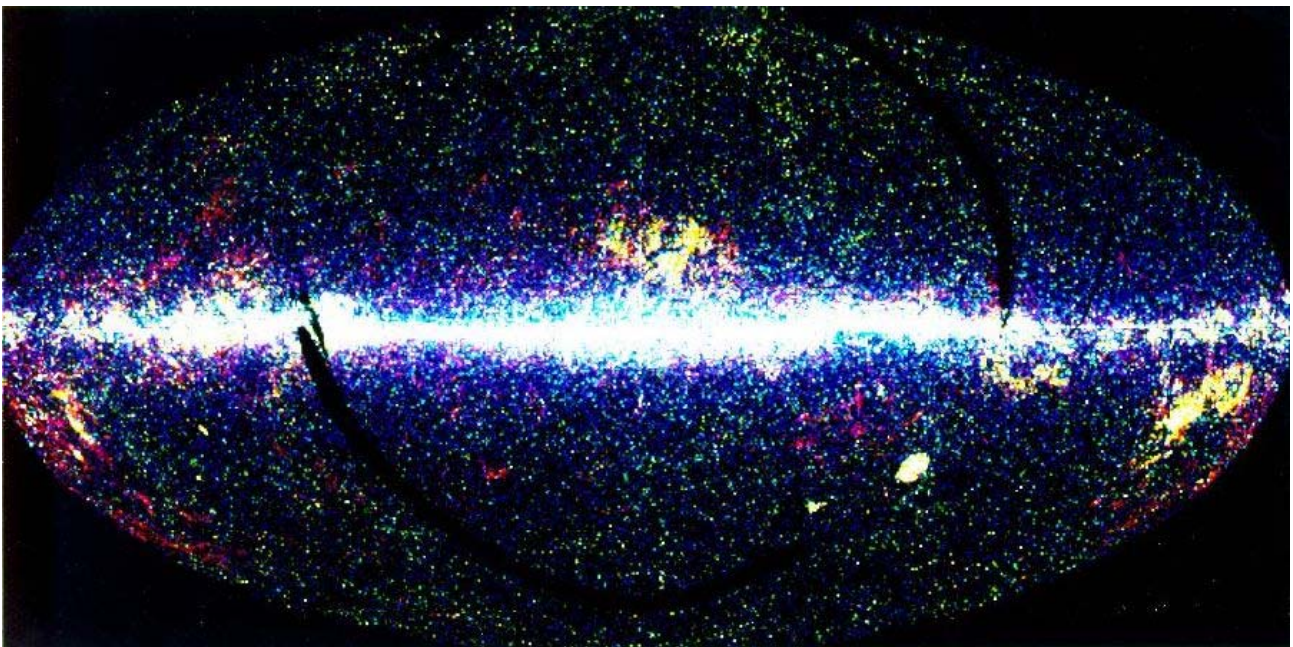


Figura 1

Immagine della Via Lattea osservata dal nostro sistema di riferimento terrestre. E' una immagine sintetica costruita utilizzando il catalogo di circa 200.000 sorgenti, la maggior parte stellari, ottenuto da IRAS a 12, 25, 60, 100 micron. Il piano della Galassia coincide con il piano orizzontale di massima emissione. I diversi colori delle sorgenti corrispondono a diverse temperature: i puntini blu sono stelle fredde nella galassia, i puntini gialli e verdi sono sorgenti (galassie) esterne alla Galassia.

Sino agli anni 1920, questo enorme sistema di stelle apparve racchiudere l'intero universo visibile, le cui dimensioni erano state valutate a oltre 20000 parsec di diametro. Solo con le osservazioni negli anni '20 del fondatore della cosmologia osservativa moderna, Edwin Hubble, si inizio' a comprendere che le vere dimensioni del cosmo erano tutt'altre. Grazie a questa scoperta l'Universo appare oggi con dimensioni almeno 1 milione di volte superiori. Hubble misuro', in particolare, la

distanza della nebulosa piu' cospicua nel cielo, la nebulosa di Andromeda, essere 800.000 parsec, ovvero 0.8 Megaparsec (Mpc) o circa 2 milioni di anni-luce, essendo essa cosi' la piu' vicina galassia esterna di grandi dimensioni (confrontabili con quelle della Via Lattea). 1 Mpc costituisce quindi l'unita' di misura fondamentale del cosmo². Oggi con i piu' potenti telescopi si possono osservare strutture cosmiche (galassie o altro) sino a oltre 12 miliardi di anni luce, ben oltre 4000 Mpc. Notiamo gia' ora, tuttavia, che le distanze in cosmologia corrispondono ad un concetto piu' complesso ed elaborato di quanto qui espresso, cosicche' le sorgenti piu' lontane osservabili sono in realta' ben piu' lontane di 6000 volte la distanza di Andromeda.

La Via Lattea e la galassia di Andromeda non costituiscono un sistema unico, ma fanno parte di un piccolo sistema di galassie, il Gruppo Locale, di cui sono le componenti di massa e dimensioni maggiori. Ad esse si affiancano una trentina di galassie di piccole dimensioni (nane), alcuni dati sulle quali sono riportati in Tabella 1 [tratta da Rowan-Robinson, *Cosmology*]. Valori della distanza, tipo morfologico, massa, dimensioni lineari e velocita' relativa alla nostra Galassia sono qui riportati, mentre un grafico tri-dimensionale della distribuzione di galassie nel Gruppo Locale e' riportato in Figura 2.

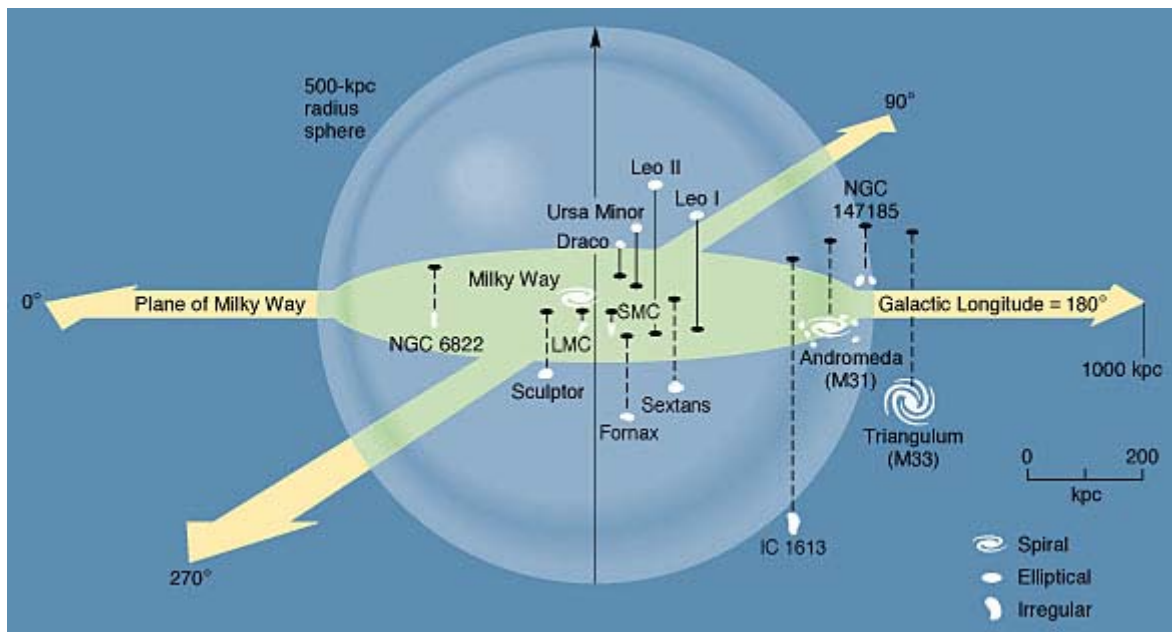


Figura 2

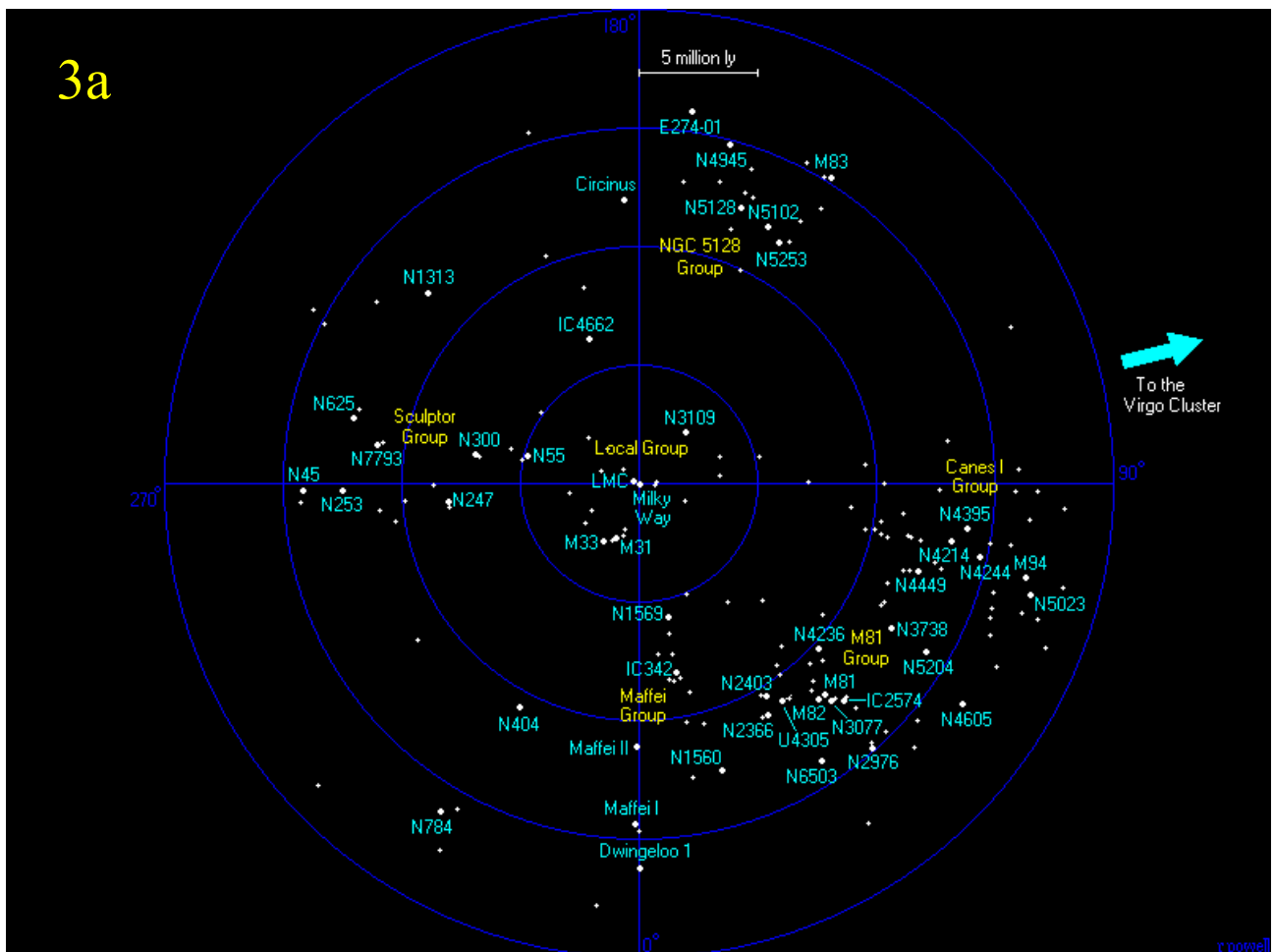
Immagine 3D del Gruppo Locale di galassie. [Immagine tratta dall' *Encyclopedia Britannica*.]

² 1 Mpc, 10^6 parsec. 1 parsec e' la distanza a cui e' visto il raggio dell'orbita terrestre sotto un angolo di un secondo d'arco: $\theta = \frac{\text{dimensione } d}{\text{distanza } D}$ [radianti], con $d = 150 \cdot 10^6 \text{ Km}$, $D = \frac{1.5 \cdot 10^8 \text{ Km}}{(57.3 \cdot 3600)^{-1}} = 3.08 \cdot 10^{13} \text{ Km} = 3.26 \text{ anni luce}$.

1 Mpc equivale dunque a $3.08 \cdot 10^{24}$ cm.

Tabella 1: le galassie del Gruppo Locale

Name	Type (see p. 31)	Distance (10 ³ light years)	lg (mass of galaxy/mass of sun, M/M_{\odot})	Absolute visual magnitude (see p. 47)	Linear diameter (10 ³ light years)	Radial velocity (km s ⁻¹)
M31	Sb	2200	11.5	-21.1	50	-275
Our galaxy	Sab?	26 (to centre)	11.2	-20.5	80	0
M33 (NGC598)	Sc	2400	10.1	-18.8	20	-190
Large Magellanic cloud	Irr	170	10.0	-18.7	24	-270
NGC205	E5	2100	9.9	-16.3	6	-240
M32 (NGC221)	E2	2200	9.5	-16.3	3	-210
Small Magellanic cloud	Irr	210	9.3	-16.7	10	168
NGC147	E _{pec}	2200	9	-14.8	3	-250
NGC185	E _{pec}	2200	9	-15.2	3	-300
Pegasus	Irr	7500		-16.7	8	-181
NGC6822	Irr	1500	8.5	-15.6	6	-40
IC10	Irr	4200		-15.3	6	-343
Wolf-Lundmark	Irr	5200		-15.0	9	-78
IC1613	Irr	2400	8.4	-14.8	3	-240
IC5152	Irr	5200		-14.3 [†]	6	78
Leo A	Irr	5200		-13.4	6	26
Fornax	E	550	7.3	-13	6	40
Leo I	E4	750	6.6	-11	3	
Sculptor	E	280	6.5	-12	3	
Leo II	E1	750	6.0	-9.5	3	
Draco	E	220	5	-8.5	1	
Ursa minor	E	220	5	-9	3	



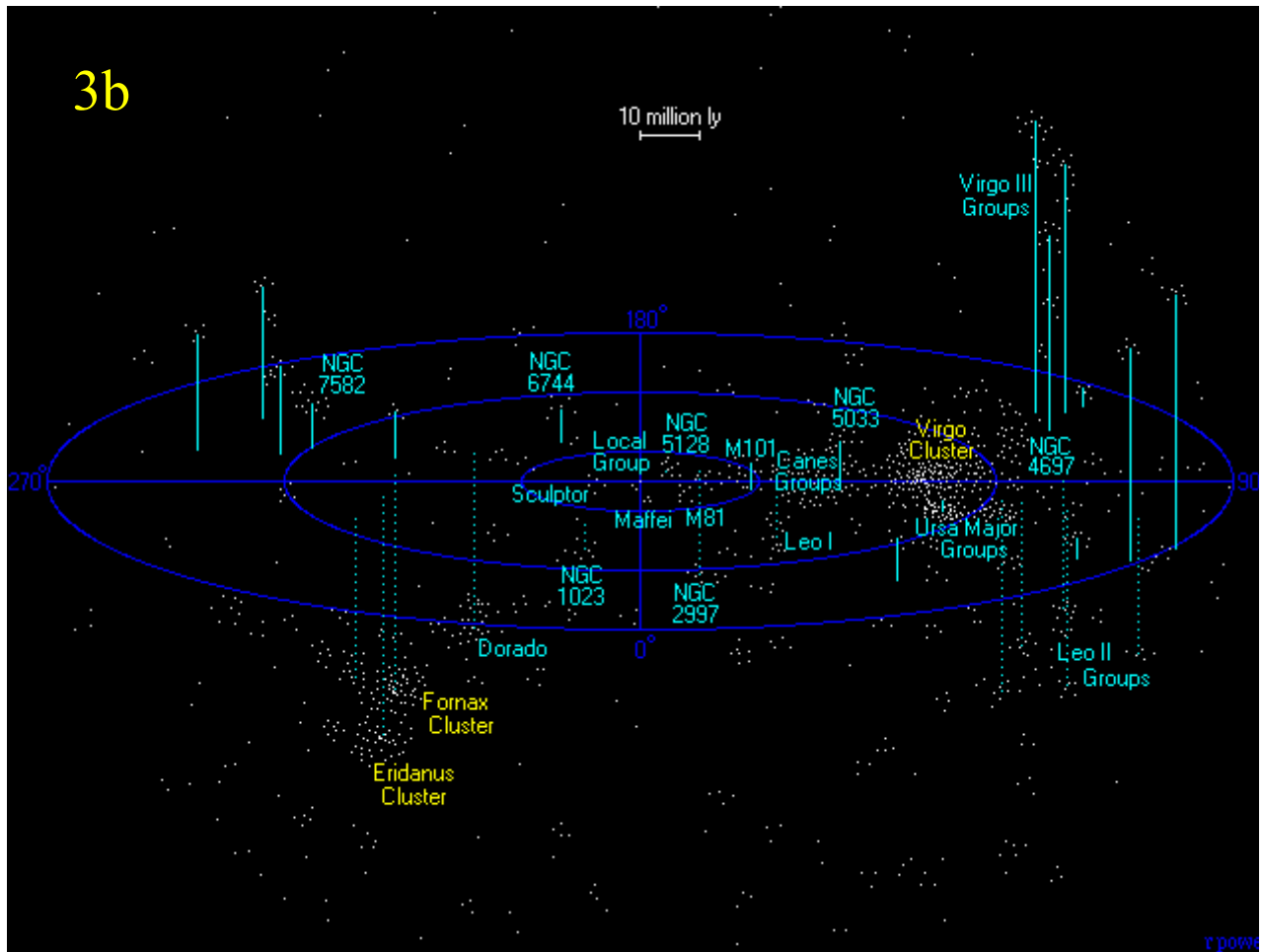


Figura 3

3a: Rappresentazione prospettica del Gruppo Locale e di aggregazioni galattiche nelle immediate vicinanze, su una scala di 10 Mpc, inclusi 5 gruppi di galassie

3b: prospetto 3D dei raggruppamenti di galassie attorno al Gruppo Locale, entro circa 30 Mpc, in cui si nota in particolare l'ammasso della Vergine a circa 60 milioni di anni luce (18 Mpc).

Il Gruppo Locale costituisce una entità strutturalmente e dinamicamente piuttosto ben definita, essenzialmente circondata da spazio vuoto. In prossimità del Gruppo Locale, ed entro una decina di Mpc, sono stati identificati altri cinque raggruppamenti simili, rappresentati graficamente in Figura 3a e 3b.

A sua volta il Gruppo Locale, assieme ai gruppi confinanti, si trova nelle vicinanze di una sistema galattico di dimensioni ben maggiori. Ad una distanza infatti di circa 18 Mpc troviamo un enorme ammasso di galassie, l'ammasso detto della Vergine. Si tratta della più imponente concentrazione di galassie nell'Universo relativamente vicino, con dimensioni angolari nel cielo che si estendono su circa 6° , 0.1 rad, che alla distanza dell'ammasso corrispondono a circa 2 Mpc di diametro. Tali sono le dimensioni caratteristiche di questi raggruppamenti di galassie, detti appunto "ammassi". L'Universo è popolato da numerose strutture di questo genere, che costituiscono una delle fondamentali componenti del cosmo, di grande rilevanza cosmologica, come vedremo progressivamente. Nonostante le dimensioni angolari di

Virgo siano 10 volte quelle apparenti della Luna, e' impossibile vedere ad occhio nudo l'ammasso, ed e' difficile anche con un telescopio: il motivo e' mostrato nella Figura 4: si tratta di una distribuzione molto ampia nel cielo di galassie con magnitudine apparente piuttosto debole.



Figura 4
 Immagine dell'ammasso della Vergine ripresa con un telescopio Schmidt. Sono indicate le posizioni delle principali componenti galattiche dell'ammasso, ove la numerazione si riferisce al New General Catalogue (NGC) di galassie. Il centro dinamico corrisponde alla posizione della galassia M87.

Un ingrandimento di una porzione dell'ammasso e' riportata in Figura 5, in cui compaiono due galassie ellittiche giganti, circondate da un certo numero di spirali, e da una lenticolare (NGC 4435).

L'ammasso della Vergine ha una morfologia irregolare ed un relativamente alto numero di galassie a spirale. Ammassi di galassie cosi' imponenti sono frequentemente caratterizzati da una distribuzione di galassie piu' regolare e concentrata, e vengono chiamati ammassi "ricchi". Negli ammassi ricchi sono presenti galassie ellittiche (e in generale dei primi tipi morfologici) in numero molto elevato, mentre negli ammassi irregolari, come Vergine, la loro frazione e' minore, e maggiore quella delle spirali. Caso particolare la galassia super-gigante M87, il cui alone si estende su dimensioni che arrivano a 100 Kpc. La sua enorme massa e dimensioni si ritengono dovute alla cannibalizzazione di molte altre galassie nel

centro dell'ammasso che si sono fuse con questa per effetti dinamici (frizione dinamica e "spogliamento mareale") operanti nei nuclei degli ammassi.



Figura 5

Immagine ingrandita di una porzione dell'ammasso della Vergine, in cui compaiono le due galassie ellittiche M84 (a destra) e M86 (a sinistra).

Un ammasso di galassie ancora piu' cospicuo, massivo e con un maggior numero di galassie e' Abell 1689, mostrato in Figura 6. L'ammasso e' lontano 2.2 miliardi di anni-luce (670 Mpc), e mostra una enorme concentrazione di galassie nel nucleo. Varie galassie si sono fuse tra loro per dare origine alla luminescenza diffusa.

A sua volta, l'ammasso della Vergine e Abell 1689 sono elementi di un tessuto universale formato da strutture di massa e dimensioni sempre maggiori al crescere della scala, costituite da aggregazioni di strutture di scala inferiore. Ad esempio, ammassi di galassie tendono a collegarsi tra loro costituendo strutture su scala maggiore, di forma tipicamente filamentare. Le piu' imponenti di queste sono chiamate *super-ammassi*, con un chiaro significato del nome. Figura 7 riporta la distribuzione in una mappa di cielo in coordinate galattiche delle galassie piu' brillanti della magnitudine apparente $B=14.5$. L'ammasso della Vergine corrisponde alla struttura un po' allungata in alto a sinistra.

Da quanto sopra emerge chiaramente una caratteristica fondamentale dell'Universo: l'elemento costitutivo, il mattone fondamentale dell'Universo visibile, le galassie, tendono a raggrupparsi tra loro, realizzando una gerarchia di strutture, la cosiddetta Struttura su Grande Scala (*Large Scale Structure*). La caratterizzazione di questa realta' e le sue origini fisiche costituiscono uno dei grandi problemi della cosmologia e sara' ulteriormente analizzata nella Sez. 5 e ampiamente discussa nei corsi della Magistrale.

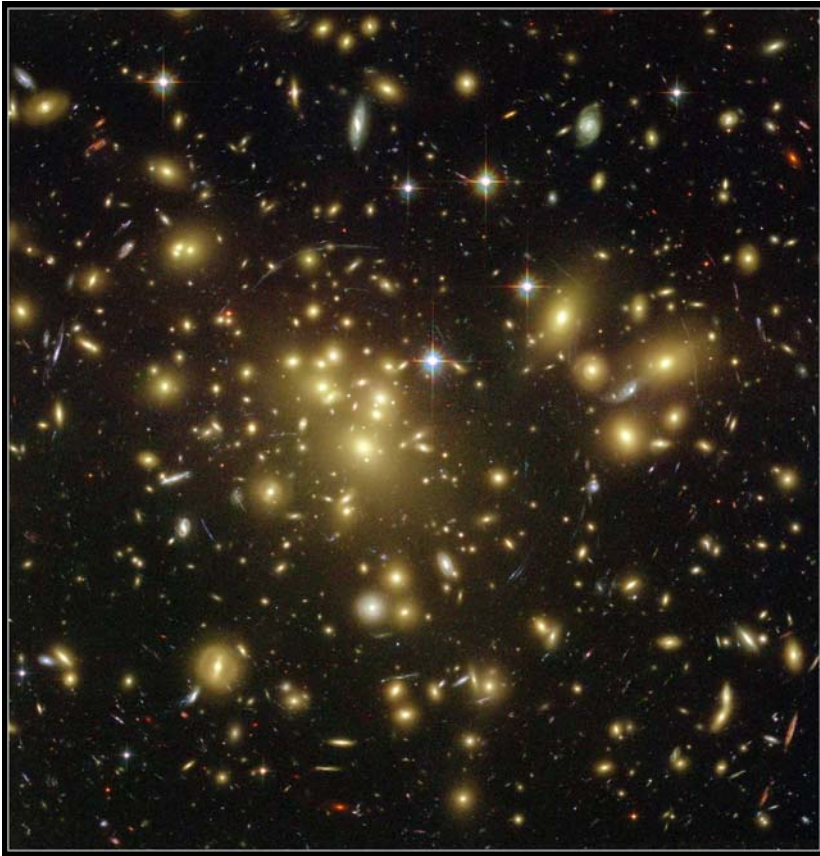


Figura 6

Immagine del telescopio spaziale Hubble di un ammasso ricco di galassie, Abell 1689. Si tratta dell'ammasso piu' ricco in galassie conosciuto. Il gruppo di galassie nel centro mostra anche una nebulosita' diffusa, una sorta di supergalassia costituita dal mescolamento di molte galassie precedentemente situate nella parte interna dell'ammasso. L'immagine ha richiesto 13 ore di osservazione con il telescopio spaziale Hubble.

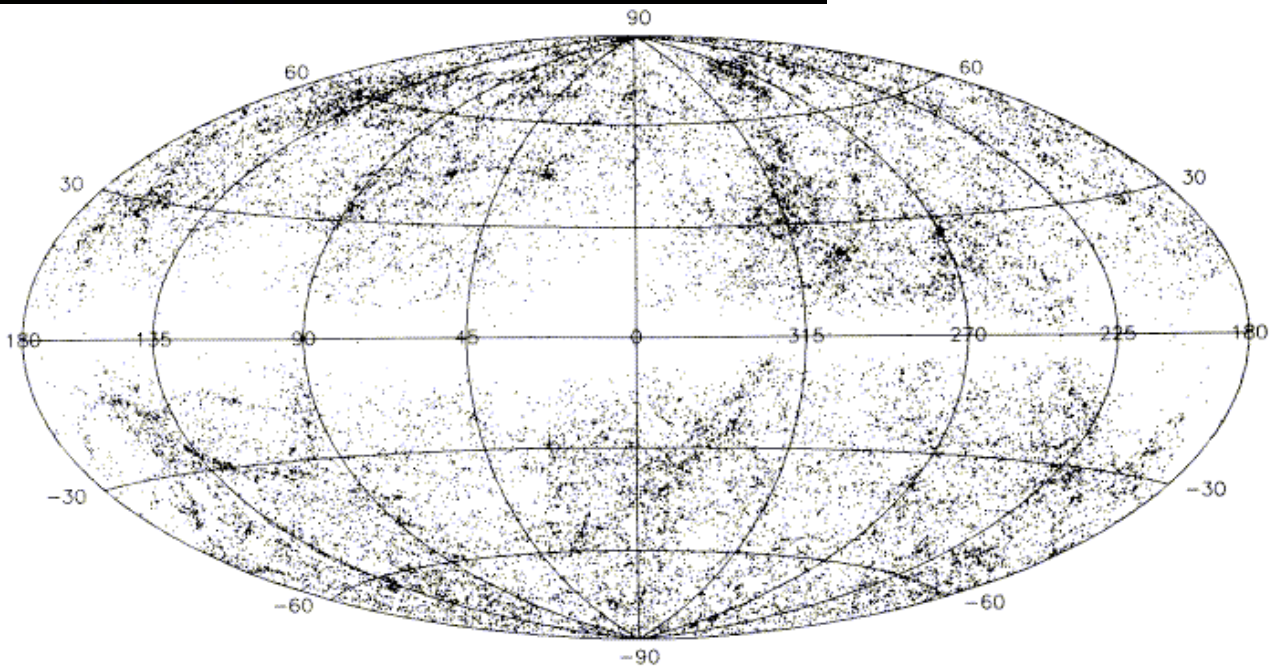


Figura 7

Mappa della distribuzione delle galassie sull'intero cielo, in coordinate galattiche (il piano di simmetria della nostra Galassia coincide con il piano a declinazione=0 in questo grafico). I puntini sono tutte le galassie piu' brillanti della magnitudine apparente $B=14.5$ (dai cataloghi UGC, ESO, e MCG, si veda Sharp 1986 (PASP 98, 740)). Da notare l'assenza di galassie identificate nel piano di simmetria della mappa, a causa della presenza di polveri nella Galassia, che impediscono l'identificazione di galassie in questa zona del cielo. L'ammasso della Vergine corrisponde alla struttura un po' allungata in alto a sinistra. Sono evidenti nella mappa le presenze di numerose altre strutture. Le piu' grandi sono i superammassi, che a loro volta si collegano tra loro in grandi strutture.

1.2 Universo locale e sue componenti principali. Plasmi diffusi e raggi cosmici.

Plasmi diffusi. Oltre alle sue componenti visibili con osservazioni in ottico, l'Universo locale include una varietà di altre componenti non visibili in ottico. Mentre stelle, galassie e raggruppamenti di galassie corrispondono a plasma condensato gravitazionalmente in una gerarchia di strutture, vi sono forti motivi per ritenere che esistano nell'Universo enormi quantità di plasmi non condensati e più o meno omogeneamente diffusi. Come vedremo nel prosieguo, si valuta che la massa media di materia inclusa in questi plasmi diffusi sia circa 5 volte superiore alla massa di gas condensato in stelle e galassie, e si trovi a temperature molto elevate, oltre 100.000 °K. Il motivo per cui questi plasmi diffusi non sono (facilmente) visibili è intuibile se si consideri che, mentre il gas in stelle emette ad una temperatura di migliaia di gradi radiazione molto ben identificabile in ottico, radiazione puntiforme facilmente osservabile sul fondo cielo, plasmi diffusi emettono per *free-free* solo una minima parte del loro flusso in ottico, e producono inoltre radiazione diffusa di bassa brillantezza superficiale. Da alcuni decenni questi plasmi sono studiati con telescopi in raggi X (in grado di rivelare il picco d'emissione della loro radiazione).



Figura 8

Immagine in raggi X di un ammasso di galassie lontano, un ammasso che contiene la radiogalassia 3C295. In questa non si notano né la radiogalassia, né le galassie d'ammasso, ma solo il plasma diffuso, molto caldo (10^8 gradi) e tenue (circa una particella ogni 10^4 cm³). L'immagine è stata ottenuta dal satellite in raggi X *Chandra*.

Figura 8 mostra una immagine di un ammasso di galassie molto lontano nel quale è stata rivelata la presenza massiccia di plasma caldo. La distanza dell'oggetto è enorme, 5 miliardi di anni-luce (circa 2000 Mpc).

Tuttavia solo una piccola frazione di questi barioni diffusi è stata rivelata, ossia quella parte che è collassata entro l'intenso campo gravitazionale degli ammassi

ricchi di galassie e quindi sufficientemente addensata da poter essere individuata con i telescopi in raggi X. Il grosso dei plasmi diffusi non e' stato ancora identificato e richiedera' strumentazione molto avanzata per essere visto.

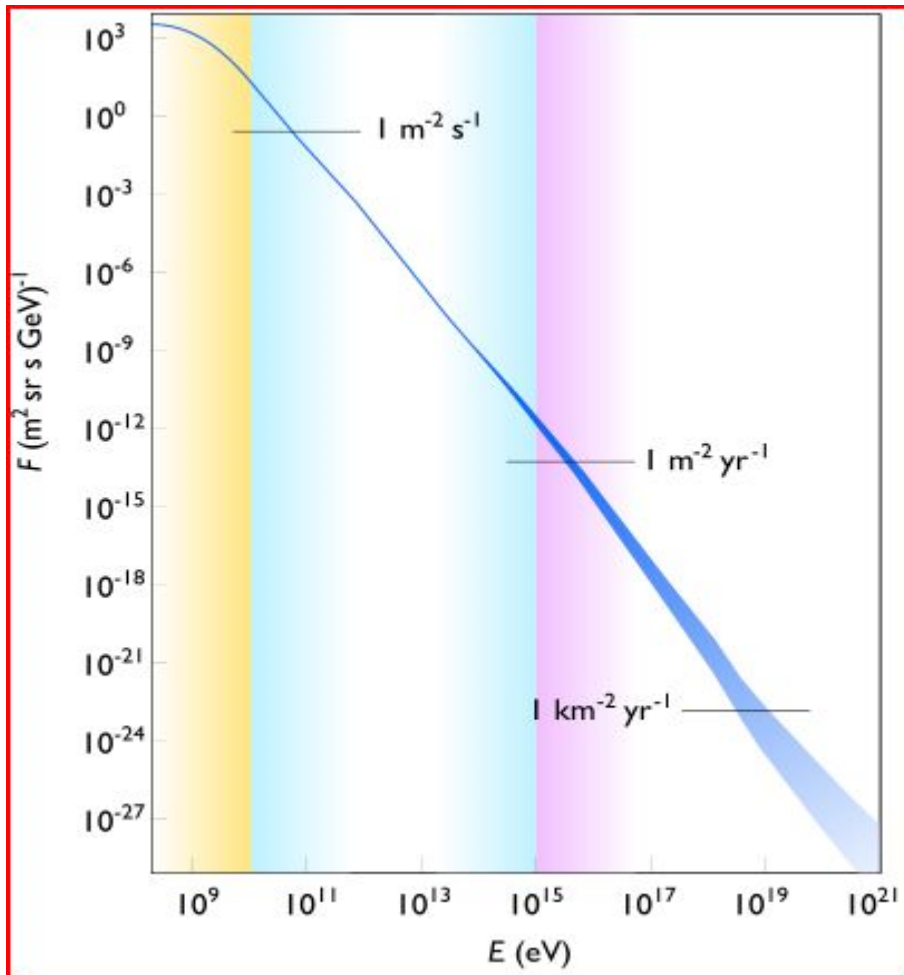


Figura 9a
 Spettro in energia dei raggi cosmici primari. I tre livelli indicati corrispondono a tre diversi ordini di grandezza in flusso di particelle a diversi valori dell'energia.

Raggi Cosmici. Tra le componenti materiali diffuse vi sono anche flussi di particelle, tipicamente di elevata, o elevatissima, energia, detti "raggi cosmici". Si distingue tra raggi cosmici primari, che sono di natura extraterrestre, e raggi cosmici secondari, dovuti all'interazione dei primari con molecole dell'atmosfera terrestre, tramite un processo a cascata che produce una miriade di nuove particelle. I raggi cosmici primari, ovviamente di nostro interesse qui, sono costituiti da protoni (per circa il 90%) e da nuclei di elio (per quasi il 9%) ed elettroni (1%); una parte su mille e' costituita da nuclei di elementi leggeri (Litio, Berillio, Boro); 5 su mille da nuclei pesanti (Carbonio, Ossigeno, ...); ed in minima parte antimateria (positroni ed antiprotoni)³. L'antimateria e' valutata attorno al 0.01% nei raggi cosmici. Sono

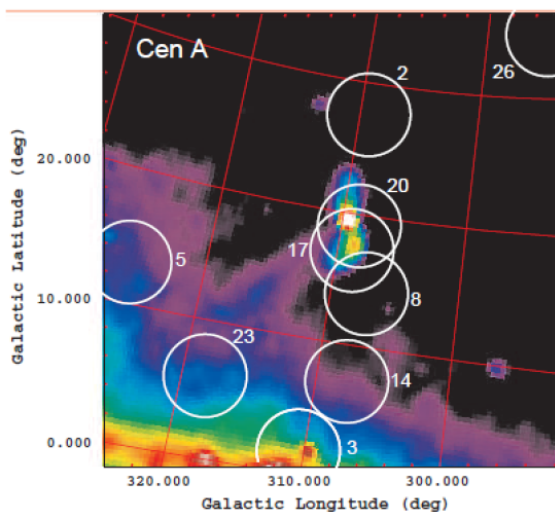
³ Menzioniamo per completezza i principali tipi di particelle elementari. Si distinguono 4 tipi fondamentali di particelle.

I **barioni**, o particelle pesanti, chiamati anche nucleoni (compongono i nuclei atomici): tra questi solo i protoni sono stabili (non decadono), ed hanno masse equivalenti rispettivamente di 938.3. Un barione che decade, salvo sia incluso in un nucleo atomico, e' il neutrone, con massa equivalente di 939.6 MeV.

I **mesoni**, particelle di massa intermedia, tra cui il pione π .

talvolta considerati raggi cosmici anche fotoni Gamma di altissima energia prodotti ad esempio da sorgenti extragalattiche (nuclei galattici attivi, si veda Cap. 12), che generano al loro arrivo negli strati alti dell'atmosfera cascate di particelle e anti-particelle simili a quelle prodotte dai raggi cosmici. Noi consideriamo questa componente tra le radiazioni di fondo discusse nel seguito.

Detection of very high energy cosmic rays with the Auger Observatory (Argentina)



Radio map (at 408 MHz from Haslam et al. 1982) of the $35^\circ \times 35^\circ$ field centered on the nearby radio galaxy Cen A. The total extent of the north-south radio lobes is 9° and is centered on the AGN (the bright white region near the center of the field). The $r = 3.2^\circ$ circles mark the positions of the UHECR events detected in the field by Auger (Abraham et al. 2008a). The numbers correspond to the event number as provided in Abraham et al. (2008a), and also in our Table 1. Note event #3 corresponds most closely to Cen B, a bright spot near the center of the circle.

Figura 9b

Scoperta dell'osservatorio Auger di un flusso di raggi cosmici extragalattici provenienti verosimilmente dalla radiogalassia Centaurus A.

La composizione e lo spettro in energia sono stati dettagliatamente studiati per quanto riguarda la radiazione cosmica primaria. Lo spettro in energia (numero di particelle incidenti per unità di energia, per unità di tempo, per unità di superficie e di angolo solido) dei raggi cosmici primari è ben descritto da una legge di potenza:

$$F(E) \propto E^{-\alpha}$$

con $\alpha = 2.7$ per valori dell'energia inferiori a $\approx 10^{15} \text{ eV}$ (si veda Figura 9a). Per valori superiori dell'energia si ha un irripidimento, con α che diviene pari a 3. Il punto in cui tale cambio di pendenza ha luogo viene denominato ginocchio. Per energie ancora più alte ($\approx 10^{18} \div 10^{19} \text{ eV}$) lo spettro dei raggi cosmici torna ad essere meno ripido, dando luogo ad un ulteriore cambio di pendenza.

Un particolare interesse rivestono i raggi cosmici di più alta energia, con energie fino a 10^{20} eV (la quantità di energia cinetica in eV di una palla da baseball [300 gr] lanciata ad oltre 100 Km/h e concentrata in una sola particella, tipicamente un protone o uno ione massivo). Per contro, la massa a riposo del protone è circa 10^9 eV , che a quella energia corrisponderebbe ad un fattore di Lorenz $\Gamma \approx 10^5$. A causa dello

I **leptoni**, particelle leggere, tra le quali gli elettroni (e^- , e^+ , con massa 0.511 MeV), il muone μ , la particella tau τ , e i neutrini (3 tipi di questi, neutrini dell'elettrone, del muone e della particella tau, ν_e, ν_μ, ν_τ). I neutrini sembrano avere massa, anche se molto piccola ($<10 \text{ eV}$).

Infine i **fotoni**, particelle prive di massa e relativistiche, con energia $E=hc/\lambda$ e momento $p=E/c$.

scattering (Compton Inverso) sul fondo di microonde, i raggi che noi osserviamo dovrebbero avere un'origine entro una certa distanza da noi, funzione della loro energia, in quanto un'origine piu' lontana implicherebbe che la maggior parte di queste particelle perde energia per Compton Inverso. E' verosimile quindi che la maggior parte di queste particelle abbiano origine entro la Galassia e siano prodotte dalle supernove.

Grazie a nuovi osservatori di raggi cosmici, l'osservazione di tali particelle ha iniziato a costituire un nuovo, anche se per ora molto limitato, canale diretto di informazione cosmologica. L'osservatorio Auger (Fig. 9b), ad esempio, ha rivelato la provenienza di raggi cosmici di energia ultra-elevata dall'Universo extragalattico, emissione in particolare probabilmente associata alla radio-galassia vicina Centauro A (associata alla galassia NGC5128 che compare anche in Fig. 3).

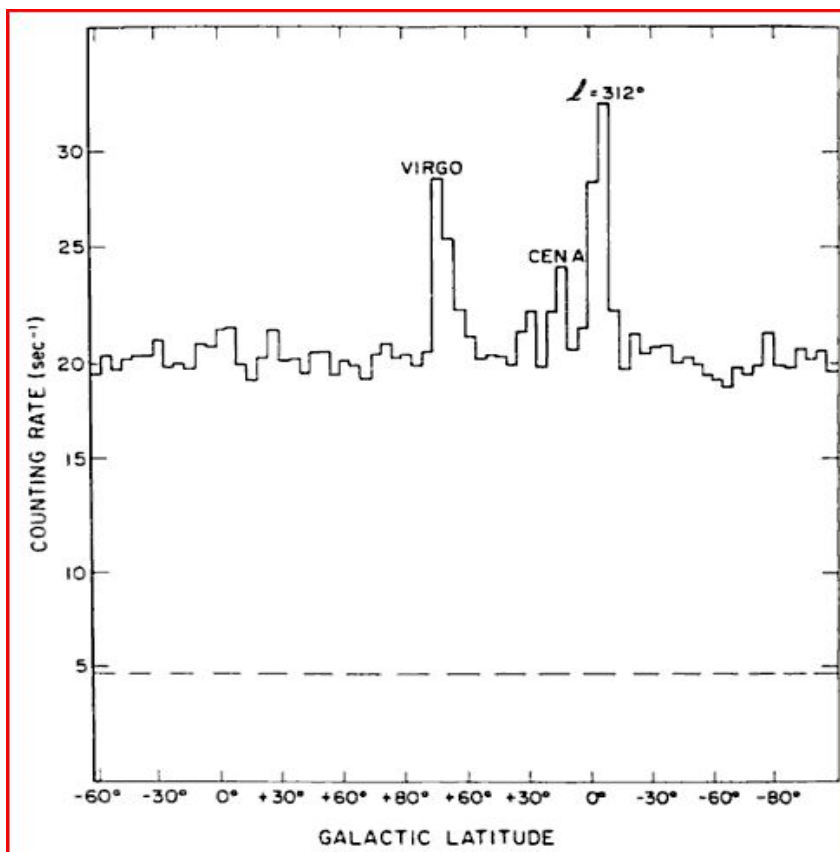


Figura 10

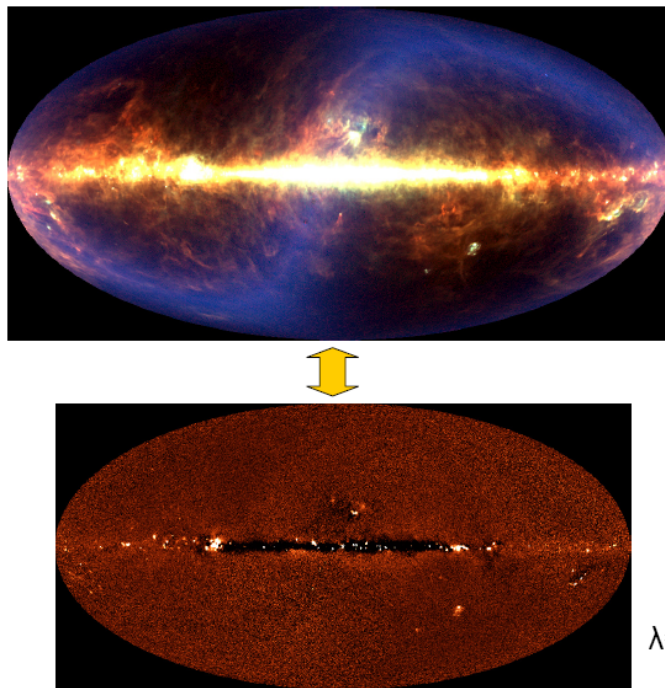
Scansione di parte del cielo in raggi X compiuta dal satellite UHURU [da Giacconi & Gursky 1974]. E' mostrato il segnale totale misurato dai rivelatori X in celle di cielo di $5^\circ \times 5^\circ$. E' registrato un picco di segnale in prossimita' di alcune sorgenti extragalattiche (Virgo, Centauro A, vedi ancora Fig.3), in aggiunta ad un segnale di fondo diffuso a circa 20 conteggi al sec. Il confronto di questo con il livello del rumore strumentale (linea tratteggiata) evidenzia una componente diffusa di origine extragalattica.

1.3 La componente fotonica. Radiazioni cosmiche di fondo.

Inutile dire che i fotoni costituiscono il veicolo principale di informazione a nostra disposizione sull'Universo e la sua storia. La velocita' finita di propagazione della luce (per la prima volta determinata alla fine dell'800) costituisce da una parte un limite fondamentale alla nostra osservabilita' dell'Universo (un limite che e' quantificato dal concetto di *orizzonte cosmologico*), ma allo stesso tempo permette l'esplorazione del lontano passato per oggetti sufficientemente lontani. L'Universo

puo' cosi' essere sfruttato come *macchina del tempo*. Oltre ad essere un veicolo di informazione, i fotoni costituiscono anche una delle principali componenti dell'Universo locale e, come si vedra' nelle Sez. successive, nel passato hanno avuto una influenza assai rilevante sull'evoluzione dinamica dell'Universo.

Una serie di scoperte a partire dagli inizi degli anni '60 ha mostrato che l'Universo e' infatti sede di un mare diffuso di fotoni di varie energie e lunghezze d'onda che fluiscono continuamente per ogni punto dello spazio-tempo.



Radiazioni
di fondo
osservate
dal satellite
COBE

$\lambda=100 \mu$

Figura 11

Immagine della radiazione di fondo osservata dal satellite NASA COBE (Cosmic Background Explorer). Sopra: flusso totale in coordinate galattiche, in cui sono evidenti le componenti galattiche (giallo, nel piano della Galassia; blu, la radiazione della polvere interplanetaria nel Sistema Solare; e in rosso molto tenue la radiazione di fondo extragalattica). Sotto: distribuzione angolare della radiazione di fondo cosmico alla lunghezza d'onda di $100 \mu\text{m}$. Come si vede, e' un fondo di radiazione piuttosto isotropo in coordinate Galattiche, cosa che indica la sua origine extragalattica.

Come sono state identificate queste componenti? Il primo di questi fondi cosmici ad essere scoperto nel 1962 e' stato il fondo in raggi X (i dati relativi a questo risultato sono riportati in Figura 10). Immaginiamo di effettuare una scansione del cielo con il telescopio: il segnale mostrera' variazioni di flusso a seconda della presenza o meno di sorgenti risolte nel campo di vista del rivelatore (in questo caso si trattava di contatori proporzionali). In aggiunta, il rivelatore potra' o meno mostrare un segnale diffuso al di sopra del rumore strumentale, come chiaramente succede in Fig. 10. Questo flusso diffuso sara' quindi in generale la somma di tre contributi: un eventuale

fondo fotonico realmente diffuso e isotropo, un segnale dovuto alla presenza di sorgenti molto deboli che non possono essere singolarmente risolte dal telescopio, e il rumore strumentale (linea orizzontale tratteggiata). Il livello relativo della componente realmente diffusa e di quella dovuta alle sorgenti dipendera' in gran parte dalla capacita' di risoluzione angolare del telescopio: migliore sara' questa risoluzione ⁴, maggiore sara' il numero di sorgenti cosmiche risolte e minore quindi il loro flusso integrato residuo (una volta sottratto il contributo delle sorgenti risolte).

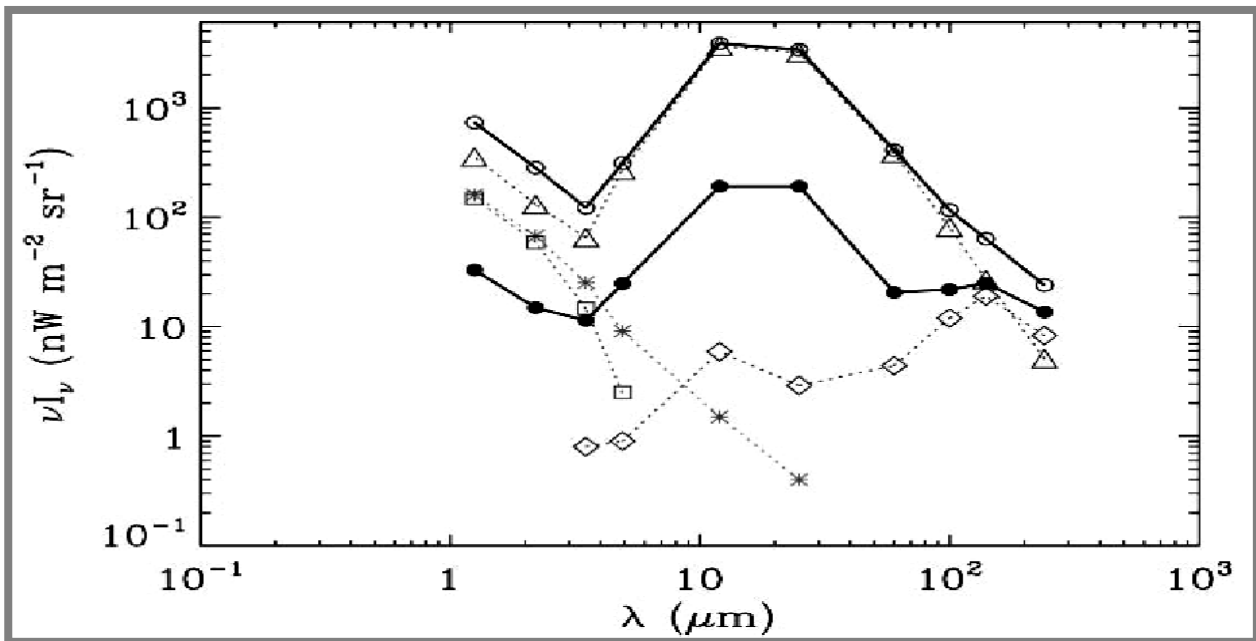


Figura 12

Spettro delle varie componenti radiative che circondano la Terra tra le lunghezze d'onda di 1 e 300 μm , osservate dal satellite COBE durante la sua scansione del cielo, entro un'area di cielo particolarmente buia (nel cosiddetto Lockman Hole): i cerchi aperti sono il flusso totale misurato in quell'area di cielo; i triangoli sono l'emissione della polvere interplanetaria; i quadrati le stelle brillanti; gli asterischi le stelle deboli; i rombi l'emissione di polveri nella nostra Galassia; i cerchi solidi sono il flusso residuo. La figura illustra la difficoltà di estrarre il flusso extragalattico dalla somma di tutte queste emissioni locali.

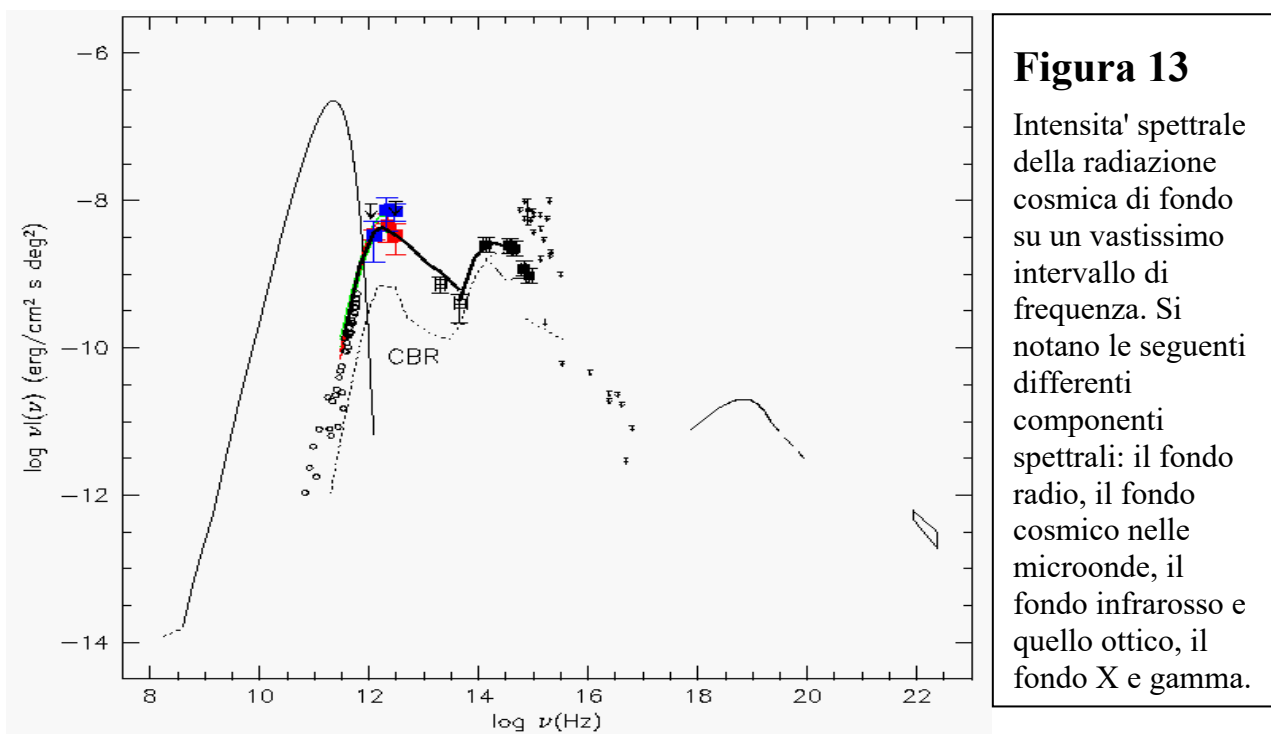
L'intensita' dei fondi cosmici di radiazione e' quantificata dalla funzione spettrale $I(\nu)$, detta brillantezza superficiale, le cui unita' sono: flusso di energia radiante/unita' d'area/unita' di frequenza/unita' d'angolo solido (in CGS: $\text{erg}/\text{sec}/\text{cm}^2/\text{Hz}/\text{steradian}$). Assumendo $I(\nu)$ non vari con la direzione (da verificare, vedi Cap. 5), cio' corrisponde ad una densita' di energia radiante ε_γ di fotoni di fondo ad una certa frequenza, data da

$$\varepsilon_\gamma = \frac{4\pi}{c} I(\nu) \cdot \bar{\nu} \quad [1.1]$$

⁴ In assenza di altre limitazioni, questa capacita' di risoluzione angolare sara' legata al rapporto tra lunghezze d'onda fotonica e dimensioni del raccogliore primario di fotoni, $\theta = \lambda / D$ (radianti), che e' il limite di diffrazione del telescopio.

dove $\bar{\nu}$ e' la frequenza media di questi fotoni. \mathcal{E}_γ ha quindi unita' di energia radiante per unita' di volume (erg/cm^3).

Le Figure 11 e 12 mostrano un esempio della difficulta' di estrarre dai dati osservativi il flusso fotonico extragalattico. La Fig. 11 contiene le mappe a $100 \mu\text{m}$ dell'emissione totale (sopra), in cui compaiono a diversi colori l'emissione delle polveri galattiche, della polvere inter-planetaria e il fondo extragalattico. Il pannello di sotto della figura mostra la distribuzione della brillantezza superficiale della componente extragalattica, una volta che siano stati sottratti i fondi "locali": si noti che il fondo residuo ha una brillantezza uniforme, che testimonia la sua natura extragalattica (diversamente mostrerebbe una correlazione con le coordinate galattiche o eclittiche). La Fig. 12 mostra in dettaglio lo spettro delle varie componenti di radiazione rilevanti per fotoni con lunghezze d'onda tra 1 e $300 \mu\text{m}$.



Infine Figura 13 mostra una sintetica rappresentazione dello spettro complessivo delle radiazioni cosmiche di fondo dal radio ai raggi gamma piu' energetici, su un enorme intervallo di energia fotonica, di 15 ordini di grandezza. Questo grafico sara' maggiormente discusso nella Sez. 9.5 nel seguito. Per ora ci limitiamo a notare che la componente fotonica piu' rilevante e' il fondo cosmico scoperto nelle microonde nel 1965, oggetto di ampie discussioni piu' oltre nel corso, che, come si vede dal grafico logaritmico, ha un perfetto spettro di corpo nero e inoltre ha un elevatissimo grado di isotropia angolare. Questo fondo include circa $400 \text{ fotoni}/\text{cm}^3$. Il fondo X, invece, il primo ad essere scoperto, corrisponde al piccolo bozzo in Fig. 13 a frequenze fotoniche di 10^{19} Hz .

Possiamo facilmente calcolare la densita' di energia dei fondi cosmici, ampiamente

dominati dal fondo nelle microonde con picco di frequenza a $2 \cdot 10^{11}$ Hz:

$$\varepsilon_\gamma \approx 400 \text{ cm}^{-3} \times h\nu \approx 400 \times 6.610^{-27} \times 210^{11} \text{ Hz} \approx 5.3 \cdot 10^{-13} \text{ erg cm}^{-3} \approx \frac{1}{3} \text{ eV cm}^{-3} \quad [1.2]$$

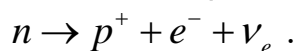
oppure in termini di massa equivalente:

$$\rho_\gamma = \frac{\varepsilon_\gamma}{c^2} \approx 5.3 \cdot 10^{-13} \cdot 10^{-21} \approx 5.3 \cdot 10^{-34} \text{ g cm}^{-3} \quad [1.3]$$

Si noti che $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-12} \text{ erg}$, unita' di misura fondamentale in astrofisica.

1.4 Neutrini cosmici.

I neutrini sono particelle elementari (vedi nota 3), la cui esistenza fu originariamente postulata da Pauli e Fermi per spiegare il disequilibrio di energia nel processo di decadimento β dei nuclei radioattivi:



Viaggiano quasi alla velocita' della luce c ⁵, avendo massa molto piccola.

Estremamente difficili da rivelare, hanno una probabilita' di interazione con la materia (sezione d'urto d'interazione) estremamente bassa, dovuta al tipo di interazione cui queste particelle sono soggette, l'interazione nucleare debole.

Telescopi neutrini utilizzano tipicamente grandi vasche di liquidi poste sotto terra per eliminare il rumore (i segnali) dovuto ai raggi cosmici.

La rilevazione usa l'effetto Cherenkov (piccoli flash di luce prodotti dalla cascata di elettroni provocata dal neutrino, oppure trasformazioni nucleari negli atomi del liquido). E' possibile in questo modo ricostruire l'energia e la direzione di arrivo del ν . La Figura 14 mostra ad esempio un'immagine storica del cielo in neutrini, in cui la sorgente al centro e' il Sole (che e' quindi una intensa sorgente di neutrini per effetto delle reazioni nucleari che avvengono nel suo nucleo). I neutrini stanno divenendo un interessante canale di informazione cosmologica grazie ai nuovi dispositivi che sono stati realizzati per rivellarli: ad esempio il grande osservatorio neutrino ***IceCube***, una gigantesca rete 3-dimensionale di rivelatori installata in Antartide di circa 1 Km di lato, con eccellenti sensibilita' e capacita' di stabilire direzione d'arrivo.

Dalla teoria del Big Bang di cui si parlera' nel Cap.11, si ritiene che l'Universo contenga un flusso sostenuto di neutrini delle tre forme (menzionate in nota ³) di bassa energia, prodotti durante le prime fasi espansive: la teoria prevede circa 1000 neutrini/cm³ a fronte dei 400 fotoni/cm³. Si tratta di una predizione assai precisa e robusta, tuttavia non facile da verificare con osservazione diretta, trattandosi di

⁵ Un esperimento del 2011 che sembrava aver misurato per i neutrini una velocita' leggermente superiore a quella della luce, si e' dimostrato completamente sbagliato. La velocita' massima di propagazione di segnali e' quella della luce nel vuoto c , costante in tutti i sistemi di riferimento, una delle quantita' meglio misurate e cruciale per le osservazioni cosmologiche.

particelle ora di molto bassa energia. La presenza di neutrini puo' influenzare significativamente la formazione e l'evoluzione delle strutture cosmiche.

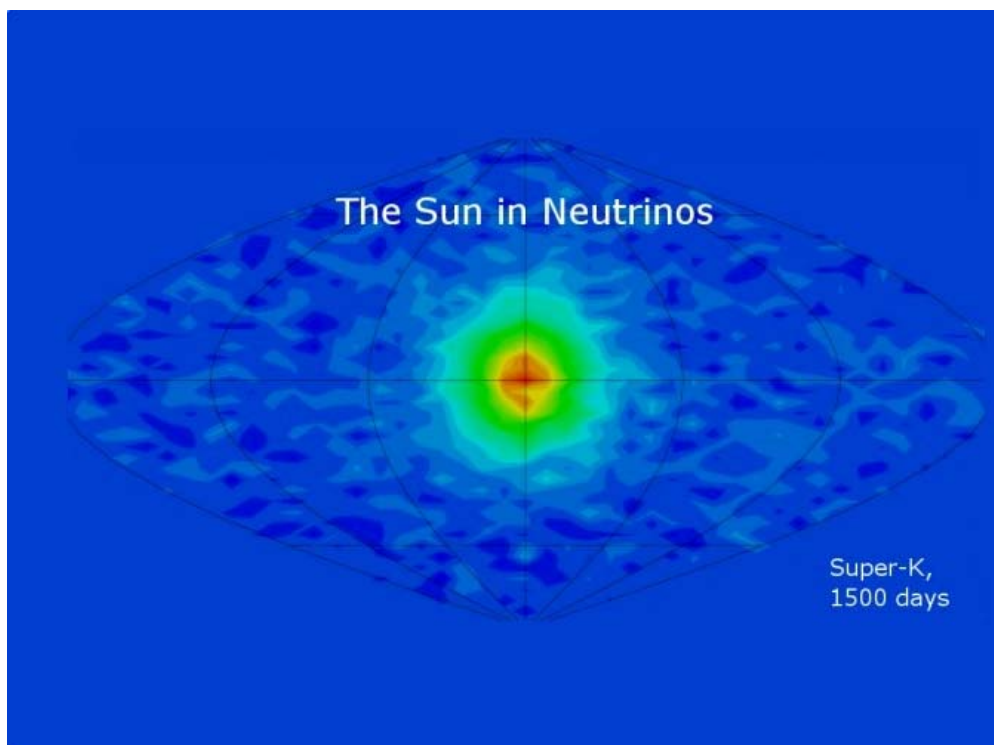


Figura 14

Immagine del Sole visto con il suo flusso di neutrini: l'eccesso di eventi al centro corrisponde a neutrini emessi dal Sole. Altri eventi sparsi sono segnali spuri (di origine atmosferica, o altro). Mappa ottenuta dall' esperimento Super-Kamiokande [una ex miniera di zinco a 250 Km da Tokio] in 1500 giorni di osservazione.

1.5 Antimateria.

L'esistenza o meno di significative quantita' di anti-materia (ogni particella ha la sua simmetrica in natura, ad es. il positrone, con carica positiva, e' l'anti-particella dell'elettrone) e' uno dei rilevanti problemi della cosmologia, sia osservativa che, in particolare, teorica. Osservazioni ormai pluri-decennali non ne hanno mai rilevato tracce significative. D'altra parte, se ve ne fossero in quantita' rilevanti, alle superfici di contatto tra volumi occupati da materia normale e antimateria si verificherebbero enormi rilasci di energia e grandi quantita' di luce, ben facilmente rilevabili.

Le teorie fisiche sulle primissime fasi dell'espansione cosmica prevedrebbero un eguale numero delle due tipologie di particelle. Evidentemente deve essersi verificata una asimmetria tra il numero di particelle e le rispettive antiparticelle, molto presto durante l'espansione, che, a seguito di annichilazioni, ha portato all'attuale Universo dominato da materia normale. Questo antico processo e' detto della *genesì dei barioni*, e come si sia realmente verificato costituisce un notevole problema per la fisica.

Uno dei piu' importanti recenti studi sull'anti-materia sta attualmente utilizzando l'esperimento spaziale a guida CERN e NASA dell'*Alpha Magnetic Spectrometer* (AMS), a bordo della Stazione Spaziale Internazionale, un enorme strumento del peso di 7 tonnellate portato in orbita con lo Shuttle (AMS-2 e' stato installato nel 2011 e

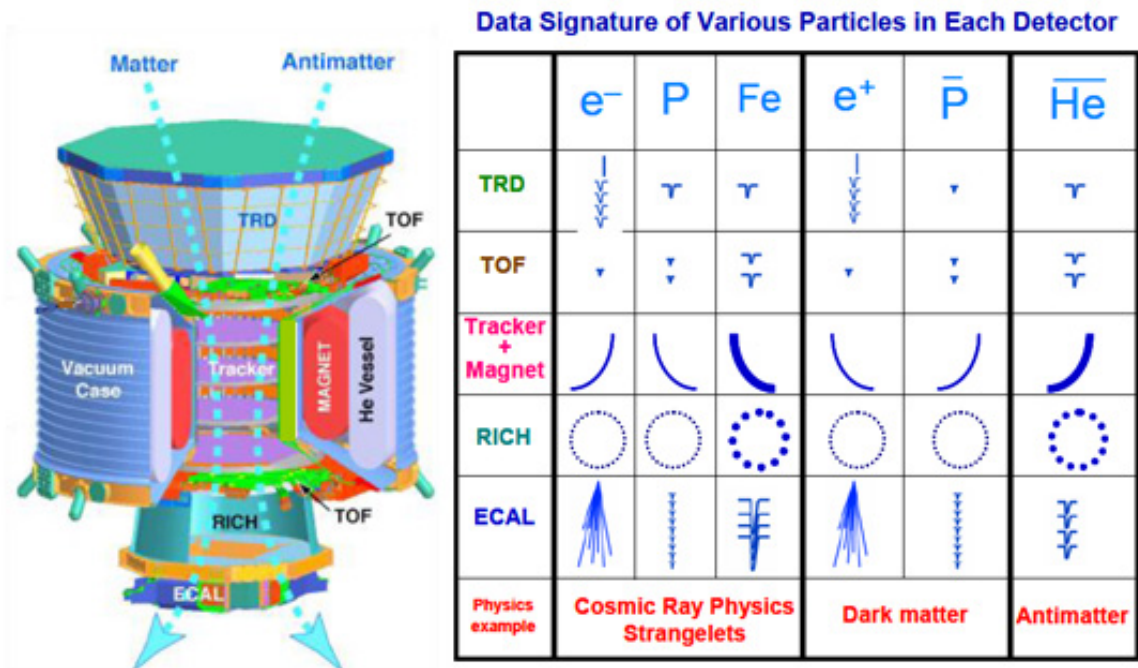
che lavorera' per molti anni, le figure a seguire lo illustrano). AMS sta cercando di fornire limiti alla quantita' di anti-materia nei raggi cosmici. Ad esempio, nessun nucleo complesso di anti-materia (ad esempio nuclei di anti-Elio) e' stato identificato, attualmente i limiti misurati sono di una particella di anti-materia su 1 milione di materia, ma una versione attualmente operativa ci si aspetta sia in grado di portare a breve questo limite ad 1 su un miliardo. Evidentemente, l'antimateria non esiste se non prodotta da processi di creazione di coppie particella-antiparticella, ad esempio per decadimento di fotoni di alta energia. I principali motivi di interesse di AMS sono in ogni caso menzionati nella Sez. 1.6 seguente.

A lato: l'Alpha Magnetic Spectrometer (AMS) fotografato a bordo della Stazione Spaziale.

Sotto: schema di funzionamento dello strumento (del peso totale di 7 tons).



AMS: A TeV Magnetic Spectrometer in Space



1.6 Materia oscura.

Si tratta verosimilmente di materia non barionica, di cui esiste ampia evidenza astrofisica in numerosi oggetti cosmici (galassie, gruppi ed ammassi di galassie, le strutture su grande scala, l'Universo nel suo insieme). Si tratta di particelle che essenzialmente non interagiscono con il campo elettromagnetico e con le altre particelle, se non in modo gravitazionale. Non sono quindi osservabili eccetto che per via degli effetti gravitazionali che producono.

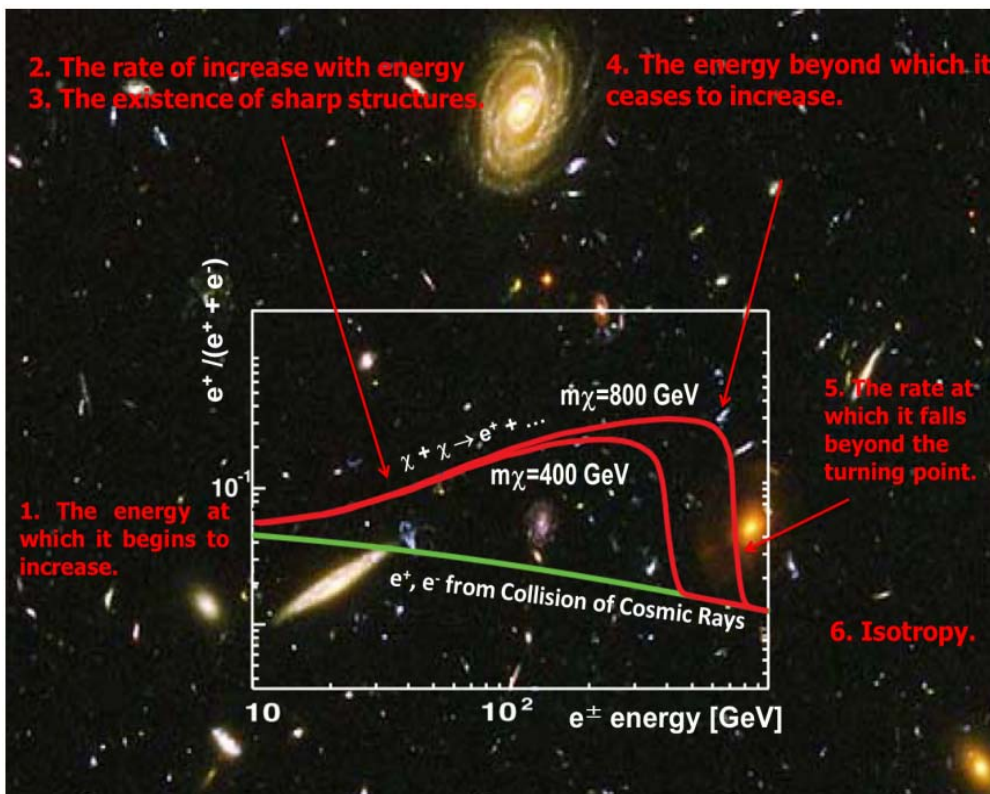
Particelle che sono state suggerite essere possibili candidati sono l'*assione* e il *neutralino*, ipotizzate nell'ambito delle teorie unificate delle forze fondamentali della natura, le teorie super-simmetriche. Queste particelle sono anche denominate WIMPS (*Weakly Interacting Massive Particles*).

Osservazioni cosmologiche indicano che circa l'80% della materia gravitante nell'Universo sia costituita da materia oscura (e il restante 20% da materia barionica, di cui il 10% collassata in stelle e galassie, si veda Sez. 3). La materia gravitante a sua volta costituirebbe circa il 30% dell'intero contenuto di massa-energia dell'Universo.

Numerosi esperimenti sono oggi dedicati alla rilevazione di particelle di materia oscura presenti nell'alone della nostra galassia (sappiamo che la ci devono essere in quantita' per spiegare le curve di rotazione piatte delle galassie a spirale). Si sta verificando qui una convergenza di interessi tra astronomi (che vedono gli effetti gravitazionali della materia oscura) e i fisici (delle particelle in particolare) che cercano di scoprire da che cosa essa sia costituita. Al momento, nessun esperimento terrestre ha rilevato significative presenze di tali particelle.

L'opportunita' forse piu' interessante e' attualmente fornita dall'esperimento AMS precedentemente discusso. Questo ha rilevato un eccesso di anti-materia nella forma di positroni e^+ rispetto agli elettroni, eccesso che mostra un preciso andamento con l'energia riportato schematicamente nella figura. Confrontato con quanto previsto per il rapporto del numero di e^+ ed e^- , e considerando l'isotropia dell'effetto, indicherebbe come possibile origine un segnale da particelle di Materia Oscura, che collidendo tra loro darebbero origine ad una coppia e^+ e e^- . Cio' sarebbe consistente con particelle di materia oscura neutre, tipo neutralini, di massa-energia attorno al TeV. Queste ricerche sono attualmente in veloce progresso e ci aspettiamo risultati importanti a breve.

Da citare infine anche ricerche in corso da parte del satellite in raggi Gamma *Fermi/GLAST*, e da altri telescopi gamma, per individuare radiazione ad alta energia prodotta dal decadimento di particelle di materia oscura, osservando in particolare nelle direzioni di cielo dove ci si aspettano presenti grandi e concentrati quantitativi di materia oscura (il centro dinamico della nostra Galassia con la sua grande concentrazione di massa gravitante, l'alone della galassia Andromeda, il centro dell'ammasso della Vergine, ecc.).



La frazione di positroni (e^+) sul totale di elettroni e positroni in funzione dell'energia, misurato da AMS. La curva in verde mostra il rapporto atteso nel caso di una produzione di anti-elettroni per collisioni di raggi cosmici. Le curve in rosso sono i dati di AMS, che mostrano quindi un chiaro eccesso forse spiegabile come effetto della presenza diffusa di materia oscura.

1.7 Energia oscura.

Varie indipendenti osservazioni cosmologiche indicano la presenza di un termine repulsivo nell'espansione generale dell'Universo, responsabile del fatto che l'espansione, anziché essere rallentata dalla presenza di materia gravitante, appare oggi accelerata. Un'espansione accelerata richiede, per essere spiegata, una forza repulsiva di origine ignota che agisca nell'Universo.

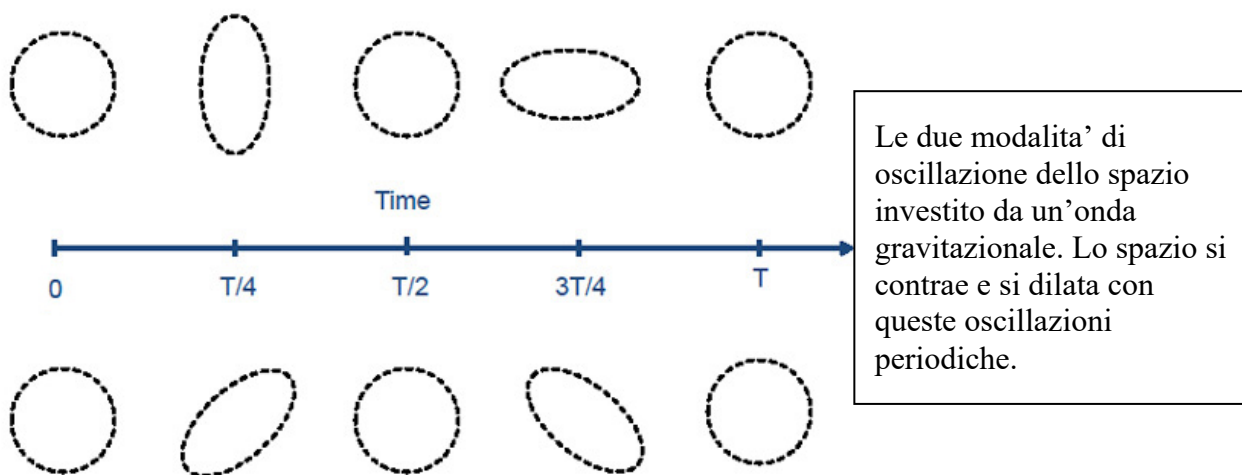
Un termine di repulsione cosmica era già stato introdotto da Einstein nel 1917 nell'ambito della sua teoria cosmologica che si basava sul concetto, dominante all'epoca, di un universo statico: una soluzione di questo genere richiedeva una nuova componente dinamica (il cosiddetto termine costante Λ), che inseguito era stato abbandonato come non-fisico. Ora questo termine repulsivo è ritornato in voga a seguito di osservazioni di sorgenti campione (supernove a grande distanza spazio-temporale, si veda Sez. 10), che mostrano un Universo in espansione accelerata.

Il termine Λ è interpretato corrispondere ad una densità di energia del vuoto, che la fisica delle interazioni fondamentali indicano assumere valori diversi da zero e molto elevati. Le analisi attuali indicano che la densità di energia oscura sia circa 3 volte superiore alla densità di energia della materia oscura e barionica sommate insieme, e quindi che essa domini da questo punto di vista l'Universo al tempo cosmico attuale.

1.8 Radiazione gravitazionale.

Le onde gravitazionali, che sono perturbazioni della metrica spazio-temporale che si propagano alla velocità della luce, sono previste dalla teoria della Relatività Generale (ma anche da altre teorie della gravitazione). Tali onde si generano da variazioni violente del potenziale gravitazionale (ad esempio nel collasso di stelle massive durante gli stadi finali della loro evoluzione, nelle esplosioni stellari, nella fase di coalescenza di sistemi binari stellari, di stelle di neutroni, o di buchi neri massivi e super-massivi, ad esempio durante scontri e *merging* di galassie).

Le modalità di distorsione dello spazio sono illustrate nella figura sotto.



E' anche possibile che esista un fondo di onde gravitazionali generate durante il Big Bang, che potrebbe anche avere lasciato tracce nello stato di polarizzazione dei fotoni della radiazione di fondo primordiale nelle microonde. Un campo di onde gravitazionali e' dunque una verosimile componente cosmica, anche se con una energetica trascurabile.

L'esistenza delle onde gravitazionali e' stata studiata con una varieta' di esperimenti terrestri dedicati alla rilevazione diretta tramite antenne altamente isolate, in grado di rivelare variazioni periodiche del potenziale gravitazionale. Fino ad oggi la rilevazione di questi segnali e' stata limitata dal rumore ambientale troppo elevato. Tuttavia l'esistenza del fenomeno e' stata provata in modo indiretto tramite un esperimento spettacolare che ha riguardato osservazioni su un esteso intervallo temporale di un sistema binario di pulsar emittenti radiazione radio pulsata, PSR J1915+1606, scoperto da Taylor e Hulse nel 1975 (premi Nobel nel 1993). Il sistema si sta contraendo, come evidenziato dalla diminuzione del periodo orbitale, a causa di emissione di onde gravitazionali, con un tasso esattamente (entro 0.3%) in accordo con le previsioni della Relatività Generale [un ulteriore straordinaria dimostrazione delle capacita' dell'astronomia di andare in soccorso alla fisica in situazioni

particolari come questa].

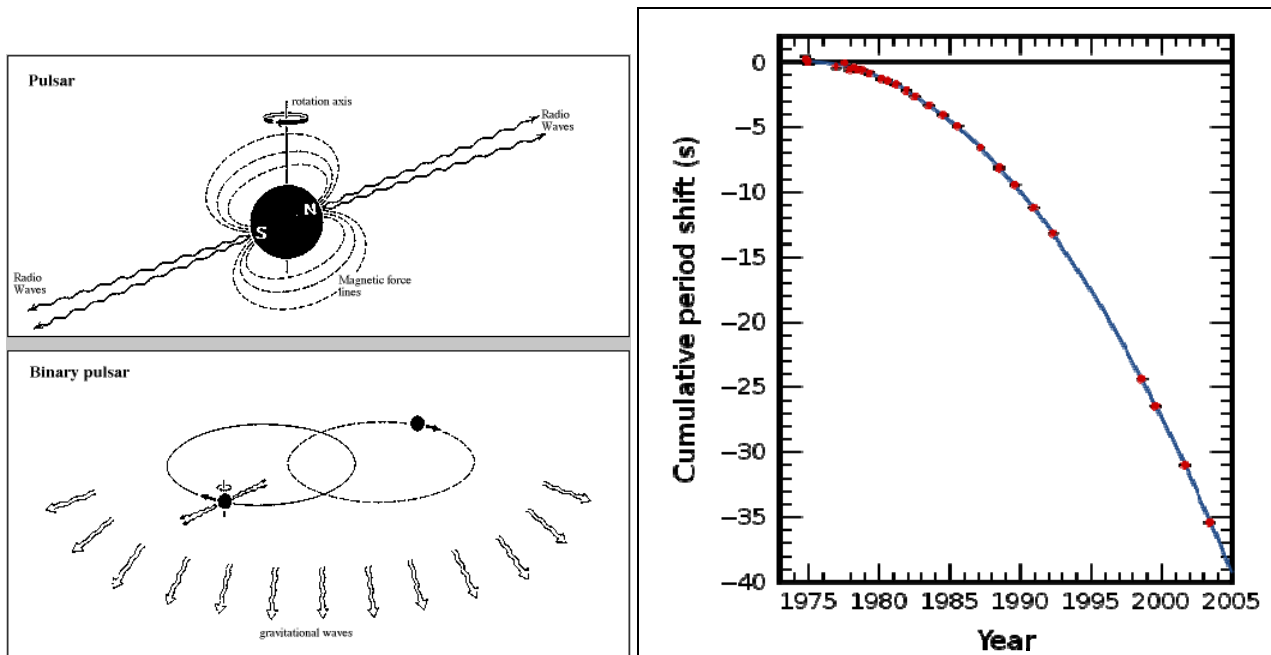


Figura 15

Esperimento che ha portato alla rilevazione indiretta delle onde gravitazionali in straordinario accordo con le previsioni della Relativita' Generale. Si tratta di osservazioni radio con il telescopio di Arecibo del sistema binario di pulsar PSR J1915+1606, in rotazione. Come si nota a destra, il periodo di rotazione del sistema si sta accorciando, fenomeno che si puo' solo spiegare con la diminuzione della separazione delle due componenti del sistema binario, conseguenza di perdita di energia tramite emissione di onde gravitazionali.

Recentemente, l'11 febbraio 2016, e' stata pubblicata la scoperta di un segnale molto chiaro di onde gravitazionali ottenuta con due antenne negli Stati Uniti (LIGO, figura sotto). Si tratta di 2 antenne in grado di misurare variazioni di distanza tra specchi a 4 Km uno dall'altro con una precisione di $10^{-18} m$: le onde producono variazioni periodiche di queste distanze attraversando l'antenna. I segnali registrati quasi simultaneamente dalle due antenne sono qui sotto riportati.

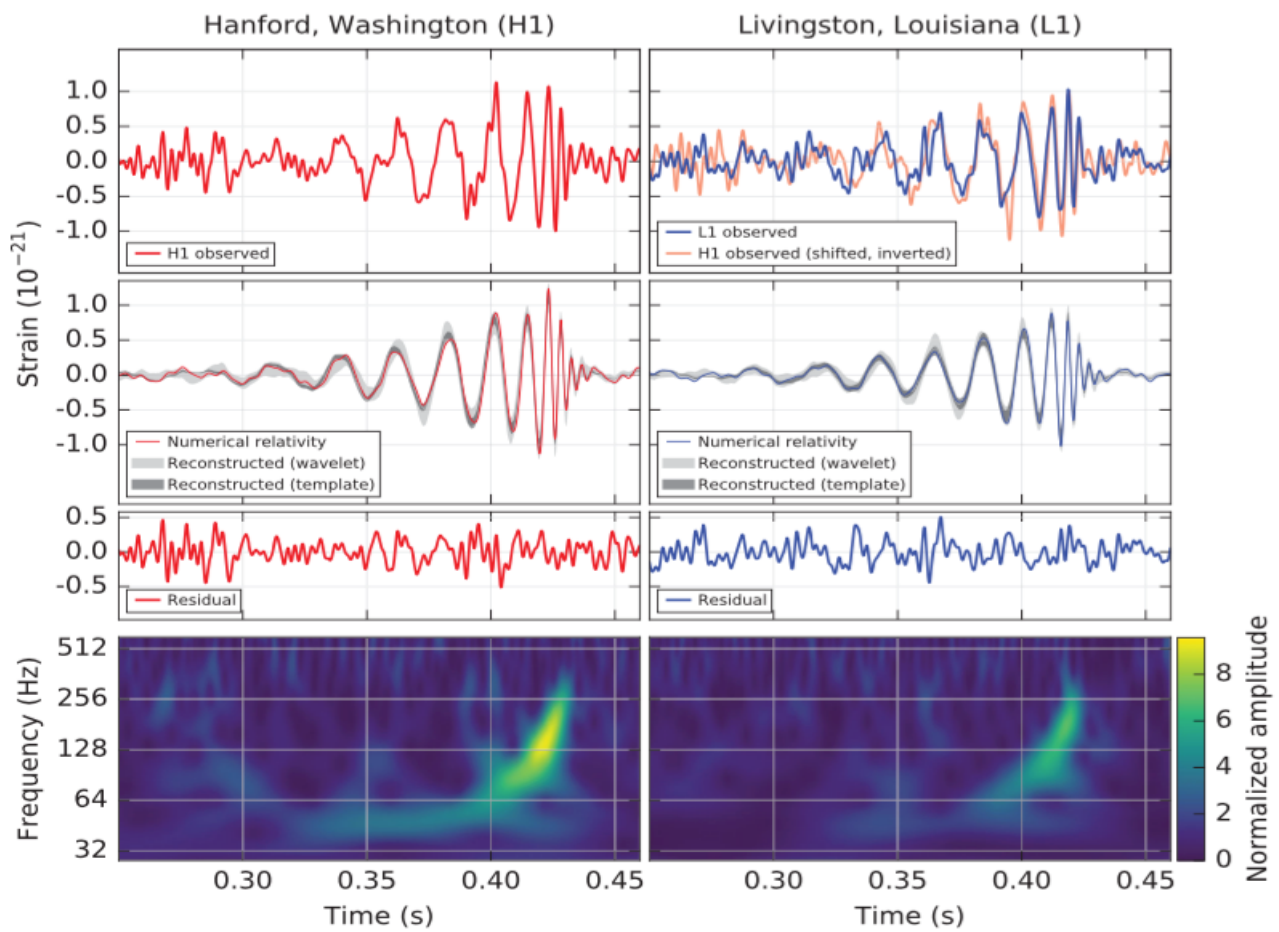
Come si vede, i segnali registrati dai due dispositivi sono perfettamente consistenti tra loro, e hanno una frequenza di circa 100 Hz, che e' quella che ci si aspetta da sistemi binari di massa stellare. A breve anche l'analoga antenna italiana VIRGO entrera' in funzione con caratteristiche simili, che ridurra' l'incertezza posizionale del segnale.

In futuro vi sono progetti di osservazioni spaziali di onde gravitazionali dal cosmo basate su complessi sistemi di satelliti (progetto eLISA) che, entro 10-15 anni, che dovrebbero portare ad una sistematica rilevazione diretta della radiazione gravitazionale anche di bassa frequenza (frazioni di Hz), caratteristica di sistemi di

grande massa (buchi neri super-massivi). Questo capitolo della cosmologia osservativa e' ancora interamente da aprire.



A sinistra: una delle due antenne del sistema americano LIGO. A destra l'antenna italiana VIRGO, che entrera' in funzione a fine 2016.



1.9 Interazione tra le varie componenti cosmiche.

Questione ovviamente del tutto a se' stante e' quella che riguarda le varie possibili interazioni, che possono avvenire oggi o che sono avvenute in epoche passate, tra le diverse componenti cosmiche.

Un tipo ovvio di interazione e' quello ad esempio tra i raggi cosmici extragalattici e le radiazioni di fondo cosmico, interazioni che generano fotoni ad alta energia per Compton Inverso. Il processo fa perdere energia, in alcuni casi anche completamente, alle particelle.

Un altro tipo di interazioni avviene all'interno stesso di una componente cosmica. E' quanto succede per i fotoni: e' stato messo in luce recentemente una interazione tra fotoni cosmici di altissima energia emessi da galassie attive (fotoni con energie di 1000 MeV, vedi Cap. 12) con fotoni diffusi delle radiazioni di fondo a piu' bassa energia, ad esempio i numerosi fotoni del fondo cosmico nelle microonde o quello nel lontano infrarosso. Si tratta di un processo previsto dalla fisica quantistica (ovviamente non dalla fisica classica), di *interazione fotone-fotone* che, distruggendo i fotoni che collidono, origina una coppia di elettrone e^- e positrone e^+ .

Infine, in alcuni casi e' solo attraverso queste interazioni che alcune componenti possono essere rivelate o caratterizzate. E' questo ad esempio il caso del campo di onde gravitazionali generate durante le prime fasi espansive dell'Universo (per effetto di violente variazioni del potenziale gravitazionale): oggi questa radiazione gravitazionale e' troppo debole per essere direttamente rivelata, a causa dell'espansione dell'Universo che ha ridotto l'energia di questa radiazione. Tuttavia ci si aspetta che questa componente generi un modo di polarizzazione dei fotoni della radiazione cosmica di fondo nelle microonde, CMB. Questo stato di polarizzazione si tenta oggi di rivelare allo scopo di determinare le proprieta' del campo di onde gravitazionali primordiale: ove osservata questa polarizzazione, si otterrebbero informazioni uniche su processi fisici occorsi durante o pochissimo dopo il Big Bang

6.

⁶ Recenti risultati di osservazioni di questo stato di polarizzazione sono stati riportati, si veda ad es. <http://news.stanford.edu/news/2014/march/physics-cosmic-inflation-031714.html>, un risultato attualmente controverso.

Appendice 1.A

Domini spettrali per la cosmologia (*da Rowan-Robinson*)

Table 1.2 The electromagnetic spectrum for astronomy

Band	Radio	Microwave	Submillimetre	Far infrared	Near infrared
Frequency range	10^6 – 10^{10} Hz	10^{10} – $10^{11.5}$ Hz	$10^{11.5}$ – $10^{12.5}$ Hz	$10^{12.5}$ – $10^{13.5}$ Hz	$10^{13.5}$ – $10^{14.6}$ Hz
Wavelength range	3 cm–300 m	1 mm–3 cm	100 μ m–1 mm	10–100 μ m	0.8–10 μ m
Observing platform	Ground (satellite for $\mu < 3 \times 10^7$ Hz)	Ground	Mountain (1 mm, 300 μ m) balloon, rocket, aircraft	Ground, aircraft, balloon, rocket, satellite	Ground
Detector	Radio receiver	Radio receiver	Bolometer	Bolometer	Photograph, CCD
Bright observed sources	Cas A (supernova remnant) Sun Cyg A (radio galaxy) Sag A (galactic centre) Cen A (radio galaxy) Vir A (radio galaxy) Radio galaxies Quasars	Sun Crab nebula (supernova remnant) Omega nebula Cas A Orion nebula Radio galaxies Quasars	Sun Planets Galactic centre Orion nebula Gas and dust clouds in the Galaxy 3C273 (quasar) 3C84 (Seyfert galaxy) M82 (starburst galaxy)	Sun Planets Gas and dust clouds in the Galaxy Normal and Starburst galaxies	Sun Planets Cool stars or stars in dust clouds Galaxies Quasars
Faintest detectable flux (centre of band)	10^{-30} W m ⁻² Hz ⁻¹	10^{-9} W m ⁻² Hz ⁻¹	10^{-27} W m ⁻² Hz ⁻¹	10^{-30} W m ⁻² Hz ⁻¹	10^{-32} W m ⁻² Hz ⁻¹
Approximate number of sources in sky to this level	10^8	10^6	10^4	10^6	10^{10}
Main contributing types of sources	Radio galaxies, quasars	Radio galaxies, quasars	Galactic sources	Stars, galaxies	Stars, galaxies
Main contribution to background radiation	Milky Way, radio galaxies	Cosmic, 2.7 K black body	Atmosphere	Atmosphere	Atmosphere, Zodiacal light

Band	Visible	Ultraviolet	Soft X-ray	Hard X-ray	γ -ray
Frequency range	$10^{14.6}$ – $10^{14.9}$ Hz	$10^{14.9}$ – $10^{16.5}$ Hz	$10^{16.5}$ – $10^{17.5}$ Hz	$10^{17.5}$ – 10^{20} Hz	$> 10^{20}$ Hz
Wavelength range	0.4 μ m–0.8 μ m	100–4000 \AA	10–100 \AA (0.12–1.2 keV)	(1.2–370 keV)	(> 370 keV)
Observing platform	Ground	Ground (3000–4000 \AA) Rocket, satellite ($\lambda < 3000$ \AA)	Rocket, satellite	Balloon, satellite	Balloon, satellite
Detector	Photograph, image tube, CCD	Photograph, image tube		Photon counters	
Bright observed sources	Sun Planets Stars Galaxies Quasars	Sun Hot stars Galaxies Quasars	Sun Galactic sources (binary systems with white dwarf, neutron star, or black hole) Rich clusters of galaxies M82 (active galaxy) 3C273 (quasar)		Crab pulsar Galactic disc Vela pulsar 3C273 (quasar)
Faintest detectable flux (centre of band)	10^{-35} W m ⁻² Hz ⁻¹		10^{-35} W m ⁻² Hz ⁻¹		10^{-36} W m ⁻² Hz ⁻¹
Approximate number of sources in sky to this level	10^{10}		10^6		10^3
Main contributing types of sources	Stars, galaxies		Galactic sources, clusters of galaxies, quasars,		
Main contribution to background radiation	Atmosphere, zodiacal light, scattered starlight (galaxies)		Seyferts quasars, Galactic gas, intergalactic gas		Extragalactic sources

Tabella 1.2 (da Rowan-Robinson, *Cosmology*) riporta un *excursus* sui domini dello spettro elettromagnetico disponibili per l'indagine cosmologica (essenzialmente quelli dell'astronomia in generale). La maggior parte di questi tuttavia non sono accessibili dalla Terra e richiedono osservatori collocati al di sopra dell'atmosfera. Questo e' illustrato in modo schematico nella Figura A.1

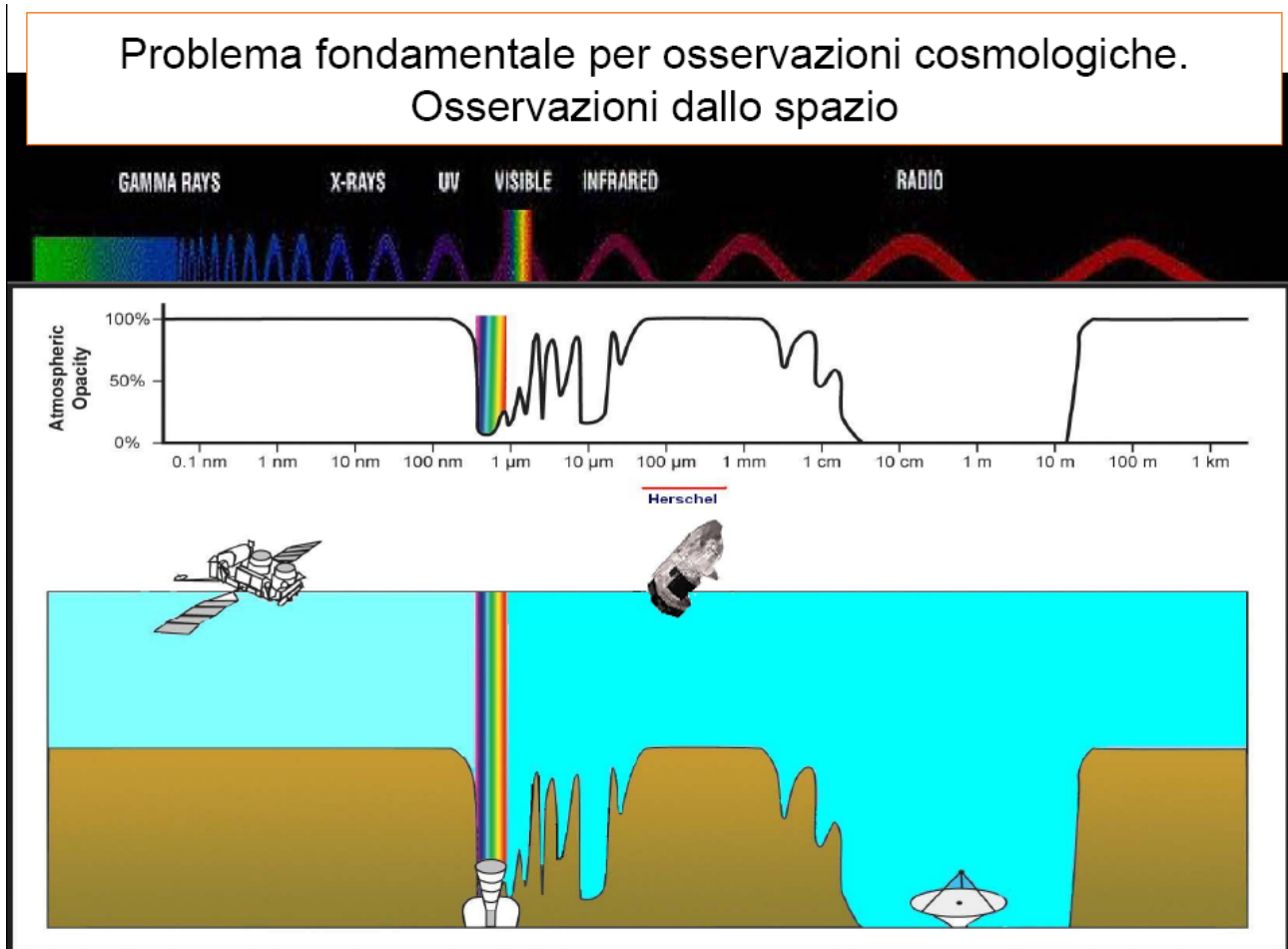


Figura A.1

Nel pannello sopra: andamento dell'opacita' atmosferica in funzione della lunghezza d'onda dei fotoni. L'atmosfera appare trasparente in radio e in ottico/visuale, e parzialmente nel vicino infrarosso e nelle microonde. Per il resto e' accessibile solo dallo spazio.

Si veda:

<http://www.astro.unipd.it/franceschini/CorsoTriennale/>

Costanti di utilizzo comune

Constants	
Gravitational constant	$G = 6.674 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$ $= 4.299 \times 10^{-9} \text{ Mpc M}_{\odot}^{-1} (\text{km/s})^2$
Planck constant	$h_{\text{p}} = 6.626 \times 10^{-27} \text{ cm}^2 \text{ g s}^{-1}$
Speed of light	$c = 2.998 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$
Boltzmann constant	$k_{\text{B}} = 1.381 \times 10^{-16} \text{ erg K}^{-1}$
Proton mass	$m_{\text{p}} = 1.673 \times 10^{-24} \text{ g} = 938.3 \text{ MeV}/c^2$
Neutron mass	$m_{\text{n}} = 1.675 \times 10^{-24} \text{ g} = 939.6 \text{ MeV}/c^2$
Electron mass	$m_{\text{e}} = 9.109 \times 10^{-28} \text{ g} = 0.511 \text{ MeV}/c^2$
Electron charge	$e = -4.803 \times 10^{-10} \text{ esu}$ $= -1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Thomson cross-section	$\sigma_{\text{T}} = 6.652 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$
Stefan–Boltzmann constant	$\sigma_{\text{SB}} = 5.67 \times 10^{-5} \text{ erg cm}^{-2} \text{ K}^{-4} \text{ s}^{-1}$
Radiation constant	$a_{\text{r}} = 4\sigma_{\text{SB}}/c = 7.566 \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4}$

Units:	
Solar mass	$1 \text{ M}_{\odot} = 1.99 \times 10^{33} \text{ g}$
Solar radius	$1 \text{ R}_{\odot} = 6.960 \times 10^{10} \text{ cm}$
Solar luminosity (bolometric)	$1 \text{ L}_{\odot} = 3.827 \times 10^{33} \text{ erg s}^{-1}$
Astronomical unit	$1 \text{ AU} = 1.496 \times 10^{13} \text{ cm}$
Parsec	$1 \text{ pc} = 3.086 \times 10^{18} \text{ cm}$
Electron volt	$1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-12} \text{ erg}$
Angstrom	$1 \text{ \AA} = 1 \times 10^{-8} \text{ cm}$

Cosmological parameters	
Hubble constant	$H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$
Present Hubble time	$H_0^{-1} = 9.78h^{-1} \text{ Gyr}$
Present Hubble radius	$cH_0^{-1} = 2997.9h^{-1} \text{ Mpc}$
Present critical density	$\rho_{\text{crit}} = 1.879 \times 10^{-29} h^2 \text{ g cm}^{-3}$ $= 2.775 \times 10^{11} h^{-1} \text{ M}_{\odot} / (h^{-1} \text{ Mpc})^3$
Present photon density	$\Omega_{\gamma,0} = 2.488 \times 10^{-5} h^{-2}$

$h \equiv H_0 / 100 \text{ Km / sec / Mpc}$

2. UNA COMPONENTE COSMOLOGICA FONDAMENTALE: LE GALASSIE NORMALI

2.1 Tipologie di galassie

Tanto quanto le stelle sono l'elemento costitutivo del cielo visibile ad occhio nudo, altrettanto le galassie costituiscono un elemento fondamentale dell'Universo globale, al di fuori della nostra Galassia. Le loro dimensioni caratteristiche sono di 10-30 Kpc, mentre la distanza tipica tra loro è alcuni Mpc in media. Corrispondentemente, la densità media di barioni all'interno delle galassie è $\sim 10^8$ volte superiore rispetto alla media universale.

Le galassie sono dunque strutture molto ben organizzate e caratterizzate da una piuttosto limitata varietà di specie morfologiche. Perché la materia barionica nell'universo sia così caratteristicamente organizzata in queste unità, e quindi come questa strutturazione abbia avuto origine, è uno dei temi centrali della cosmologia moderna. In ogni caso, le galassie sono usate come "particelle" traccianti l'Universo e le sue strutture, cosicché una loro comprensione, pur semplificata, è necessaria. Ben visibili in ottico sino alle più grandi distanze, l'osservazione delle loro emissioni integrate ha un ruolo fondamentale nella comprensione della struttura su grande scala dell'universo, e per questo diamo qui alcuni cenni sulla popolazione e sull'astrofisica di base che ne regola l'emissione.

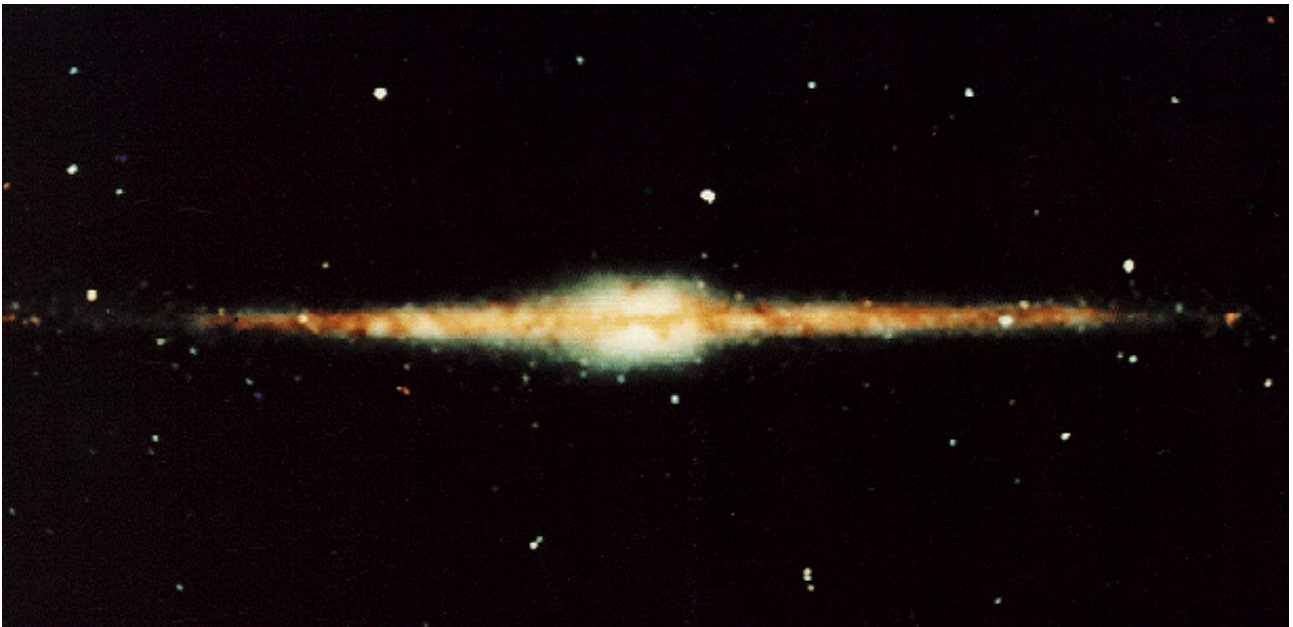


Figura 1. Immagine della Via Lattea osservata dal nostro sistema di riferimento terrestre. E' stata ottenuta con osservazioni del satellite COBE (esperimento DIRBE) nel 1990 a lunghezze d'onda del vicino IR. Il centro dell'immagine contiene il centro galattico. Sono ben visibili le componenti di disco e bulge della Galassia.

La galassia prototipo: la Via Lattea. La più vicina galassia è ovviamente quella che contiene il Sistema Solare, la Via Lattea (una magnifica immagine della quale è riportata in Figura 1).

Uno schema delle varie componenti della *Via Lattea* è riportato in Figura 2. Nello schema sono rappresentate le seguenti componenti.

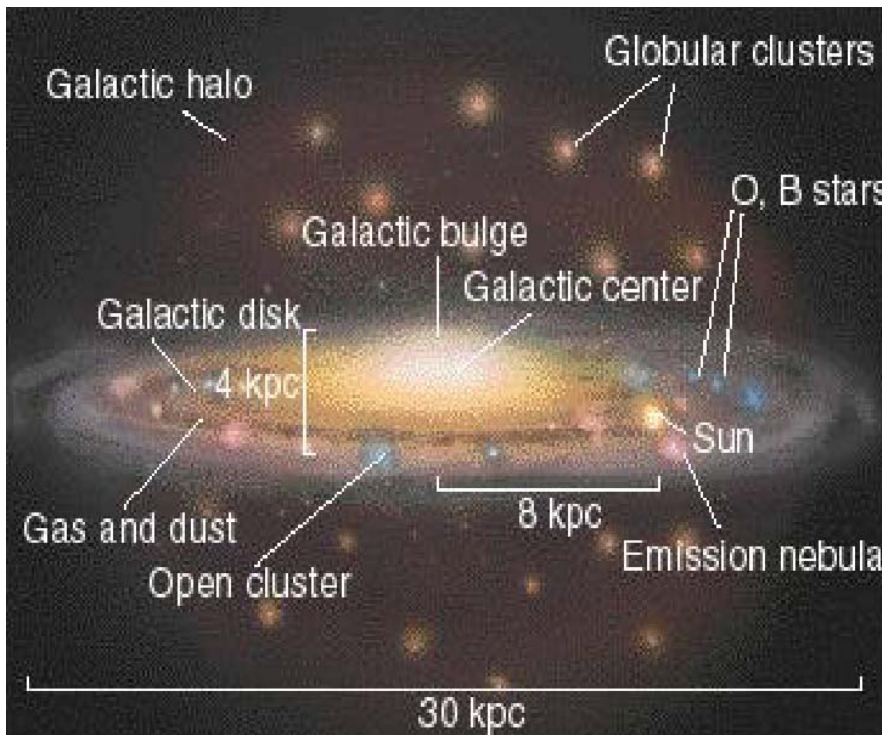


Figura 2. Schema rappresentativo delle componenti principali della nostra galassia, la Via Lattea. Si notano principalmente l'alone, il bulge e il disco.

L'alone galattico. In esso troviamo gli ammassi globulari più antichi. Le età possono essere dedotte dallo studio del diagramma HR (si vedano Fig. 5-6-7). Le osservazioni mostrano che l'alone è stato il primo ambiente galattico a formarsi. Stelle d'alone sono molto povere di elementi pesanti e mostrano moti orbitali con forti componenti radiali e scarso contenuto di momento angolare. Due le possibili spiegazioni: *a)* il gas originario da cui le stelle si sono formate aveva forti moti radiali, le stelle si sono formate durante la fase di collasso gravitazionale del gas primordiale, un modo di formazione che va sotto il nome di *collasso monolitico*; *b)* successivamente alla loro formazione, le stelle d'alone hanno subito disturbi dinamici (collisioni gravitazionali, scontri e fusioni, dette anche *merging* tra galassie) che hanno portato a disordinare i loro moti orbitali. Questa seconda ipotesi si connette naturalmente al modello di formazione per "*clustering gerarchico*" tramite *merging*, che oggi gode di un buon credito.

Disco spesso, nucleo e bulge. A causa della presenza di momento angolare, il gas che non è stato trasformato in stelle nella prima fase della formazione dell'alone è collassato in una struttura schiacciata discoidale sorretta dalla rotazione. Si tratta di stelle già piuttosto arricchite in metalli. Lo spessore considerevole di questo disco (~1 Kpc) è ancora probabilmente dovuto all'effetto di *merging* e interazioni tra galassie,

che hanno prodotto un *riscaldamento* dei moti orbitali delle stelle lungo la coordinata ortogonale al piano del disco. Età e metallica delle popolazioni stellari risultano assumere valori intermedi.

Disco sottile. E' la componente più giovane, dovuta al collasso del gas residuo in un piano di simmetria sostenuto dalla rotazione. Il gas è tuttora presente con un ammontare pari al 10% della massa totale galattica. Stelle giovani e blu sono viste addensarsi nei bracci a spirale.

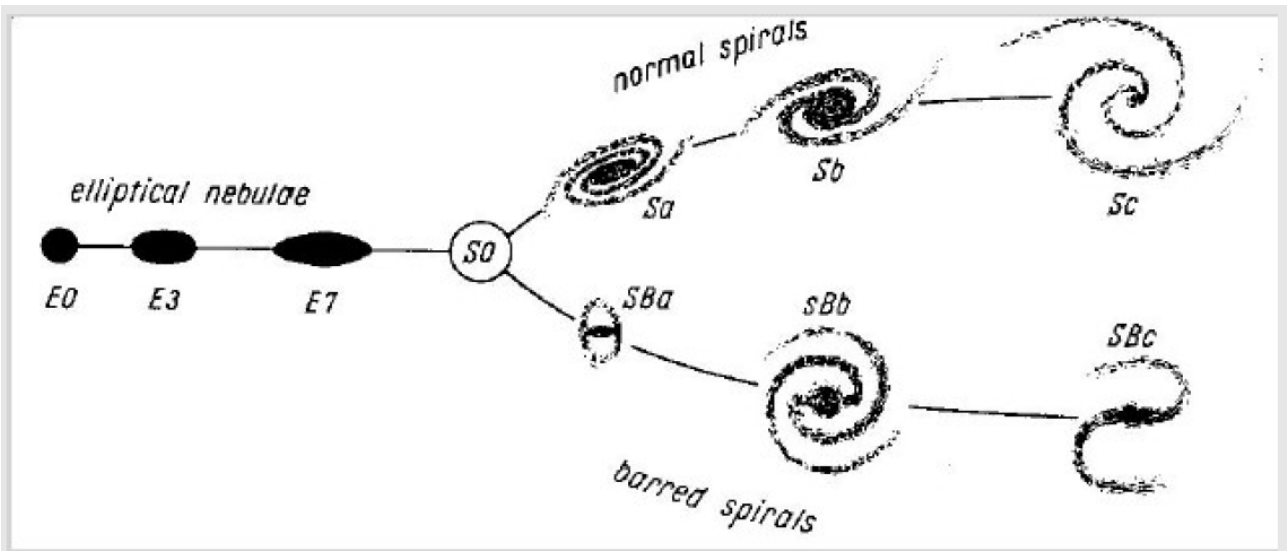
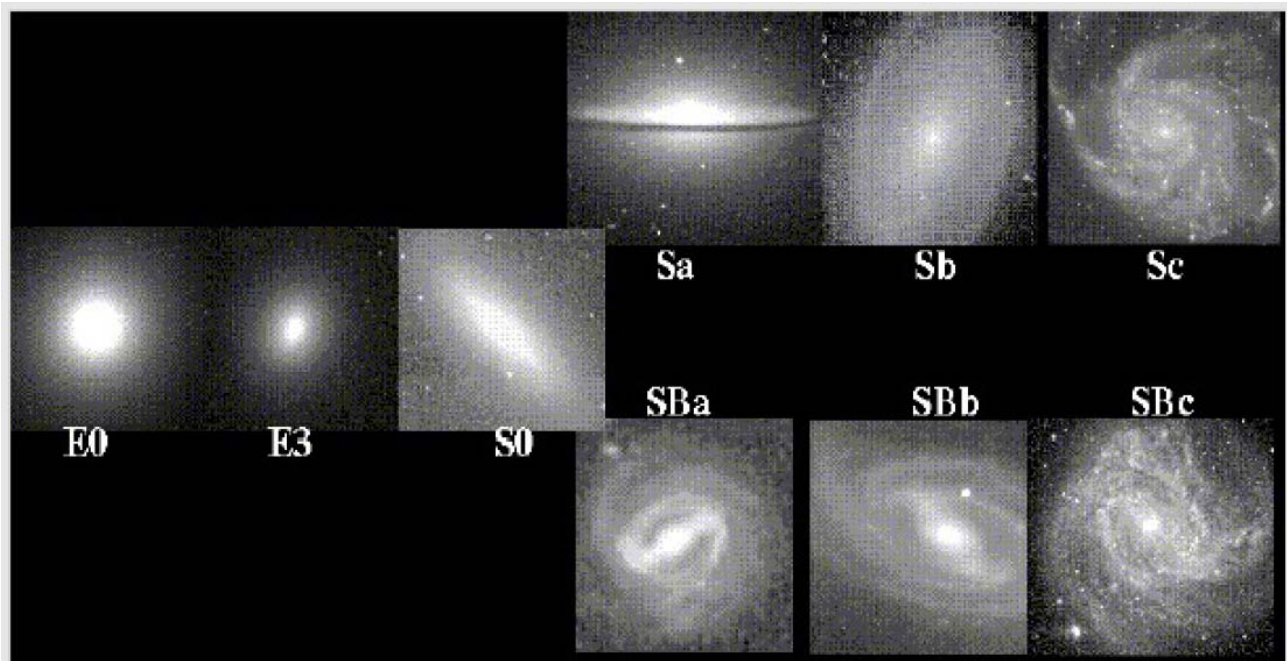


Figura 3. Sopra: varietà delle morfologie galattiche. Sotto: schema della classificazione delle morfologie secondo Edwin Hubble (il cosmologo che le ha per primo osservate e classificate).

Tipologie galattiche. La Via Lattea si ritiene sia un membro piuttosto rappresentativo della intera popolazione delle galassie, in quanto essa contiene tutte le principali componenti morfologiche galattiche che poi si ritrovano, più o meno importanti, nella popolazione generale: *a*) la componente sferoidale, che domina le galassie ellittiche ed S0 (E/S0); *b*) la componente di disco, importante o dominante nelle galassie a spirale.

Le proprietà morfologiche delle galassie sono chiaramente riassunte in Figura 3.

Dagli oggetti di morfologia ellittica alle spirali e irregolari si nota una progressiva diminuzione della componente di bulge e un aumento di quella di disco. La variazione si può quantificare con il parametro che esprime il rapporto tra la quantità di luce prodotta dal disco e quella dal bulge, ovvero il rapporto *disco/bulge*. Vi è una chiara associazione tra morfologia galattica e proprietà delle popolazioni stellari. I bulge (o componenti sferoidali) sono associati a stelle di *popolazione II* (stelle vecchie), i dischi a stelle di *popolazione I* (stelle giovani). Anche il contenuto di mezzo interstellare (gas idrogeno neutro, ionizzato e molecolare - HII - e polveri) è strettamente correlato con la morfologia (galassie sferoidali ne sono quasi completamente prive, galassie a disco ne includono un importante residuo - 10% nella Via Lattea -, galassie irregolari ne sono molto ricche).

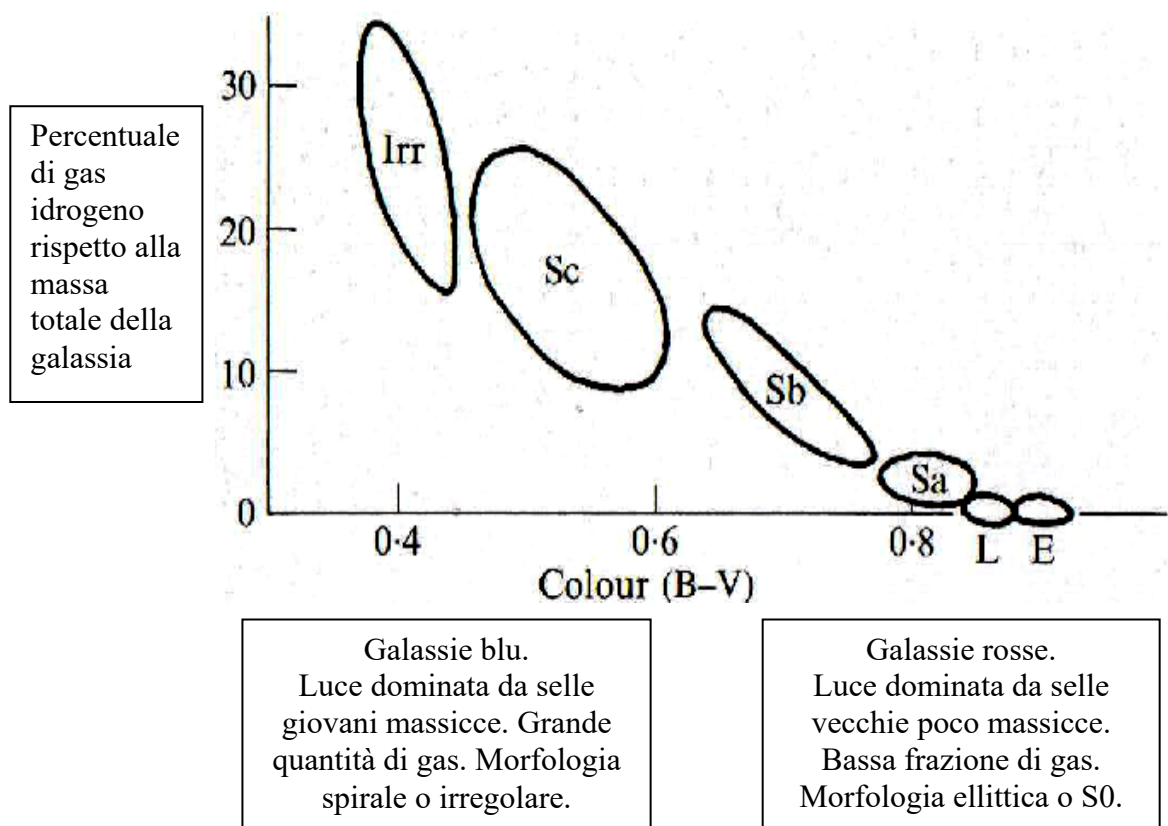


Figura 4. Andamenti della frazione di gas idrogeno in funzione del colore integrato delle varie tipologie galattiche.

Popolazioni stellari in galassie. Le caratteristiche delle popolazioni stellari, e quindi le caratteristiche fotometriche (flusso, colori) e quelle fisiche (luminosità, massa) delle galassie che le ospitano, dipendono essenzialmente dall'equilibrio tra auto-gravità delle stelle e produzione di energia tramite processi di combustione termonucleare del gas, che può avvenire nel nucleo o in uno strato intermedio a seconda della fase evolutiva stellare. L'efficienza della combustione termonucleare, quindi la quantità di energia prodotta per unità di massa, dipendono fortemente dalla temperatura e pressione del plasma stellare, che sono a loro volta determinati dalla massa M della stella, a causa della condizione di equilibrio idrostatico e di auto-gravità che si viene a verificare.

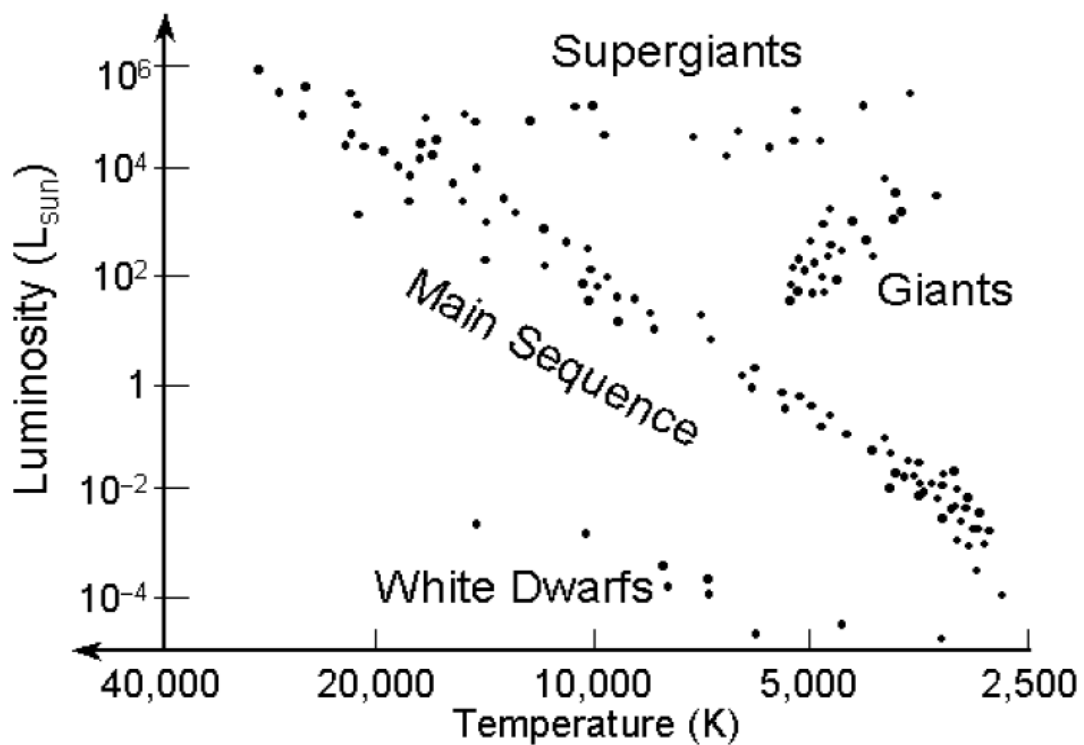


Figura 5. Schema di diagramma HR di una popolazioni stellare con le principali componenti identificate. La stragrande maggioranza delle stelle si colloca lungo una sequenza che attraversa il piano, la sequenza principale.

Da un punto di vista osservativo il diagramma fondamentale utilizzato per descrivere le popolazioni stellari è il diagramma di **Hertzsprung-Russel** (HR), che può essere espresso in termini dei due osservabili stellari, la *magnitudine assoluta* contro il *colore*, ovvero delle due quantità fisiche *luminosità* contro *temperatura superficiale* T . Distribuzioni di popolazioni stellari su questi grafici sono rappresentati nelle Figure 5, 6 e 7.

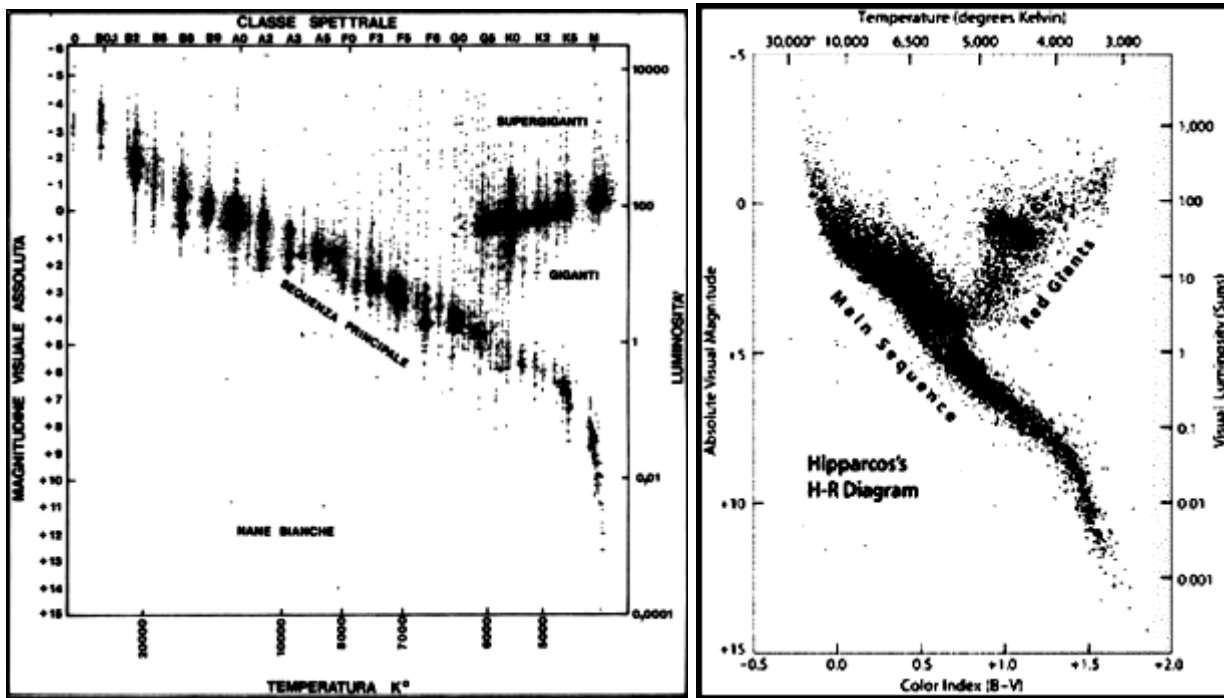


Figura 6. Diagrammi HR di popolazioni stellari giovani. Il diagramma di sinistra e' quello originariamente ottenuto da Hertzsprung e Russel.

La maggior parte delle stelle nel diagramma HR si colloca lungo la sequenza principale, durante la lunga fase di bruciamento dell'idrogeno in elio nel nucleo stellare. La comprensione del diagramma HR, che principalmente determina le caratteristiche fotometriche delle popolazioni stellari e la loro evoluzione, nonché quindi quelle delle galassie che le ospitano, richiede che stabiliamo alcune semplici proprietà strutturali delle stelle.

2.2 Relazioni strutturali fondamentali delle stelle

Equilibrio idrostatico e termodinamico. Equipartizione energetica.

Ricaviamo alcune leggi di scala strutturali per stelle sulla sequenza principale (corrispondente alla zona del diagramma HR ove trascorrono la gran parte del loro tempo di vita e producono il grosso della loro energia). La trattazione che segue assume fondamentalmente che i tempi-scala evolutivi della stella siano molti lunghi (cosa che si applica bene appunto alle stelle della sequenza principale). Questo implica ad esempio una buona ripartizione delle energie in gioco (gravitazionale, termica) e che lo spettro stellare si possa approssimare a quello di un corpo-nero. Assumeremo inoltre per semplicità una relazione tra materia e radiazione governata dall'interazione tra campo elettromagnetico ed elettroni liberi, con una probabilità di interazione fotone-elettrone (detta sezione d'urto, che corrisponde all'area di

collisione tra fotoni ed elettroni) pari a $\sigma_T=6.65 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$, indipendente dalla frequenza dei fotoni.

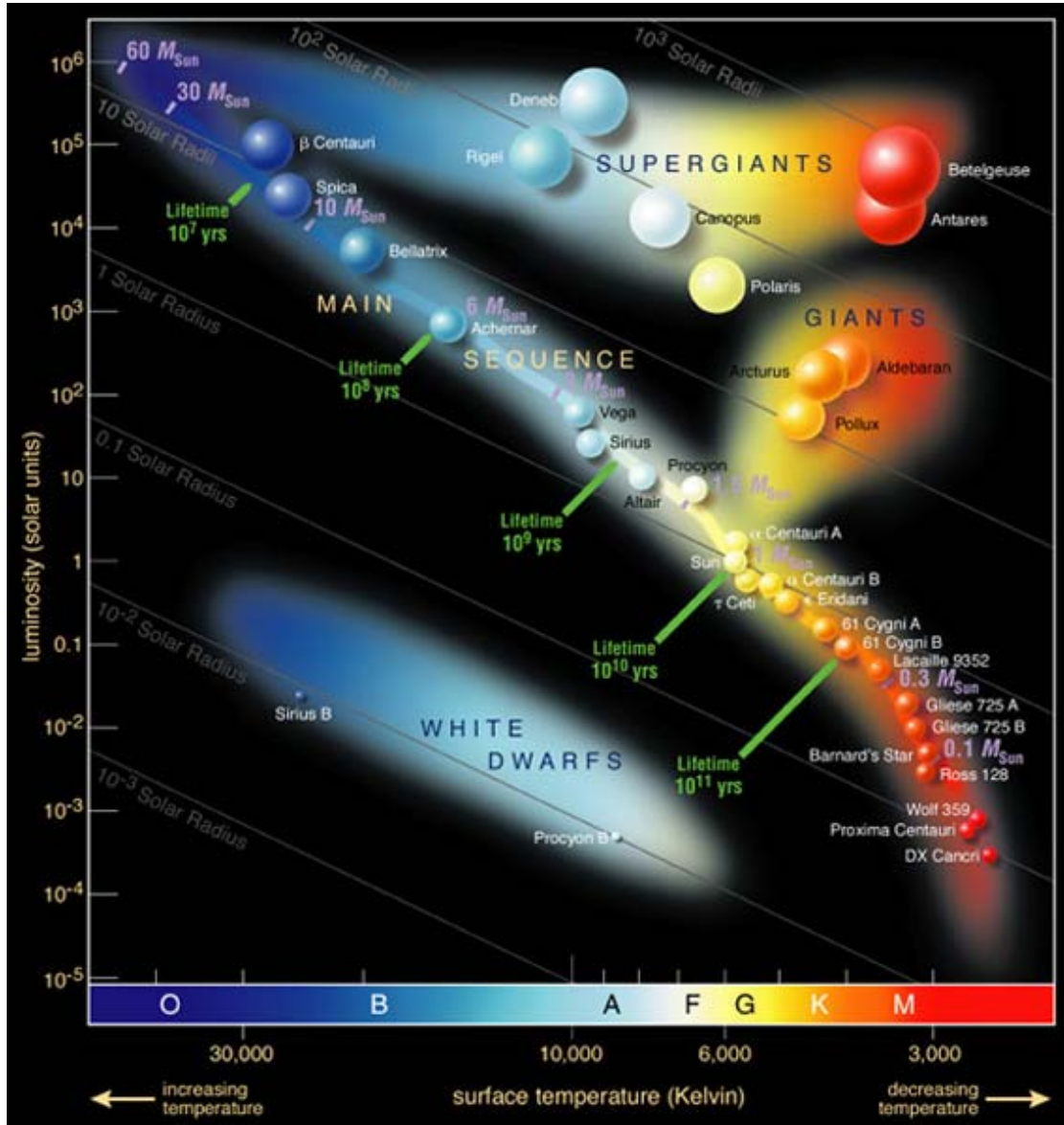


Figura 7. Diagrammi HR della luminosita' contro temperatura e luoghi della varie popolazioni di stelle. Immagine tratta da www-astro.ulb.ac.be/~siess/prog.html

Assumiamo di considerare una stella di densità uniforme. Introdurre i dettagli di un profilo di densità cambia solo un po' i valori delle costanti moltiplicative delle relazioni. Assumiamo equilibrio viriale tra l'energia potenziale gravitazionale e l'energia cinetica delle particelle del gas stellare [questo corrisponde ad assumere che le particelle e il campo di gravità abbiano avuto tempo sufficiente per dialogare tra loro e ridistribuire le varie forme di energia – cinetica, gravitazionale]. Assumiamo

come misura dell'energia cinetica media delle particelle la temperatura T del gas. Ciò implica che energia gravitazionale ed energia termica totale della stella siano circa eguali:

$$GM^2 / R \sim nkT R^3 \quad [1]$$

n : densità di gas, T : temperatura, R : raggio stellare

Poiché $n \sim M/R^3$, sostituendo si ha:

$$T \sim M^2 / R^4 \times R^3 / M \sim M / R. \quad [2]$$

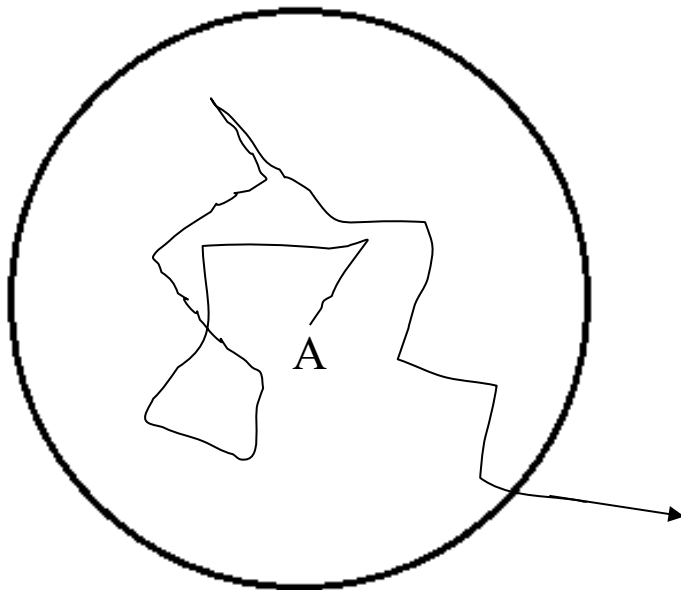
Flusso di radiazione nella stella. Teoria semplificata del random-walk.

Ora, se i fotoni diffondono all'interno della stella con cammino libero medio pari a

$$\lambda = (n\sigma_T)^{-1} \sim R^3 / M, \quad [3]$$

dove σ_T è la sezione d'urto Thomson degli elettroni¹, il tempo scala con cui i fotoni escono dalla stella si potrà determinare in maniera semplificata sulla base della teoria del *random-walk*, o del *cammino casuale*.

Ipotesi: in un mezzo di particelle cariche i fotoni vengono generati nella posizione A e si muovono casualmente collidendo di tanto in tanto con le particelle, con una probabilità data dalla sezione d'urto di Thomson σ_T , cui corrisponde un cammino libero medio λ . Rimandiamo all'Appendice B2 per una breve discussione di questo processo di *scattering* fotonico, necessaria anche per quanto vedremo nella Sez. 11.



Schema rappresentativo del cammino che un fotone generato nel punto A compie prima di uscire dalla nube. Si tratta di un cammino casuale (*random walk*) costituito da una serie di tratti lineari, ciascuno seguito da una deviazione (*scattering*).

¹ La sezione d'urto fornisce la probabilità di interazione tra fotoni ed una particella carica, ed ha unità di un'area, corrispondente all'area di collisione efficace tra i fotoni e la particella. Per gli elettroni, vale circa $6.6 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$.

Avremo che lo spostamento medio è nullo (sommatoria di vettori con direzioni e moduli casuali): $\langle R \rangle = r_1 + r_2 + \dots + r_n = 0$, ma l'allontanamento netto (quanto il fotone si sarà allontanato in qualunque direzione rispetto all'origine) sarà diverso da 0 e ottenibile dalla somma quadratica

$$\langle R^2 \rangle = r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2 + 2 r_1 r_2 + 2 r_1 r_3 + \dots = N \lambda^2$$

poiché in media $\langle r_1 \cdot r_2 \rangle = 0$, per cui l'allontanamento netto non sarà dato da $\langle R \rangle = N \lambda$, ma piuttosto $\langle R^2 \rangle^{1/2} = N^{1/2} \lambda$. Si tratta di un argomento statistico che riguarda medie su grandi numeri di particelle materiali e di fotoni. L'allontanamento medio di un insieme di fotoni dall'origine A può essere rappresentato visivamente da una serie di gusci sferici concentrici attorno al punto A, che stabiliscono la posizione media dei fotoni generati in A, di raggio crescente al trascorrere del tempo t :

$$R \propto N^{1/2} \lambda \propto t^{1/2}.$$

Possiamo ora confrontare questo allontanamento netto compiuto dal fotone medio con il raggio R della stella e il tempo-scala t che impiega la luce ad uscire dalla stella stessa. Così il numero di scattering necessario al fotone per uscire dalla stella è

$$N_{\text{scatt}} = R^2 / \lambda^2, \quad [4]$$

mentre il tempo impiegato per uscire :

$$t = N_{\text{scatt}} \lambda / c = R^2 / \lambda^2 \cdot \lambda / c = R^2 / \lambda c. \quad [5]$$

Questo è anche il tempo che la stella impiegherebbe per spegnersi se venisse meno improvvisamente la fonte di energia che la alimenta.

Applicazioni alle strutture stellari.

Ipotesi: ammettiamo ora che viga nella stella una condizione di equilibrio totale, di corpo nero. Come è noto, flusso totale F , intensità della radiazione I e densità di energia fotonica sono legati da:

$$F = \int \cos \vartheta I_{\nu} d\nu d\Omega = \sigma T^4 \sim \text{densita' energia fotonica} \cdot c \quad [6]$$

L'energia radiante totale contenuta nella stella sarà quindi il prodotto

$$E_{\text{tot}} \propto (\text{densita' energia fotonica}) \cdot R^3 = \sigma T^4 \cdot R^3 \quad [7]$$

mentre la luminosità bolometrica L della stella potrà essere calcolata come rapporto tra il contenuto energetico totale a disposizione e tempo scala d'uscita dei fotoni:

$$L \sim E_{\text{tot}} / t \propto R^3 T^4 R^{-2} \cdot \lambda = R T^4 \lambda.$$

Sostituendo l'espressione per λ da [3] si ha:

$$L \propto R T^4 \lambda \propto R^4 T^4 / M$$

e da [2] si ottiene

$$L \propto M^3, \quad [8]$$

una relazione consistente con le osservazioni di stelle sulla sequenza principale del diagramma HR.

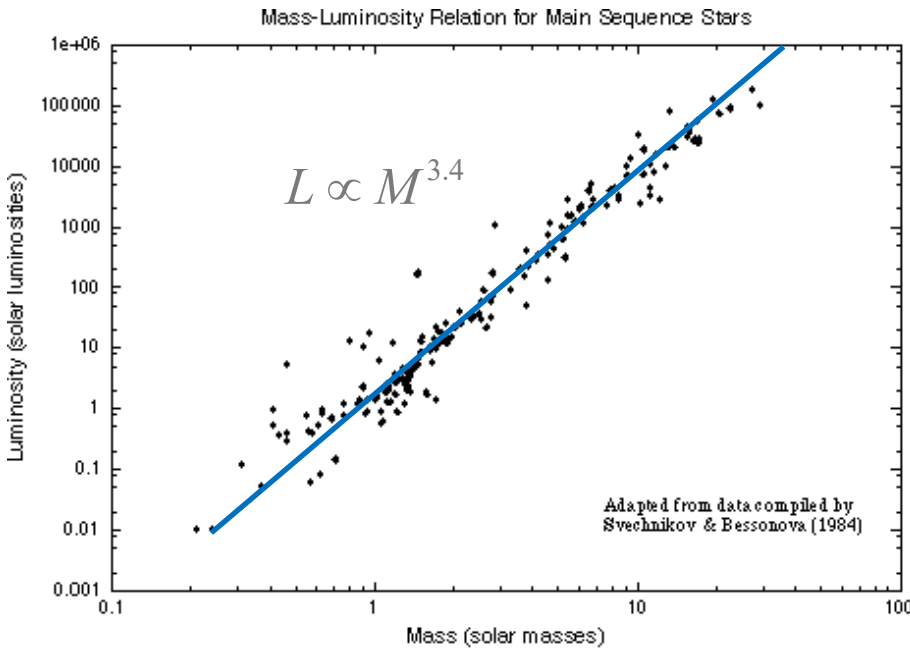


Figura 8.

Dati sulla relazione massa luminosità di stelle della sequenza principale.

Ovviamente, da [6], possiamo esprimere la luminosità come

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4,$$

da cui, combinando con [2], si ottengono le due altre importanti relazioni:

$$T \propto M^{1/2} \quad \text{e} \quad R \propto M^{1/2} \quad [8b]$$

Per stelle di più piccola massa la [8] tende ad irripidirsi un po', $L \sim M^{3.4}$. Questo si spiega con il fatto che l'interazione tra fotoni e materia, in stelle di piccola massa, coinvolge processi diversi dallo scattering elettronico, e un po' più complicati, in particolare l'interazione tra fotoni e coppie di cariche elettrone-protone, $e^- p^+$ (l'opacità del mezzo diviene ionica, o di free-free): a questo punto il cammino libero medio λ diventa dipendente dalla temperatura del mezzo $\lambda \sim T^{3.5}/n$. Nota che questo cambiamento del tipo di interazione tra fotoni e materia avviene per stelle di piccola massa e alta densità, essendo il free-free proporzionale a n^2 (da [8b] si ha che la densità media va con M come $n \sim M/R^3 \propto M^{-0.5}$).

Le relazioni strutturali fondamentali delle stelle si possono quindi riassumere nello schema seguente

$$L \propto M^{3.4}, \quad T \propto M^{0.5}, \quad L \propto T^{6.8}, \quad R \propto M^{0.5}, \quad [9]$$

ovvero, facendo riferimento ai valori misurati per il Sole:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{3.4} \quad \text{e} \quad \frac{T}{5800 \text{ K}} = \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{0.5} \quad [10]$$

2.3 Efficienza ε della produzione di energia in stelle, tempi di vita stellare.

E' interessante ora calcolare i tempi di vita delle stelle di diverse masse sulla base di quanto abbiamo ricavato. Definiamo per questo l'efficienza energetica ε della trasformazione (massa a riposo) \rightarrow (energia) nelle stelle con riferimento alla relazione tra massa ed energia $\varepsilon = E/mc^2$, ovvero

$$\frac{dE}{dt} = L = \varepsilon \dot{M} c^2 = \varepsilon c^2 \frac{dM}{dt} . \quad [11]$$

Il bruciamento termo-nucleare di idrogeno in elio nelle stelle (essenzialmente in sequenza principale) avviene con una efficienza ε che si può calcolare nel seguente modo. Per ogni grammo di H combusto vengono prodotti $6.3 \cdot 10^{18}$ erg di energia nella combustione $4\text{H} \rightarrow \text{He}$, ciò dovuto al fatto che la massa di 4 idrogeni è un poco superiore alla massa di un nucleo di He e la differenza è rilasciata sotto forma di energia di fotoni gamma (e in minor misura di neutrini). Reazioni successive di bruciamento di He in C (ad es. la famosa reazione $3\alpha: 3 \text{He} \rightarrow {}^{12}\text{C}$) producono una frazione trascurabile di energia. Allora, data l'efficienza energetica ε relativa alla conversione di una certa quantità di massa stellare di idrogeno in elio, avremo

$$\varepsilon = E / mc^2 = 6 \cdot 10^{18} / c^2 = 6.3 \cdot 10^{-3} \quad [12]$$

Questo è un valore limite, dal momento che nelle stelle solo una frazione, tipicamente $\sim 50\%$, della massa iniziale di H viene bruciata. Infatti subisce il bruciamento solo la porzione di H residente nelle zone nucleari a più alta temperatura ($T \sim 2 \cdot 10^7$ K) e densità, tali da permettere la reazione. Questa frazione di massa stellare dipende tra l'altro da quanto esteso è il nucleo convettivo della stella (se esiste). Per $M=1 M_{\odot}$ il nucleo convettivo è piccolo o nullo e solo circa il 15% della massa di H della stella subisce il bruciamento nucleare. Di conseguenza per queste si ha $\varepsilon = \varepsilon_{\odot} = 0.001$. Per $M=20 M_{\odot}$ il nucleo e' pari al 50% e $\varepsilon = 0.003$. Per $M=50 M_{\odot}$ il nucleo arriva al 80% e $\varepsilon = 0.006$.

Per una popolazione mista che includa stelle di varia massa, i valori dell'efficienza dipendono dalla forma della funzione iniziale di massa delle stelle²: quella proposta da Salpeter [1956] ad esempio, $N \sim M^{-2.35}$, privilegia molto le stelle di piccola rispetto a quelle di grande massa, e in questo caso un buon valore di riferimento per l'efficienza complessiva media è: $\varepsilon \sim 0.001$.

² La distribuzione in massa di una popolazione di stelle e' definita tramite la funzione iniziale di massa (IMF), che fornisce la distribuzione in massa delle stelle al momento della generazione della popolazione. Tra le rappresentazioni funzionali che meglio rappresentano i dati e' quella proposta da Salpeter [1955], $dN/dM \sim M^{-2.35}$, una legge di potenza che appare riprodurre bene molti ammassi stellari osservati. Essa privilegia numericamente le stelle di piccola massa.

In ogni caso, la dipendenza di ε dalla massa della stella si può comunque rappresentare con la legge:

$$\varepsilon(M) = \varepsilon_{\odot} (M / M_{\odot})^{0.5}, \quad [13]$$

che implica che per una supergigante di $100 M_{\odot}$, $\varepsilon = 0.01$. Dalla [11], inserendo i valori per il Sole: $L=L_{\odot}=4 \cdot 10^{33}$ erg/s, $M=M_{\odot}=2 \cdot 10^{33}$ gr, e prendendo per $\varepsilon = 0.001$, si ottiene ad esempio una età per il Sole di $t_{\odot}=L/\varepsilon c^2 \approx 1.5 \cdot 10^{10}$ yrs, ove in questo calcolo viene assunto che $dM/dt=cost$, che è un'ottima approssimazione in riferimento a quanto avviene sulla sequenza principale.

Calcoliamo ora il tempo di vita di una qualunque stella. Da [10] e da [11], integrando sul tempo la $L = \varepsilon c^2 dM/dt$, si ha:

$$\varepsilon M c^2 = \int_0^{\Delta t} L dt = L \cdot \Delta t = L_{\odot} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{3.4} \Delta t$$

$$\varepsilon_{\odot} (M / M_{\odot})^{0.5} M c^2 = \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{3.4} L_{\odot} \Delta t$$

da cui

[14]

$$\Delta t = \varepsilon_{\odot} (M_{\odot} / M)^{2.9} \frac{M c^2}{L_{\odot}} = \varepsilon_{\odot} (M / M_{\odot})^{-2.9} \frac{M}{M_{\odot}} \frac{M_{\odot}}{L_{\odot}} c^2$$

$$\Delta t = \frac{\varepsilon_{\odot} c^2}{1.9} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-1.9} \text{ sec} \approx 1.5 \cdot 10^{10} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-1.9} \text{ anni}$$

dove il fattore 1.9 al denominatore corrisponde al valore di L_{\odot}/M_{\odot} in unità fisiche (CGS). Eq. [14] per una supergigante di $100 M_{\odot}$ fornisce ad un tempo di vita di circa 1 milione di anni.

I tempi di vita e le luminosità delle stelle dipendono quindi molto fortemente dalla loro massa:

$$\Delta t \propto M^{-2}. \quad [15]$$

Stelle di grande massa sono quindi enormemente luminose e calde (da [10], con T superficiale sino a 100.000 K), ma vivono un tempo molto breve sulle scale temporali cosmiche. Una stella di massa sub-solare è molto poco luminosa e fredda ($2000-3000$ K), ma dura un tempo praticamente infinito. Una sequenza di spettri stellari è riportata nella Figura 9. L'interpretazione di questi spettri è chiara, sulla base di quanto detto; vi è peraltro da notare l'incidenza degli assorbimenti molecolari rilevanti in stelle nane (M5) e in ogni caso il gran numero di righe atomiche in assorbimento.

Sarà molto interessante confrontare in Sez.12 i risultati sull'efficienza di produzione di energia nelle stelle in eq. [12-13] con quanto ottenibile in situazioni fisiche completamente diverse, ad es. nei nuclei galattici attivi.

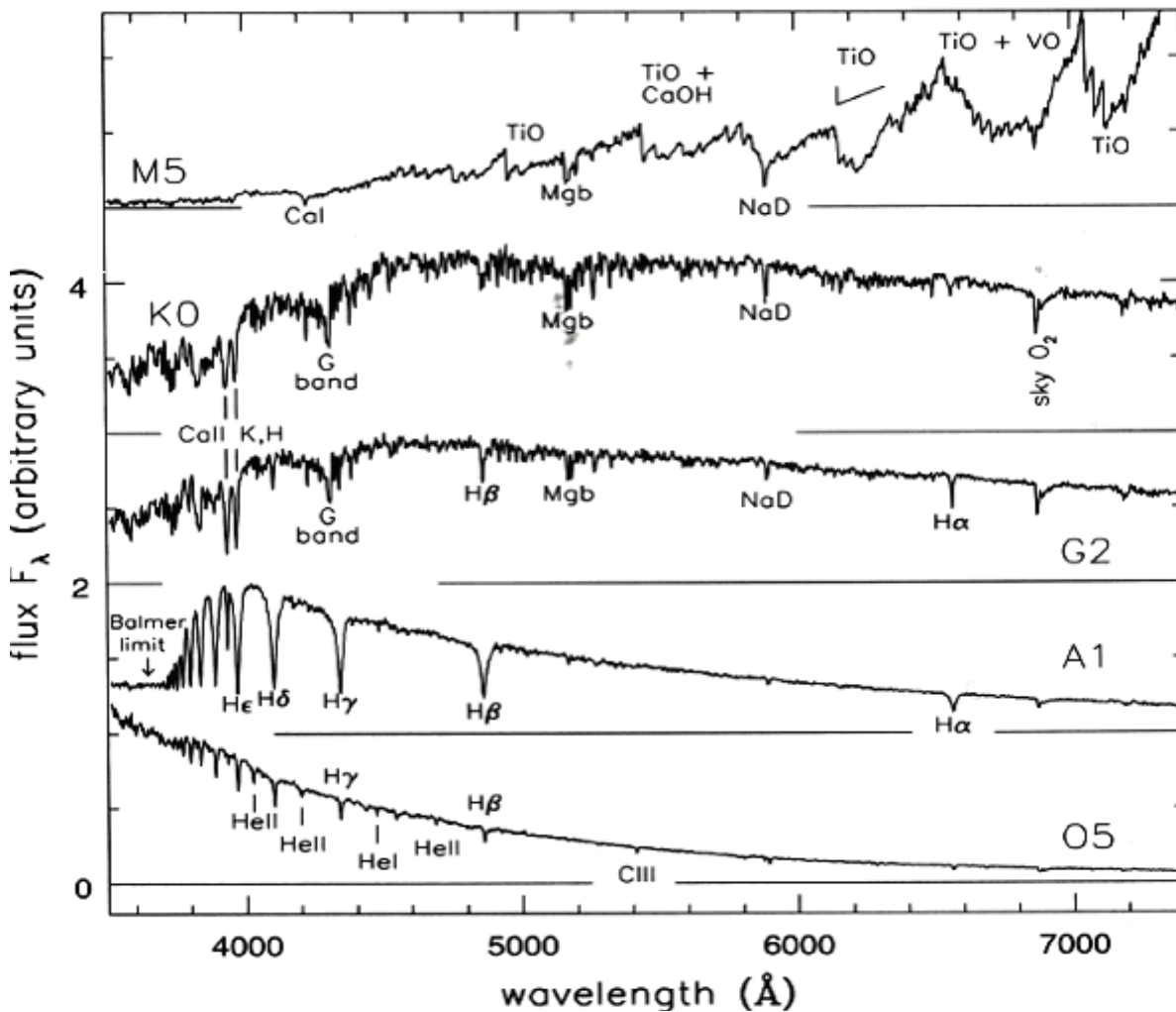


Figura 9. Spettri ottici di stelle della sequenza principale con composizione chimica all'incirca solare. Dall'alto in basso aumenta la temperatura superficiale della stella, con i tipi spettrali (da M5 a O5) indicati nei vari pannelli. [Libreria spettrale di Jacobi et al.]

Figura 10 illustra come evolve il diagramma HR di ammassi stellari coevi con il tempo. La figura mostra una collezione di diagrammi ottenuti considerando popolazioni stellari di ammassi di diverse età. Ammassi più giovani sono quelli con la sequenza principale più estesa nel blu e alle alte luminosità (NGC 2362), al contrario di quelle più vecchie per le quali la sequenza piega a colori più rossi e luminosità più basse (M67). Questa evoluzione è ottimamente spiegata dalla nostra teoria semplificata, e in particolare da eq. [14-15]: le stelle di massa maggiore nelle popolazioni muoiono prima ed escono dalla sequenza principale, che in questo modo si incurva a destra.

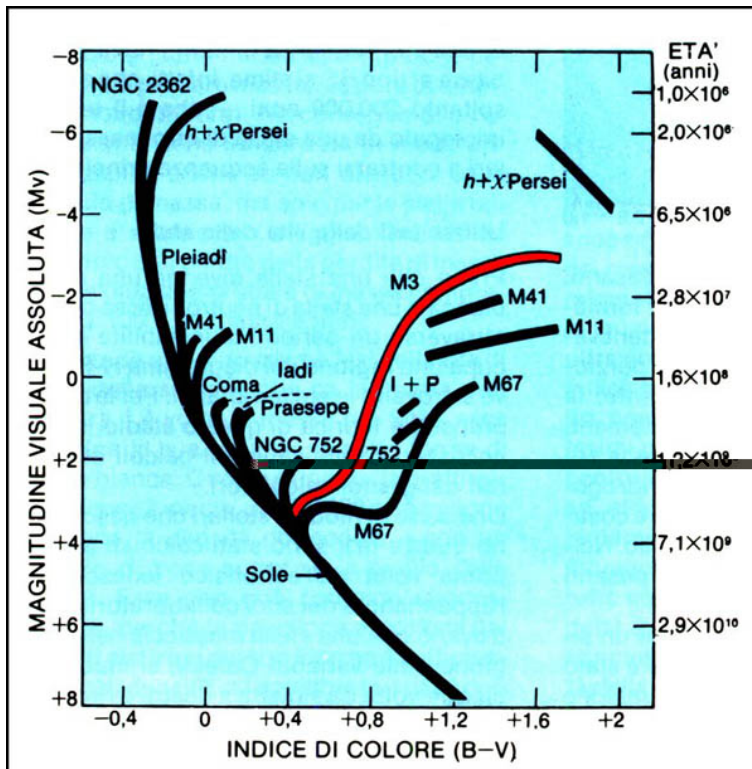


Figura 10.

Diagramma HR sintetico di vari ammassi globulari di diverse età, riportati sulla stella scala. Gli ammassi più vecchi hanno la sequenza principale che piega a destra a colori più rossi.

[Da Allan Sandage, Carnegie Institution of Washington].

2.4 Spettri e distribuzioni spettrali d'energia delle galassie. Sintesi spettrale.

Gli spettri integrati delle galassie sono costituiti dalla somma delle emissioni spettrali di numerosissime stelle, e saranno quindi l'integrale di tutti gli spettri stellari delle popolazioni presenti nella galassia ad un certo istante di tempo. Si consideri che, in prima istanza e trascurando le righe d'emissione e assorbimento – in particolare gli assorbimenti molecolari nelle stelle fredde – per quanto visto gli spettri stellari costituiscono una sequenza monotona funzione della massa, che determina la temperatura superficiale T , con spettri approssimabili in prima approssimazione con leggi di corpo nero in funzione della sola T :

$$I(\nu) = B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} [\exp(h\nu / kT) - 1]^{-1}$$

(brillanza superficiale espressa ad es. in $\text{erg}/\text{cm}^2/\text{sec}/\text{Hz}/\text{sr}$). Figura 11 riporta come esempio una serie di spettri sintetici di popolazioni stellari singole (ossia con stelle generate istantaneamente) a diverse età, spettri calcolati come discusso precedentemente. Tali spettri consistono essenzialmente nella sommatoria di tutti gli spettri delle stelle presenti nella galassia. Aspetti formali del calcolo di questi spettri integrati sono discussi più avanti in Sez. 2.7.

E' chiaramente visibile nella figura l'evoluzione spettrale che subisce una popolazione al trascorrere del tempo: le stelle più massicce abbondantemente presenti negli spettri giovani (in alto) e che producono un flusso intenso attorno a 1000 Å

tendono a scomparire rapidamente, avendo tempi di vita molto brevi (1-100 milioni di anni). Spettri più vecchi di 1 miliardo d'anni (1 Gyr) appaiono fortemente arrossati e sono complessivamente molto più deboli. La parte dello spettro a più grandi lunghezze d'onda ($\lambda > 10000 \text{ \AA}$) presenta una evoluzione con il tempo molto meno pronunciata, a causa del fatto che questa parte è dominata dall'emissione di stelle di piccola massa ($M < 1 M_{\odot}$), che hanno T superficiale bassa (eq. [14]) e quindi emettono solo fotoni a grande lunghezza d'onda λ : poiché queste stelle hanno tempi di vita molto lunghi, lo spettro in questa regione evolve poco rispetto a quanto succede alle corte λ .

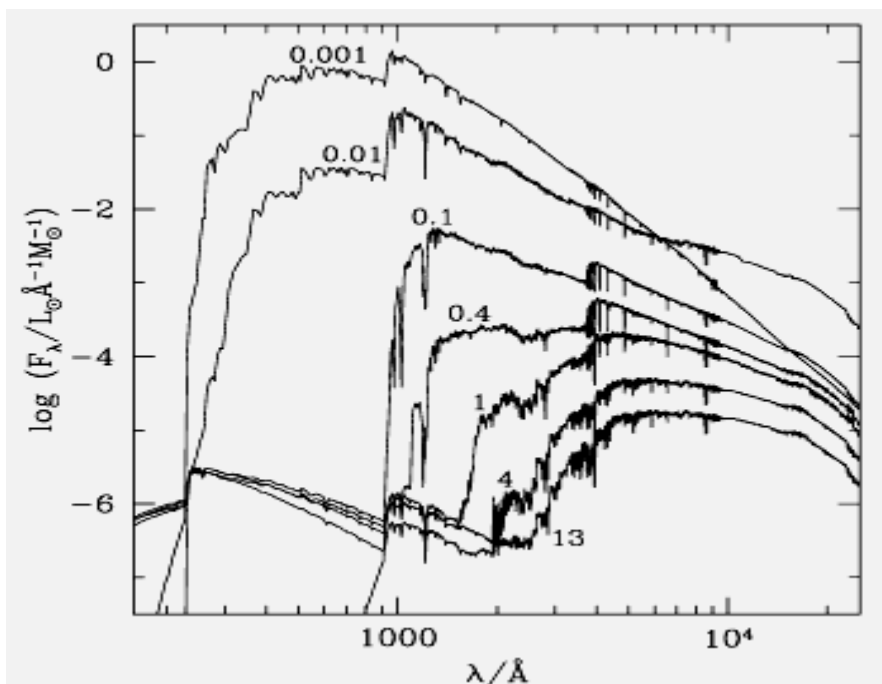


Figura 11.

Spettri sintetici di popolazioni stellari singole (comprendenti stelle coeve). Le età in miliardi di anni sono indicate vicino ad ogni spettro.

[Da Bruzual & Charlot 2003]. Da notare che gli spettri sono espressi non in frequenza (Hz^{-1}), bensì in lunghezza d'onda (\AA^{-1}).

Ovviamente gli spettri reali di galassie includono i contributi di varie popolazioni stellari (semplici) formate a diverse epoche. Quindi per ottenerne gli spettri sintetici occorrerà immaginare di operare una sorta di media degli spettri riportati nelle Figure 10 e 11, media nella quale il contributo di ciascuna popolazione è pesata sulla base della storia della formazione stellare della galassia (ovvero come si distribuisce la quantità di stelle formate in funzione del tempo).

2.5 Effetti della presenza di elementi pesanti (metallicità del plasma stellare).

Con metallicità di un gas o di un plasma si intende la frazione media di elementi pesanti rapportata alla quantità di idrogeno nel gas. Usualmente il contenuto di metalli o elementi pesanti viene riferito a quanto misurato per i vari elementi pesanti nell'atmosfera del Sole. Gli elementi pesanti, chiamati anche *metalli*, hanno peso atomico superiore a 10 e sono principalmente C, N, O, Si, ...Fe.

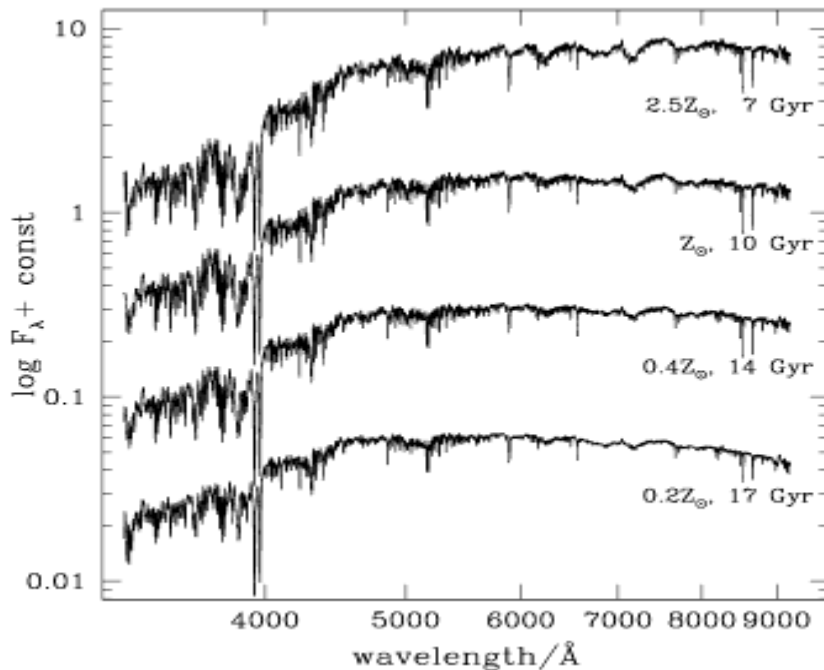


Figura 12.

Effetti della metallicità negli spettri stellari. Le metallicità in valori solari sono indicate vicino ad ogni spettro. Si nota che all'aumentare della metallicità aumentano le strutture in assorbimento dei metalli. L'arrossamento dovuto ai metalli è qui compensato da una diminuzione dell'età della galassia. [Da Bruzual & Charlot 2003]

Da dove provengono questi atomi pesanti? Uno dei risultati fondamentali della fisica stellare è stato dimostrare che questi elementi sono prodotti dalle stelle durante la loro evoluzione. La maggior parte degli elementi leggeri, come l'elio, il deuterio, e il litio, hanno invece una origine totalmente differente, prodottasi durante le fasi primordiali dell'espansione dell'universo, pochi minuti dopo il Big Bang (vedi Sez. 11).

Uno degli effetti importanti della presenza di questi atomi nei plasmi delle atmosfere stellari è quello di modificare più o meno apprezzabilmente gli spettri rispetto alla pura emissione di corpo nero. Più ci sono metalli, più profondi e numerosi sono gli assorbimenti di righe dovuti alle transizioni atomiche nelle atmosfere, quindi più *mangiato, eroso* e arrossato apparirà lo spettro. Un chiaro esempio di questo effetto è illustrato negli spettri sintetici riportati nella Figura 12.

2.6 Effetti del mezzo interstellare. Assorbimento ed emissione di polveri.

L'eventuale presenza di un mezzo diffuso nella galassia può causare modifiche ancora più sostanziali nello spettro integrato delle galassie di quanto non sia prodotto dalle righe fotosferiche in assorbimento delle stelle. In primo luogo tale mezzo può contenere gas, più o meno ionizzati, e molecole, in grado di produrre sequenze di righe in emissione o in assorbimento. Sistemi di intense righe d'emissione sono visibili negli spettri delle Figure da 17 a 20 nel seguito. Come noto, queste righe sono

un veicolo molto importante di informazione sullo stato del mezzo interstellare e su fenomeni fisici che avvengono nella galassia.

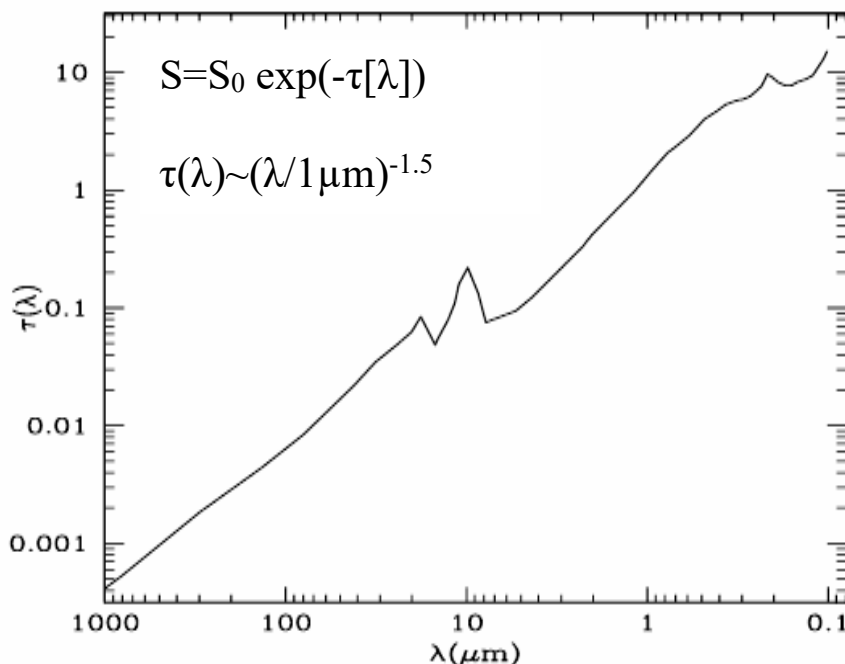


Figura 13.

Curva dell'estinzione galattica, espressa come profondità ottica $\tau(\lambda)$ per un valore unitario di $E(B-V)$. Le due emissioni spettrali dei silicati a 10 e 18 μm e la struttura dovuta alla grafite a 2175 \AA sono visibili. E' anche indicato l'andamento medio della profondità ottica in funzione della λ fotonica.

Nel mezzo sono pure quasi sempre presenti polveri, che, a seconda della loro abbondanza, possono modificare in modo anche drammatico lo spettro integrato delle galassie. L'esatta natura di queste minutissime particelle (0.1 μm di diametro in media) non è ancora completamente chiara, ma è probabile siano costituite da silicati, grafite e carbonato di silicio, SiC [*silicon carbide*]). Nelle nubi più spesse si possono anche avere complesse molecole di idrocarburi e *Polycyclic Aromatic Hydrocarbons*, PAH (tra cui il ben noto PM10). Le polveri assorbono parte della luce delle stelle e vengono da essa riscaldate. Questo effetto è tanto più forte quanto più corta è la lunghezza d'onda dei fotoni. La curva che riporta la dipendenza della profondità ottica dell'estinzione da polveri dalla lunghezza d'onda fotonica è mostrata in Figura 13. L'interpretazione di questa curva richiede una complessa trattazione, che è riassunta in Appendice 2A.

Data la forte dipendenza della curva di assorbimento (estinzione) dalla lunghezza d'onda dei fotoni, mostrata in Figura 13, praticamente quasi tutti i fotoni blu e UV emessi copiosamente dalle stelle giovani sono assorbiti dalle polveri, mentre quelli a λ maggiore attraversano la coltre di polveri meno disturbati. Anche perché stelle giovani sono tipicamente associate a regioni ricche di polveri, in particolare alle nubi molecolari, all'interno delle quali si formano con grande efficienza le stelle.

Un esempio è riportato nella Figura 14, che mostra lo spettro su ampio intervallo spettrale di una galassia prototipo ad attiva formazione stellare (M82). Qui la curva azzurra rappresenta lo spettro integrato delle stelle, e non tiene conto dell'estinzione delle polveri (particolarmente abbondanti in questo caso, trattandosi di una galassia ad attiva formazione stellare). La curva nera tratteggiata rappresenta invece il flusso integrato che emerge dalla galassia dopo aver considerato l'assorbimento delle

polveri: come si vede l'estinzione è elevatissima per fotoni di lunghezza d'onda più corta di 1 μm e diviene molto minore o trascurabile per quelli di λ maggiore.

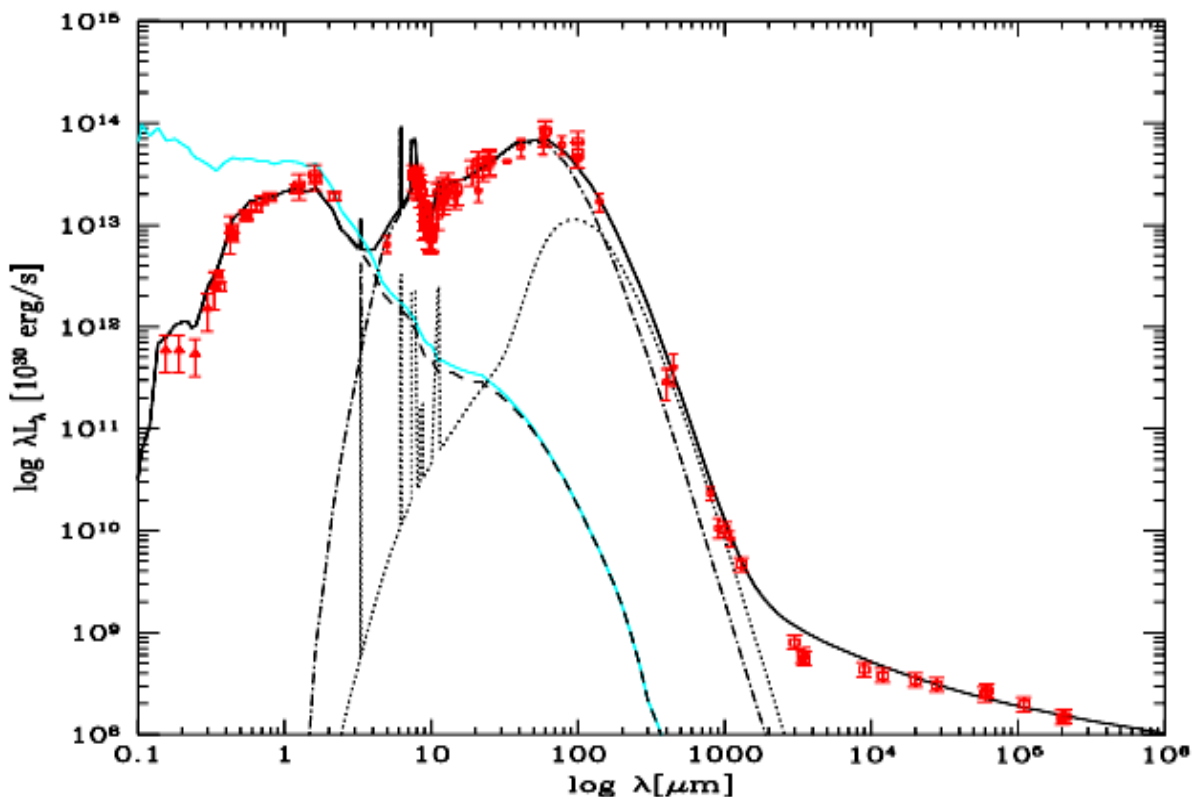


Figura 14. Spettro a larga banda del prototipo di galassia ad attiva formazione stellare M82 (ad una distanza di 3.3 Mpc, vedi Fig. 1.3a). L'asse delle ordinate è normalizzato a 10^{30} erg/sec. La curva a puntini rappresenta l'emissione di polveri diffuse nel cosiddetto cirro, quella a tratto-punto a quella delle nubi molecolari [Da Silva et al. 1998]. La curva continua è la somma di tutte le componenti e costituisce lo spettro integrato.

Come si diceva, le polveri vengono scaldate dalla radiazione UV che assorbono, portandosi a temperature che variano con le dimensioni dei grani e con l'intensità del campo di radiazione, ma che si collocano tra circa 20 e circa 200 °K. I grani fungono così da cavità termiche risonanti ove si instaura una sorta di equilibrio tra fotoni assorbiti e la materia. L'energia assorbita viene così riemessa in modo termico, con un tipico picco d'emissione a lunghezze d'onda tra 30 e 200 μm . Questo picco d'emissione è ben visibile nello spettro a grande banda di Fig. 14 (curve a puntini e tratto-punto) e si somma all'emissione assorbita delle stelle.

Infine, sempre nella Fig. 14 è visibile la componente spettrale in banda radio, con spettro a legge di potenza, dovuta a emissioni di free-free dalle regioni HII e non-termica di sincrotrone fornita dai raggi cosmici prodotti dalle supernove.

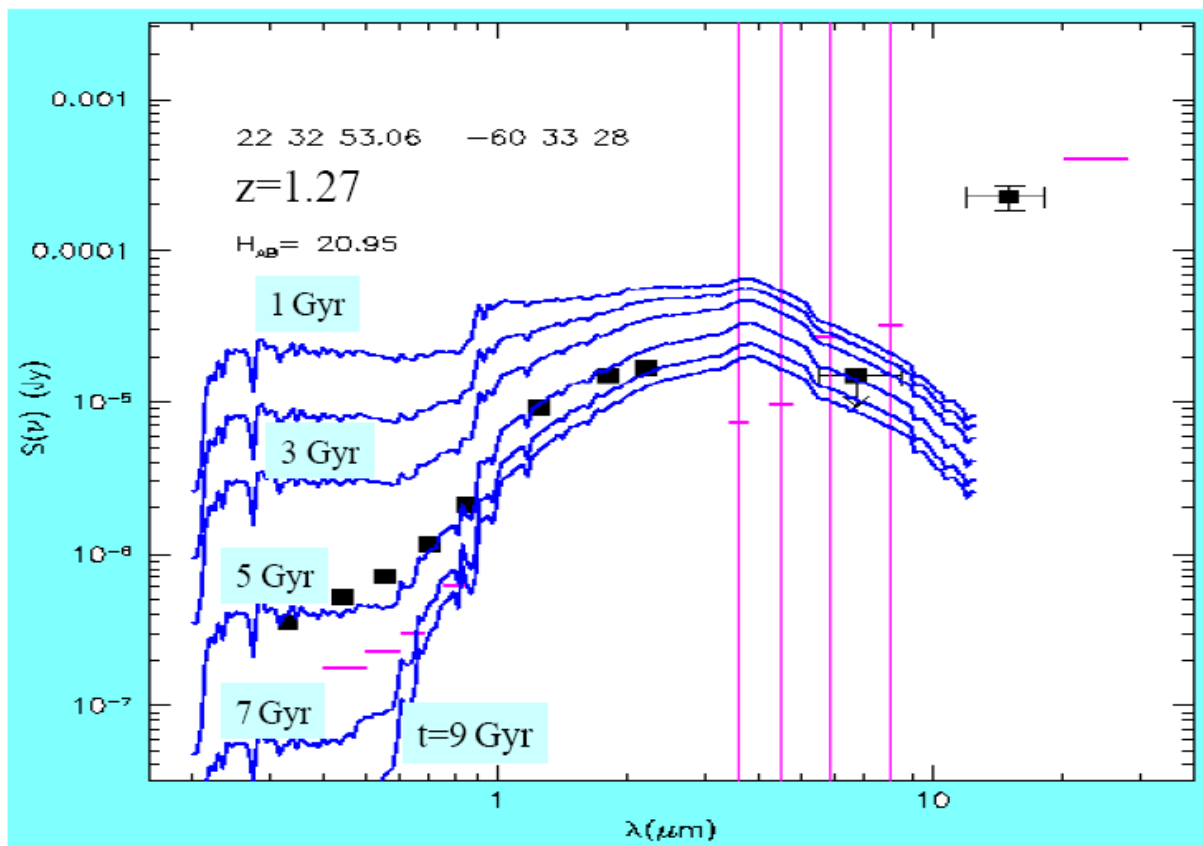


Figura 15. Confronto tra dati osservativi fotometrici su una galassia lontanissima ($z=1.27$) e spettri modellistici integrati di galassie. Dal confronto emerge che l'età media delle popolazioni stellari della galassia è di circa 5 miliardi di anni.

2.7 Cenni alla teoria della sintesi spettrale di popolazioni stellari e galassie

La complessa inter-relazione tra le varie componenti le galassie è schematicamente illustrata in Figura 16. Si tratta, come si vede, di una serie di eventi ciclici che portano dal gas e polveri diffuse alla formazione di stelle, e da queste al rilascio dei prodotti dell'evoluzione stellare di nuovo nel mezzo diffuso, e così via.

Formalmente, gli spettri integrati delle galassie si possono calcolare tramite semplici somme di tutte le varie componenti presenti. Innanzitutto occorre calcolare gli spettri integrati di popolazioni stellari semplici e coeve (SSP), rappresentati ad esempio in Fig. 11, come integrali dello spettro stellare funzione di massa ed età sulla massa:

$$S_{\lambda}(t, Z) = \int_{M_i}^{M_s} IMF(M_i) \times \Sigma_{\lambda}(M_i, Z, t) dM_i$$

IMF : funzione iniziale di massa stellare

Σ_{λ} : spettro di singola stella di massa M_i , metallicita' Z , al tempo t

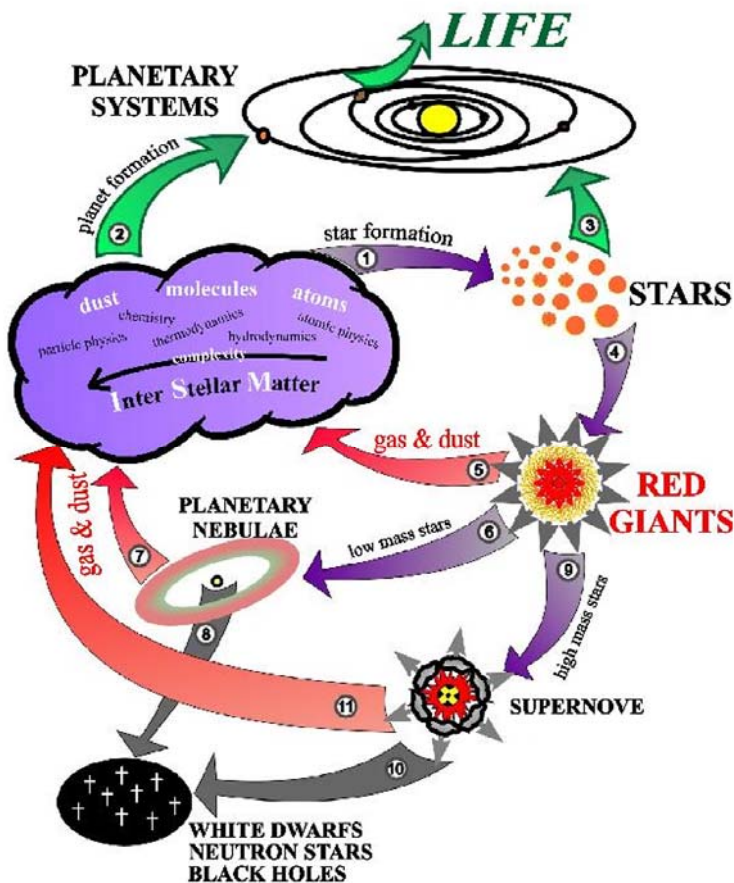


Figura 16.

Grafico illustrante le complesse inter-relazioni tra le varie componenti galattiche.

[Da : http://cosmology.lbl.gov/talks/Conroy_09.pdf].

Gli spettri stellari Σ_{λ} sono calcolati sulla base della teoria dell'evoluzione stellare. A questo punto occorre una seconda integrazione, sommando tutti i contributi alla luce integrata della galassia da parte di tutte le popolazioni stellari di diverse età presenti al tempo cosmico t :

$$L_{\lambda}(t, Z) = \int_{t_i}^t SFR(t-t') \times S_{\lambda}(t', Z) \times e^{-\tau_{\lambda}(t')} dt'$$

SFR : tasso di formazione stellare in funzione del tempo t .

In questo integrale ogni popolazione stellare di diversa età è soggetta a diversi effetti di estinzione. In tal modo sono ad esempio ottenuti gli spettri di Fig. 14 e 15.

2.8 Analisi spettro-fotometriche di galassie

L'analisi spettrofotometrica integrata di galassie locali dei vari tipi morfologici conferma a grandi linee l'idea che galassie sferoidali (E/S0) abbiano popolazioni stellari in media antiche e che galassie dei tipi più tardi (Spirali-Irregolari) abbiano popolazioni mediamente più giovani. L'analisi spettrofotometrica fornisce così vincoli importanti alla storia della formazione di questi oggetti.

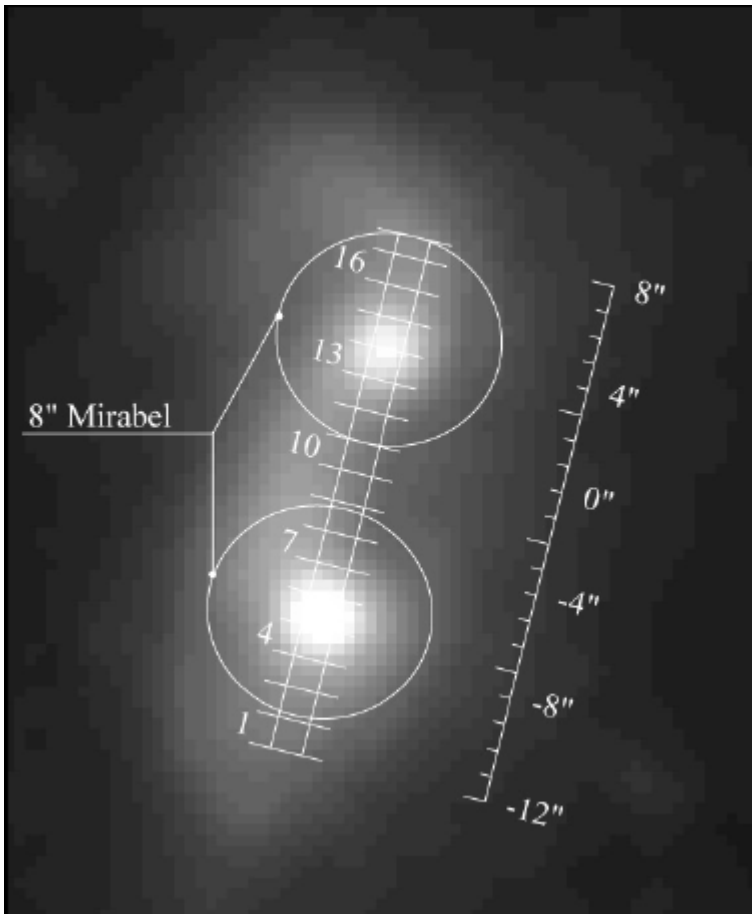


Figura 17a.

Illustra il posizionamento della fenditura dello spettrografo del telescopio ESO 3.6m in corrispondenza dei due nuclei di una sorgente IRAS ultra-luminosa in infrarosso.

La fenditura è stata divisa in 17 parti, per ciascuna delle quali è stato ottenuto uno spettro (vedi Fig.5).

[Da Berta et al. 2005]. La distanza dei due nuclei tra loro è 35 kpc. La luminosità totale dell'oggetto è $L \sim 1.4 \cdot 10^{12} L_{\odot}$.

C'è però da dire che, se limitiamo tale analisi alle galassie locali (osservate al tempo cosmico attuale), tali vincoli sulla storia della formazione stellare possono risultare indeboliti dal fatto che per questi oggetti è trascorso in media un tempo molto lungo (molti miliardi di anni) dagli ultimi episodi importanti di formazione stellare, e nel frattempo popolazioni e spettri integrati galattici sono evoluti apprezzabilmente. Un piccolo errore nella valutazione dello spettro si traduce in una ampia incertezza nei tempi di formazione delle stelle. Ciò tende a confondere i risultati.

È evidente che vincoli assai più decisivi si possono ottenere dall'analisi spettrale di galassie lontanissime nello spazio-tempo, quindi osservate nel lontano passato, in vicinanza degli episodi principali di formazione stellare. È questo uno dei motivi che rendono assai importante lo studio spettrofotometrico di galassie molto remote nello

spazio-tempo. L'osservazione *in-situ* di strutture lontane e ad alti redshift costituisce uno dei temi principali della cosmologia osservativa oggi.

Una tecnica alternativa a quella spettroscopica ad alta risoluzione, molto potente e utilizzata in particolare per oggetti deboli, è quella di misurare il flusso integrato di una galassia in diverse bande passanti (ad es. le bande UBVRI in ottico, e JHKL nel vicino IR), che permette di ottenere lo spettro "a larga banda" dell'oggetto). Uno spettro di questo tipo viene anche denominato *distribuzione spettrale d'energia* dell'oggetto (o *Spectral Energy Distribution*, SED). Un esempio dell'applicazione di questa tecnica per lo studio di sorgenti deboli e lontane è quanto riportato in Figura 15 e nelle successive Figure 19 e 20 (vedi più avanti).

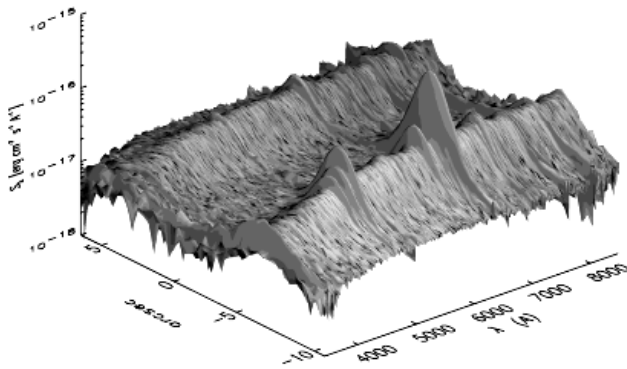


Fig. 2. The three-dimensional structure of the spectrum obtained with the pipeline described in Sect. 2. Different emission lines are already clearly visible, H α standing over all the others. The spatial axis corresponds to the one shown in Fig. 1.

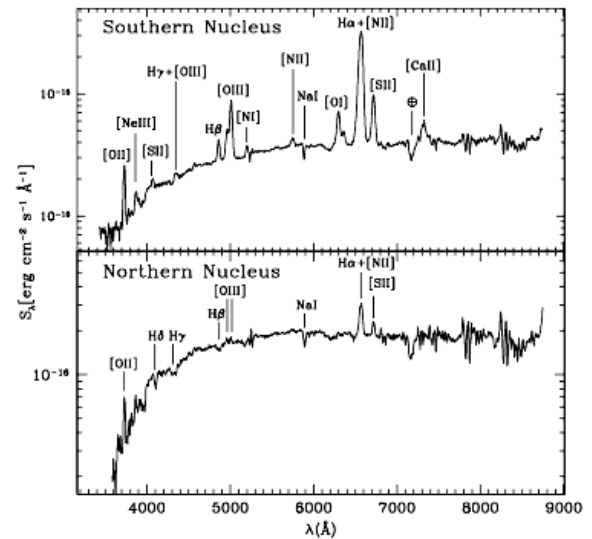


Figura 17b.

A sinistra: grafico tridimensionale che riporta il flusso fotonico misurato in funzione della lunghezza d'onda λ e della posizione lungo la fenditura. I due picchi di flusso più pronunciati corrispondono ai due nuclei mostrati in Fig. 13. A destra sono riportati gli spettri corrispondenti ai due picchi nella distribuzione spaziale.

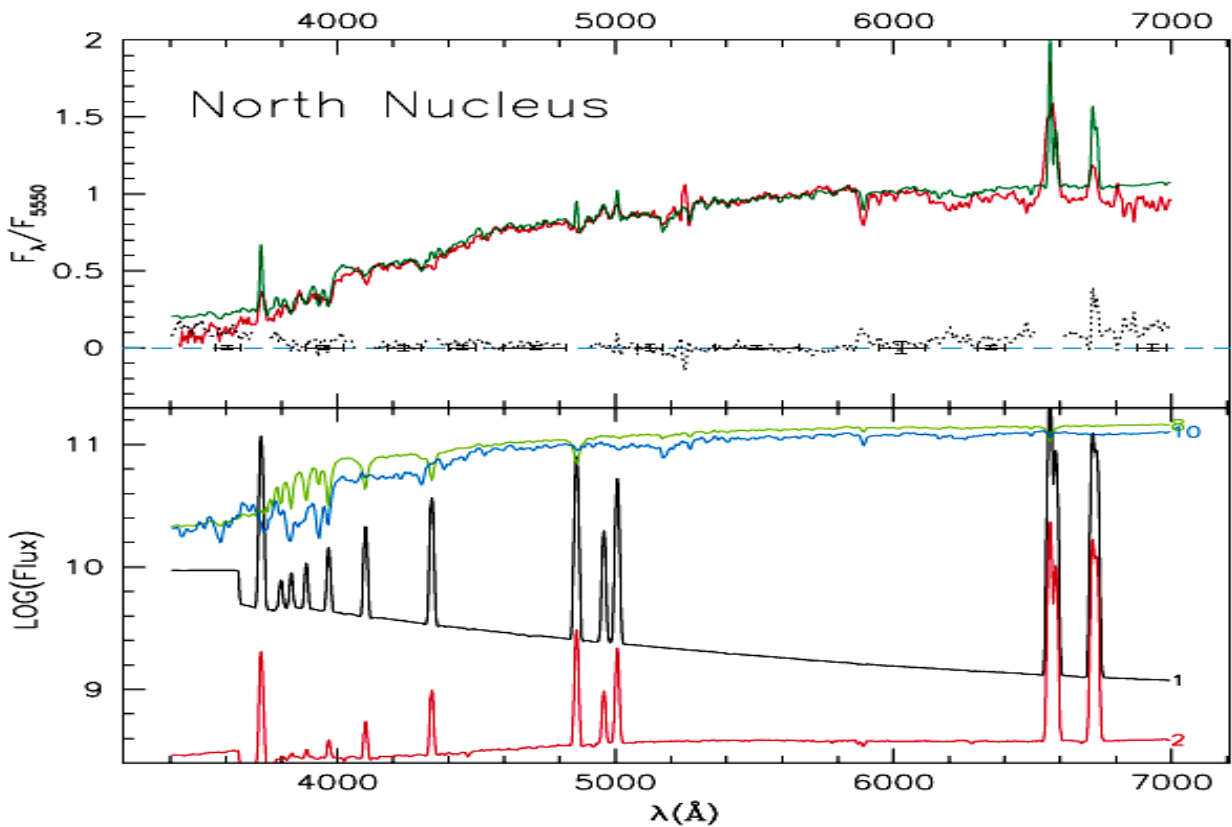
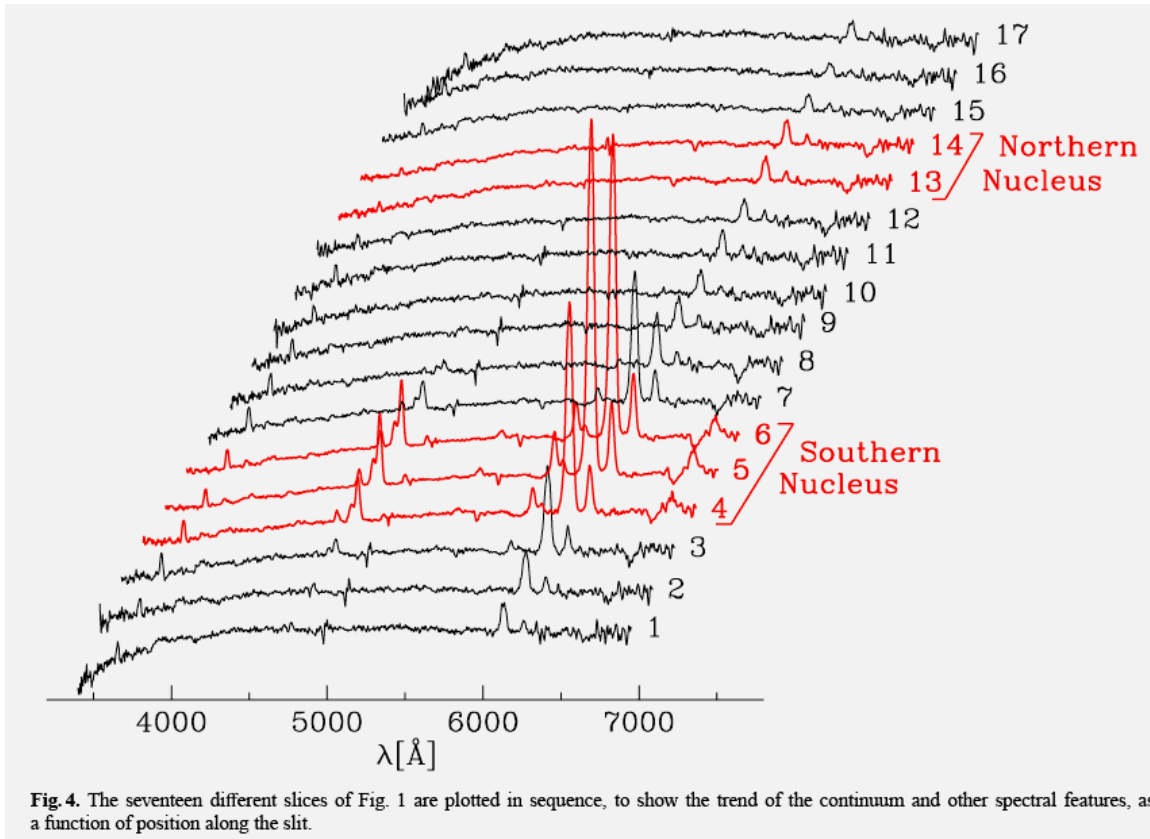


Figura 18. Sopra: Confronto tra spettro integrato osservato (in verde) e spettro sintetico (in rosso) del nucleo nord di Superantennae. Sotto: nel pannello sotto sono riportati i contributi modellistici di varie popolazioni stellari di diverse età.

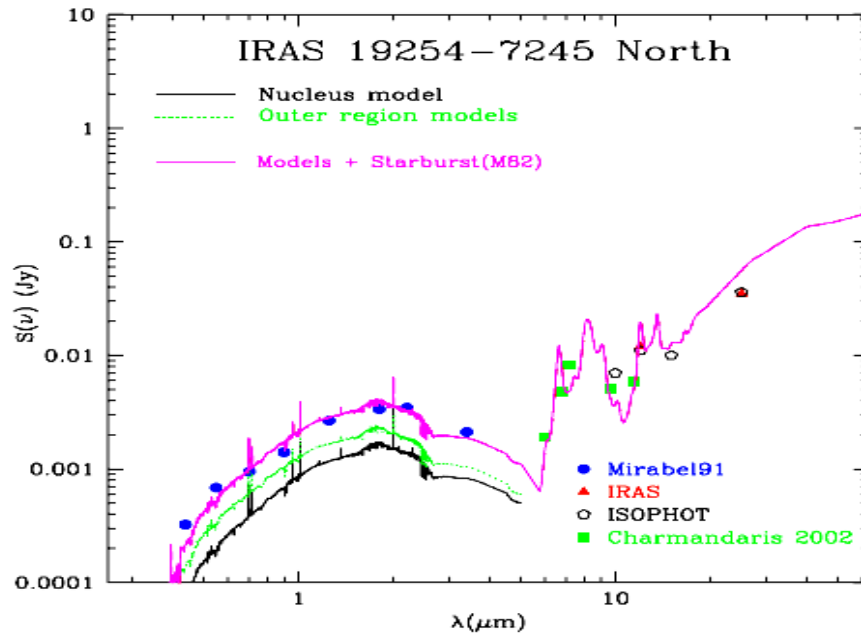


Figura 19. Combinazione di uno spettro integrato in ottico del Nucleo Nord di Superantennae con la distribuzione spettrale di energia nel medio-IR. Il nucleo nord corrisponde ad una galassia con attività di formazione stellare assente e privo di attività quasar.

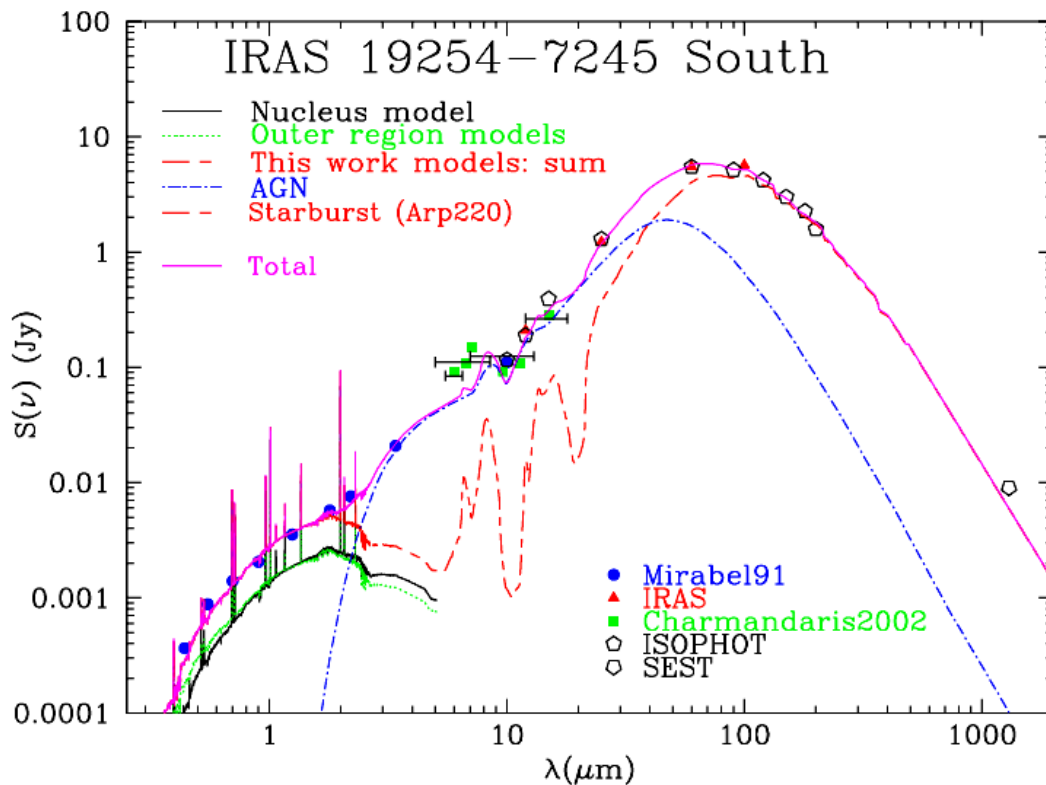


Figura 20. Spettro a larga banda del nucleo sud della galassia Superantennae. E' ottenuto con la combinazione di uno spettro ad alta risoluzione in ottico (spettro viola) con la distribuzione spettrale di energia nel medio e lontano IR e nel sub-millimetro. Tutta la porzione dello spettro a $\lambda > 2\mu\text{m}$ è dominata dall'emissione delle polveri e contiene la maggior parte dell'emissione fotonica della sorgente. Il nucleo sud corrisponde ad una galassia con fortissima attività di formazione stellare e contemporanea attività di quasar. Lo spettro a tratto-punto corrisponde all'emissione delle polveri attorno al quasar nucleare, quello a doppio-tratto alle polveri riscaldate dalle stelle giovani.

Ovviamente, le galassie sono strutture estese che includono diverse componenti distribuite spazialmente in modo complesso (stelle di diverse età, gas, polveri). Così lo spettro integrato di una galassia lontana, mescolando i contributi delle varie componenti spaziali presenti, fornisce una informazione integrata difficilmente interpretabile. Con le tecnologie attuali, però, è possibile ottenere spettri di singole porzioni di galassie anche molto lontane, con un tipo di osservazioni che vanno sotto il nome di *spettroscopia spazialmente risolta*, in grado di fornire uno spettro per ogni diversa regione della galassia.

Un esempio di analisi spettrale "spazialmente-risolta" di un oggetto particolare è illustrata in Figure 16, 17 e 18. L'oggetto in esame è una sorgente IRAS ultra-luminosa in infrarosso (Superantennae, ovvero IRAS 19254–7245), ed è di particolare interesse in quanto si ritiene un analogo relativamente vicino a noi (distanza=250 Mpc) di possibili galassie primordiali ad attiva formazione stellare (presunte sorgenti del fondo cosmico infrarosso, Fig 1.9 - 1.11). Una particolarità dell'oggetto è che include proprietà di una galassia ad attiva formazione stellare e al tempo stesso di un quasar arrossato. Si è ottenuto così lo spettro integrato per ogni elemento spaziale lungo la fenditura. Figura 18 mostra un confronto dettagliato tra uno degli spettri osservati e uno spettro sintetico.

Infine, in Figure 19 e 20 riportiamo due esempi della tecnica osservativa che consiste nel combinare uno spettro osservato (in ottico, colore viola, incluse forti righe d'emissione nel nucleo sud, meno intense nel nucleo nord) con la distribuzione spettrale d'energia in infrarosso.

In questo modo, da osservazioni sufficientemente profonde e ad alta risoluzione angolare è possibile dedurre le proprietà fisiche non solo mediate sull'intera galassia, ma persino differenziate tra le sue varie componenti (bulge, disco, diversi nuclei in interazione, ecc.).

APPENDICE 2A: ASSORBIMENTO E REDDENING INTERSTELLARE

Consideriamo in questa Appendice alcuni aspetti dell'importante fenomeno dell'estinzione della luce stellare da parte del mezzo diffuso, rilevante perché comporta radicali modifiche agli spettri delle sorgenti.

2A.1 Assorbimento.

Dall'equazione del trasporto radiativo per assorbimento (ad esempio da grani di polvere) abbiamo

$$dI(\nu) = -k_\nu I(\nu) ds \quad \text{ovvero} \quad \frac{dI(\nu)}{I(\nu)} = -k_\nu ds$$

dove $I(\nu)$ è l'intensità del campo di radiazione, s la profondità del mezzo e k_ν il coefficiente di assorbimento. Si ha pertanto come soluzione:

$$\ln I(\nu, s) - \ln I(\nu, 0) = -\int_0^s ds k_\nu(s) = -\tau_\nu(s) \quad \text{ovvero} \quad I(\nu, s) = I(\nu, 0) e^{-\tau_\nu(s)}$$

dove τ è la profondità ottica. In magnitudini, questa profondità ottica corrisponde essenzialmente alla magnitudine dell'assorbimento A :

$$A(\text{magn}) = 2.5/\ln(10) * \tau_\nu = 1.078 \tau_\nu .$$

Nel mezzo interstellare delle sorgenti astrofisiche la situazione è tipicamente alquanto complessa, con assorbimenti veri da polveri combinati con scattering (diffusione) di fotoni, sempre dovuto alla presenza di polveri, elettroni liberi, atomi, molecole, aerosol, ecc. L'effetto combinato di questi processi di interazione va sotto il nome di *estinzione*, la cui trattazione generale può essere alquanto complessa, dipendendo anche dalla geometria del sistema e la distribuzione relativa delle varie componenti. Vediamo qui la cosa per sommi capi, rimandando a trattazioni più complete in letteratura.

2A.2 Il caso generale: la teoria di Mie.

Questa teoria realizza una soluzione analitica e assai generale delle equazioni di Maxwell per lo *scattering* della radiazione da parte di particelle sferiche (chiamato anche *scattering* di Mie. La teoria è stata pubblicata in un famoso lavoro del 1908.

Il formalismo di Mie permette di calcolare i campi elettromagnetici all'interno e all'esterno di un oggetto sferico, e quindi di come la luce è diffusa, la sezione d'urto totale, ecc. Il risultato per particelle sferiche è riassunto nella Figura A1, che riporta la sezione d'urto normalizzata alla sezione geometrica πR^2 di una sfera di metallo perfetto conduttore di raggio R in funzione della frequenza fotonica.

Questo risultato, molto importante, mostra un andamento a legge di potenza nella parte di bassa frequenza: $\sigma/(\pi R^2) \sim 9(kR)^4$. Si tratta di un risultato intuitivo in quanto, al diminuire della frequenza e aumentare della lunghezza d'onda la probabilità di interazione tra fotoni e la particella diminuisce, in quanto un fotone di grande lunghezza "non vede più" la particella (notiamo qui che il processo è completamente diverso da quello dello *scattering* Thomson sugli elettroni, in quanto questi sono carichi elettricamente e la sezione d'urto non cambia con la lunghezza d'onda, mentre nel caso attuale la particella è assunta a carica totale nulla).

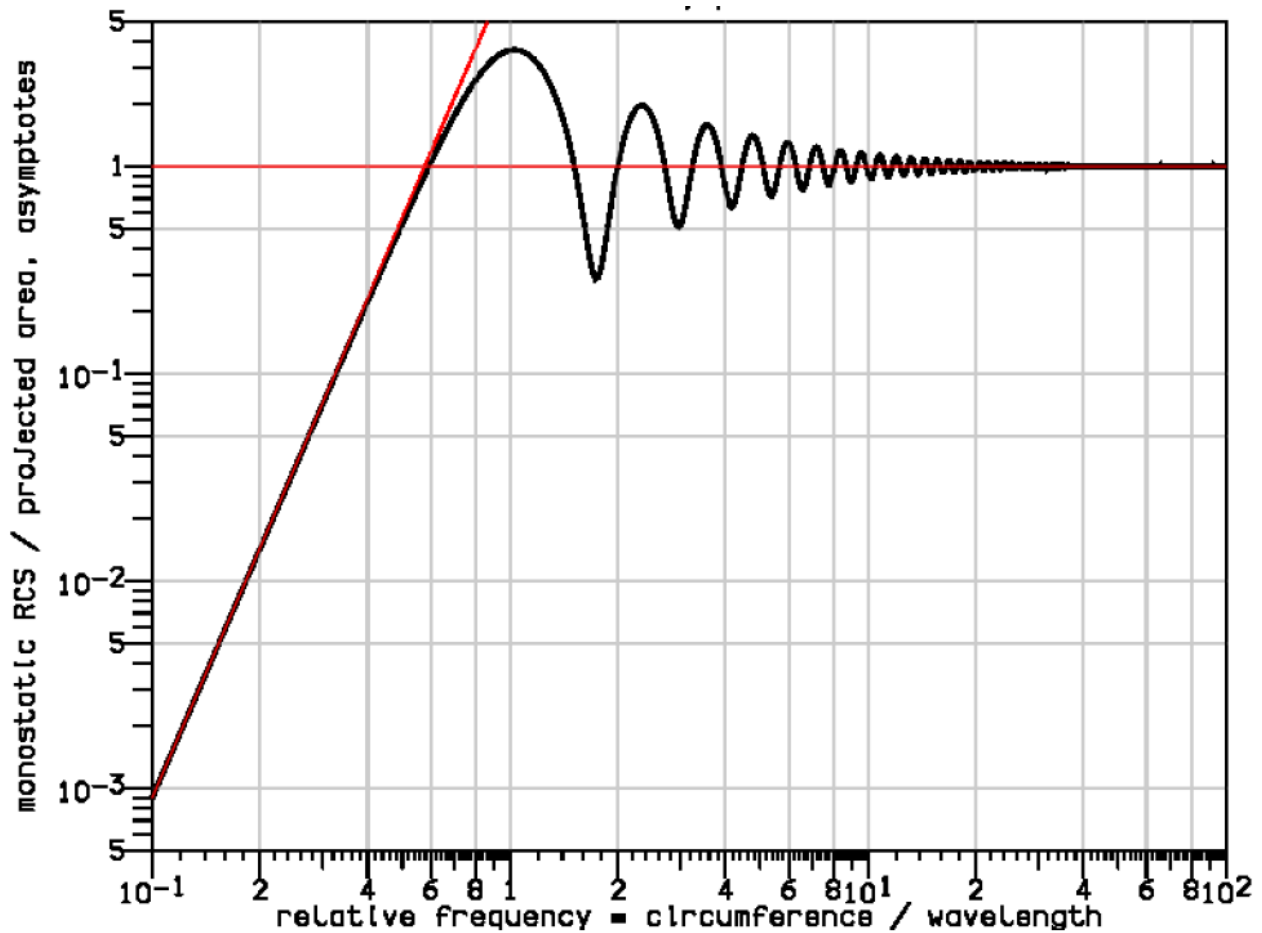


Figura A1.

Sezione d'urto di una sfera di metallo perfetto conduttore in funzione della frequenza. Nel limite di bassa frequenza, dove la circonferenza della sfera è minore della lunghezza d'onda, la sezione d'urto normalizzata è proporzionale alla frequenza alla quarta potenza, $\sigma/(\pi R^2) \sim 9(kR)^4$. Nel limite di alta frequenza è invece costante $\sigma \sim \pi R^2$. (Nota che k qui è il vettore d'onda, proporzionale alla frequenza ν). La regione ove domina la legge di potenza è detta di Reyleigh.

Nel limite di alta frequenza è invece la sezione d'urto e' costante: $\sigma/(\pi R^2) \sim 1$ e pari alla sezione geometrica (anche qui un risultato ovvio in quanto i fotoni si comportano in questo limite come particelle e l'effetto di diffrazione si annulla). Un aspetto notevole sono le risonanze, dette di Mie, nella regione intermedia, ossia quando le

dimensioni della sfera diffondente sono prossime alle lunghezze d'onda dei fotoni: qui la sezione d'urto ha forti variazioni con la frequenza. Queste risonanze hanno la stessa origine fisica delle risonanze di Airy, e derivano dall'effetto della diffrazione dei fotoni sull'ostacolo.

L'esistenza di queste risonanze è particolarmente utile per dedurre informazioni sulle dimensioni e la struttura delle particelle scatteranti sulla base degli spettri osservati.

2A.3 Lo scattering Rayleigh.

Un caso particolare della soluzione di Mie è lo *scattering* Rayleigh. Questo descrive diffusione elastica di luce da parte di particelle le cui dimensioni siano molto più piccole della lunghezza d'onda della luce. L'intensità della radiazione diffusa è data da

$$I(\nu) = I_0 \left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{2R^2} \right) \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^4 \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right)^2 \left(\frac{d}{2} \right)^6$$

dove θ è l'angolo di scattering, R la distanza dall'osservatore, n l'indice di rifrazione, λ la lunghezza d'onda fotonica e d la dimensione delle particelle.

Questa relazione vale nel limite in cui le dimensioni delle particelle sono piccole rispetto alla lunghezza d'onda dei fotoni. La dipendenza dalla λ è esattamente quella di Mie nel limite già detto, in più è esplicitata una forte dipendenza dalla dimensione delle particelle. La sezione d'urto diviene semplicemente quella geometrica πR^2 per dimensioni delle particelle più grandi.

Il colore blu del cielo risulta appunto da *scattering* Rayleigh, poiché la dimensione delle particelle di gas in atmosfera è molto più piccola della lunghezza d'onda della luce visibile. Lo *scattering* di Rayleigh è molto maggiore per la luce blu che per altri colori a causa della sua lunghezza d'onda più corta. Come la luce del sole attraversa l'atmosfera, la sua componente blu è fortemente diffusa Rayleigh dai gas atmosferici, mentre fotoni di maggior lunghezza d'onda (ad esempio rosso / giallo) non lo sono. La luce del cielo che arriva direttamente dal Sole, pertanto, sembra essere un po' gialla, mentre la luce diffusa del cielo appare blu. Durante alba e tramonto l'effetto Rayleigh è molto più evidente a causa del maggiore volume di aria attraverso cui passa la luce solare, e in questo caso la luce diretta può essere fortemente arrossata dalla presenza di polveri atmosferiche. Al contrario, le goccioline d'acqua che compongono le nuvole sono di dimensioni paragonabili alla lunghezza d'onda di luce visibile, e la dispersione è descritta dal modello di Mie a sezione d'urto costante, piuttosto che quella di Rayleigh. Qui, tutte le lunghezze d'onda della luce visibile sono diffuse in modo circa identico e le nuvole appaiono quindi bianche o grigie.

2A.4 La curva di estinzione galattica.

La teoria di Mie e dello *scattering* Rayleigh spiegano la forte dipendenza della curva di estinzione galattica mostrata in Fig. 13 dalla lunghezza d'onda. Essenzialmente la ragione sta nel fatto che nel mezzo interstellare (ISM d'ora in poi) le componenti sono molteplici, ovvero idrogeno neutro e molecolare, elettroni liberi (nelle regioni HII principalmente), molecole del CO e molte altre, oltre che grani di polveri. Essenzialmente tutte queste componenti, incluse le polveri, hanno forte tendenza a produrre *scattering* fotonico; in più, le polveri hanno anche la capacità di assorbimento vero (e ri-emissione nell'IR). Avremo quindi una situazione di *scattering* combinato con assorbimento vero, con il primo che avviene nella regione di Rayleigh della figura A1, visto che i principali diffusori hanno dimensioni inferiori alla lunghezza d'onda fotonica ($\lambda > 1000 \text{ \AA}$). Così fotoni UV sono diffusi molto frequentemente, mentre quelli a maggior lunghezza d'onda sono diffusi molto meno, e ciò significa che i primi permangono all'interno del mezzo molto più a lungo ed hanno molto maggiore probabilità di essere assorbiti. I fotoni galattici emessi nell'IR, invece, escono praticamente indisturbati dalla galassia anche in presenza di un ISM ricco.

L'effetto complessivo è riassunto nell'andamento con la lunghezza d'onda in Fig. 13.

APPENDICE 2B: IL PROCESSO DI SCATTERING THOMSON

Necessario per quanto discusso nel Cap. 2.2, e ancor più per importanti questioni affrontate nella Sez. 11 nel seguito, discutiamo qui brevemente il processo di diffusione fotonica su elettroni liberi, il classico processo di *scattering* Thomson. E' il principale meccanismo di interazione tra fotoni e materia in astrofisica, e dunque vale la pena accennarne qui.

Limitiamo la nostra analisi alle proprietà della diffusione su elettroni liberi nel limite classico, situazione che considera fotoni di energia minore rispetto all'energia a riposo dell'elettrone, 511 KeV, ed elettroni essenzialmente fermi o in moto non relativistico. In questa situazione, consideriamo intanto il caso più semplice di un elettrone investito da un'onda piana *linearmente polarizzata*. L'equazione dinamica per il moto dell'elettrone è:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{e\hat{\varepsilon}E_0}{m} \sin\omega_0 t, \quad [2A.1]$$

con una soluzione per l'andamento temporale della posizione data da:

$$\vec{r}(t) = -\frac{eE_0}{m} \hat{\varepsilon} \sin\omega_0 t / \omega_0^2. \quad [2B.2]$$

ed una situazione geometrica come in figura:

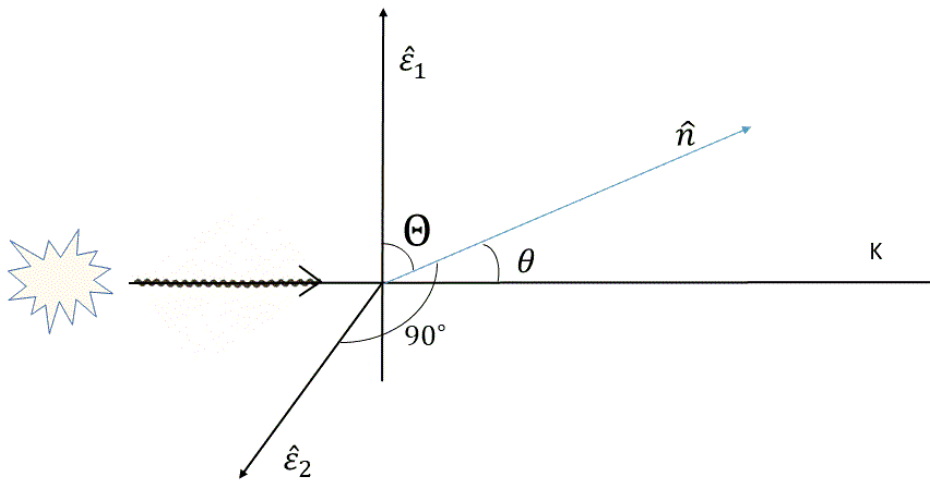


Figura 2B.1.
Illustrazione della configurazione geometrica dello scattering fotonica Thomson.

Se ora usiamo la formula di Larmor in funzione dell'accelerazione della particella, la potenza emessa dall'elettrone è

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{e^2 \dot{r}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \Theta = \frac{e^4 E_0^2}{8\pi m^2 c^3} \sin^2 \Theta \quad [2B.3]$$

(nota che c'è un fattore 1/2 da includere per la media temporale della funzione oscillante), che deve essere confrontato con il flusso di energia radiante trasportata dalla radiazione incidente (dal teorema di Poynting):

$$\langle S \rangle = \frac{c}{8\pi} E_0^2 \quad [2B.4]$$

confronto che ci permette di definire una sezione d'urto differenziale dal rapporto delle due. La sezione d'urto è definita come la frazione dell'energia incidente che è diffusa entro l'angolo solido $d\Omega$

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \langle S \rangle \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{cE_0^2}{8\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega}, \quad \text{ovvero}$$

$$\left\langle \frac{d\sigma}{d\Omega} \right\rangle_{pol} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \Theta \equiv r_0^2 \sin^2 \Theta \quad \text{con} \quad [2B.5]$$

$$r_0 \equiv \frac{e^2}{mc^2} \quad (\text{raggio classico dell'elettrone})$$

(Θ è l'angolo tra la direzione di oscillazione dell'elettrone e la direzione dell'osservatore \hat{n}). Dall'integrazione su tutte le direzioni otteniamo la ben nota sezione d'urto totale di Thomson

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \approx 6.65 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2 \quad [2B.6]$$

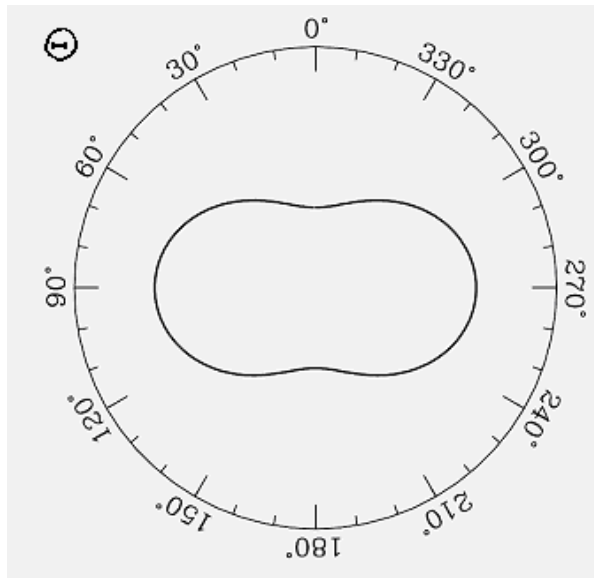


Figura 2B.2.
Andamento della sezione d'urto in funzione dell'angolo di uscita Θ .

E' facile ora calcolare la sezione d'urto nel caso di **radiazione non-polarizzata**. La si può considerare come sovrapposizione lineare di due onde indipendenti linearmente polarizzate lungo le direzioni $\hat{\mathcal{E}}_1$ e $\hat{\mathcal{E}}_2$ in Fig. 2A.1. La quantità differenziale $d\sigma/d\Omega$ sarà dunque la media per le due, una componente che esce ad un angolo di $\pi/2$, l'altra con un angolo Θ :

$$\left\langle \frac{d\sigma}{d\Omega} \right\rangle_{non\ pol} = \frac{1}{2} \left(\left\langle \frac{d\sigma(\Theta)}{d\Omega} \right\rangle_{pol} + \left\langle \frac{d\sigma(90^\circ)}{d\Omega} \right\rangle_{pol} \right) = \frac{r_0^2}{2} (1 + \sin^2 \Theta) \quad [2B.7]$$

La distribuzione angolare della Potenza emessa, in funzione dell'angolo Θ è illustrate in Fig. 2A.2.

L'integrale lungo tutte le direzioni mostra che la sezione d'urto totale rimane come in [2A.6].

Tre cose importanti da notare riguardo a questo processo.

- 1) L'energia (e la frequenza) dei fotoni in uscita è identica a quella in entrata, solo la loro direzione è modificata, per la frazione di tali fotoni corrispondente alla [2A.5].
- 2) La sezione d'urto differenziale $d\sigma/d\Omega$ è simmetrica rispetto alla trasformazione $\Theta' \rightarrow -\Theta$, ossia ha valori perfettamente simmetrici avanti-indietro. Il processo di *scattering* Thomson è sostanzialmente isotropo.
- 3) La radiazione diffusa ha un certo grado di polarizzazione lineare, anche se quella incidente è perfettamente non polarizzata. Il grado di polarizzazione e l'angolo di polarizzazione dipende dall'angolo della visuale Θ . Nella direzione \hat{n} , il rapporto delle due onde diffuse nelle direzioni $\hat{\mathcal{E}}_1$ e $\hat{\mathcal{E}}_2$ è $\sin^2 \Theta : 1$. Così il grado di polarizzazione lineare è

$$\Pi = \frac{1 - \sin^2 \Theta}{1 + \sin^2 \Theta} = \frac{1 - \cos^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta} \quad [2B.8]$$

dove l'angolo $\theta = \pi / 2 - \Theta$ è tra l'onda incidente e la diffusa. Se osserviamo in direzione $\theta=0$ oppure $\pi / 2$ non vediamo nessuna polarizzazione, a $\theta=\pi/2$ la radiazione è polarizzata al 100%.

3. ANALISI STATISTICHE DI POPOLAZIONI DI SORGENTI COSMICHE

L'oggetto di studio della cosmologia e' chiaramente molto particolare, l'Universo e le sue componenti e la sua storia. Un problema fondamentale, e insormontabile, che si incontra in questo studio deriva da una parte nella lontananza dell'oggetto di analisi dall'osservatore, in nessun modo modificabile: le strutture cosmiche si collocano a remotissime distanze nello spazio-tempo e risultano cosi' estremamente deboli. Vi e' tuttavia un problema ancor piu' fondamentale, che si somma al primo: abbiamo a disposizione "un solo Universo" da studiare. Di questo, inoltre, siamo in grado di campionare con le nostre osservazioni solo una piccola parte che, come sappiamo dalla Relativita' Speciale, sta lungo la superficie del *cono-luce* passato nello spazio-tempo a 4 dimensioni, il cui vertice coincide con la nostra posizione attuale. Da questo molto limitato "campionamento" dobbiamo dedurre proprieta' generali sull'immensa realta' oggetto della nostra indagine. E' da tutto questo ovvio come sia per i cosmologi necessario non solo sfruttare le piu' potenti risorse osservative a disposizione, ma, non meno, sfruttare al meglio i dati ottenuti. Questo secondo aspetto necessita di una consapevolezza profonda delle limitazioni cui sono soggette le nostre osservazioni e l'utilizzo delle tecniche statistiche piu' potenti ed accurate per l'analisi dei dati.

Affrontiamo in questo e nel prossimo capitolo, con questo spirito di fare un miglior uso possibile dei dati, una discussione riguardante alcune proprieta' statistiche fondamentali delle popolazioni di sorgenti cosmiche, come determinarle, sulla base di quali osservazioni ed analisi, e quali informazioni cosmologiche ricavare da esse. Cio' ci permettera' di ottenere dati importanti, quali la densita' media di luminosita' e di massa delle galassie.

3.1 Descrittori statistici delle popolazioni di sorgenti cosmiche.

La principale funzione che quantifica le proprieta' statistiche di una popolazione di sorgenti astrofisica e' la **funzione di luminosita' $\Phi(L)$** , in funzione della luminosita', ovvero **$\Phi(M)$** in funzione della magnitudine assoluta in una certa banda spettrale. In riferimento ad una certa classe di oggetti, tale funzione stabilisce il numero di oggetti entro l'unita' di volume per unita' di intervallo di L o M (Figura 1).

Cosmologi osservativi e astronomi hanno dedicato decenni nel cercare di determinare queste funzioni, per i vari tipi di galassie, nei vari diversi ambienti cosmici (nel "campo", nei gruppi, negli ammassi di galassie), nelle diverse bande dello spettro elettromagnetico, e alle diverse epoche.

Le tecniche e gli stimatori statistici utilizzati per le determinazioni delle funzioni di luminosita' sono di vari tipo. Di questi ne illustriamo quello piu' popolare e semplice

(in linea di principio). Occorre, per introdurre questo, premettere l'importante concetto di *campionamento completo* (o limitato in flusso) di sorgenti.

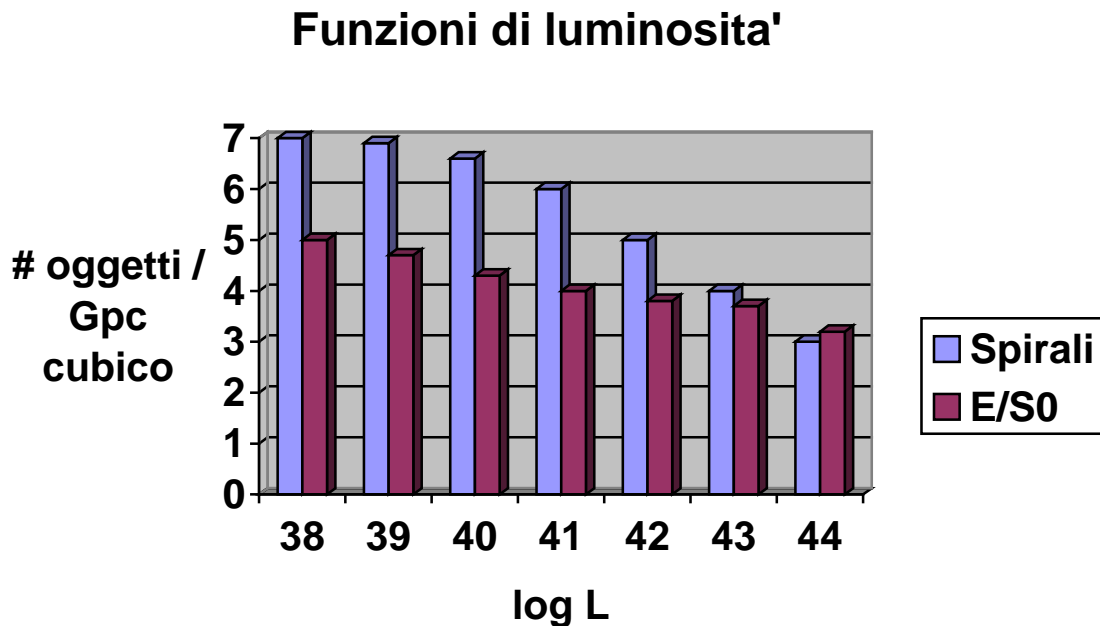


Figura 1. Rappresentazione grafica di funzioni di luminosita' di due popolazioni di galassie, una classe di spirali ed una di sferoidali. In asse Y e' riportato il logaritmo del numero di oggetti per Gpc cubico e per unita' di intervallo logaritmico di luminosita', in X il logaritmo della luminosita' in una certa banda. Per quanto visto nel Cap. precedente, ci aspettiamo che le funzioni di luminosita' delle galassie evolvano con il tempo per effetto dell'evoluzione delle loro popolazioni stellari costituenti.

Selezione completa (limitata in flusso) di un campione di sorgenti. Poiche' per loro natura, le osservazioni cosmologiche (e quelle astronomiche piu' in generale) vengono effettuate da osservatori situati a distanze enormi dalle loro sorgenti, occorre prestare buona attenzione alle limitazioni che cio' comporta (e' una situazione completamente diversa da quanto avviene ad es. nei laboratori di fisica, ove l'osservatore si colloca ad una distanza a piacere dal target osservativo). Si definisce selezione completa di un campione di sorgenti in una determinata banda e.m. osservativa (ottica, radio, IR, X) un catalogo di tali sorgenti che includa tutti gli oggetti entro una certa area di cielo con flusso superiore ad un certo valore limite S_{vlim} .

Un campione che includa tutti gli oggetti con $S_v > S_{vlim}$ e' detto campione limitato in flusso. Un campione cosi' costituito ha il grande vantaggio di permettere analisi statistiche auto-consistenti in grado di fornire informazioni di validita' generale sul cosmo e sue popolazioni di sorgenti, slegate dunque dall'osservatore e sue limitazioni. Si tratta della procedura piu' sicura; alcune volte sono state infatti tentate selezioni ad esempio limitate in volume, che non sono pero' mai completamente attendibili.

Riportiamo in Figura 2 il piano fondamentale “luminosità/distanza” che mostra gli effetti della selezione osservativa su di un campione di 3000 sorgenti IR (osservate con il satellite Spitzer) in due diverse aree di cielo, le cui sorgenti sono indicate rispettivamente in rosso e in blu. Il campionamento è limitato in flusso, il cui effetto è ben visibile in figura: con le osservazioni siamo in grado di popolare solo la parte in alto rispetto alla curva in grassetto, che corrisponde ad oggetti con luminosità tale da corrispondere ad un flusso $S_v > S_{vlim}$.

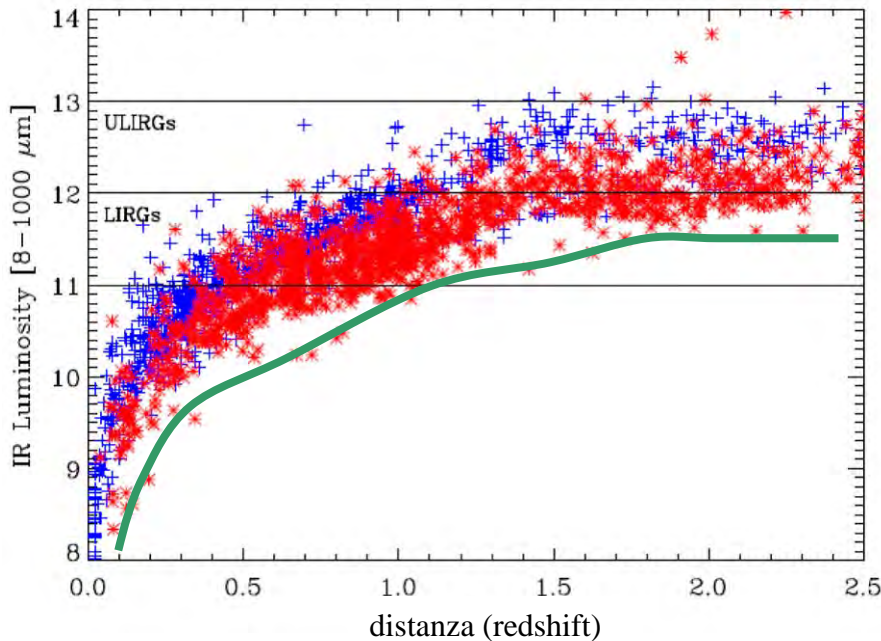


Figura 2. Diagramma che illustra una selezione di sorgenti cosmiche nel piano Luminosità/distanza. La distanza nel tempo cosmico è qui rappresentata dal redshift z (per $z < 1$, questo è all'incirca proporzionale alla distanza). Nel grafico è evidente l'effetto del limite in flusso: il fatto che $S_v > S_{vlim}$ per tutte le sorgenti implica che quest'ultime non siano rivelabili al di sotto della linea in grassetto indicata.

Per procedere con la nostra analisi statistica occorre quindi in prima istanza verificare la completezza del campione. È necessario qui definire il flusso limite sulla base delle caratteristiche delle osservazioni di scansione o immagine del cielo, tra le quali la sensibilità dei rivelatori, la superficie del telescopio, il tempo di esposizione. La procedura standard è quella di operare una simulazione (Monte Carlo) che consiste nell'inserire sorgenti fittizie di diverso flusso in una immagine reale e verificare quali e con quale flusso risultano riconoscibili nell'immagine e quali no. Verifiche "a-posteriori" sulla completezza si possono anche eseguire sulla base di analisi descritte nel seguito (conteggi di sorgenti e test V/V_{max}).

Conteggi numerici di sorgenti. Si tratta di una semplicissima ma estremamente potente tecnica di indagine statistica di campioni di sorgenti. I conteggi stabiliscono semplicemente il numero di sorgenti $N(>S_v)$ con flusso maggiore di un certo valore S_v per unità di area di cielo (sr^{-1}) e come questo numero dipende dal flusso. Ne riportiamo un esempio in Figura 3.

Dimensionalmente, se il campionamento è completo, in un Universo Euclideo (ove si applichi questa geometria) i conteggi $N(>S_v)$ su tutto il cielo saranno dati da

$$N(>S_\nu) \propto \int \phi(L_\nu) dV = \int \phi(L_\nu) d(d^3) \sim \frac{4\pi}{3} \phi(L_\nu) \cdot d^3 \quad [3.1]$$

dove $\phi(L_\nu)$ e' la funzione di luminosita' e dove, considerando la relazione della distanza di luminosita' $L_\nu=4\pi d^2 S_\nu$, si ha

$$d = \sqrt{\frac{L_\nu}{4\pi S_\nu}} \propto S_\nu^{-0.5} \quad [3.2]$$

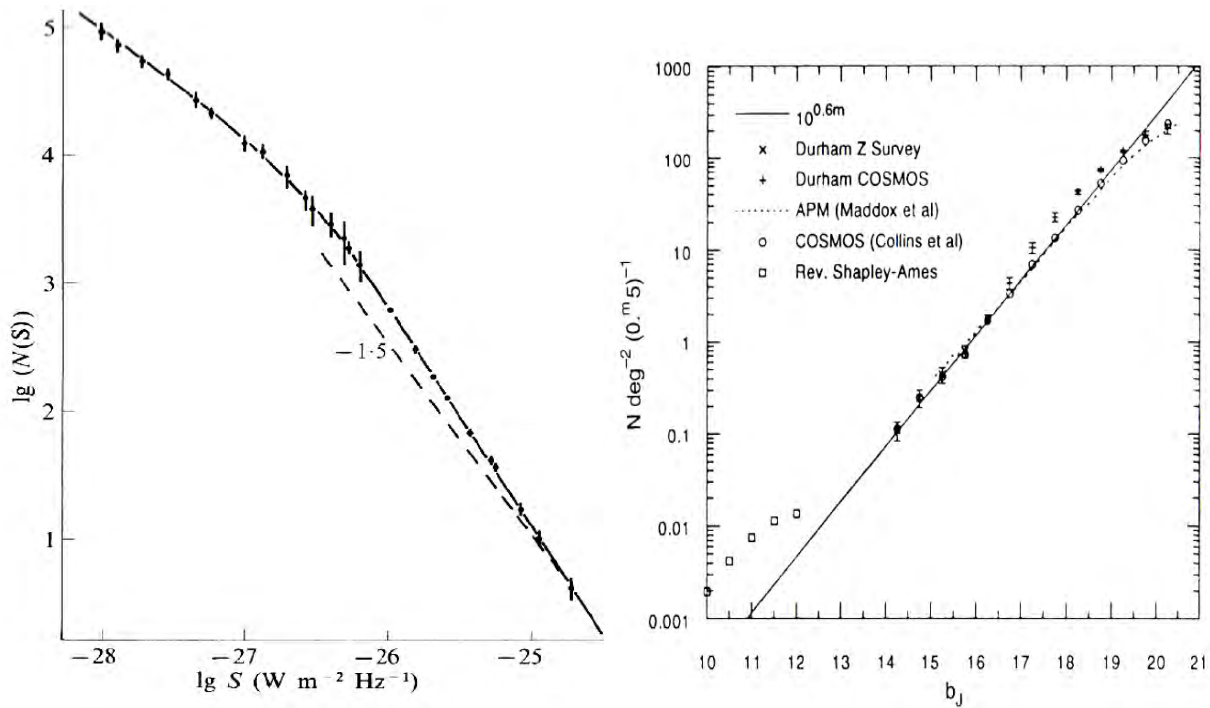


Figura 3. Pannello a SX: Conteggi integrali di radio-sorgenti. E' mostrato il confronto con una pendenza "euclidea" $N \sim S^{-1.5}$. Pannello a DX: conteggi di galassie in ottico confrontati con l'andamento euclideo $\log N \sim 0.6m$.

Ovviamente, a questa integrazione in distanza occorre aggiungere una in luminosita' L_ν . Piu' precisamente e con riferimento alla Fig. 2, si trattera' in generale di effettuare un integrale doppio su L_ν e sulla distanza d (o il redshift z):

$$N(>S_\nu) = \iint dL_\nu dd \cdot \phi(L_\nu) 4\pi d^2$$

Supponiamo per semplicita' che si tratti di galassie tutte della stessa luminosita', ossia che $\phi(L)=\delta(L)$ sia la funzione delta di Dirac, e supponiamo che $d \ll 4000$ Mpc (in modo che il calcolo si puo' svolgere nell'ambito di uno spazio con geometria euclidea). Si ottiene cosi', se lo spazio campionato e' riempito da sorgenti in modo omogeneo,

$$N(>S_\nu) = \phi(L_\nu) \int dd \cdot 4\pi d^2 = \frac{1}{6\sqrt{\pi}} \phi(L_\nu) L_\nu^{3/2} \cdot S_\nu^{-1.5} \quad [3.3]$$

Si puo' immediatamente verificare che la successiva integrazione sulla luminosita', anche nel caso piu' generale di una qualunque forma per la $\phi(L)$, non modifica la dipendenza fondamentale dei conteggi totali dal flusso (trattandosi di una somma di leggi di potenza tutte con la stessa dipendenza dal flusso data da eq.[3]). La dipendenza dal flusso espressa da [3.3] va sotto il nome di *andamento euclideo* dei conteggi. Volendo ragionare in termini di magnitudini anziche' flussi, essendo $m \sim -2.5 \log S_v + \text{cost}$, si ha (vedasi Figura 3 a DX):

$$N(< m) \propto \phi(M) m^{0.6}$$

Dal punto di vista del calcolo operativo dei conteggi integrali, si tratta di stabilire, molto semplicemente, la distribuzione cumulativa del numero di sorgenti in una certa area di cielo in funzione del loro flusso. Si ordinano quindi le sorgenti del campione completo in ordine di flusso decrescente, ottenendo quindi una stima dei conteggi da

$$N(> S_{v\text{lim}}) = \sum_i \frac{1}{\Omega(S_{vi})}, \quad [3.3.0]$$

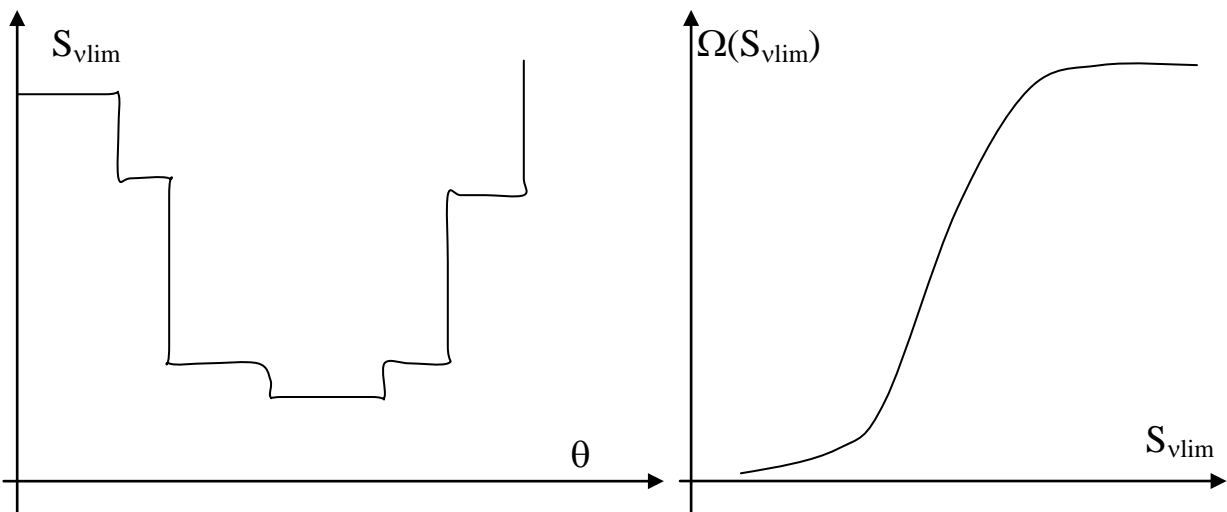


Figura 4. Pannello a SX: illustrazione della dipendenza del flusso limite in funzione della posizione θ nella mappa di una survey cosmologica. Pannello a DX: funzione che esprime lo sky-coverage Ω in funzione del flusso limite.

ove la sommatoria e' estesa alle sorgenti i tali che il loro flusso $S_{vi} > S_{v\text{lim}}$, e ove $\Omega(S)$ e' l'area di cielo coperta dal campionamento (detto survey) a quel limite di flusso (area entro la quale una qualunque sorgente di flusso S_{vi} sarebbe rivelabile). Questo cosiddetto *sky-coverage* di una survey e' illustrato in Figura 4. L'errore tipicamente associato a questa stima e' poissoniano ($\Delta N = N(>S)/\sqrt{N}$).

Ove risultasse che il campione che si e' utilizzato per la stima dei conteggi non e' perfettamente completo e limitato-in-flusso, e' pur sempre possibile correggere la

stima [3.3.0] dei conteggi nel caso si sia verificato il grado di incompletezza in funzione del flusso limite (in termini ad es. della frazione di sorgenti perse dall'osservazione, ottenibile tramite la simulazione Monte Carlo precedentemente menzionata). In questo caso i conteggi devono essere corretti con il reciproco della frazione di completezza. Analoghe procedure di correzione si applicheranno per le stime delle funzioni di luminosita' (vedi nel seguito).

Da notare che l'andamento in funzione del flusso di eq.[3.3] dipende essenzialmente dalla 3-dimensionalita' che ho assunto caratterizzare la popolazione, dall'assunzione di uno spazio regolato dalla geometria euclidea e di una distribuzione omogenea di sorgenti. Nel caso di distribuzioni in spazi a 2 dimensioni (ad es. le stelle nel piano della nostra galassia) l'andamento previsto sarebbe

$$N(> S) \propto S^{-1}, \quad \text{ovvero} \quad N(< m) \propto m^{0.4}.$$

I conteggi di sorgenti costituiscono un osservabile cosmologico fondamentale e forniscono un metodo semplice e potente di analisi della distribuzione spaziale delle sorgenti. Si distingue tra la forma piu' semplice, i **conteggi integrali** $N(>S_\nu)$, gia' definiti, e i **conteggi differenziali**:

$$N(S_\nu) \equiv \frac{dN(> S_\nu)}{dS_\nu} \quad [3.4]$$

La forma differenziale ha il vantaggio che i bins di dati entro cui sono definiti i conteggi differenziali sono statisticamente indipendenti (al contrario, i dati dei conteggi integrali non lo sono in quanto, dato ogni valore del flusso limite, tutte le sorgenti piu' brillanti che contribuiscono ai dati a flussi limite piu' brillanti contribuiscono anche a questo flusso limite piu' debole). Nel caso euclideo, si ha che la derivata [3.4] comporta: $N(S) \propto S^{-2.5}$.

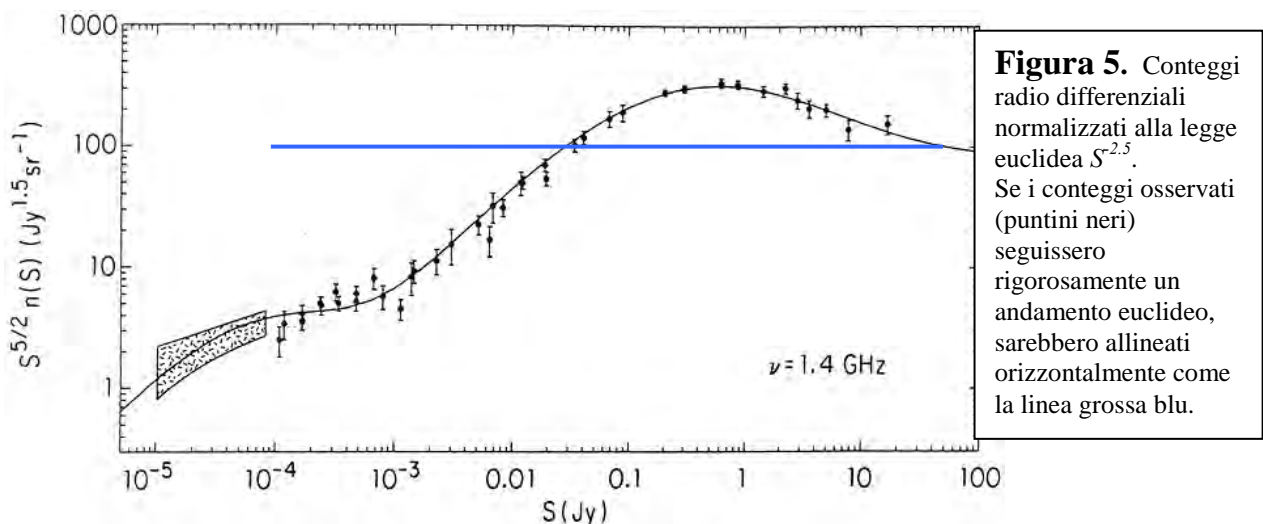


Figura 5. Conteggi radio differenziali normalizzati alla legge euclidea $S^{2.5}$. Se i conteggi osservati (puntini neri) seguissero rigorosamente un andamento euclideo, sarebbero allineati orizzontalmente come la linea grossa blu.

Considerando l'andamento di riferimento espresso da [3.3], e' molto comune infine esprimere i conteggi differenziali come rapporto tra i conteggi differenziali osservati

e quelli previsti dall'andamento euclideo $N(S) \propto S^{-2.5}$, si veda illustrazione nella Figura 5.

La tecnica dei conteggi puo' ovviamente essere utilizzata sia per studiare la distribuzione spaziale delle sorgenti, sia anche per verificare la completezza di un campione: in questo caso occorre assumere *a-priori* l'omogeneita' del campione e, come vedremo nella Sez. 9, verificare il criterio che la distanza d sia piccola: un campione completo deve presentare in questo caso conteggi consistenti con un andamento in flusso $N \sim S^{-1.5}$.

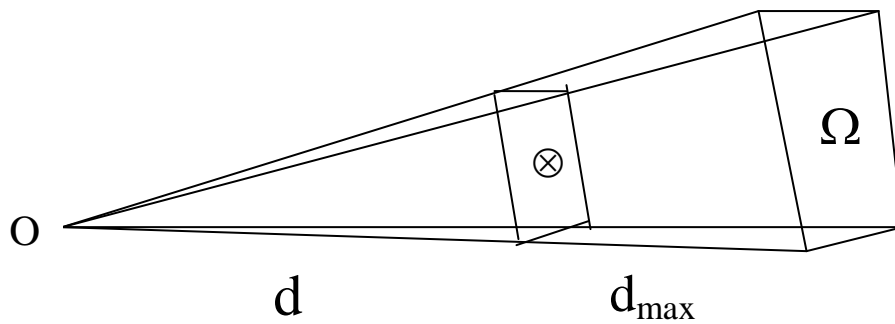


Figura 6. Rappresentazione del calcolo di V/V_{max} . d e' la distanza tra osservatore e sorgente, e questa fornisce il volume conico V . d_{max} e' quella a cui il flusso della sorgente coincide con S_{lim} . La survey campiona il cosmo all'interno del volume conico qui rappresentato entro l'area di cielo Ω .

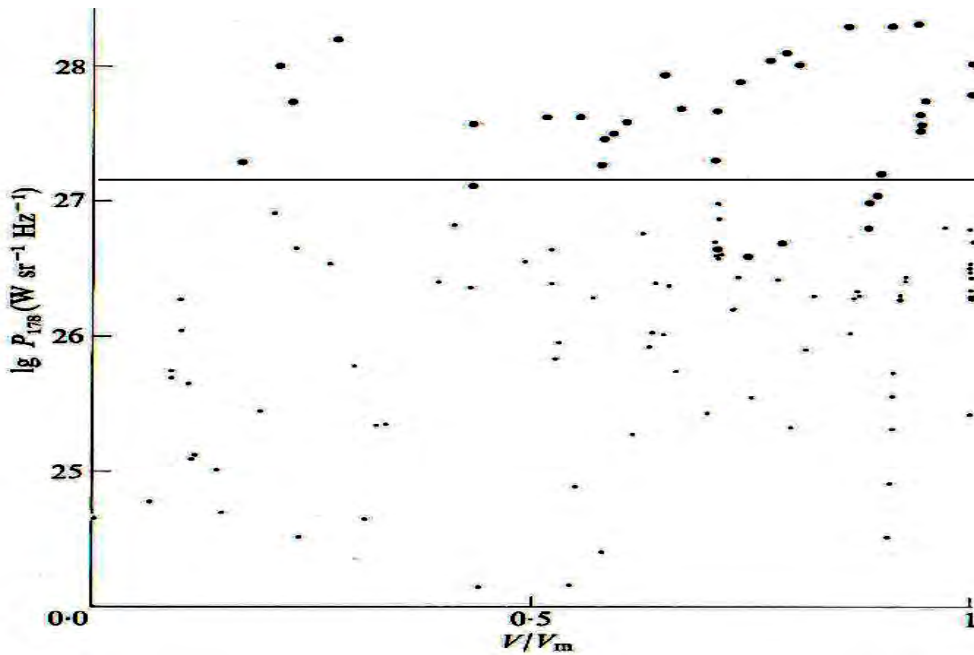


Figura 7. Una applicazione del test V/V_{max} ad un campione di quasar radio (pallini grossi) e radio-galassie (puntini). In entrambi i casi si tratta di oggetti selezionati in radio con un campione completo alla frequenza di 178 MHz. In asse Y e' riportata la potenza radio (in W/Hz/sr). Si noti lo spostamento medio dei quasar verso alti valori della luminosita' radio, e al contempo alti valori del V/V_{max} .

Il test V/V_{max} . Un altro test statistico della distribuzione spaziale delle sorgenti e' il test V/V_{max} . Sempre in presenza di un campione completo e spazialmente omogeneo, si puo' immediatamente verificare che il rapporto tra il volume V occupato dalla sorgente nell'area campionata e il volume massimo V_{max} a sua disposizione entro il flusso limite S_{vlim} e' distribuito in modo uniforme tra i valori di 0 e 1 per tutte le sorgenti del campione, e pertanto:

$$\left\langle \frac{V}{V_{max}} \right\rangle = 0.5 \pm 1 / \sqrt{12N} \quad [3.5]$$

ove N e' il numero di sorgenti e la media indicata consiste nella media aritmetica calcolata su tutte le sorgenti del campione ($1/\sqrt{N}$ e' la deviazione standard della distribuzione uniforme tra 0 e 1). Precisamente qui V e' il volume calcolato entro il cono d'osservazione sino alla distanza della sorgente:

$$V = \frac{\Omega}{3} d^3, \quad [3.6]$$

ove Ω e' l'area di cielo campionata dalla survey (in steradiani, sr, 4π sr e' tutto il cielo ~ 42000 gradi quadrati), mentre V_{max} e' il volume calcolato alla distanza massima per la sorgente alla quale il suo flusso osservato sarebbe pari al flusso limite S_{vlim} . Per calcolarlo si immagina di fare crescere la distanza dell'oggetto, mantenendo la luminosita' L invariata, finche' il flusso della sorgente diventa $S_v = S_{vlim}$, cosa che avviene quando $d = d_{lim}(L)$.

E' facile verificare da [3.2] e da [3.6] che, relativamente ad un universo euclideo (distanze $d \ll 4000$ Mpc), per ogni sorgente del campione si ha:

$$\frac{V}{V_{max}} = \frac{\Omega d^3 / 3}{\Omega d_{lim}^3 / 3} = \left(\frac{d}{d_{lim}} \right)^3 = d^3 \left(\frac{S_{vlim}}{S_v d^2} \right)^{1.5} = \left(\frac{S_{vlim}}{S_v} \right)^{1.5}$$

quantita' quindi facilmente calcolabile anche non essendo nota la distanza d .

La Figura 7 riporta l'applicazione del test ad un campione di radiosorgenti. Il test mostra se vi siano o meno scostamenti significativi dalla condizione di omogeneita'. Nel caso di figura, tali disomogeneita' sono evidenti per i quasar e verranno discusse piu' avanti in Sez. 4. Per le radiogalassie la distribuzione e' piu' vicina al caso omogeneo. Come si vede, l'analisi della variabile V/V_{max} si effettua tipicamente in funzione della luminosita'.

Alternativamente, confidando sull' omogeneita', il test puo' essere usato come verifica della completezza del campione.

3.2. Stimatori statistici della funzione di luminosita' delle galassie: lo stimatore $1/V_{\max}$.

Una semplice applicazione di questi concetti ci fornisce un eccellente e largamente usato stimatore della funzione di luminosita'. Immaginiamo di considerare un campione di galassie completo e limitato in flusso. Occorre ora assumere che per ogni oggetto se ne conosca la distanza. Per ottenere quest'ultima occorre ad esempio misurare il redshift per tutte le sorgenti del campione, e da esso dedurre la distanza tramite ad esempio la legge di Hubble (per oggetti con $d \ll 4000 \text{ Mpc}$, si veda Sez. 5):

$$d \approx \frac{c}{H_0} z \quad [3.7]$$

con $H_0 \approx 70 \text{ Km / sec / Mpc}$ (costante di Hubble),

oppure utilizzare gli stimatori di distanza. Una volta calcolate le luminosita' nella banda d'osservazione di tutti gli oggetti, si effettua un binning in luminosita' (suddivisione in intervalli di luminosita') ed eventualmente uno in distanza, ovvero in tempo cosmico, considerando che la distanza temporale e' semplicemente legata alla distanza fisica da $t \approx d/c$.

Uno stimatore corretto della funzione di luminosita $\phi(L_\nu)$ e' dato dalla seguente sommatoria su tutti gli oggetti entro un certo bin di L_ν e d :

$$\hat{\Phi}(L) = \sum_i [V(d_{\max}) - V(d_{\inf})]_i^{-1} / \Delta L \quad [3.8]$$

dove il segno di tetto denota che si tratta di uno stimatore di Φ e dove per semplicita' $L=L_\nu$ e ΔL e' l'intervallo di luminosita' relativo al bin entro cui vogliamo calcolare la $\phi(L_\nu)$, e

$$V(d_{\inf}) = \frac{\Omega(sr)}{3} d_{\inf}^3$$

[e analogamente per $V(d_{\sup})$]. d_{\inf} e' il taglio inferiore in distanza (nel caso in cui ad es. si voglia calcolare la ϕ entro un certo intervallo di distanza). Invece d_{\max} e' il minimo tra il taglio superiore in distanza (d_{\sup}) e la distanza limite d_{\lim} alla quale l'oggetto sarebbe rivelabile al flusso limite S_{\lim} del campione:

$$d_{\lim} \hat{=} S = \frac{L}{4\pi d_{\lim}^2} = S_{\lim}$$

Quindi $d_{\max} = \min[d_{\sup}, d_{\lim}]$. Figura 8 illustra le varie quantita' in gioco.

Lo stimatore $1/V_{\max}$ obbedisce, tra l'altro, al criterio di massima verosimiglianza (*maximum likelihood*, M.L.)¹. Ad es. lo stimatore $\mu = \sum_i x^i / N$ della media aritmetica e' uno stimatore M.L. della media di una distribuzione, e questo vale anche per la varianza $\sigma^2 = \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 / N$.

La procedura di eq. [3.8] fornisce un metodo assai semplice e potente (non l'unico ovviamente) di correggere le nostre limitazioni osservative per ottenere una informazione generale, non legata a quanto e' possibile osservare dal nostro sistema di riferimento. In particolare essa corregge la densita' spaziale delle sorgenti meno luminose, che deve essere corretta in alto per tenere conto del fatto che esse sono piu' difficilmente rivelate in un campione limitato in flusso.

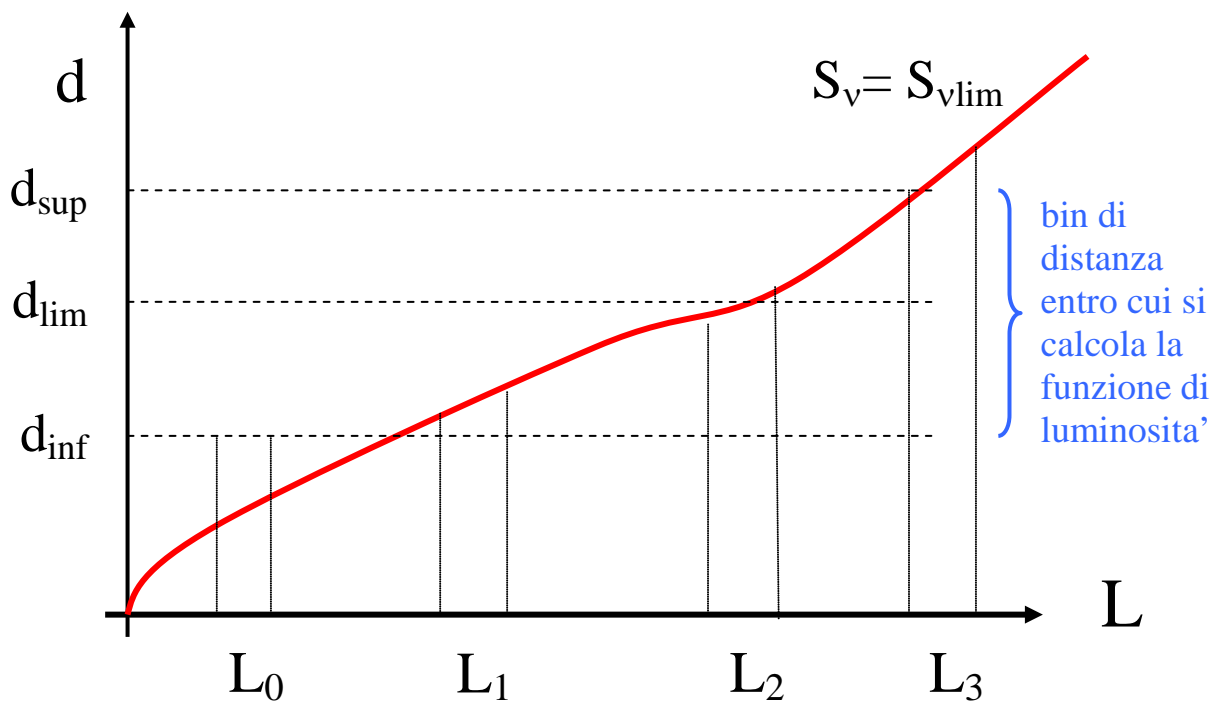


Figura 8. Illustra le varie quantita' in gioco nella valutazione del V_{\max} . La quantita' d_{\max} e' il minimo tra d_{\sup} e d_{\lim} . La curva rossa simboleggia la relazione luminosita' -distanza che corrisponde al flusso limite della survey $S_{v\lim}$. Il bin di distanza tra d_{\inf} e d_{\sup} e' definito da me a-priori.

¹ Si veda Appendice A riguardo al criterio statistico della Massima Verosimiglianza.

M_z	E + SO	Spirals	S/I	Seyferts	Total
-17.5	25. ± 20.	630. ± 110.	113. ± 45.	—	768. ± 120.
-18.5	41.0 ± 9.9	189. ± 22.	32.0 ± 8.9	—	262. ± 26.
-19.5	22.7 ± 3.6	83.7 ± 6.9	15.0 ± 2.9	3.6 ± 1.2	125. ± 8.3
-20.5	20.1 ± 1.7	66. ± 3.0	7.9 ± 1.1	1.3 ± 0.4	97. ± 3.6
-21.5	9.9 ± 0.6	13.7 ± 0.7	3.4 ± 0.3	0.47 ± 0.11	27.7 ± 0.9
-22.5	0.71 ± 0.08	0.68 ± 0.08	0.23 ± 0.04	0.20 ± 0.03	1.75 ± 0.12
-23.5	0.0049 ± 0.0033	0.0090 ± 0.0044	0.0087 ± 0.0043	0.0077 ± 0.0034	0.0237 ± 0.0072
# of objects	450	994	181	59 ^(b)	1684

(^a) The functions are listed in units of $10^{-5} \text{Mpc}^{-3} / \Delta M_z$.
(^b) This number includes 48 objects from the Huchra & Burg's (1987) and 11 from the UGC samples.

Figura 9. Funzione di luminosita' ottica (in banda z equivalente alla B) basata su di un campione di 1684 galassie con $m_z < 14.5$. Questi dati sono graficati nella Figura 10 seguente.

3.3 Funzioni di luminosita' delle galassie.

Alcuni risultati riguardanti applicazioni dello stimatore $1/V_{\text{max}}$ a campioni reali di galassie sono riportati nelle Figure 9 e 10. L'applicazione riguarda un campione di 1684 galassie selezionate nella banda Z di Zwicky con completa informazione di redshift e distanze, e una varieta' di dati complementari (radio, lontano IR). I grafici mostrano un andamento piatto per le funzioni di luminosita' a bassi valori di L (o M), e una rapida convergenza a zero per alti valori, per tutte le popolazioni di galassie considerate.

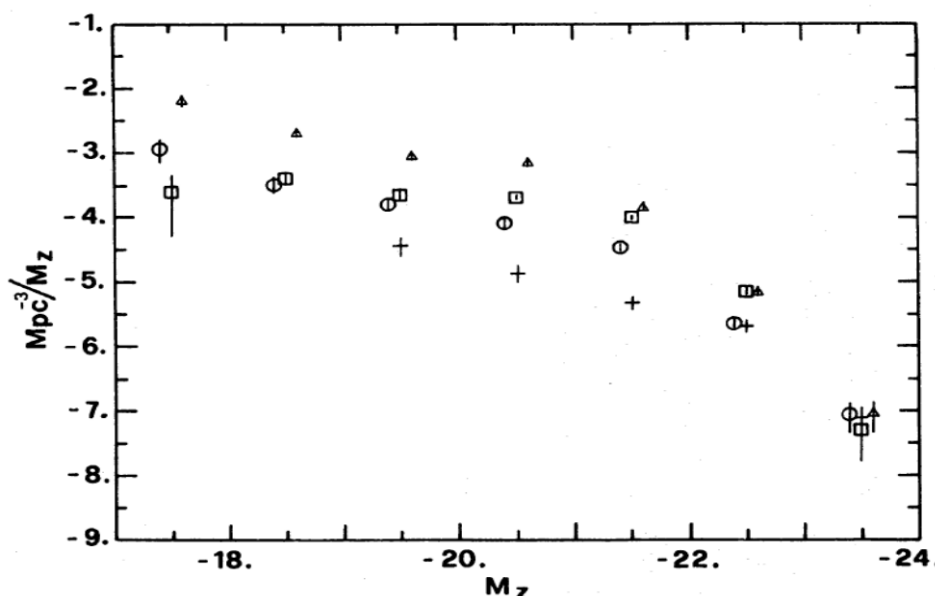


Figura 10. Rappresentazione grafica delle funzioni di luminosita' delle galassie. Galassie ellittiche: quadrati. Galassie spirali: triangoli. Galassie irregolari: cerchi. Nuclei galattici attivi (galassie di Seyfert): croci. Da Franceschini et al. 1988).

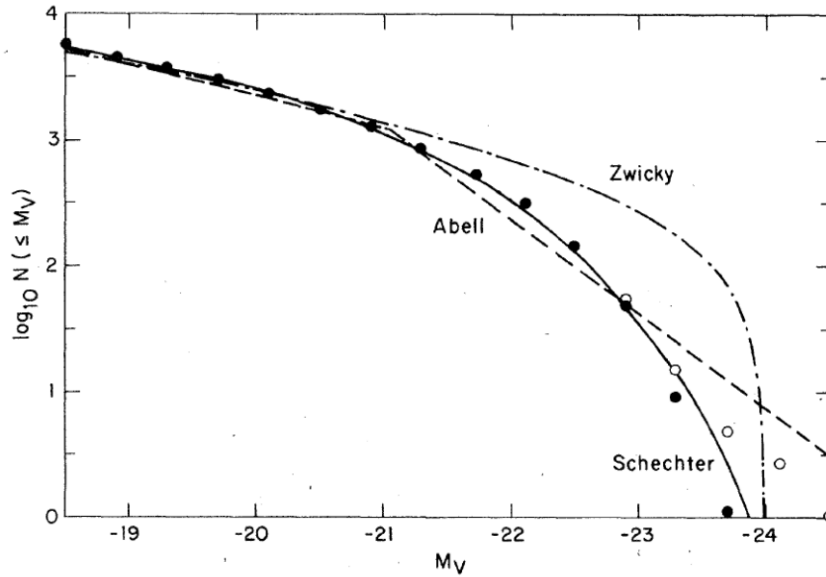


Figura 11. Rappresentazioni grafiche di varie forme analitiche suggerite per riprodurre le LLF delle galassie. Come si vede dal confronto con i dati, solo quella di Schechter fornisce un fit accettabile. I dati a pallini pieni si riferiscono a galassie normali, mentre i pallini vuoti includono galassie supergiganti nei nuclei degli ammassi (galassie cD).

Varie forme sono state proposte per riprodurre le funzioni di luminosità locali (LLF) delle galassie, sia nel “campo” che negli ammassi. Zwicky (1957) ha proposto la seguente forma analitica in funzione della magnitudine assoluta:

$$\Phi(< M) = \text{cost} \cdot [10^{0.2(M-M^*)} - 1]$$

Una rappresentazione a due leggi di potenza è stata proposta da George Abell studiando gli ammassi di galassie (vedasi grafico in Figura 11):

$$\begin{aligned} \Phi(L) &= \text{cost} \left(\frac{L}{L_1} \right)^{-a_1} && \text{per } L < L_1 \\ &= \text{cost} \left(\frac{L}{L_1} \right)^{-a_2} && \text{per } L > L_1 \end{aligned}$$

La forma tuttavia che riproduce meglio i dati osservativi è quella proposta da Schechter (1976):

$$\Phi(L)dL = \Phi^* \left(\frac{L}{L^*} \right)^{-\alpha} \exp\left(-\frac{L}{L^*}\right) L^* \cdot d\left(\frac{L}{L^*}\right) \quad [3.9]$$

che è essenzialmente una legge di potenza alle L medio-basse ed è tagliata esponenzialmente in prossimità di $L=L^*$. I valori caratteristici dei parametri sono:

$$L_v^* \approx 10^{10.5} L_\odot \approx 10^{44} \text{ erg / sec}, \quad M_v^* \approx -21.5$$

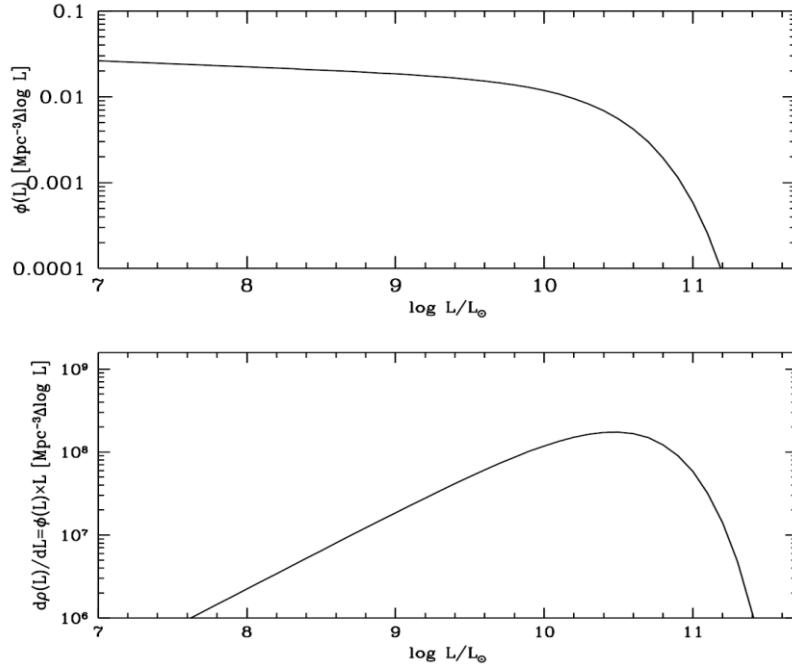


Figura 12. Sopra: Rappresentazione grafica della legge di Schechter, che riproduce bene la LLF delle galassie. Sotto: funzione che riproduce la densita' di luminosita' differenziale $[d\rho(L)/dL=\phi(L)\cdot L]$, che mostra che dominano la densita' di luminosita' galassie con $L\sim L^*$.

La funzione di Schechter e' illustrata in Figura 11 (linea continua) e Figura 12: e' quindi una forma funzionale che prevede una luminosita' caratteristica L^* , che rappresenta la luminosita' delle galassie che dominano dal punto di vista fotometrico la funzione di luminosita'. Definiamo infatti come densita' di luminosita' la quantita'

$$\rho_v \cdot dL = \Phi(L) \cdot L \cdot dL = \Phi(L) \cdot L^2 \cdot \ln 10 \cdot d\log L \quad [3.10]$$

ossia l'energia emessa per unita' di volume per oggetti di luminosita' L entro ΔL .

Il parametro α risulta assumere valori piccoli ($\alpha\sim 1.07$), ossia la pendenza della LLF piuttosto piatta alle medio-piccole luminosita', ed essendo quindi $\Phi(L)$ piatta, la densita' totale media di luminosita' e' dominata da oggetti con $L\sim L^*$ (vedi Figura 12).

La funzione di Schechter ha mostrato una straordinaria capacita' di riprodurre i dati sulla LLF per una varieta' di popolazioni di galassie in diversi ambienti (dal "campo" agli ammassi). Attualmente non e' completamente chiaro il significato di questo risultato. Esso potrebbe forse giustificarsi con il fatto che questa forma funzionale trova una giustificazione in una teoria, sviluppata da Press & Schechter (1974), che spiega la formazione delle galassie – nel regime cosiddetto di collasso *non-lineare* – come dovuta al semplice effetto della forza di gravita' nell'ammassare gerarchicamente strutture proto-galattiche in oggetti sempre piu' grandi e massicci al trascorrere del tempo cosmico. Questo modello di grande successo, cui hanno contribuito una generazione di cosmologi teorici a partire dagli anni '60, va sotto il nome di modello a "clustering gerarchico" (*Hierarchical clustering*). L'aspetto

tuttora non chiaro e' che la teoria di Press & Schechter tratta la materia oscura, che abbiamo visto dominare gravitazionalmente le strutture cosmiche, mentre la LLF di Schechter si riferisce all'emissione e.m. della materia barionica condensata in stelle. La relazione tra materia oscura e barionica, e in particolare i processi fisici che influenzano il collasso, raffreddamento e formazione di stelle nel gas barionico, e i processi che pertanto determinano la forma delle funzioni di luminosita' galattiche, sono tuttora oggetto di grande dibattito.

Il parametro ϕ^* nella [3.9] definisce la normalizzazione della LLF. Vi sono essenzialmente 2 modi per determinarlo. Il primo e' di effettuare un fit della forma tri-parametrica di Schechter a dati sulla LLF e di determinare tutti e 3 i parametri. Il secondo metodo, ancora piu' vincolante, e' di utilizzare eq. [3.1] e [3.3] per confrontare i dati sui conteggi di galassie in una certa banda (ad es. B, V) con la previsione basata sulla LLF nella stessa banda, modificando la normalizzazione ϕ^* sino ad ottenere un buon accordo con i conteggi osservati. I due metodi danno (ovviamente) risultati in buon accordo e indicano:

$$\phi^* \approx 0.01 \text{ Mpc}^{-3} \quad [3.11]$$

quindi la densita' media di galassie nell'universo locale e' circa 1 galassia massiva per 100 Mpc^3 , e quindi la distanza media tra galassie brillanti che da cio' si puo' inferire e'

$$\bar{d} \sim \left(\frac{1}{\phi^*} \right)^{1/3} \approx 5 \text{ Mpc}$$

3.4 Masse in stelle delle galassie. Funzioni di massa stellare delle galassie.

La conoscenza della LLF permette di determinare non solo, come si e' detto, la quantita' di energia radiante media per unita' di volume emessa dalle galassie in funzione della loro luminosita' (eq. [10]), ma anche la densita' di massa in stelle nelle galassie, assumendo di conoscere il rapporto medio massa/luminosita' M/L delle varie classi di oggetti.

La funzione di massa si puo' facilmente ricavare da quella di luminosita' sulla base della tautologia:

$$\Psi(M)dM = \Phi(L)dL, \quad \text{con } M = \left(\frac{M}{L} \right) \cdot L$$

da cui, se $\overline{M/L} = \text{cost}$, si ottiene [3.12]

$$\Psi(M) = \Phi(L) \left(\frac{M}{L} \right)^{-1}$$

Il parametro M/L esprime una quantita' fondamentale delle galassie, la loro attitudine ad emettere fotoni per un certo valore della massa stellare. Il parametro M/L dipende in generale dalle caratteristiche delle popolazioni stellari, in particolare dalla loro eta' media: questa infatti determina il numero di stelle giovani di grande massa presenti, in quanto, per i motivi illustrati in dettaglio nel Capitolo 2, le stelle giovani sono le prime a morire con l'avanzare dell'eta' della popolazione. Dipendera' quindi anche dalla porzione di galassia che si consideri, bulge, alone, o disco. Con riferimento al raggio ottico, si ottengono i seguenti valori medi per le galassie al tempo attuale:

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{M}{L}\right)} &\approx 2-4 \left(\frac{M_{\odot}}{L_{\odot}}\right) && \text{per galassie a spirale} \\ \overline{\left(\frac{M}{L}\right)} &\approx 4-10 \left(\frac{M_{\odot}}{L_{\odot}}\right) && \text{per galassie ellittiche / S0} \end{aligned} \quad [3.13]$$

Da notare che il rapporto massa/luminosita' dipende anche dalla lunghezza d'onda cui si riferisce la luminositaa', e puo' variare molto ad esempio dall'ottico al vicino IR (i valori qui sopra si riferiscono a osservazioni in banda V). Se poi consideriamo la Fig. 2.15 (Sez. 2), ci rendiamo conto che, a parita' di massa stellare, la luminositaa' di una galassia varia molto con l'eta' delle stelle nell'ottico e UV, mentre varia molto poco nel vicino IR, a lunghezze d'onda superiori al micron. Cio' a causa del fatto che le stelle che dominano nell'UV vivono molto poco, molto a lungo invece durano quelle che dominano il vicino IR, trattandosi principalmente di stelle di piccola massa. La conseguenza e' che una misura accurata della massa stellare di una galassia, e pertanto del rapporto medio massa/luminosita', richiede osservazioni nel vicino IR.

Le due diverse medie in [3.13] si possono spiegare facilmente se consideriamo che i due tipi morfologici contengono popolazioni stellari con diverse eta', tipicamente piu' vecchie per E/S0, mentre nelle Sp vi sono stelle che si sono appena formate, ricordando anche quanto precedentemente visto per le caratteristiche spettrali di stelle di diversa eta'. Da eq.[3.12] e [3.13], data la $\Phi(L)$, si ottiene la funzione di massa $\Psi(M)$ semplicemente con uno scaling di un fattore $(M/L)^{-1}$ sull'asse X.

Se tuttavia includiamo in questa analisi anche le parti esterne delle galassie, ad esempio utilizzando il metodo della curva di rotazione o studiando i moti orbitali di sistemi di galassie doppie, tramite la relazione $M \approx r v^2 / G$, con G costante di gravita' (relazione ottenuta confrontando forza di gravita' $F=GMm/r^2$ con quella centrifuga $F=mv^2/r$), allora si ottengono, come e' noto, valori del rapporto M/L per le galassie molto superiori

$$\overline{\left(\frac{M}{L}\right)}_{totale, dinamico} \approx 50 \left(\frac{M_{\odot}}{L_{\odot}}\right).$$

Questo risultato, noto da molto tempo, e' considerata una prova del fatto che nelle parti esterne delle galassie si trovi materia gravitante oscura, ossia non in grado di emettere radiazione. Altre prove decisive dell'esistenza di questa componente nell'universo sono fornite dallo studio dinamico degli ammassi di galassie, nei quali tale evidenza data gia' dagli anni '30: in questo caso addirittura i valori di M/L medi riferiti alle galassie d'ammasso raggiungono $M/L \approx 100-200 (M/L)_\odot$. Infine, su scale ancora maggiori, le grandi concentrazioni di massa gravitazionale sulle scale dei super-ammassi evidenziano una frazione di materia oscura ancora superiore, che si manifesta, e puo' essere determinata, studiando i moti peculiari su grande scala delle galassie (vedi corso della Magistrale). Questi moti, essendo prodotti dall'integrale sul tempo di Hubble della forza di gravita' originata da disomogeneita' di densita', forniscono un vincolo sulla frazione di materia oscura su scala globale ².

3.5 Densita' cosmica media di luminosita' e massa in galassie.

La densita' totale di luminosita' delle galassie (detta anche emissivita') e' data dall'integrale della [3.10]:

$$\overline{\rho_\gamma} = \int \Phi(L) \cdot L \cdot dL \quad [3.14]$$

che, essendo $\Phi(L)$ piatta, e' dominata da oggetti con $L \sim L^*$ (vedi Fig. 12). Ponendo ora in questa i valori dei tre parametri che determinano $\Phi(L)$ ricavati dalle osservazioni, si ottiene una densita' di luminosita' galattica

$$\overline{\rho_\gamma} \approx 10^8 L_\odot \text{ Mpc}^{-3}, \quad [3.15]$$

con una incertezza complessiva di qualche decina di percento.

Assumendo poi da eq.[3.13] un rapporto medio sull'intera popolazione di galassie di $\overline{(M/L)} \approx 5 M_\odot / L_\odot$, si ottiene una densita' di massa in stelle di galassie pari a

$$\begin{aligned} \rho_{matter, stars} &= \int \Psi(M) \cdot M \cdot dM = \int \Phi(L) \cdot \left(\frac{M}{L} \right) \cdot L dL \\ &\approx 5 \cdot 10^8 M_\odot / \text{Mpc}^3 \end{aligned} \quad [3.16]$$

mentre per la densita' di materia oscura ($M/L \sim 50$) in galassie:

$$\rho_{matter, dark} \approx 5 \cdot 10^9 M_\odot / \text{Mpc}^3 \approx 3.4 \cdot 10^{-31} \text{ g} / \text{cm}^3 \approx 212 \text{ eV} / \text{cm}^3. \quad [3.17]$$

Anche il contributo galattico alla densita' di massa, cosi' come quello alla densita' di luminosita', e' dominato da galassie di massa attorno a $10^{11} M_\odot$ (vedasi Fig. 12 in basso, opportunamente scalata per la massa).

² Questo richiedera' un'analisi dettagliata nei corsi successivi.

Come nota storica, ricordiamo che il primo a porsi il problema di definire una densità media di materia gravitante dell'Universo in relazione alla modellistica dinamica basata sulla Relatività Generale (si veda Sez. 6) fu il cosmologo Willem De Sitter, matematico e fisico olandese. Nella sua stima egli assunse che le nebulose, la cui natura allora non era nota, fossero simili in massa alla nostra Galassia, e distribuite in modo approssimativamente omogeneo nello spazio vuoto. La stima di ρ_{matter} da parte di De Sitter risultò ben 4 ordini di grandezza più grande di [3.17], ma il suo tentativo fu comunque davvero notevole. Solo con le osservazioni di Edwin Hubble si rese possibile stimare con più precisione le distanze caratteristiche tra le galassie e densità medie nell'Universo, in discreto accordo con [3.17].

Il confronto del risultato in [3.16] e [3.17] con quanto già ottenuto in Sez. 1.3 (eq. [1.3]) ci fornisce una importantissima conclusione riguardo alla struttura dell'Universo attuale: la densità di massa-energia della materia gravitante è vari ordini di grandezza (circa un fattore 1000, da $1/3$ a 212 eV/cm^3) superiore a quella di tutte le componenti radiative oggi presenti nell'Universo. Per questo si parla oggi di un **Universo dominato energeticamente dalla materia gravitante**, piuttosto che dai fotoni (a cui si aggiunge un ulteriore contributo discusso nella Sez. 10). Ciò avrà importanti conseguenze per la nostra descrizione delle caratteristiche dinamiche dell'Universo attuale in Sez. 7, e importanti conseguenze per lo studio della sua storia evolutiva in Sez. 11.

APPENDICE 3A: applicazione del criterio della Massima Verosimiglianza (Maximum Likelihood)

A.1 Generalita' sul metodo della Massima Verosimiglianza.

Il metodo della massima verosimiglianza in statistica è un procedimento matematico per determinare un parametro di un modello, o un set di parametri, sulla base di un determinato campionamento. Il metodo consiste nel massimizzare la funzione di verosimiglianza, definita in base alla probabilità di osservare una data realizzazione campionaria, condizionatamente ai valori assunti dai parametri oggetto di stima.

Il metodo è stato originariamente sviluppato dal genetista e statistico Ronald Fisher, attorno al 1920. E' molto usato in astronomia, dove i dati a disposizione sono spesso limitati e occorre farne un uso ottimale. L'idea e' basata sul teorema della probabilità totale di avere una certa funzione di luminosità vera ϕ (o qualunque altra distribuzione di probabilità, funzione o quantità che si voglia determinare) avendo un set di dati campionari $\{x\}$, probabilità che coincide con quella di avere un set di dati campionari $\{x\}$ data una funzione di luminosità vera ϕ . Queste due probabilità devono ovviamente coincidere:

$$P(\phi | \{x\}) \cdot P(\{x\}) = P(\{x|\phi\}) \cdot P(\phi) \quad [3A.1]$$

(Peacock, pag. 400). Questo risultato ha preso il nome di teorema di Bayes. La quantità che vogliamo calcolare, $P(\phi | \{x\})$ e' detta anche probabilità a posteriori ossia "dopo il risultato dell'osservazione", mentre la quantità $P(\phi)$ e' detta probabilità a priori (o *prior*). La probabilità che la funzione vera sia ϕ dati un set di dati campionari $\{x\}$ si può quindi esprimere come: $P(\phi | \{x\}) = P(\{x|\phi\}) \cdot P(\phi) / P(\{x\})$. Trascurando il termine $P(\phi)$, che in cosmologia non e' definito (dovremmo avere un set di universi per stabilire questa probabilità a-priori, o *prior*), e considerando $P(\{x\})$ come un semplice fattore di normalizzazione, abbiamo che

$$P(\phi | \{x\}) \sim P(\{x | \phi\}) . \quad [3A.2]$$

Il metodo della massima verosimiglianza ricerca il valore più verosimile di ϕ , ossia ricerca, all'interno dello spazio di tutti i possibili valori di ϕ , il valore del parametro che massimizza la probabilità di aver ottenuto il campione $\{x\}$ dato ϕ . La quantità $P(\{x|\phi\})$ e' detta Likelihood. Un esempio chiarificatore e' dato in A.2 nel seguito. Tipicamente alla probabilità P viene associata un funzione di verosimiglianza che e' il logaritmo della probabilità, che facilita il calcolo visto che la probabilità sara' un

prodotto di valori di ϕ su tutti i dati dell'insieme $\{x\}$, mentre il suo logaritmo sarà una semplice sommatoria.

A.2 Una applicazione del criterio di massima verosimiglianza

Al fine di illustrare il metodo della massima verosimiglianza, si consideri un campione $\{x_i\}_{i=1}^n$ di variabili casuali identicamente e indipendentemente distribuite, con distribuzione normale:

$x_i \sim N(\mu, \sigma^2) \forall i$. La [funzione di verosimiglianza](#) associata è:

$$\mathcal{L}(\mu, \sigma^2 | \{x_i\}_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right\} \quad [3A.3]$$

La massimizzazione della funzione di verosimiglianza è equivalente a massimizzarne il logaritmo:

$$L(\mu, \sigma^2 | \{x_i\}_i) = \ln \mathcal{L}(\mu, \sigma^2 | \{x_i\}_i) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2$$

I parametri μ e σ^2 sono determinati risolvendo il problema di massimo della funzione:

$$\{\mu, \sigma^2\} = \arg \max_{\mu, \sigma^2} L(\mu, \sigma^2 | \{x_i\}_i)$$

Le condizioni per un massimo definiscono il seguente sistema di equazioni in μ e σ^2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mu} &= \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \sum_i (x_i - \hat{\mu}) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \sigma^2} &= -\frac{n}{2} \frac{1}{\hat{\sigma}^2} + \frac{1}{2\hat{\sigma}^4} \sum_i (x_i - \hat{\mu})^2 = 0 \end{aligned} \quad [3A.4]$$

dove i segni di apice sopra i parametri denotano i loro stimatori. Dalla prima equazione discende immediatamente lo stimatore di massima verosimiglianza per la media:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad [3A.5]$$

cioè la media campionaria. La varianza dello stimatore $\hat{\mu}$ è data dalla seguente espressione:

$$\text{var}(\hat{\mu}) = \text{var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{var}(x_i) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Sostituendo $\hat{\mu}$ nella seconda equazione [3A.4], si ha lo stimatore di massima verosimiglianza per la varianza:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2 \quad \text{cioè la varianza campionaria.}$$

In realtà c'è un piccolo bias qui, essendo che lo stimatore corretto della varianza è

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2 \quad [3A.6]$$

la causa di questo essendo il *prior* non ben definito. In ogni caso la differenza si riduce per valori grandi della numerosità del campione n .

4. PROPRIETA' EVOLUTIVE DELLE SORGENTI COSMICHE

Le tecniche statistiche che abbiamo discusso, e già in parte utilizzato nel Cap.3, sono anche usate per investigare le caratteristiche evolutive dell'Universo, ossia se e come le sue strutture varino con il tempo cosmico. Per lungo tempo, ad es. per tutto l'800 ma anche per significativa parte del '900, le concezioni cosmologiche prevedevano un universo statico e immutabile con il tempo (visione positivista ottocentesca). La stessa scoperta di Hubble di un Universo in espansione, che aveva portato all'ipotesi del Big Bang, non poteva peraltro escludere altri modelli, ad esempio quello detto dello *Stato Stazionario*, che prevedevano un universo appunto in espansione esponenziale stazionaria bilanciata dalla creazione continua di materia, in grado così di mantenere le sue proprietà fondamentali (densità di massa-energia, ecc.) mediamente invariate nel tempo. Tra i maggiori risultati della cosmologia degli anni '50 e '60 è quello di avere verificato che ciò non corrisponde alla realtà, e che l'Universo (analogamente ad es. alle realtà biologiche) è soggetto a radicale mutazione con il tempo delle sue proprietà (fenomeno dell'*evoluzione cosmologica*). Alcuni di questi risultati sono brevemente riassunti in questo Capitolo.

Universo come macchina del tempo. L'aspetto forse più peculiare delle osservazioni cosmologiche riguarda il fatto che, tramite esse, è possibile violare in modo sostanziale la barriera temporale. Ciò deriva banalmente dal fatto che la luce si propaga con velocità finita e pari universalmente alla costante c , cosicché la rilevazione di sorgenti a distanze cosmologiche implica immediatamente l'accesso diretto, osservativo, al lontano passato.

L'unità di misura delle distanze cosmiche in senso spaziale, il Megaparsec (1 Mpc=3.08 10^{24} cm~3 10^6 anni luce) corrisponde ad una distanza temporale di 3 milioni di anni, il tempo che la luce ha impiegato a percorrere questa distanza. Le distanze tipicamente accessibili alle osservazioni cosmologiche, ossia migliaia di Mpc, corrispondono a distanze temporali di miliardi di anni.

Se consideriamo la relazione tra flusso osservato S_v e distanza d ($d \sim c\Delta t$, per Δt non troppo grandi):

$$S_v = \frac{L_v}{4\pi d^2}$$

è chiaro che, per oggetti di data luminosità L_v , il loro flusso diviene sempre più debole man mano che aumenta d e quindi l'intervallo temporale Δt . Quindi il lontano passato diviene accessibile solo se si dispone di strumenti di osservazione sensibilissimi, in grado di captare segnali e.m. estremamente deboli. Per questo ovvio motivo l'accesso diretto al lontano passato è divenuto possibile solo a partire dagli anni '60, inizialmente con la scoperta dei **quasar** (sorgenti puntiformi di enorme

luminosità'). In seguito, con l'affinarsi delle tecnologie e delle tecniche osservative, si è reso possibile osservare a grandi distanze spazio-temporali anche oggetti moderatamente luminosi, come le galassie normali. Oggi, l'oggetto cosmico più lontano conosciuto è una galassia nana di circa i miliardo di masse solari, e si trova a circa 13.5 miliardi di anni nel passato (redshift $z=11$).

L'evoluzione delle sorgenti cosmiche. Le varie quantità statistiche che abbiamo definito riguardanti popolazioni di galassie e più in generale di sorgenti cosmiche, ad es. i conteggi numerici di galassie e le funzioni di luminosità e di massa, se opportunamente estese a sorgenti sufficientemente deboli (di basso flusso), ci danno informazioni cruciali sul passato dell'universo. Per quanto riguarda i conteggi, una sorgente molto debole può essere tale perché è poco luminosa pur essendo vicina (basso S_v , bassa L_v , piccola d). Oppure può essere relativamente luminosa e collocata ad una enorme distanza spazio-temporale. Quindi in un campione di sorgenti ai bassi flussi avremo un miscuglio di oggetti vicini e lontani, ma i lontani prevarranno a flussi S_v sufficientemente deboli (vedi Figura 1).

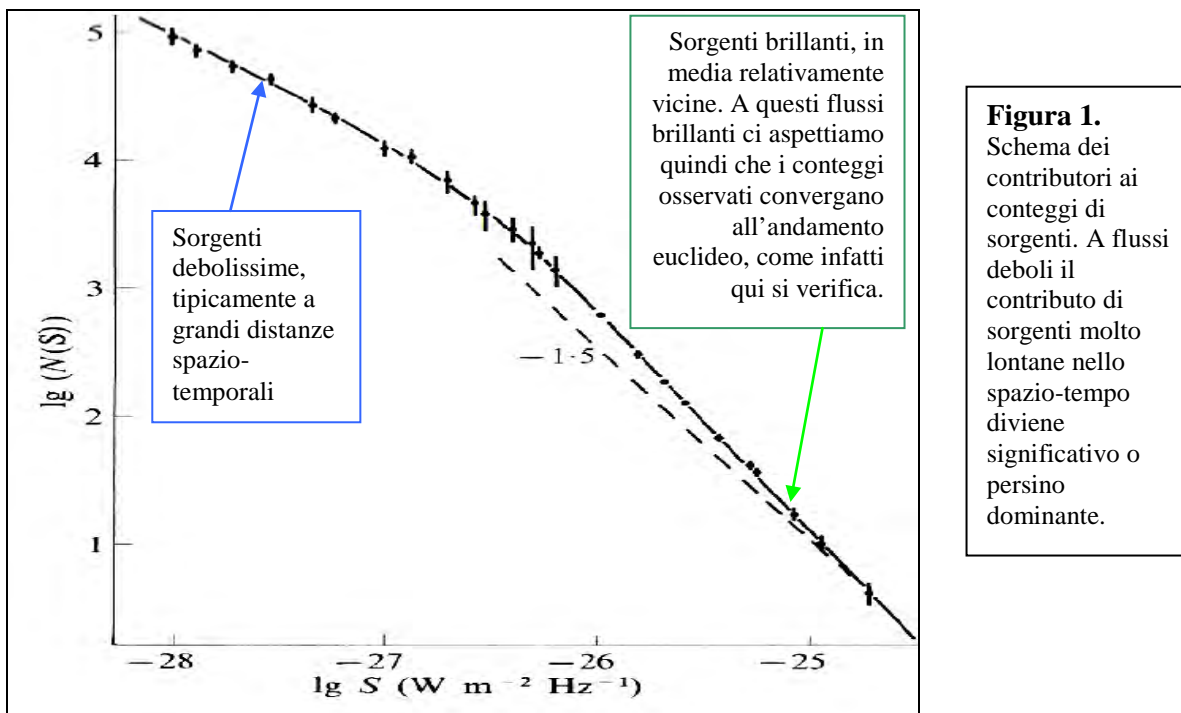


Figura 1. Schema dei contributori ai conteggi di sorgenti. A flussi deboli il contributo di sorgenti molto lontane nello spazio-tempo diviene significativo o persino dominante.

Come discusso in seguito in termini più quantitativi nella Sez. 9.3, questi conteggi profondi di radiosorgenti sono serviti ad esempio per dimostrare in modo incontrovertibile la realtà di un Universo evolutivo e per escludere invece il modello stazionario.

Le varie funzioni di luminosità $\Phi(L)$, i cui stimatori sono discussi nel Cap.3, o le funzioni di massa galattica $\Psi(M)$, possono essere riferite non solo a quanto osservabile nell'universo locale, ma anche a diversi intervalli di tempo cosmico: ad

es. i limiti d_{inf} e d_{sup} in eq.[3.8] possono essere posti in corrispondenza ad epoche cosmiche lontane. Come detto, cio' richiede che il campionamento in flusso sia sufficientemente profondo.

Si ottengono cosi' "funzioni di luminosita' dipendenti dal tempo" cosmico (*time-dependent luminosity functions*), con le quali e' possibile confrontare le proprieta' statistiche di galassie al tempo cosmico attuale con quelle nel passato (vedi schema di Figura 2).

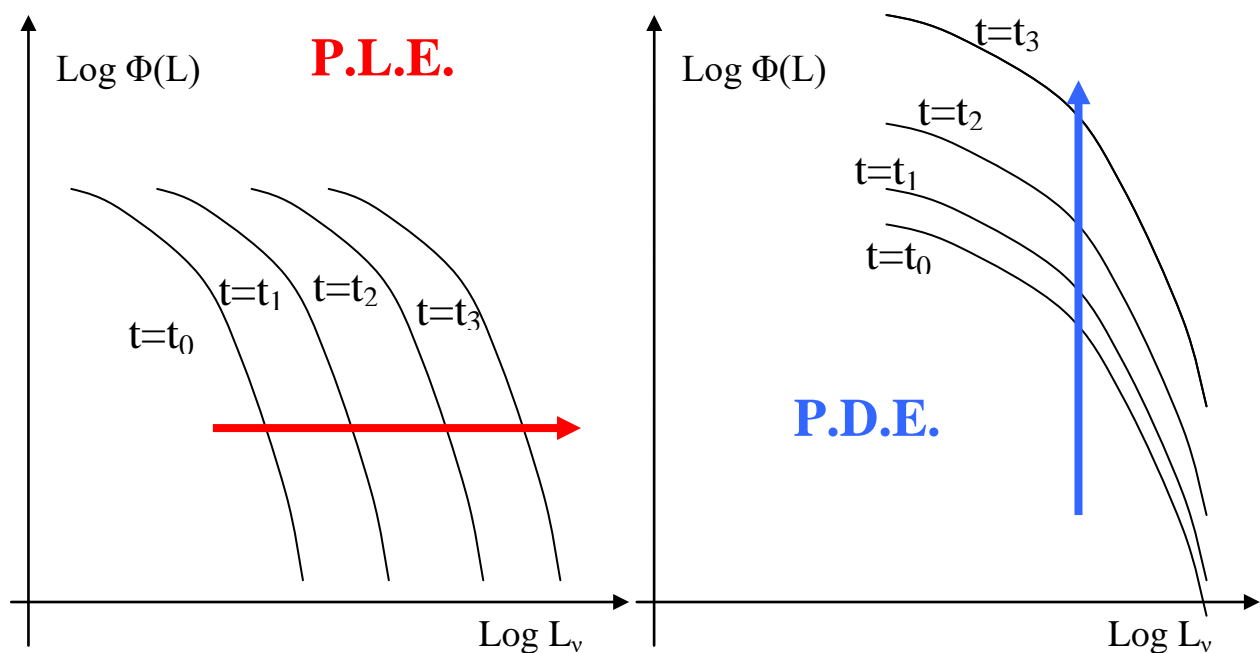
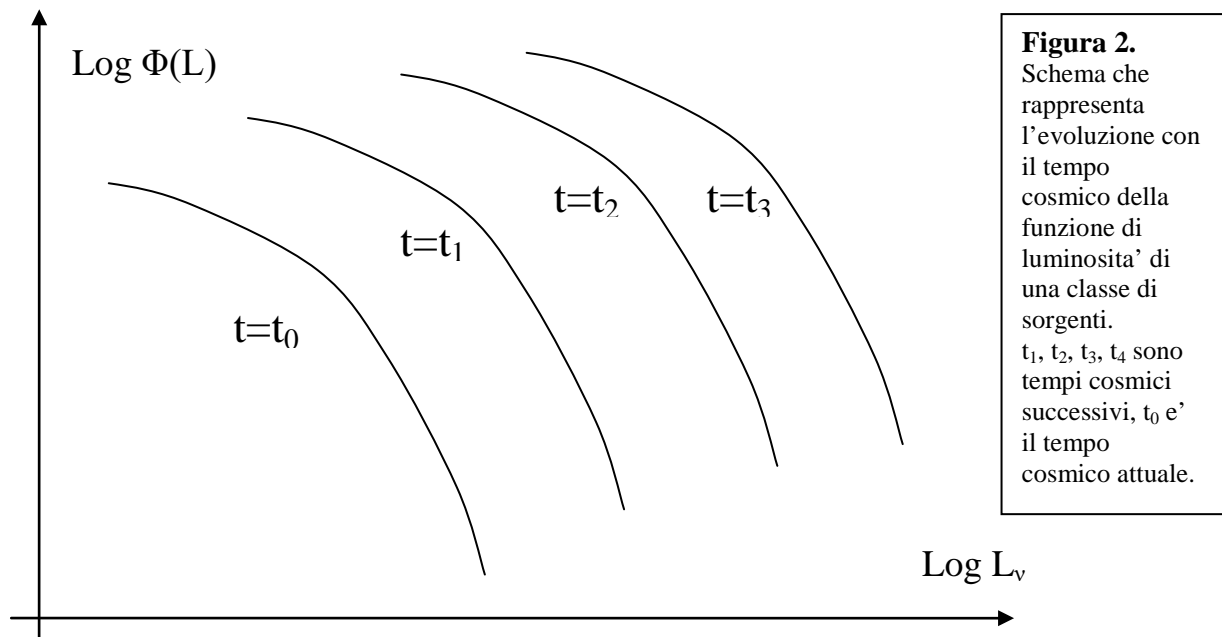


Figura 3. Schema che rappresenta una Evoluzione di Pura Luminosita' (a SX) e una Pura Evoluzione di Densita' (a DX).

Queste analisi sono state fatte in riferimento ad una varietà di classi di sorgenti (dai quasar, alle radiogalassie, dalle galassie attive alle normali, ecc.).

Formalmente si parla di Pura Evoluzione di Luminosità o Pura Evoluzione di Densità a seconda che si verificano traslazioni delle funzioni di luminosità puramente lungo l'asse X delle luminosità o puramente lungo l'asse Y delle densità (Figura 3).

Pura Evoluzione di Densità corrisponde ad un semplice aumento o diminuzione andando indietro nel tempo del numero di sorgenti per unità di volume.

Pura Evoluzione di Luminosità corrisponde al fatto che la densità di sorgenti rimane all'incirca costante nel tempo e si modificano invece le sole luminosità caratteristiche della popolazione, tipicamente per fattori che dipendono dal tempo ma non dalla luminosità. Un esempio di quasi P.L.E. è riportato in Figura 4 relativo ai quasar ottici.

Evoluzione Dipendente dalla Luminosità infine, è una situazione in cui le funzioni di luminosità, al contrario di quanto accade nei casi precedenti, si deformano al trascorrere del tempo, nel senso che il tasso di evoluzione dipende dalla luminosità.

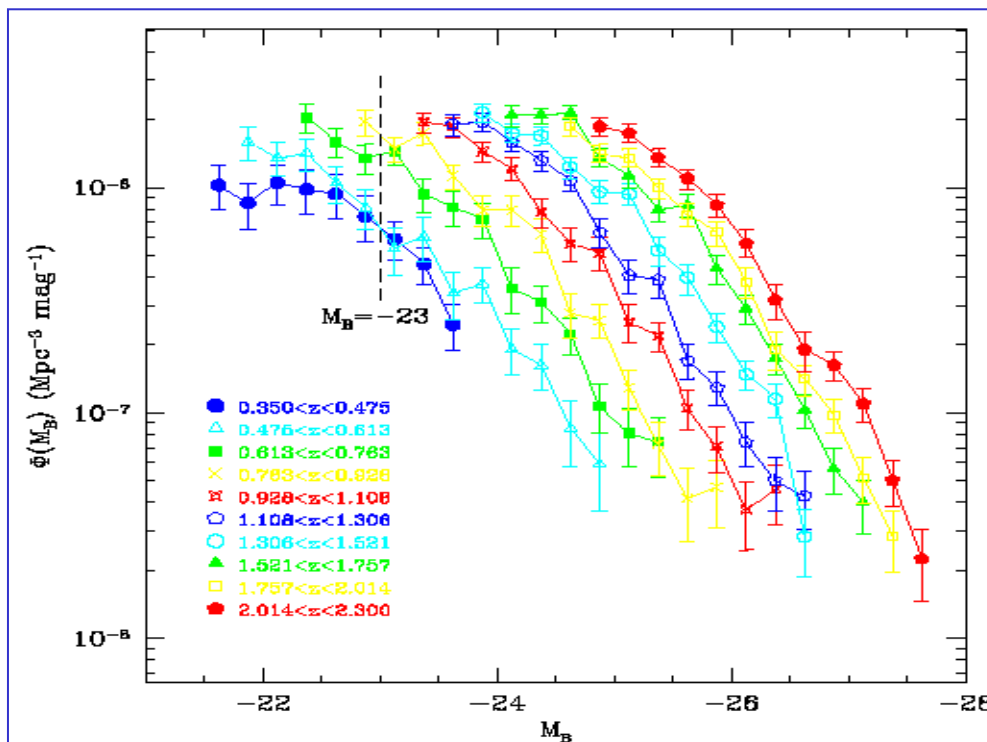


Figura 4. Evoluzione della funzione di luminosità dei quasar in banda B tra $z=0$ e $z=3$. È stata ottenuta da una collezione di survey ottiche di quasar. L'evoluzione appare consistente con un modello principalmente a P.L.E, ma congiunta ad un termine di evoluzione PDE. [da Boyle et al. 2000].

Evoluzione di pura luminosità per una popolazione di galassie può avvenire durante una fase nella quale le masse in stelle delle galassie della popolazione non cambiano (funzione di massa galattica costante con il tempo), mentre la luminosità media delle stelle varia a seguito di variazioni, ad esempio di età, delle popolazioni stellari che

costituiscono le galassie. Supponiamo che tutte le stelle della popolazione di galassie si siano formate in una certa epoca passata e che poi evolvano nel tempo semplicemente a seguito del loro invecchiamento. Cio' comporta che le stelle piu' giovani, piu' massive, blu e luminose muoiano rapidamente, mentre quelle di piccola massa (come si e' visto piu' rosse e meno luminose) durano per un tempo molto superiore all'eta' attuale dell'universo. Si ha a seguito di cio' un processo di arrossamento dei colori della popolazione accompagnato da una progressiva diminuzione della luminosita' della galassia. Cio' comporta una evoluzione P.L.E. della funzione di luminosita', esattamente come indicato nel pannello di SX della Figura 3, con una diminuzione della luminosita' caratteristica della popolazione con il tempo.

Da notare che, una volta che le popolazioni stellari si siano formate, l'entita' dell'evoluzione di luminosita' dipendera' dalla "composizione" stellare iniziale, ossia dalla frazione iniziale di stelle di grande massa rispetto a quelle di piccola massa (ovvero la Funzione Iniziale di Massa delle stelle, *I.M.F.*, gia' precedentemente menzionata nella Sez. 2): piu' numerose erano le stelle massive nella composizione iniziale, piu' forte sara' l'evoluzione, ossia piu' rapida la diminuzione della L con il tempo (questo in considerazione della forte dipendenza del tempo di vita stellare dalla massa della stella, vedi [2.14]. Come gia' visto, la IMF, sulla base di indagini astrofisiche di ammassi stellari che ne hanno ricostruito la forma, appare essere una legge di potenza $dN \sim M^{-2.35} dM$.

La maggiore luminosita' media delle galassie andando indietro nel tempo ha implicazioni ben misurabili nei conteggi $N(>S)$ e nelle distribuzioni di V/V_{\max} . Situazioni che indicano un chiaro effetto di evoluzione cosmologica sono state messe in luce dall'analisi dei conteggi di radio-sorgenti (si vedano ad esempio la Fig. [3.3 a SX] e la Fig. [3.5]). In questo caso, e per quanto menzionato in Fig.[1], una evoluzione di luminosita' o densita' che implicino un aumento della L media o densita' media andando verso il passato ci aspettiamo corrispondano ad un aumento dei conteggi integrali verso i bassi flussi piu' rapido di quanto previsto dalla legge euclidea ($\sim S^{-1.5}$): andando verso i bassi flussi vengono incluse sorgenti sempre piu' lontane, che sono piu' numerose di quanto previsto dall'ipotesi di omogeneita' spaziale delle sorgenti presupposta nel derivare l'andamento euclideo.

Considerazioni analoghe riguardano il test V/V_{\max} . Anche in questo caso una evoluzione positiva verso il passato implicherebbe valori medi $\langle V/V_{\max} \rangle$ maggiori di 0.5. Un chiaro esempio di questo genere e' riportato in Fig. [3.7] in relazione ad una categoria di quasar radio. Entrambi gli effetti sono stati quindi precisamente osservati, inizialmente in classi di sorgenti attive (piu' facili da identificare a grandi distanze per la loro luminosita', galassie attive che compaiono nei grafici qui sopra menzionati), e ora anche per galassie normali. Si e' cosi' verificato che l'universo mostra proprieta' fortemente evolutive in relazione alle sue popolazioni di sorgenti.

Cenni alla formazione ed evoluzione delle galassie. Per quanto riguarda la categoria delle galassie normali, la Figura [5] mostra un importante risultato riguardante l'evoluzione con il tempo cosmico delle funzioni di luminosita' e delle funzioni di massa, basato su un campione di 1478 galassie estremamente deboli identificate in una piccola area ($\Omega=150$ arcmin²) del cielo sud (il campo GOODS-Sud) nella quale si sono concentrate una varieta' di osservazioni ultra-profonde con tutti i maggiori telescopi sia a terra (VLT), che nello spazio (HST e Spitzer). Per tutte queste e' stato possibile misurare il redshift con osservazioni spettroscopiche, nonostante il flusso debole, e grazie a cio' determinare le funzioni di luminosita' a diverse epoche cosmiche. Gli intervalli di tempo cosmico sono indicati nei pannelli a SX, mentre i corrispondenti intervalli di redshift z appaiono in quelli di DX. Considerando dapprima i pannelli di DX, essi mostrano come cambia con il tempo la funzione di massa stellare delle galassie: mentre le galassie piu' massive mantengono all'incirca la stessa densita', quelle di massa piu' piccola sembrano leggermente diminuire in densita' andando verso tempi remoti. E' quindi una evoluzione apparentemente un po' differenziata in massa.

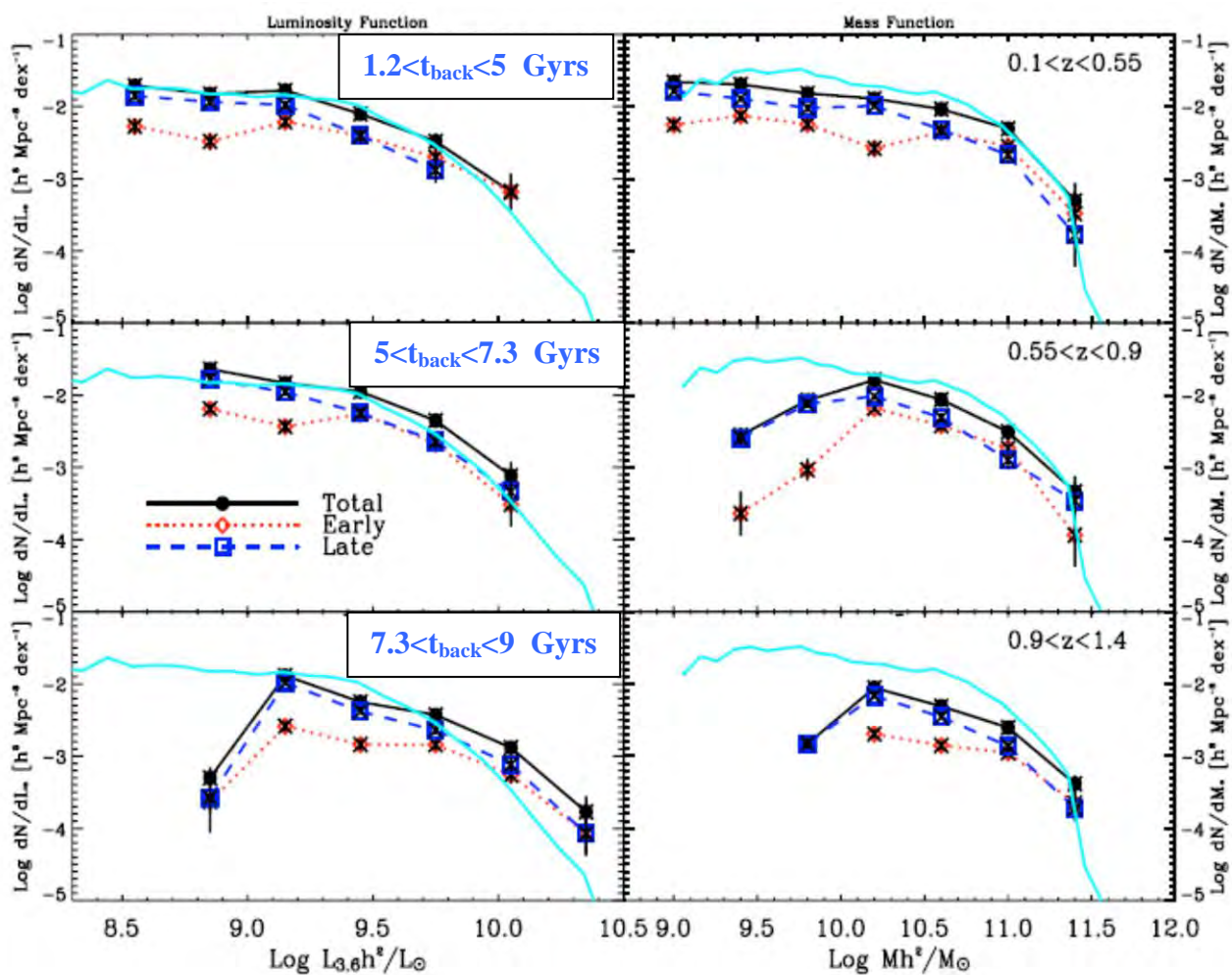


Figura 5. A SX: funzioni di luminosita' evolutive basate su di un grande campione di 1478 galassie osservate nell'area di cielo CDFS. Le funzioni si riferiscono a 3 intervalli di tempo cosmico (nei pannelli a destra sono indicati i corrispondenti valori del redshift). I pannelli a destra contengono invece dati sull'evoluzione della funzione di massa stellare. L'effetto di evoluzione e' ben evidente.

I pannelli di SX mostrano invece l'evoluzione della funzione di luminosita', che, come si vede, manifesta una luminosita' e una densita' di sorgenti piuttosto stabile ai valori medio-bassi della L, e invece un forte incremento di luminosita' per le galassie piu' luminose. Combinando insieme queste informazioni si puo' concludere che la funzione di massa delle galassie non sembra modificarsi molto con il tempo cosmico entro l'intervallo considerato (che si spinge fino a circa 5 Gyrs dal Big Bang, 9 Gyrs da adesso). Questa e' una informazione estremamente interessante perche' ci dice che gli episodi che hanno portato alla formazione delle galassie sono confinati in epoche piuttosto remote, entro i primi miliardi di anni dal Big Bang. Le funzioni di luminosita' invece mostrano una significativa evoluzione, che va nella direzione (peraltro prevista) di maggiori luminosita' in epoche passate.

Vale la pena spendere due parole ancora sulle caratteristiche evolutive delle galassie. L'ipotesi che tutte le popolazioni stellari delle galassie si siano formate in un flash iniziale e' assai schematica e si applica forse solo ad alcune categorie di galassie sferoidali d'ammasso. Piu' verosimile e' la circostanza che le stelle si siano formate durante una fase piu' o meno prolungata, per cui la massa di gas primordiale che viene convertita in stelle per unita' di tempo (il tasso di formazione stellare) dipende dal tempo stesso. Il ragionamento per trattare questa situazione e' quello sviluppato a suo tempo da Schmidt. Definiamo la quantita' ρ_{gas} come la densita' di gas (freddo) disponibile a formare stelle. La legge da Schmidt proposta per il tasso di formazione delle stelle nelle galassie si puo' esprimere come:

$$\frac{\partial \rho_{gas}}{\partial t} = -\kappa \rho_{gas}^n \quad \text{con } n \approx 0.5 - 2 \quad [1]$$

che si comprende considerando che piu' gas c'e' a disposizione, piu' intensa sara' la formazione stellare. Da questa si ottiene

$$\frac{\partial \rho_{gas}}{\rho_{gas}^n} = -\kappa \partial t \quad \text{ovvero} \quad \frac{1}{-n+1} \rho_{gas}^{-n+1} = -kt$$

Nel caso $n = 1$ ($\dot{\rho}_{gas} \propto \rho_{gas}$) [2]

$$\ln \frac{\rho_{gas}}{\rho_{gas,0}} = -kt \quad \text{quindi} \quad \rho_{gas}(t) = \rho_{gas,0} \exp(-kt)$$

Sostituendo ora la soluzione della Schmidt e definendo SFR(t) il tasso di formazione di stelle al tempo t, si avra'

$$SFR(t) = \frac{\partial M_{stelle}}{\partial t} = -\frac{\partial \rho_{gas}}{\partial t} = \kappa \rho_{gas,0} \exp(-kt) = K \exp(-kt) \quad [3]$$

ove la costante k ha le dimensioni dell'inverso di un tempo-scala $\tau = 1/k$, e stabilisce quindi il tempo scala della formazione delle stelle durante la storia evolutiva di una galassia. Ovviamente il tasso di formazione delle stelle e' l'opposto del ritmo di

consumo del gas. A sua volta il parametro K corrisponde evidentemente al tasso di formazione stellare al tempo iniziale, $K=(\partial M/\partial t)_{t=t_0}$.

La legge [3] mostra quindi una fase accentuata di formazione di stelle durante le prime fasi evolutive, quando vi era a disposizione una grande quantita' di gas per formarle. Un modo oggi accreditato di interpretare la sequenza morfologica di Hubble (Cap. 2) e' quello di associarla ad un parametro τ che sia una funzione crescente dal tipo E/S0 al tipo Irregolare. Le E/S0 avrebbero cosi' τ piccolo (1-2 Gyrs), avendo formato le stelle in un lontano passato ed evolvendo successivamente in modo passivo, ossia escludendo successiva formazione di stelle giovani e ammettendo solo l'invecchiamento di quelle gia' presenti.

Le spirali dei tipi tardi e le Irregolari sarebbero caratterizzate da valori di τ piu' grandi, sino a raggiungere l'eta' stimata dell'universo, ossia avrebbero una attivita' di formazione stellare oggi simile a quella delle epoche passate.

Secondo le ultime osservazioni, dovrebbe valere approssimativamente lo schema seguente per quanto riguarda la storia della formazione stellare per le diverse classi morfologiche di galassie, facendo riferimento ai parametri della rel.[3]:

Tabella 5.1

Tipo morfologico	Parametri fisici
Ellittiche/S0	$K \approx 100-1000 M_{\odot}/\text{yr}$, $\tau \approx 1-2 \text{ Gyr}$
Spirali dei primi tipi (Sa-Sb)	$K \approx 10-50 M_{\odot}/\text{yr}$, $\tau \approx 5-7 \text{ Gyr}$
Spirali dei tipi tardi (Sc-Sd) e Irregolari	$K \approx 1-10 M_{\odot}/\text{yr}$, $\tau \approx 10-15 \text{ Gyr}$

Dunque le galassie Ellittiche/S0 si sono formate in un periodo molto breve nel passato, mentre Spirali e Irregolari l'avrebbero fatto su tempi molto piu' lunghi. Questo sarebbe in accordo con la [1] con valori elevati della densita' per le prime e molto piu' bassa per le seconde. Interessante a questo proposito notare che galassie dei primi tipi ruotano molto poco o per nulla, mentre le spirali deriverebbero la loro morfologia da un elevato contenuto di momento angolare, responsabile per il loro schiacciamento a disco. A sua volta questo si spiega sulla base dei tempi scala di formazione (molto brevi per E/S0, lunghi per Sp/Ir), considerando che la rotazione delle Spirali consegue fenomeni di interazione mareale della materia in collasso, operanti solo su lunghi tempi scala, e dunque inefficaci per le E/S0.

Il quadro sembra cosi' abbastanza consistente, con forse l'incognita maggiore e la questione piu' irrisolta riguardante la forma delle funzioni di luminosita' e massa galattiche (la forma di Schechter discussa in Sez. 3), a tutt'oggi problema della cosmologia teorica ampiamente irrisolto. Infatti, da un punto di vista osservativo, la

forma e le modalita' evolutive delle funzioni di luminosita' e di massa galattiche sono oggi piuttosto ben note fino a grandi distanze. Quello che piuttosto manca e' una comprensione esauriente delle cause fisiche che hanno determinato la forma di questi andamenti funzionali, molto caratteristici.

Il tasso di formazione stellare nelle galassie. Il parametro $SFR=(\partial M/\partial t)$ e' denominato *tasso di formazione stellare (Star Formation Rate)*. Si tratta di un parametro fondamentale, da un punto di vista cosmologico, che caratterizza una galassia, o una popolazione di galassie, altrettanto quanto lo sono la massa stellare o quella totale, e la luminosita'.

La quantita' SFR viene usualmente misurata in masse solari per anno (M_{\odot}/yr). Per la Via Lattea, ad esempio, si ottiene $SFR \approx 2 M_{\odot}/yr$. Gli oggetti piu' luminosi ed attivi nell'universo locale (le Galassie Infrarosse Ultraluminose, ULIRG) hanno SFR di varie centinaia di M_{\odot}/yr .

Nonostante non sia ovviamente possibile osservare una stessa galassia a diverse epoche cosmiche (quindi impossibile una stima diretta del parametro τ dalla [3]), e' tuttavia possibile stimare il tempo scala istantaneo τ_{ist} della formazione stellare da un confronto tra la massa in stelle misurata per una galassia ad un certo istante e il ritmo osservato di formazione di stelle, SFR:

$$\tau_{ist} \simeq \frac{M}{SFR} \quad [4]$$

La massa M si ottiene ad esempio da un confronto tra osservazioni spettrofotometriche della galassia e un modello di sintesi spettrale che le riproduca (vedi discussione in Cap. 2.7), e in ultima analisi dal rapporto M/L mediato sulle popolazioni stellari presenti nella galassia. SFR si misura ad esempio dall'intensita' della riga d'emissione H_{α} o dalle luminosita' UV o radio, o nel lontano infrarosso (Figura 6, Sez. 2.6, Fig. 2.14). τ_{ist} si riferisce ovviamente al momento in cui la galassia e' osservata, e non e' detto coincida con il τ globale in Tabella 5.1 (per una galassia ellittica osservata al tempo attuale, τ_{ist} attuale e' molto grande, mentre τ e' piccolo).

La Figura 6 mostra i due nuclei della galassia ULIRG *Superantennae*, discussa nella precedente Sez. 2, che mostrano intensita' di riga H_{α} molto diverse. Quest'ultime sono considerate fornire una misura assai precisa del tasso di formazione stellare, assieme alla luminosita' nel UV.

Come abbiamo visto nella Sez. 2.6, la presenza di polveri, assai consistente in galassie ad attiva formazione stellare, complica molto la misura del tasso di formazione stellare basata su righe d'emissione ottiche o sul continuo UV, richiedendo queste forti correzioni per estinzione.

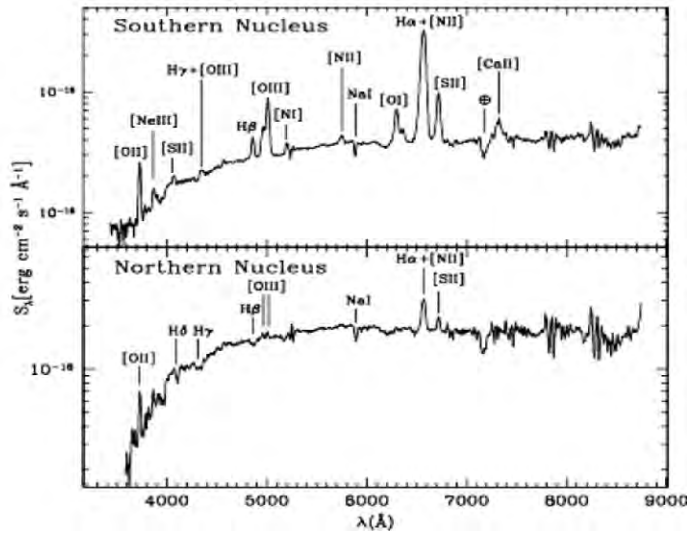


Figura 6. Immagine dei nuclei sud (in alto) e nord (in basso) della galassia ULIRG *Superantennae*, già' discussa nel Cap. 2. Vogliamo qui notare l'intensita' della riga H α , cosi' diversa nei due nuclei, la cui intensita' dimostra un tasso di formazione stellare estremamente piu' intenso nel sud che nel nord.

Data la forte dipendenza della curva di assorbimento (estinzione) dalla lunghezza d'onda dei fotoni (Fig. 2.13), praticamente quasi tutti i fotoni blu e UV emessi copiosamente dalle stelle giovani sono assorbiti dalle polveri, mentre quelli a λ maggiore attraversano la coltre di polveri piu' o meno indisturbati. Per questo motivo, la luminosita' bolometrica nell'IR e' considerata un migliore stimatore del tasso di formazione stellare rispetto all'emissione UV od ottica (si veda l'esempio riportato in Fig. 2.13, con lo spettro su grande banda di una galassia ad attiva formazione stellare M82). Qui la luminosita' bolometrica IR, direttamente proporzionale al tasso di formazione stellare, e' data dall'integrale dell'emissione tra 3 e 1000 μm). La relazione tra SFR e luminosita' bolometrica e' cosi'

$$SFR[M_{\odot} / yr] \simeq 10^{-10} (L_{IR} / L_{\odot}). \quad [5]$$

Poiche' la luminosita' bolometrica IR per questa sorgente e' $L \sim 10^{10} L_{\odot}$, la SFR al tempo attuale per questa sorgente e' $SFR \sim 3 M_{\odot}/yr$, un valore molto simile al tasso medio nella Via Lattea, ma che caratterizza un oggetto piu' di 10 volte meno massivo di questa.

Un altro eccellente indicatore del tasso di formazione stellare e' la luminosita' radio, pure essa non influenzata dalla presenza di polveri.

Utilizzando luminosita' nell'UV (o nel radio), e' possibile stimare il tasso di formazione stellare globale di una galassia tramite sempre una relazione lineare come la eq. 5, ma cambiando la costante moltiplicativa. Ad esempio, utilizzando la luminosita' monocromatica integrata a 1500 A, espressa in $erg/sec/Hz$, la costante diventa 1.4×10^{-28} per ottenere SFR in masse solari per anno.

Infine, occorre specificare che queste costanti moltiplicative dipendono anche, ovviamente, dalla Funzione Iniziale di Massa delle stelle (IMF, vedi precedentemente) che viene assunta.

Statistiche della formazione stellare nelle galassie in funzione del tempo.

Possiamo a questo punto concludere l'analisi iniziata con quanto discusso in relazione alla Fig. 5, che conteneva dati statistici sulle funzioni di luminosita' delle galassie nel vicino infrarosso e, dedotti da queste, dati sulle funzioni di massa stellare. Ora, utilizzando campionamenti profondi di galassie nel lontano infrarosso e' stato possibile calcolare la luminosita' bolometrica IR, L_{IR} , per numerosi campioni completi di galassie a diverse epoche cosmiche, e con questi stimare le funzioni di luminosita' infrarossa. Utilizzando poi la relazione [5], possiamo aggiungere a questa informazione quella riguardante la distribuzione statistica del tasso di formazione stellare nelle galassie, $SFR = dM/dt$. Cio' e' rappresentato nella Figura 7, che mostra il numero di sorgenti per unita' di volume in funzione della loro SFR.

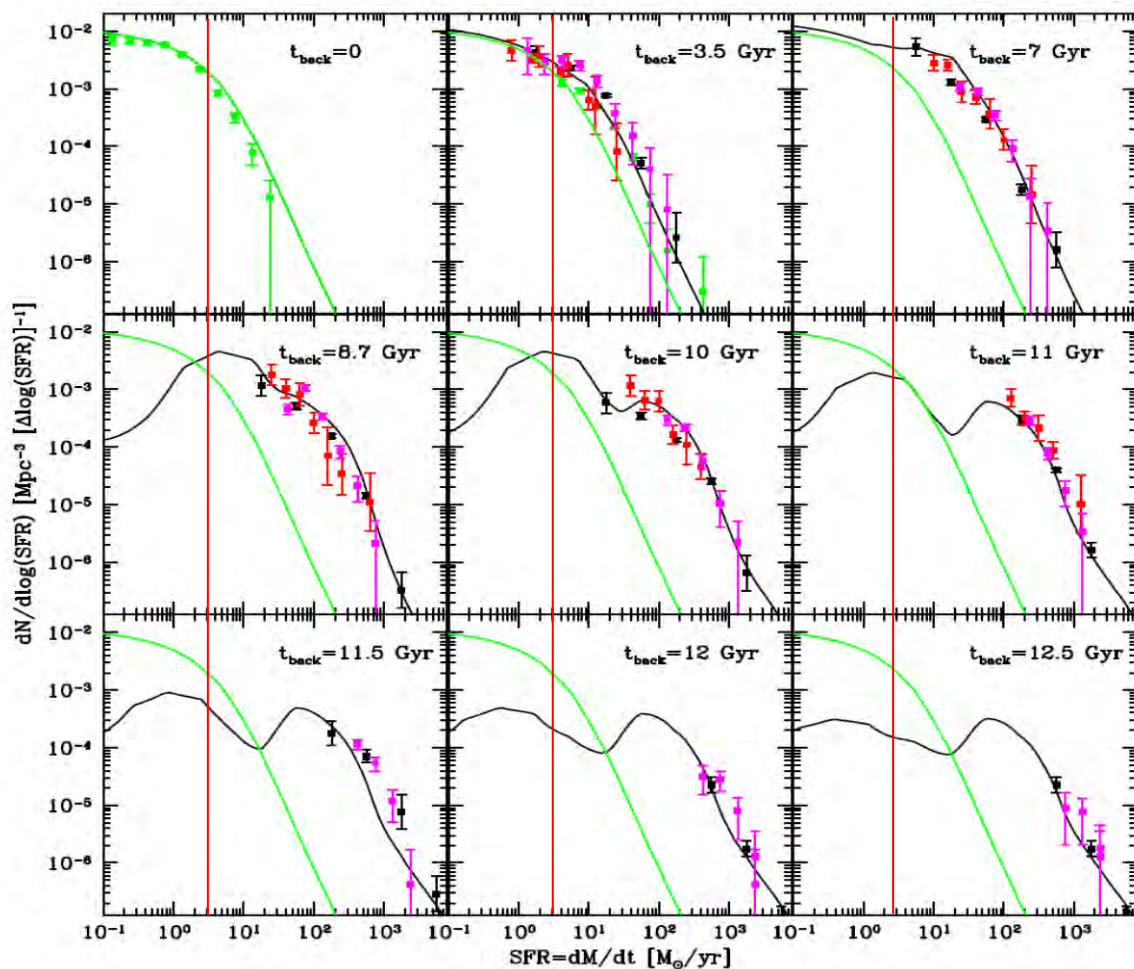


Figura 7. L'attivita' di formazione stellare nelle galassie, funzione del tempo. La linea rossa indica il tasso di formazione di stelle integrale nella nostra Galassia.

Vediamo che il numero di galassie ad elevata SFR cresce molto velocemente andando indietro nel tempo, verso epoche passate. Oltre gli 8-10 miliardi di anni si trovano molti oggetti con $SFR > 100 M_{\odot}/yr$ (e molti oltre 1000), praticamente assenti al tempo attuale. Cio' e' completamente in accordo con quanto mostrato nella Fig. 5: nel

lontano passato l'attività di formazione stellare era concentrata nelle galassie più luminose e di grande massa, le prime a formarsi (tanto è che la funzione di massa stellare non si modifica con il tempo)

Tutte queste informazioni verranno riprese nel Capitolo 9 successivo, nel quale discuteremo con maggiore dettaglio quantitativo la storia della formazione delle stelle nell'Universo, degli elementi pesanti, ed infine delle galassie. Ciò richiederà, però, che prima noi acquisiamo una serie di fondamentali strumenti dell'indagine cosmologica.

5. STRUTTURA GENERALE DELL'UNIVERSO. Basi empiriche per teorie e modelli cosmologici

Affrontiamo ora una breve disamina di dati inerenti la struttura generale dell'Universo e, avendo precedentemente accertato che esso e' evoluto nel tempo, quali siano, a grandi linee, i vincoli temporali che possiamo imporre a questa evoluzione. Le motivazioni di questa ricerca consistono non solo nell'ottenere ulteriori informazioni sulla struttura dell'Universo, ma ancor piu' per capire se siamo in grado di rispondere al quesito fondamentale: e' possibile ottenere una rappresentazione fisico-matematica dell'universo nel suo complesso e definirne in modo auto-consistente una geometria? Con quali limitazioni e semplificazioni e' questo possibile?

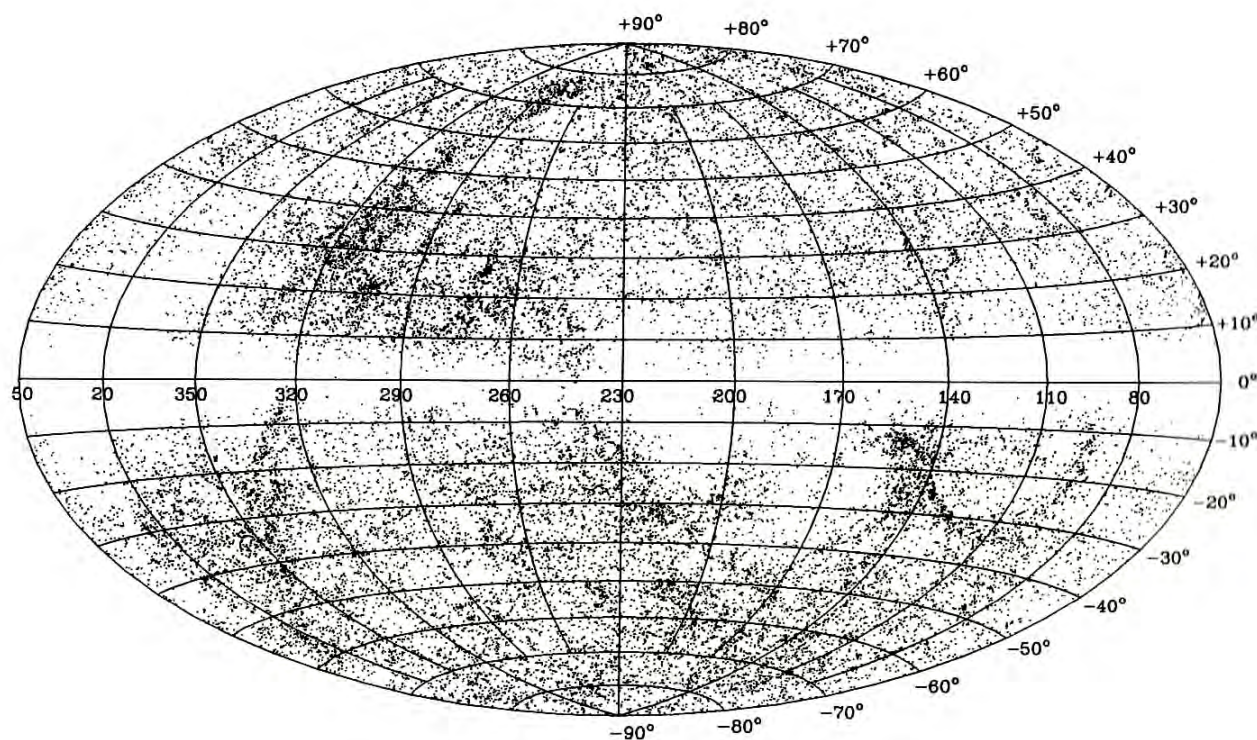


Figura 1a. Proiezione in coordinate galattiche delle posizioni nel cielo delle galassie piu' brillanti. Nel cielo nord il catalogo usato e' l'Uppsala Galaxy Catalogue (UGC), nel sud ancora UGC, ESO e MCG. La galassie in prossimita' del piano galattico sono assenti a causa dell'estinzione di polveri nella Galassia. La concentrazione a longitudine=290 e latitudine galattica=+70 e' l'ammasso vicino della Vergine. La banda prominente che interseca il piano galattico a 320 gradi di longitudine galattica, si estende sull'intero cielo e contiene la Vergine e' il superammasso di galassie locale. La mappa mostra galassie lontane alcune decine di Mpc al piu'. [Da Kolatt, Dekel e Lahav 1995].

Risposte a tali quesiti richiedono che l'Universo, sulle scale piu' grandi, abbia una struttura sufficientemente semplice, altrimenti non potremo ottenerne una rappresentazione modellistica. Per convincerci della rilevanza di cio', consideriamo

che, a seconda dei risultati dell'indagine condotta nella presente Sez., saremo o meno in grado di definire una geometria universale per il cosmo, in riferimento alla quale svolgere misure ad es. di distanza, oppure costretti ad ammettere che tale geometria possa variare addirittura da punto a punto, in modo da rendere impossibili nella pratica misure di distanza.

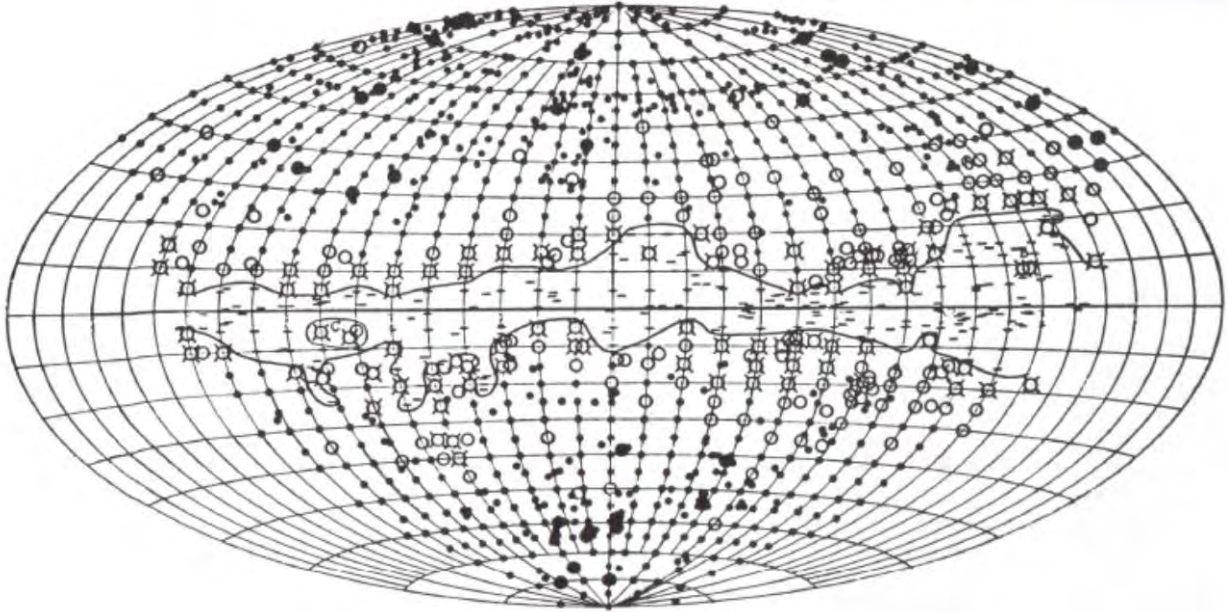


Figura 1b. Distribuzione dei conteggi di galassie più brillanti della 20-a magnitudine. I grandi cerchi pieni denotano densità areali di galassie in eccesso rispetto alla media, i cerchi vuoti a zone con densità in difetto rispetto alla media.

Analizzeremo dunque dati sulla struttura generale dell'Universo considerando innanzitutto la sua dimensione spaziale (sia nelle sue proiezioni sulla sfera celeste che nella sua realtà 3D), per poi passare a considerare dati sulla struttura temporale. In questa operazione faremo uso di un certo numero di "traccianti" della struttura su grande scala; useremo in particolare sorgenti cosmiche come galassie e nuclei attivi, nonché componenti fotoniche diffuse come le radiazioni di fondo. Un problema rimane ovviamente aperto riguardo al fatto se questi "traccianti" della struttura generale siano buoni, oppure se siano "biased", ossia se ci diano una visione distorta (ad esempio della distribuzione della materia oscura, che non possiamo vedere direttamente). Questo rimarrà per ora un problema aperto, che verrà affrontato nella Magistrale. Per ora consideriamo attendibili questi traccianti.

5.1 Isotropia nella distribuzione di galassie e sorgenti cosmiche.

Nelle nostre vicinanze (entro alcune decine di Mpc) abbiamo già visto che l'Universo appare estremamente complesso e variegato, con evidenze della presenza

di gruppi (Gruppo Locale), ammassi di galassie (ammasso della Vergine) piu' o meno ricchi, e superammassi. Su scale maggiori si manifestano presenze di grandi vuoti, con dimensioni sino a ~100 Mpc, e una struttura complessiva di forma vagamente cellulare e filamentare. Occorre verificare che cosa succede piu' in dettaglio, incluse le scale maggiori.

Galassie in ottico Il problema dell'estinzione galattica. Il test piu' semplice da effettuare riguarda l'isotropia delle distribuzioni di galassie e sorgenti proiettate sulla sfera celeste. Figura 1a illustra la distribuzione delle galassie brillanti su tutto il cielo e la Fig.1b dei conteggi di galassie in coordinate Galattiche, ossia le densita' areali nella varie zone di cielo.

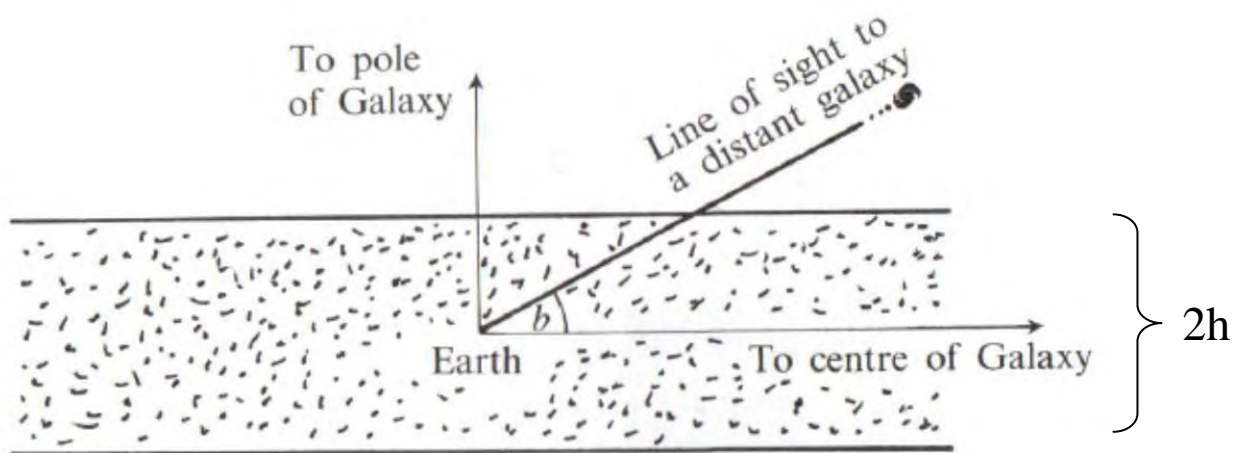


Figura 2. Raffigurazione del percorso ottico di un raggio intersecante la distribuzione di polveri nel piano galattico.

Oltre ad alcune ovvie sovradensita' nel cielo nord (ammassi della Vergine in alto a SX e della Chioma di Berenice in alto a DX), si nota una marcata diminuzione di galassie verso il piano di simmetria della Galassia. Si tratta del ben noto effetto dell'estinzione da parte di polveri galattiche, il cui ruolo nell'assorbire fotoni a corta lunghezza d'onda e rimetterli a piu' grande e' brevemente trattato nel Cap. 2. Come risultato della presenza di queste polveri, se osserviamo sufficientemente vicino al piano di simmetria galattico, oggetti al di fuori della galassia appaiono estinti secondo la legge:

$$S = S_0 \exp(-kh \operatorname{cosec} b)$$

dove S_0 e' il flusso originario, S quello estinto, b e' la declinazione galattica (angolo della visuale rispetto al piano galattico), k e' l'estinzione per unita' di lunghezza, h e' meta' dello spessore del disco di polveri e $\operatorname{cosec}(b) = 1/\sin(b)$. In termini della magnitudine si ha:

$$m = m_0 + 1.086 kh \operatorname{cosec} b$$

Al polo della Galassia ($b=90^\circ$) si ha: $\Delta m = m - m_0 \approx 0.2$ (in banda B, in altre bande l'estinzione al polo aumenta o diminuisce a seconda che siano a più' corta o più' grande λ).¹ A causa di tutto ciò, la distribuzione osservata delle galassie nel cielo si rarefa verso il piano galattico ed è massima ai poli. Anche tenuto conto di questo, la distribuzione di galassie appare comunque piuttosto disomogenea, non fosse altro per la presenza residua di polveri in nubi ad alta latitudine galattica.

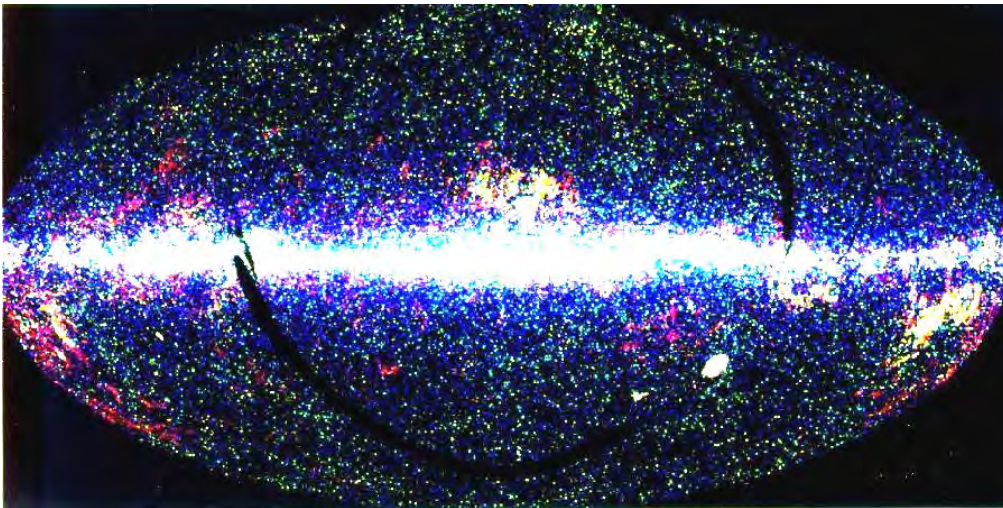


Figura 3.

Mappa di tutte le circa 300000 sorgenti dell'IRAS Point Source Catalogue. La maggior parte sono stelle. In verde alle alte latitudini galattiche compaiono circa 25000 galassie.

Galassie IRAS. Un modo per ovviare a questo problema è osservare a più' grandi lunghezze d'onda, ad es. nel lontano IR, data la già ricordata forte dipendenza dell'assorbimento dalla λ di osservazione. Un ulteriore vantaggio è che abbiamo a disposizione un set di dati di straordinaria qualità: 4 surveys complete di tutto il cielo a 4 diverse lunghezze d'onda: 12, 25, 60 e 100 μm . Mentre le prime 2 sono dominate dalle stelle (Fig.3), a 60 e 100 μm emergono popolazioni extragalattiche. Figure 3-4 mostrano le mappe all-sky di IRAS. Oltre alle emissioni diffuse, IRAS ha identificato 300000 sorgenti (IRAS Point Source Catalogue), la maggior parte delle quali sono stelle, ma oltre 25000 di queste sono oggetti extragalattici (Fig. 4).

Le surveys di IRAS, sono state realizzate dallo spazio in eccellenti condizioni di stabilità ambientale e omogeneità nella scansione del cielo. In questo modo i campioni ottenuti sono caratterizzati da completezza in flusso e precisione fotometrica, permettendo accurate indagini cosmologiche. La Figura 4 mostra la distribuzione nel cielo di oltre 17000 galassie: a parte gli usuali addensamenti in prossimità degli ammassi e super-ammassi, l'impressione generale è quella di un buon grado di isotropia nella distribuzione della densità areale di galassie. La distanza di questi oggetti, valutata con indagini spettroscopiche, è mediamente circa

¹ Ovviamente questo problema di valutare l'estinzione al polo della Galassia ha costituito un grosso problema per la cosmologia osservativa (diversi autori hanno proposto valori molto diversi: de Vaucouleur ad es. suggerì che potesse avere un valore molto elevato, vicino ad una magnitudine; Sandage proponeva un valore molto inferiore). Alla fine si è potuto valutare un Δm piccolo analizzando spettri di sorgenti di cui si presumeva conoscere quello intrinseco.

500 Mpc, quindi molto piu' lontane di quelle in Fig. 1a e b: vi e' dunque una indicazione che aumentando la distanza media l'isotropia della distribuzione aumenti.

QMW All-Sky IRAS Galaxy Catalogue

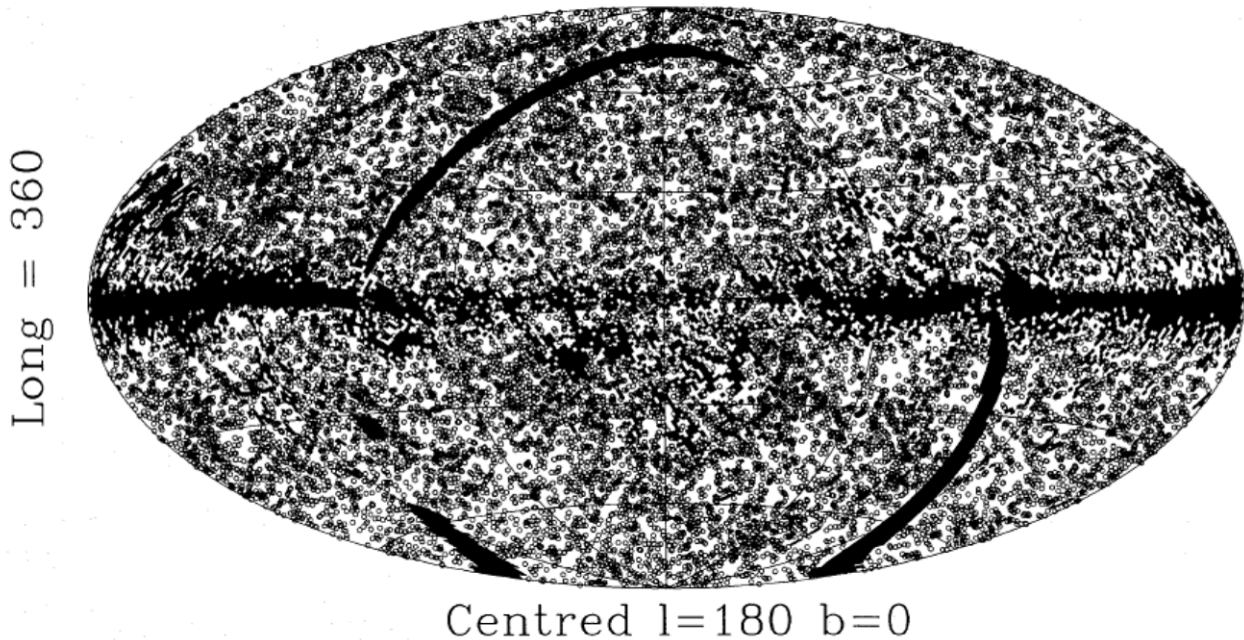


Figura 4. Diagramma in coordinate galattiche delle sorgenti IRAS selezionate a $60 \mu\text{m}$ a flussi $S_{60} > 0.6 \text{ Jy}$. 17664 di queste sono sorgenti extragalattiche, con una distribuzione piuttosto isotropa nel cielo. L'addensamento nel piano galattico e' dovuto alle stelle, che pero' sono molto meno numerose di quelle che compaiono in Fig.3, a causa dell'elevata lunghezza d'onda. 82% del cielo e' coperto da questa survey. Ricordiamo che $1 \text{ Jy} = 10^{-23} \text{ erg/cm}^2/\text{sec/Hz}$ e' una misura di densita' di flusso (*flux density*).

Radiogalassie. Un altro modo per superare il problema dell'estinzione da polveri e' di osservare in radio, dominio spettrale per cui l'estinzione da polveri e' nulla. Un ulteriore vantaggio qui e' che una esplorazione in banda radio rivela quasi esclusivamente una popolazione di sorgenti esterna alla Via Lattea (se escludiamo qualche centinaio di pulsar nel piano galattico, non ci sono popolazioni significative di radio-stelle). Trattandosi poi di Nuclei Galattici Attivi e quasar radio molto luminosi, questa popolazione e' visibile sino a enormi distanze nello spazio-tempo (tipicamente di molte migliaia di Mpc e vari miliardi di anni luce nel passato). Osservazioni di grandi porzioni di cielo in radio forniscono quindi una immagine dell'Universo lontano e danno una cruciale informazione riguardo alla sua isotropia e omogeneita' su grandissime scale.

Osservazioni attuali mostrano distribuzioni di radiosorgenti estremamente isotrope, con variazioni al piu' di qualche %. Queste variazioni sono peraltro spiegate con errori nella calibrazione fotometrica di un campione rispetto all'altro.

In Figura 5 riportiamo un risultato spettacolare di una survey radio con il super-telescopio Very Large Array (VLA). La tecnica interferometrica usata per ottenere il

catalogo e' responsabile di alcuni vuoti che si vedono nell'immagine: si tratta di zone nelle quali ottenere l'immagine radio e' stato impossibile a causa della presenza di sorgenti radio troppo brillanti che hanno rovinato gli interferogrammi e innalzato il rumore (si noti la sorgente puntiforme al centro della zona vuota). In ogni caso su queste grandi scale vi e' una chiara evidenza di notevole isotropia in questa popolazione di sorgenti.

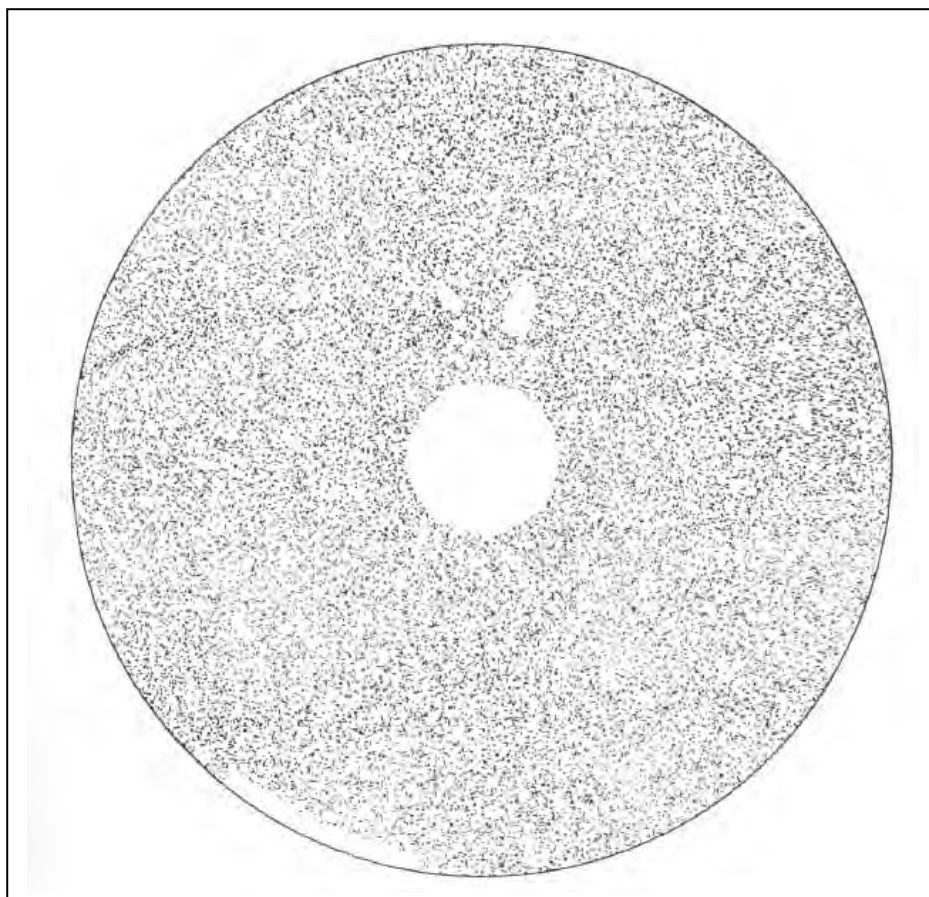


Figura 5.
Distribuzione delle 31000 radiogalassie piu' brillanti a lunghezze d'onda di $\lambda=6$ cm nel cielo nord. [da Gregory & Condon 1991].

5.2 Isotropia delle componenti fotoniche diffuse.

Le osservazioni di sorgenti cosmiche precedentemente menzionate hanno provato il grado di isotropia dell'universo, come osservata dal nostro sistema di riferimento, solo con una precisione di qualche percento (data la natura discreta del campionamento). Osservazioni piu' precise e piu' in profondita' nello spazio-tempo sono possibili utilizzando le componenti fotoniche diffuse, le due meglio note e meglio utilizzabili, data la grande mole di dati a disposizione, essendo: il fondo X (la prima ad essere scoperta nel 1962) e il fondo cosmico primordiale nelle microonde (CMB, *Cosmic Microwave Background*). Le due componenti, avendo origini del tutto diverse, campionano il grado di isotropia dell'universo ad epoche molto diverse.

Fondo Cosmico in Raggi X. Il fondo X e la sua scoperta sono menzionati nella Sez.1 Cap. 1.3. Esso origina, secondo le osservazioni e le teorie attuali, dall'emissione integrata di popolazioni di Nuclei Galattici Attivi (galassie di Seyfert e quasar) luminosi in raggi X. La distanza spazio-temporale della maggior parte di questi oggetti e' notevole, alcuni miliardi di anni-luce o migliaia di Mpc, e le loro densita' areale di qualche migliaio di oggetti/grado quadro. Questa componente ha uno spettro che si estende tra energie fotoniche (che qui vengono usate invece delle frequenze) di circa 1 keV e circa 100 keV. Per motivi legati a limitazioni osservative, la maggior parte dei dati sono compresi nell'intervallo di energie tra 2 e 10 keV. Svariate missioni spaziali sono state dedicate alla caratterizzazione spettrale e angolare del fondo X, a partire dalla missione UHURU del 1971. Figura 6 dimostra l'origine extra-solare del fondo, mostrandone l'effetto d'ombra da parte della Luna.

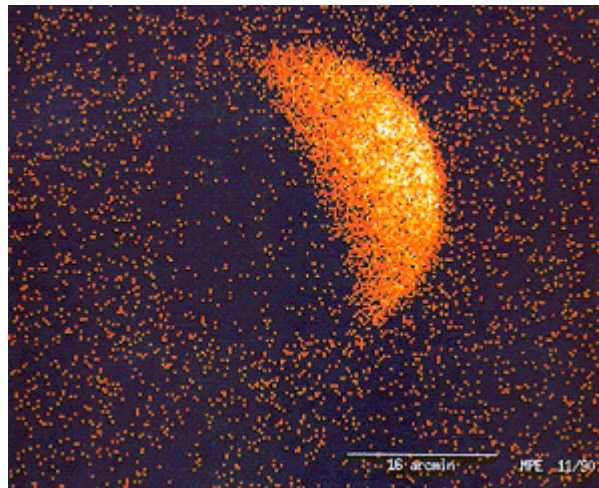


Figura 6. Immagine della Luna vista in raggi X dovuti a fluorescenza X originata dal flusso X del Sole. Questa immagine X della Luna e' stata ottenuta dall'osservatorio orbitante ROSAT (Röntgensatellit) nel 1990. In questa immagine digitale, la brillantezza dei pixel corrisponde alla direzione di arrivo dei raggi X. Consideriamo le tre parti dell'immagine: l'emisfero brillante, la meta' piu' scura della Luna, e il fondo-cielo isotropo in raggi X. L'emisfero brillante risplende in raggi X poiche' diffonde raggi X del Sole. Il fondo isotropo X e' essenzialmente dovuto a una miriade di galassie attive lontane e potenti, non risolte singolarmente in sorgenti da ROSAT a causa della sua limitata capacita' di risoluzione angolare, ma sono state identificate recentemente dagli osservatori X XMM-Newton e Chandra. Il lato oscuro della Luna e' dovuta all'assorbimento dei fotoni del fondo X da parte della Luna stessa. I pochi fotoni X corrispondenti al lato oscuro non originano dalla Luna, ma sono prodotti nella corona terrestre e nell'alta atmosfera che ancora circonda le sonde spaziali. La luminosita' X della Luna e' $\sim 1.2 \cdot 10^{12}$ erg/s, che corrisponde ad una delle piu' intrinsecamente deboli sorgenti X del cielo.

La Figura 7 mostra un buon grado di isotropia del fondo X, dell'ordine del 1% misurata su pixel di cielo di 10 gradi quadrati e mediando su tutto il cielo (livello di isotropia gia' misurato da UHURU e osservatori successivi):

$$\frac{\Delta I_x}{I_x} \approx 0.01 \quad \text{su scale di } 10^\circ \text{ gradi quadrati}$$

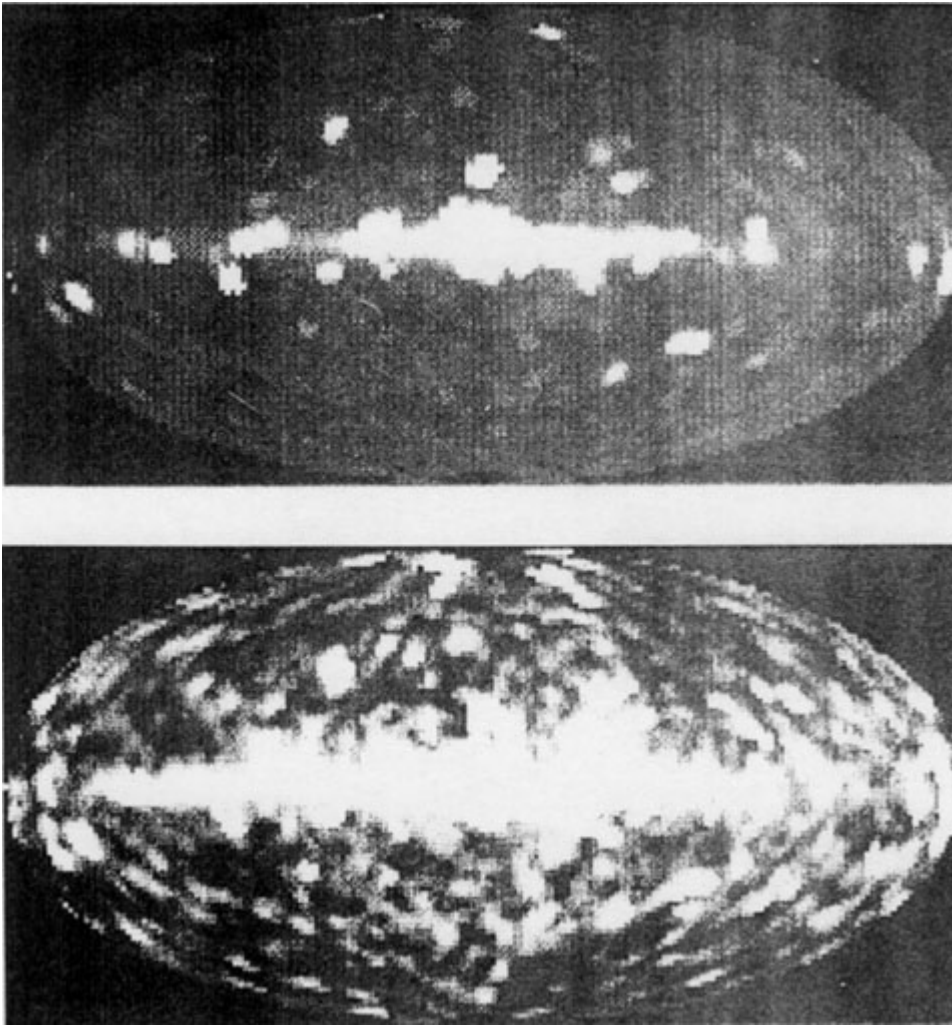


Figura 7.
(Sopra) Il cielo in raggi X osservato dal satellite HEAO-1 A2 in coordinate Galattiche con 3° di risoluzione. Sorgenti brillanti ed emissione diffusa della Galassia dominano a basse latitudini galattiche.
(Sotto) La stessa mappa a piu' alto contrasto per evidenziare le fluttuazioni del fondo X ad alte latitudini Galattiche. In particolare una zona buia e' vista vicino al polo Galattico sud.
 [Mappe fornite da K. Jahoda.]

Cio' e' ottenuto suddividendo il cielo in celle di $\approx 3^\circ$ di lato e riferendo l'intensita' al segnale integrato entro queste celle. Facciamo l'ipotesi che questo livello di isotropia angolare sia dovuto al rumore statistico delle sorgenti che originano questa radiazione, e verifichiamo se vi siano evidenze di anisotropie residue dovute a forti disomogeneita' nella distribuzione di sorgenti. Ci aspettiamo ovviamente che questo rumore statistico sia dovuto a variazioni casuali nella densita' areale di sorgenti da cella a cella di cielo:

$$\frac{\Delta I_X}{I_X} \simeq \frac{\Delta n}{n} \quad n : \text{numero sorgenti entro celle di } 10^\circ \text{ gradi quadrati}$$

n essendo il numero di sorgenti entro le celle e Δn la sua fluttuazione. Se assumiamo per queste sorgenti una distribuzione casuale descritta da una statistica di Poisson ², possiamo scrivere:

² La statistica di Poisson, nota anche come legge di probabilita' degli eventi rari, descrive la distribuzione casuale di una popolazione di oggetti entro un grande volume entro il quale vengano definiti piccoli sottospazi occupati ciascuno da una piccola frazione degli oggetti. La distribuzione di probabilita' $P(n)$ e' data dalla legge $P(n) = e^{-\bar{n}} \bar{n}^n / n!$ con \bar{n}

$$\Delta n = \sqrt{(n - \bar{n})^2} \approx \sqrt{\bar{n}}, \quad \text{cosicche':}$$

$$\frac{\Delta I_X}{I_X} \approx \frac{\Delta n}{\bar{n}} \approx \frac{\sqrt{\bar{n}}}{\bar{n}} \approx \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}$$

per cui il # medio di sorgenti per cella necessario per spiegare il livello osservato delle fluttuazioni di intensita' sara' $\bar{n} \approx \left(\frac{\Delta I}{I}\right)^{-2} \approx 10^4$ sorgenti per 10° quadrati,

ossia ≈ 1000 sorgenti per grado quadrato. Questo approssimativamente e' il numero di sorgenti X che si deducono dai conteggi profondi responsabili del fondo X.

L'anisotropia osservata del fondo X e' quindi consistente con l'essere dovuta essenzialmente al rumore statistico delle sorgenti e non a forti anisotropie su grande scala angolare nella distribuzione delle stesse.

Radiazione Cosmica di Fondo nelle Microonde. Si tratta di un fondo di radiazione che ha una origine molto piu' remota nel tempo del fondo X, ossia proviene direttamente dal plasma primordiale poco dopo il Big Bang (400.000 anni dopo). E' un fondo di fotoni di corpo nero (paradossale il fatto che questi fotoni non hanno piu' interagito con le loro sorgenti, ossia con il plasma primordiale, da circa 14 miliardi di anni, e nonostante cio' hanno mantenuto uno spettro di perfetto corpo nero, che origina da perfetto equilibrio tra radiazione e materia!). E' una radiazione che oggi si puo' osservare nelle microonde ($\lambda_{\text{peak}}=2$ mm), ed e' stata scoperta nel 1965 (si veda anche Sez. . A lunghezze d'onda centimetriche, il satellite COBE (dedicato completamente allo studio spettroscopico e angolare delle radiazioni di fondo dal radio al vicino IR) ha mostrato un elevatissimo grado di isotropia di questa radiazione, pari a qualche parte su 100.000 (0.001%), una volta escluso (ovvero corretto) il moto della Terra rispetto alla radiazione stessa. La distribuzione angolare dell'intensita' misurata da COBE su grandi scale angolari di 10° e' riportata in Figura 8 alto.

La Figura 8 in basso mostra la mappa a piu' alta risoluzione angolare ottenuta dalla missione W-MAP. Da queste osservazioni emerge una condizione di straordinaria isotropia e omogeneita' nel plasma primordiale sino a circa mezzo milione di anni dopo il Big Bang. Le piccolissime increspature che si notano nella fig. in basso hanno una ampiezza angolare caratteristica corrispondente a circa 10 Mpc al tempo attuale. Fondamentalmente alla presenza di queste *nuvolette* fa riferimento la teoria che spiega l'origine delle strutture cosmiche per effetto dell'autogravita'.

dato dal numero medio di eventi. La distribuzione ha media e varianza entrambi pari a \bar{n} , come si dimostra immediatamente

L'elevatissimo grado di isotropia della radiazione nelle microonde testimonia dunque una straordinaria isotropia (e quindi omogeneita') dell'Universo fino ad almeno mezzo milione di anni dopo l'inizio.

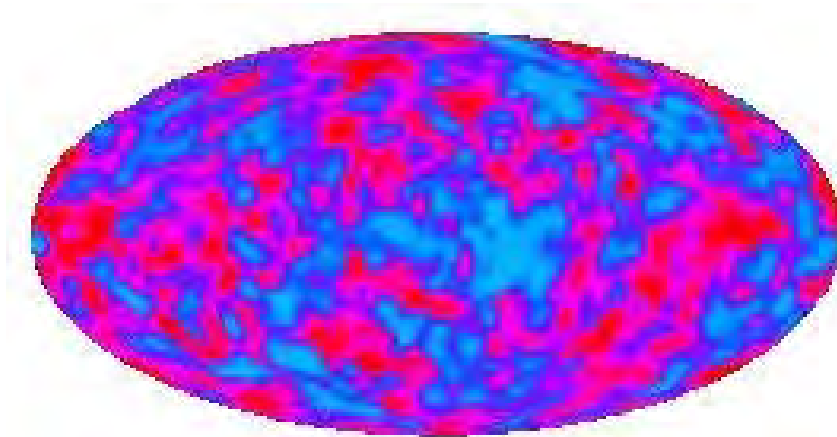
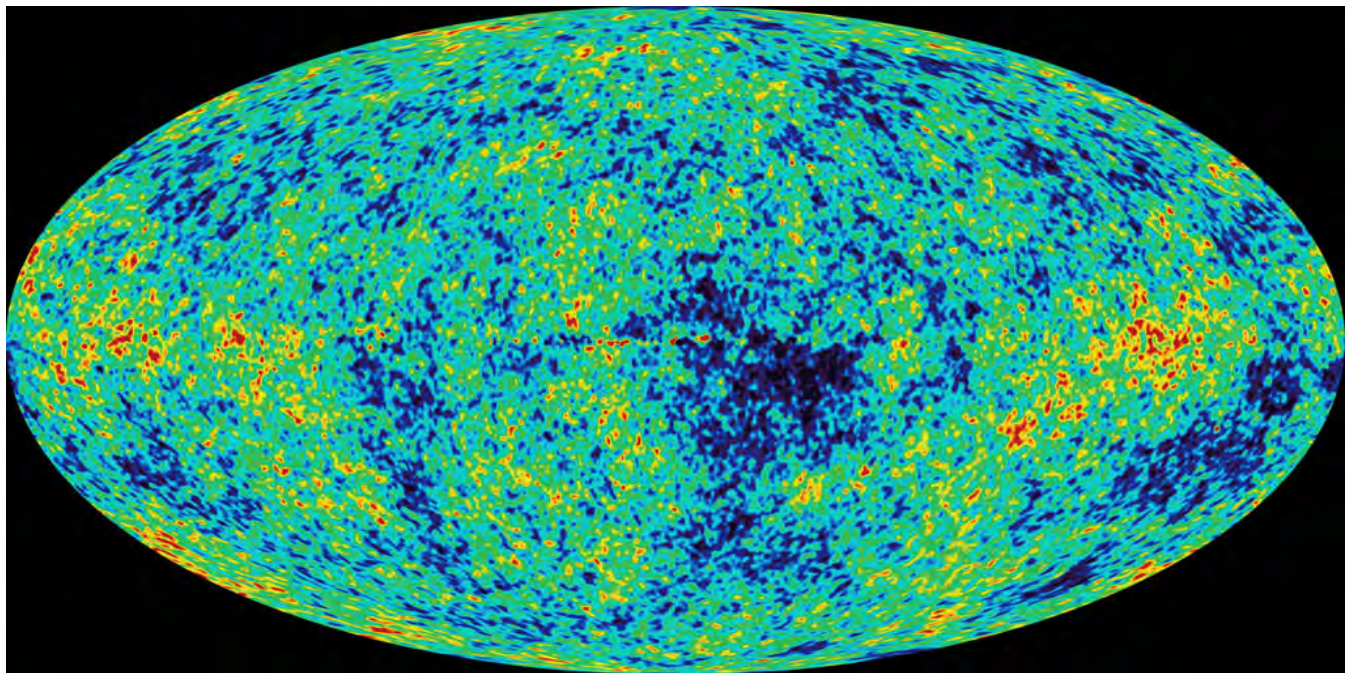


Figura 8. A sinistra: mappa della radiazione di fondo nelle microonde fornita da COBE a bassa risoluzione (10°). Sotto: mappa di tutto il cielo ottenuta con la missione W-MAP con risoluzione angolare di 10 minuti d'arco. In entrambi i casi le fluttuazioni di brillantezza superficiale sono solo di qualche parte su 100.000 .



5.3 Test di omogeneita' basati su statistiche di conteggi e V/V_{\max} .

Procediamo ora nella nostra indagine relativa alla "struttura generale" dell'universo, da un punto di vista fenomenologico. Tutte le osservazioni che abbiamo discusso nel capitolo sinora hanno riguardato evidenze di isotropia, mentre nulla e' stato detto riguardo all'omogeneita'. Test piuttosto diretti dell'omogeneita' dell'universo sono ottenibili studiando conteggi di galassie e applicando il test V/V_{\max} in diverse aree di cielo. Ricordiamo al proposito quanto discusso nel Cap. 3, in particolare eq. [3.1], che

mostra la dipendenza dell'espressione dei conteggi dalla funzione di luminosità e dall'ipotesi di omogeneità (costanza spaziale della $\Phi(L)$).

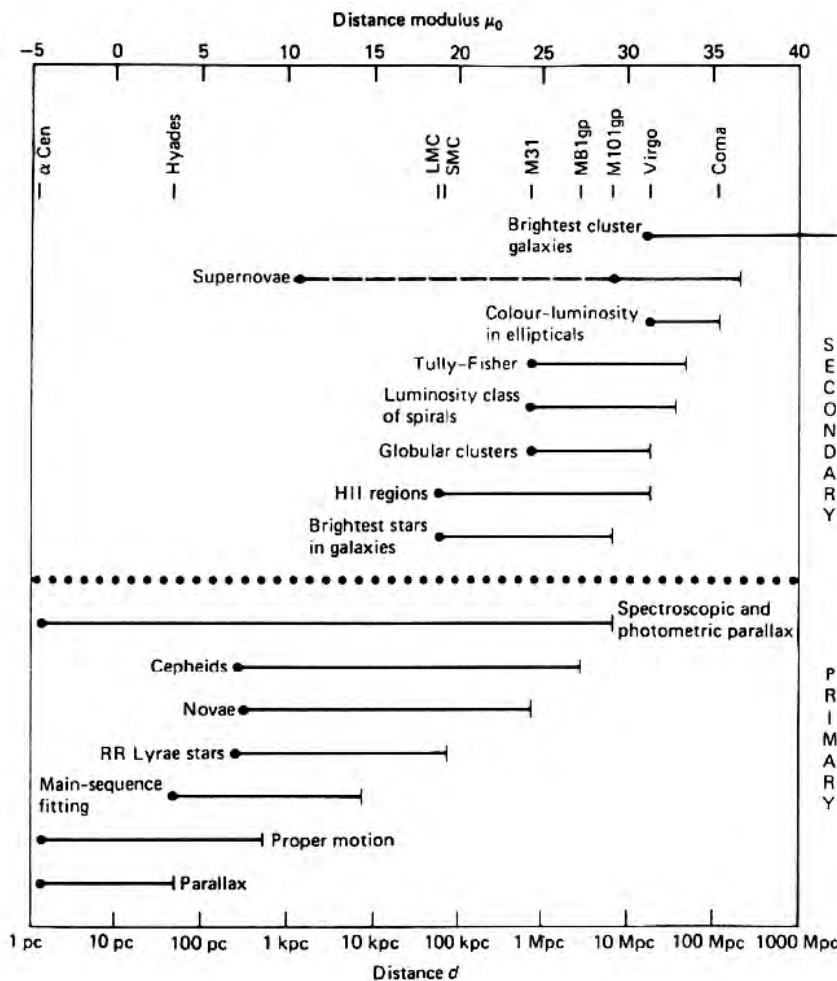


Figura 9. Rappresentazione della cosiddetta scalinata di distanze cosmiche. Ad ogni gradino di questa, corrispondente ad un certo intervallo di distanze, vengono usate diverse sorgenti cosmiche come indicatori. Ognuna di queste diverse categorie sono caratterizzate da differenti classi di luminosità. [grafico tratto dal libro *The cosmological distance ladder* (Rowan-Robinson, 1985)].

5.4 Struttura 3D dell'Universo: distanze cosmiche, legge di Hubble.

Ottenere test più diretti e definitivi della distribuzione 3D delle strutture cosmiche richiede ovviamente di aggiungere una dimensione alla nostra analisi: quella della profondità, ossia occorre ottenere la distanza per ognuna delle sorgenti del nostro campione.

Il problema della determinazione delle distanze in cosmologia porta all'estremo quelli già ampiamente discussi nei corsi precedenti riguardo alla determinazione delle distanze in astronomia. Non volendo riprendere l'intera problematica, ci limitiamo qui a riassumere in Figura 9 la sequenza di indicatori astrofisici utilizzati per misure di distanza.

Questa sequenza di indicatori permette misure di distanza sino ad un migliaio di Mpc, escludendo le supernovae, con le quali si arriva a molte migliaia di Mpc (si veda Cap. 10). La procedura risente ovviamente del problema che ogni (pur piccolo) errore

sistematico in ciascun gradino della sequenza si propaga in modo non facilmente controllabile a tutta la sequenza successiva. In più, l'applicazione di queste procedure di misura è estremamente laboriosa e richiede complesse e delicate calibrazioni. Questi indicatori sono quindi utilizzati per insiemi limitati di oggetti e strutture nell'universo locale, e non permetterebbero di per sé uno studio sistematico 3D dell'universo.

*A RELATION BETWEEN DISTANCE AND RADIAL VELOCITY
AMONG EXTRA-GALACTIC NEBULAE*

BY EDWIN HUBBLE

MOUNT WILSON OBSERVATORY, CARNEGIE INSTITUTION OF WASHINGTON

Communicated January 17, 1929

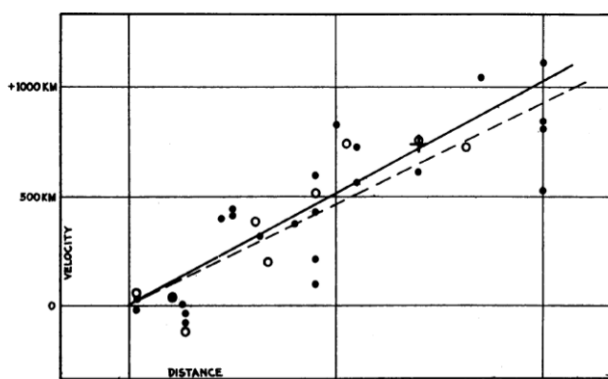


FIGURE 1

Velocity-Distance Relation among Extra-Galactic Nebulae.

Radial velocities, corrected for solar motion, are plotted against distances estimated from involved stars and mean luminosities of nebulae in a cluster. The black discs and full line represent the solution for solar motion using the nebulae individually; the circles and broken line represent the solution combining the nebulae into groups; the cross represents the mean velocity corresponding to the mean distance of 22 nebulae whose distances could not be estimated individually.

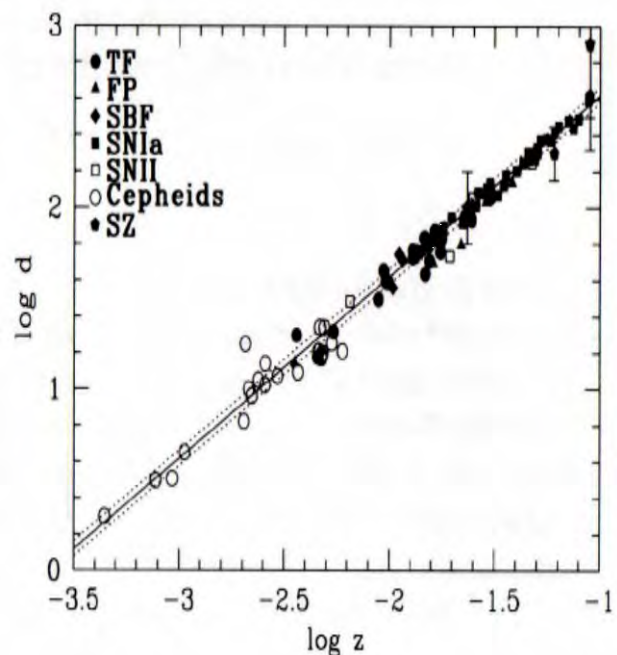


Figura 10. A Sinistra: il lavoro della scoperta di Hubble con il grafico di riferimento.

A Destra: moderna versione della legge dai risultati di osservazioni con Hubble Space Telescope, dove i vari indicatori utilizzati sono indicati (da Freeman et al. 2001).

Fortunatamente, ci giunge in soccorso a questo proposito una delle grandi scoperte del XX secolo, quella di Edwin Hubble: una stretta relazione tra la distanza di una galassia e una quantità relativamente facile da misurare: il suo redshift.

Come è noto, le righe spettrali osservate nello spettro del Sole mostrano spostamenti in lunghezza d'onda dovuti al moto combinato dell'osservatore rispetto alla fotosfera solare, e dovuti al moto di rotazione della Terra attorno al suo asse e alla rotazione del Sole stesso. Osservando altre stelle o galassie, gli spostamenti in λ delle righe spettrali rifletteranno i loro moti relativi a noi. Questi moti sono ad es. ben misurati nelle componenti il Gruppo Locale di galassie, e appaiono con poche eccezioni

spostamenti verso il blu (moti in avvicinamento). Tutti questi spostamenti delle righe sono dovuti ad un effetto di relatività ristretta, l'effetto Doppler, dovuto alla modifica delle lunghezze d'onda dei fotoni a seguito del moto relativo sorgente-osservatore e stabilita in base alla trasformata di Lorentz essere:

$$\lambda_o = \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} \lambda \quad [1]$$

ove λ e λ_o sono lunghezza d'onda emessa e osservata. Per v sufficientemente piccola rispetto alla velocità della luce e assunta positiva, eq. [1] diventa

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_o - \lambda}{\lambda} = \frac{v_e - v_o}{v_o} \equiv z = \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} - 1 \approx \frac{v}{c} \quad [2]$$

relazione che definisce il redshift z e lo collega alle velocità di recessione delle galassie osservate nell'Universo locale. Per v negativo (avvicinamento della sorgente all'osservatore) si parla di blue-shift (in questo caso, come vedremo, il redshift z non è definito). La grande scoperta di Hubble degli anni '30 è stata quella dell'esistenza di una relazione lineare tra la distanza di una galassia, stimata utilizzando i classici indicatori di Fig. 9, e il redshift misurato spettroscopicamente, ossia lo spostamento verso il rosso delle sue righe spettrali:

$$z \approx \text{costante} \cdot d. \quad [3]$$

A questa legge, che si applica su grande scala (tanto è vero che sulla scala del Gruppo Locale non si applica, apparendo essenzialmente qui solo blueshifts), si aggiunge l'effetto dei moti peculiari (o moti propri) delle galassie:

$$z \approx \text{costante} \cdot d + v_{\text{pec}} / c \quad [4]$$

A queste correzioni si aggiungono ovviamente quelle relative ai moti combinati del nostro sistema di riferimento, quello rotatorio e di rivoluzione della Terra, quello del Sole nella Galassia, della Galassia nel Gruppo Locale, e di questo rispetto alla distribuzione media di materia nell'Universo vicino. Queste correzioni sono tanto più trascurabili quanto più lontano ci spingiamo con la nostra mappatura 3D dell'Universo.

Se escludiamo dunque le galassie più vicine, il secondo termine può essere trascurato. Interpretando l'effetto di redshift come dovuto al moto (effetto Doppler), possiamo scrivere

$$v \approx z c \approx H_0 d \quad (v \ll c) \quad [5]$$

La costante H_0 è detta costante di Hubble, ed è usualmente espressa in Km/sec/Mpc. Le misure attuali (principalmente condotte misurando accuratamente le distanze di varie galassie dell'ammasso della Vergine con il metodo delle cefeidi, con un errore <10%, dopo molti decenni di incertezze e controversie, grazie ad un uso sistematico del telescopio spaziale Hubble, HST) forniscono per essa il valore di

$$H_0 \approx 70 \pm 6 \text{ Km/sec/Mpc} \quad [6]$$

Da notare che H_0 e' nota oggi con una precisione molto superiore ($\sim 1\%$) grazie a un nuovo tipo di analisi che sfruttano il fondo cosmico nelle microonde.

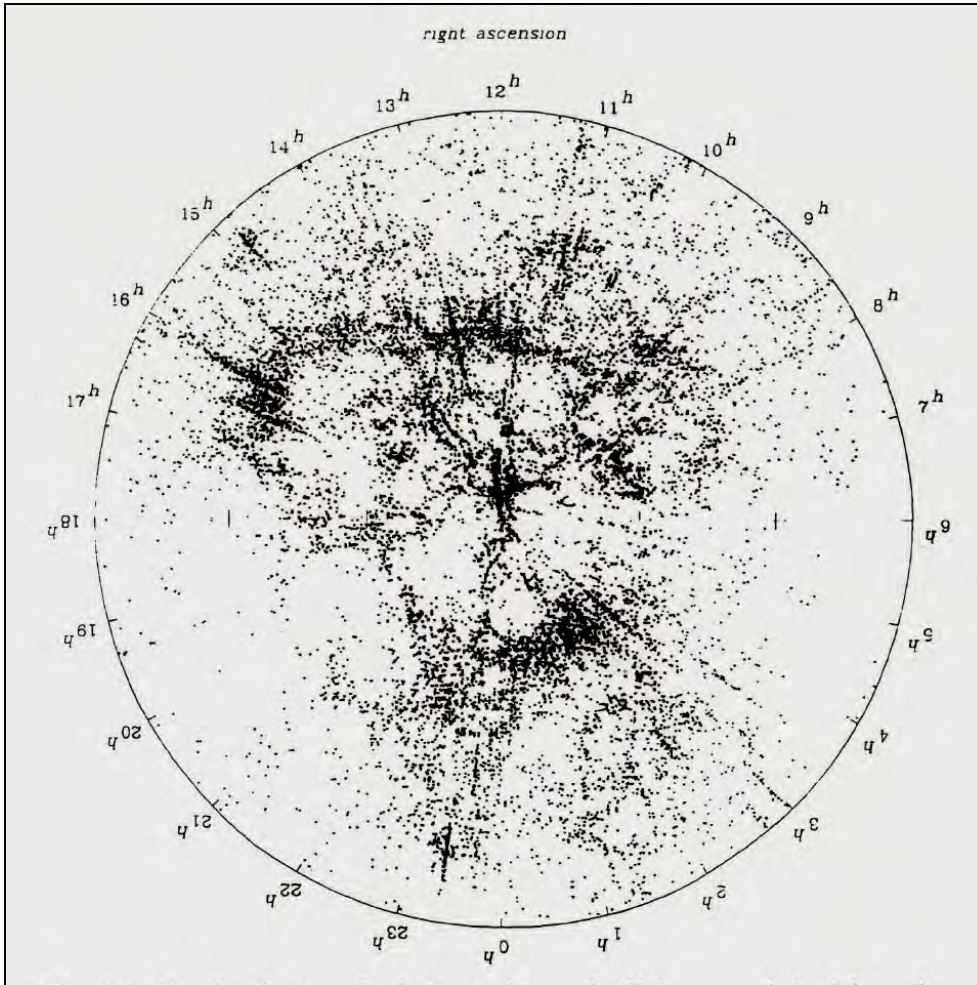


Figura 11. Distribuzione delle galassie nell'universo vicino, con velocita' di recessione < 15.000 Km/sec (200 Mpc). Circa 14.000 galassie appaiono in questa figura. La posizione della Via Lattea e' al centro. La zona di *avoidance* dovuta al piano galattico e' visibile. Nel piano del grafico sono proiettate tutte le galassie con declinazione compresa tra 8.5 e 44.5 gradi. [From J. Huchra & M. Geller]

La piu' ovvia interpretazione di questa scoperta e' che l'universo si sta espandendo in modo apparentemente uniforme con un tempo-scala caratteristico pari a $1/H_0$.

Il raggio di Hubble $c\tau_0 = c/H_0$ e' invece il percorso effettuato dalla luce durante questo tempo, detto raggio di Hubble dell'universo:

$$R_H = 310^{10} \cdot 1410^9 \cdot 310^7 [cm] \approx 1.310^{28} [cm] \approx 4300 \text{ Mpc} \quad (\text{se } v \ll c, z \ll 1)$$

Dalla [5] possiamo dunque immediatamente ottenere

$$d \approx \frac{c}{H_0} z \approx 4300 z \text{ [Mpc]} \quad (\text{se } v \ll c, z \ll 1) \quad [7]$$

avendo espresso la costante di Hubble in sec^{-1} (tempo⁻¹ sono le unita' naturali di questa costante). L'espansione universale ci offre dunque, tra le altre cose, un metodo di stima delle distanze estremamente semplice e potente, necessitando della

sola misura del redshift, relativamente facile da effettuare con spettrografi anche di moderata potenza.

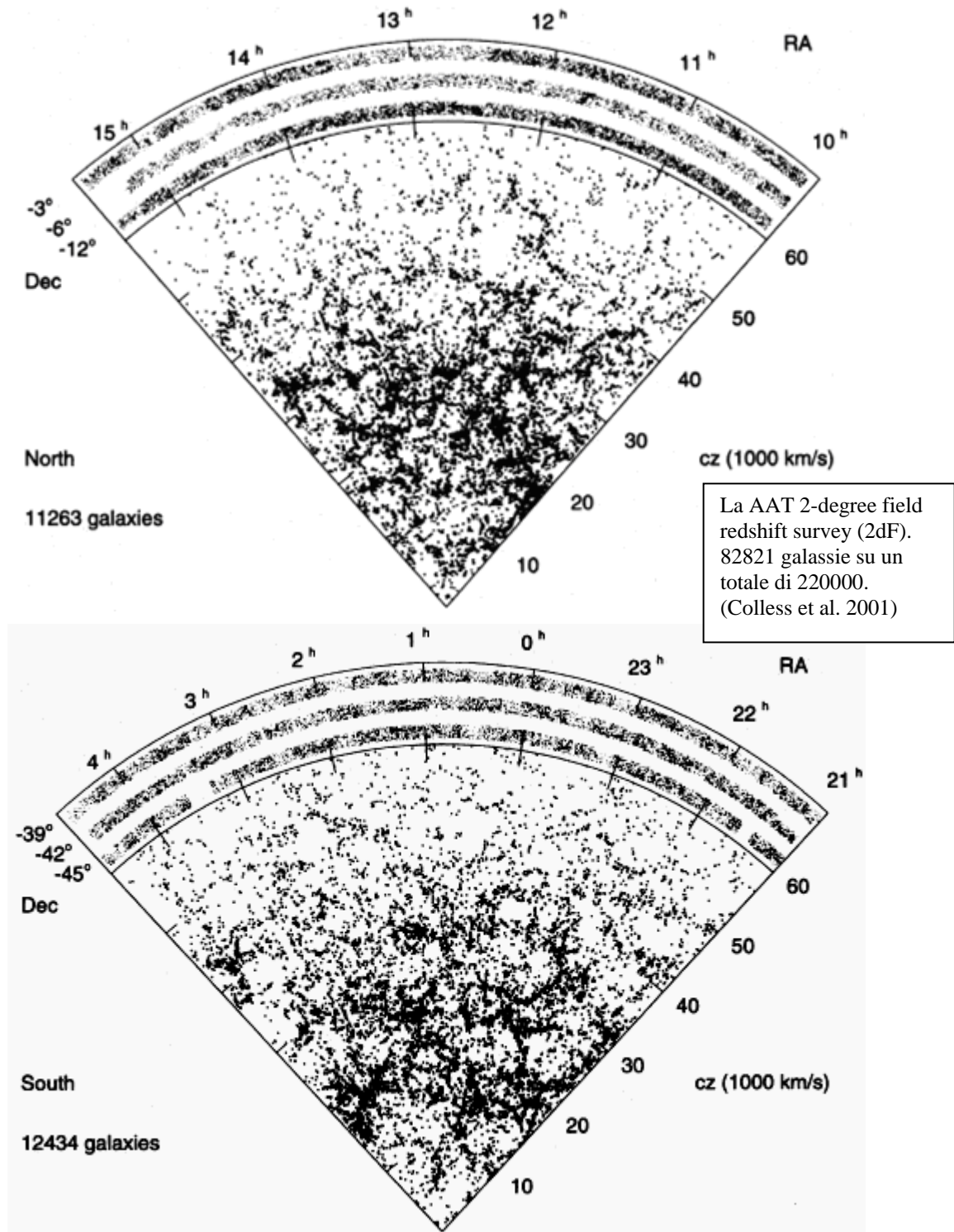


Figura 12. Diagramma analogo a quello di Fig. 11 ma spinto piu' in profondita' in redshift e distanza. Proviene dalla survey dell'osservatorio Las Campanas, copre 700° quadrati in 6 strisce, la profondita' limite arriva a 60.000 Km/sec, corrispondente a circa $d=900$ Mpc.

5.5 Test di omogeneita' dell'universo da analisi 3D.

Sfruttando la [7] e potenti spettrografi multi-canale su grandi telescopi, e' stato possibile ottenere scansioni 3-dimensionali dell'Universo, gia' a partire dagli anni '80 (vedi uno dei primi risultati in Figura 11).

La struttura 3D dell'universo appare in figura fortemente disomogenea fino alla velocita' di recessione massima qui campionata di 15000 Km/sec. Appaiono grandi strutture filamentari assieme a grandi vuoti, questi ultimi di dimensioni che arrivano fino a ~100 Mpc. Molto evidente anche una struttura a raggera che si incentra nella posizione della Via Lattea, dovuta ai moti peculiari delle galassie, ovvero moti orbitali di queste entro grandi strutture gravitazionali come ammassi di galassie (ben visibile ad es. l'ammasso della Vergine come un sigaro in prossimita' del centro dell'immagine), moti che si sommano algebricamente a quello generale di espansione di Hubble. Il fatto che di questi moti non si tenga conto nel calcolo della distanza da [7] produce l'allungamento radiale nella distribuzione di punti qui osservata.

Nelle Figure 12 e 13 sono riportati i risultati di surveys spettroscopiche piu' profonde e su grandi aree di cielo. La Sloan Digital Sky Survey (SDSS), ad esempio, ottenuta con un telescopio robotico dedicato, copre una significativa parte dell'intero cielo.

I risultati di queste surveys profonde sono molto significativi. Mostrano che la distribuzione di galassie segue una struttura apparentemente *cellulare* e in parte *filamentare*, in cui le galassie si dispongono preferenzialmente sulle pareti di volumi sferici, che appaiono all'interno sotto-densi. Come chiaramente mostrato in tutte queste figure, su scale che superano alcune centinaia di Mpc ($z > 0.05 - 0.1$) la distribuzione delle strutture sembra divenire piu' uniforme.³

Da tutti questi dati emerge il seguente quadro. L'Universo e' molto fortemente strutturato su scale sino a 100 Mpc. La distribuzione di strutture, almeno quella campionata dalle galassie (sappiamo che la materia oscura ha un ruolo decisivo nell'influenzare la dinamica su tutte le scale) tende a divenire piu' omogenea oltre questo limite, e lo diviene pienamente oltre 200-300 Mpc. L'omogeneita' dell'universo su scale di migliaia di Mpc e' dimostrata dal fondo X e dalla distribuzione delle radiosorgenti, sulla base di una semplice considerazione copernicana che il nostro sistema di riferimento d'osservazione non debba essere in nessun modo peculiare e privilegiato. L'estrema omogeneita' dell'universo primordiale e' infine dimostrata dalle osservazioni della CMB.

³ Tutto cio' rimane al momento limitato a ragionamenti di tipo qualitativo. Per dettagliate indagini quantitative sulla struttura su grande scala dobbiamo rimandare ai corsi della Laurea Magistrale.

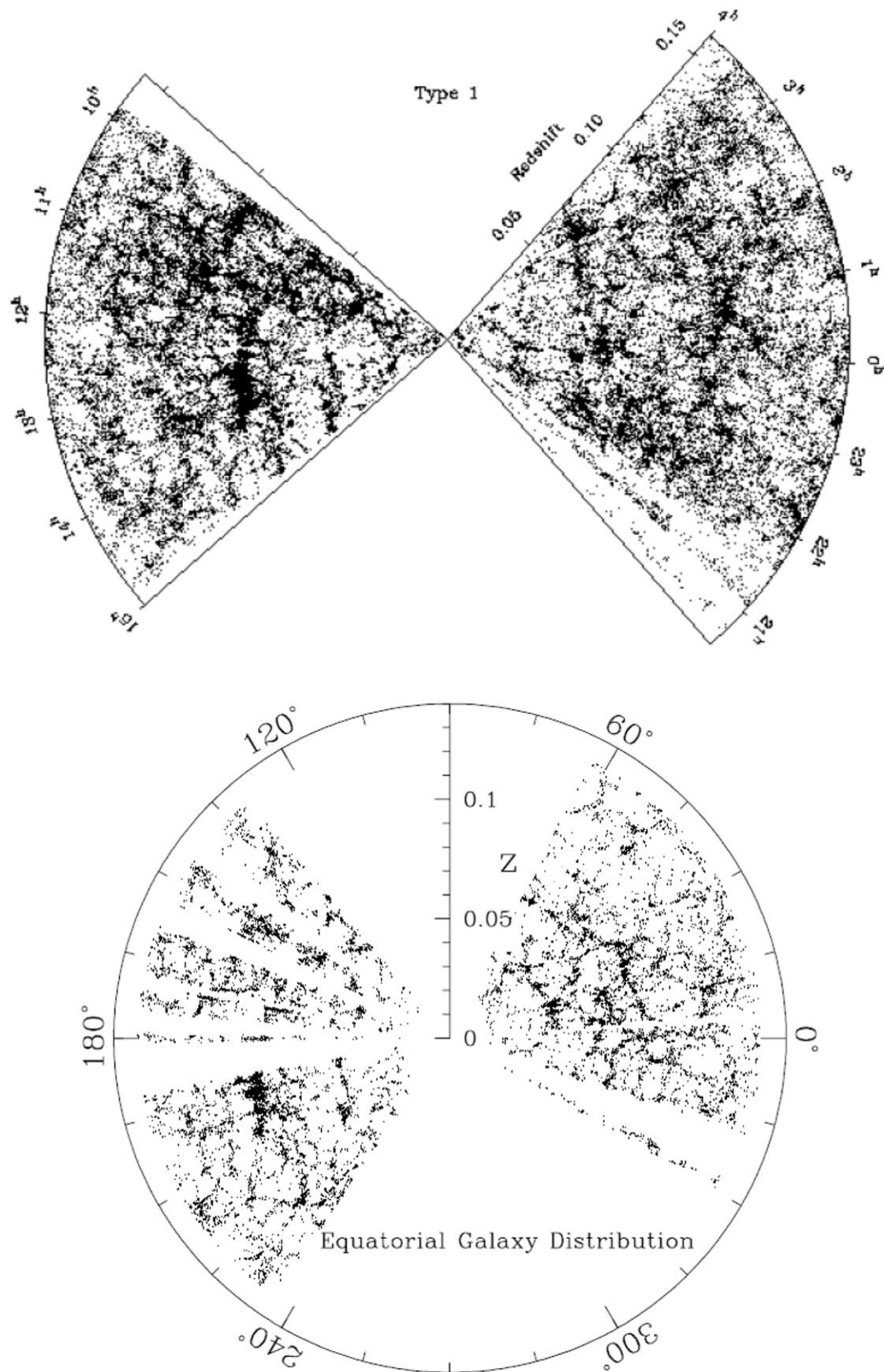


Figura 13. Risultati delle due maggiori surveys spettroscopiche attuali: sopra la survey 2dF dell'osservatorio Anglo-Australian, sotto la Sloan Digital Sky Survey, della quale compaiono qui 16.300 galassie entro $b < 5$ gradi dall'equatore celeste.

5.6 Vincoli alla struttura temporale: un Universo di eta' finita.

Abbiamo dedicato la Sez. 4 ad una breve disamina di una serie di dati che ci hanno dimostrato la proprieta' di varie popolazioni di sorgenti cosmiche di evolvere rapidamente con il tempo cosmico, indicando cosi' anche che l'Universo stesso e' evolutivo. Questo sembrerebbe accordarsi con l'evidenza fornita dalla legge di Hubble di un Universo di eta' finita, come vediamo nel seguito. Ora, oltre alle considerazioni basate sulla legge di Hubble che vediamo nel seguito (e quelle derivanti dal paradosso di Olbers, vedi Sez. 5.7), vi sono altre indicazioni importanti che il nostro universo abbia una eta' finita, le principali delle quali provengono da datazioni degli oggetti cosmici piu' antichi di cui possiamo avere conoscenza, che comunque pongono un limite inferiore all'eta' del' universo.

Estrapolazione dell'espansione di Hubble nel passato. Riconsideriamo la legge di espansione universale, che si puo' riscrivere

$$v \approx z c \approx H_0 d = d / \tau_0 \quad (v \ll c) \quad [8]$$

con τ_0 costante che ha le dimensioni del tempo. Immaginando di ricostruire il moto generale di espansione a ritroso nel tempo con velocita' di espansione costante, possiamo chiederci quanto tempo le galassie vicine abbiano impiegato a percorrere 1 Mpc alla velocita' di 70 Km/sec: circa a quel tempo tutte le galassie dovevano essere in contatto tra loro. Otteniamo in questo modo, semplicemente prendendo il reciproco di H_0 , il tempo di Hubble

$$\tau_0 = 1/H_0 = \frac{3.08 \cdot 10^{24} \text{ cm}}{710^6 \text{ cm/sec}} \approx 14 \text{ Gyrs} . \quad [9]$$

In conclusione l'espansione universale contiene in se una indicazione per un Universo di eta' finita. Questa ancora non e' certamente una prova, bensì un indizio, in quanto niente dice che la velocita' di espansione sia stata costante nel passato.

Datazione di elementi radioattivi. Il rapporto tra le abbondanze di diversi isotopi di elementi radioattivi dipende dalla loro eta'. Il loro studio fornisce quindi un metodo per valutare le eta' di sorgenti cosmiche. Si tratta della disciplina che va sotto il nome di *nucleo-cosmo-cronologia*⁴. Occorre allo scopo disporre di misure dei rapporti di abbondanze di elementi che decadono spontaneamente su lunghi tempi scala. Specie radioattive a lunga scadenza sono ad esempio $^{238}\text{U} \rightarrow ^{232}\text{Th}$, $^{238}\text{U} \rightarrow ^{235}\text{U}$, $^{187}\text{Re} \rightarrow ^{187}\text{Os}$.

⁴ Il procedimento e' identico a quello famoso dell'abbondanza dell'isotopo ^{14}C (Carbonio 14) utilizzato per la datazione di organismi gia' viventi (animali, legno, cuoio).

Si tratta di elementi che sono prodotti durante le fasi finali della vita di una stella tramite il processo *rapido*, nel quale i neutroni vengono catturati nei nuclei più rapidamente di quanto possano decadere secondo il processo β (vedi Sez. 1.4). Esiste una teoria che predice con precisione le abbondanze con le quali questi elementi pesanti vengono inizialmente prodotti, e poiché il tasso di decadimento e trasformazione è pure ben conosciuto, l'analisi delle abbondanze relative delle varie specie forniscono dati precisi sull'età della Terra e del Sistema Solare, nonché della nostra Galassia ove si faccia uso di spettroscopia stellare ad alta risoluzione per misurare le abbondanze degli elementi. In questo modo si è verificato, ad esempio, che le rocce più vecchie sulla Terra, le rocce della Luna e i meteoriti hanno tutti età di

$$(4.5 \pm 0.1) 10^9 \text{ yrs},$$

in buon accordo con l'età stimata per il Sole (5.1 miliardi di anni). È stato così possibile non solo stimare l'età del Sistema Solare, ma anche quella della nostra Galassia, utilizzando elementi con tempi di decadimento un po' più lunghi. L'età della maggior parte delle stelle della Galassia è risultata in questo modo $\sim 10 \pm 1.5$ Gyrs.

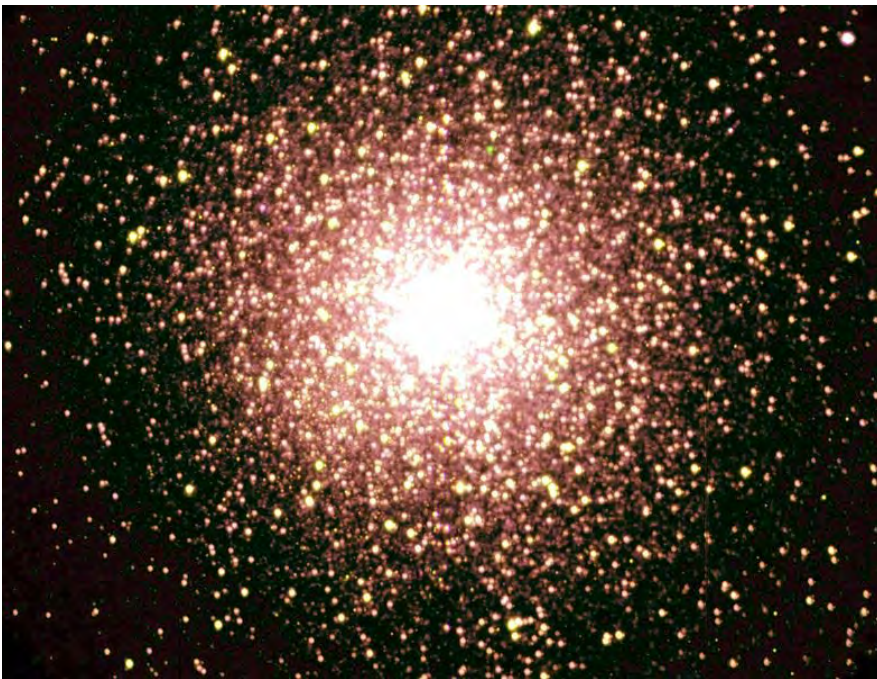


Figura 14.

Immagine multicolore dell'ammasso globulare gigante 47 Tucanae. È un raggruppamento di un milione di stelle distante 4.1 Kpc, con un diametro di circa 50 pc. È tra i più antichi ammassi noti. Il corrispondente diagramma HR è stato molto studiato, ed è riportato in Fig. 15.

Datazione delle popolazioni stellari nella nostra e in altre galassie. Come già ampiamente discusso in Sez. 2, le stelle sono strutture astrofisiche piuttosto ben conosciute e comprese. I tempi evolutivi sono determinati dalla quantità di idrogeno disponibile per il bruciamento termonucleare e dal tasso di bruciamento. Entrambi

dipendono fortemente e in modo piuttosto univoco dalla massa della stella, come già' discusso (vedi eq. [2.13]).

In riferimento alle Fig. [2.5, 2.6, 2.7], riguardanti i diagrammi HR di vari tipi di popolazioni stellari, le modalita' di datazione delle popolazioni utilizzano determinazioni della distribuzione delle stelle sulla sequenza principale (*Main Sequence*). Stelle esistono in un intervallo di massa da circa 0.1 a circa 100 M_{\odot} , cui corrispondono, come abbiamo visto in Sez. 2, tempi di vita che vanno da 1 Myr a molte decine di Gyr [eq. 2.14]; quindi lo studio dei diagrammi HR fornisce misure di eta' su un amplissimo intervallo di valori.

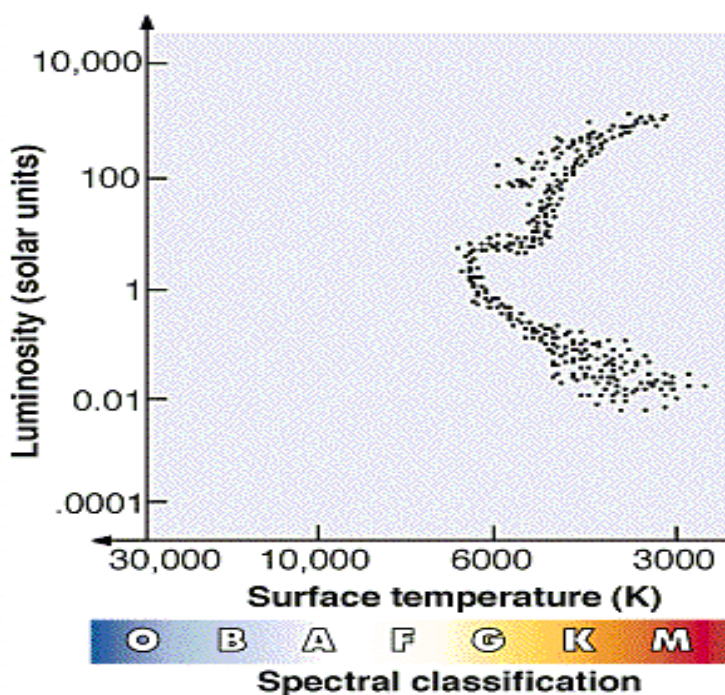
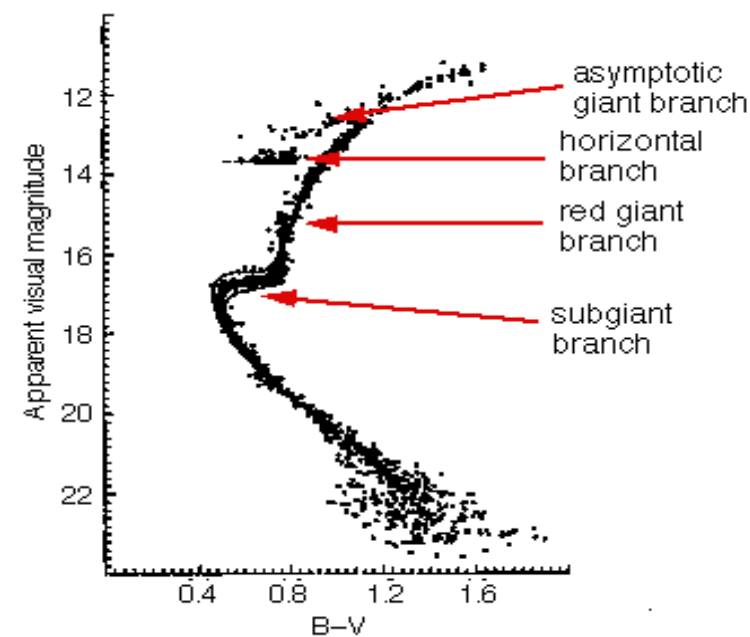


Figura 15.

Diagrammi Hertzsprung-Russel delle stelle dell'ammasso globulare vecchio 47 Tucanae. Sopra: Diagramma in flusso (magnitudine apparente) contro colore. Tramite l'osservazione del ramo orizzontale (*horizontal branch*), la cui luminosita' assoluta e' nota *a-priori*, e' stato possibile stimare la distanza dell'ammasso in 4.1 Kpc, e in questo modo calibrare in luminosita' assoluta il diagramma (vedi pannello sotto). Sotto: le stelle del piegamento della sequenza principale (turn-off) hanno massa e luminosita' di poco piu' di una massa solare.

Con riferimento alla Fig. [2.7], al trascorrere del tempo dalla loro generazione le stelle piu' massicce e con colori piu' blu [$B-V < 0.4$] (quelle collocate in alto a SX nel diagramma HR) tendono ad uscire progressivamente dalla sequenza e a migrare verso il ramo delle giganti rosse. Cio' produce un piegamento nella sequenza, detto "*turn-off*", che procede da sinistra verso destra all'aumentare dell'eta' dell'ammasso. La determinazione del posizionamento del *turn-off* per le stelle di un ammasso stellare (ottenuto misurando magnitudine assoluta M e colore [$B-V$] per tutte le stelle) permette una datazione piuttosto precisa dell'ammasso.

Particolarmente interessanti sono i risultati dell'applicazione di questo metodo agli ammassi stellari piu' antichi, gli ammassi globulari, vedi ad esempio la curva rossa per l'ammasso antico M3 in Fig. [2.7]. Un'applicazione di questo metodo e' illustrata nelle Figure 14 e 15. La prima mostra una immagine multicolore dell'ammasso globulare meglio studiato, 47 Tucanae. Si tratta di un enorme raggruppamento stellare ad una distanza di 4.1 Kpc. Fig. 15 mostra il diagramma HR delle stelle d'ammasso, da cui e' facile ottenere la massa e la luminosita' delle stelle di sequenza principale a cui si verifica l'interruzione della stessa. In particolare, la valutazione della magnitudine apparente del ramo orizzontale (*horizontal branch*), con magnitudine assoluta che e' stata calibrata dal satellite Hypparcos a $M_V \sim 1$.

Nella fattispecie dell'ammasso 47 Tucanae, la massa del *turn-off* e' all'incirca $1 M_{\odot}$. Da eq. [2.10] e [2.14] otteniamo cosi' una eta' dell'ammasso approssimativamente di 13 Gyrs (che e' appunto l'eta' alla quale si stima il Sole uscirà' dalla sequenza principale).

In conclusione, le piu' precise datazioni oggi dei piu' antichi ammassi globulari della nostra Galassia mostrano eta' di $\approx 12-14$ Gyrs, in interessante accordo con le stime dell'eta' dell'Universo espresse in eq. [7]. Su queste basi, lo studio degli ammassi stellari piu' antichi ha fornito le informazioni piu' precise sull'eta' minima che deve verosimilmente avere l'Universo, e al contempo fornisce una indicazione di massima per la sua eta', visto che per nessuna struttura si e' stimata una eta' superiore a ~ 15 Gyrs.

Datazione di stelle Nane Bianche. Un altro metodo di datazione spesso utilizzato riguarda una particolare popolazione di stelle che vivono molto a lungo, corrispondenti alla fase finale dell'evoluzione stellare, le Nane Bianche (*White Dwarfs*). La popolazione e' rappresentata nel diagramma HR di Fig. [2.5] dalle stelle situate in basso al centro, con luminosita' basse e temperature medio alte. Si tratta di stelle costituite da gas degenere fortemente arricchito di elementi pesanti (C, O, Si, N, ..) prodotti dal precedente bruciamento nucleare. Queste stelle, collocate in una sequenza sotto la Principale, si raffreddano progressivamente con il tempo, essendosi

spento il bruciamento termo-nucleare in esse, cosicché la luminosità L diminuisce secondo una legge empirica ben definita

$$L \propto M \Delta t^{-7/5}.$$

Osservazioni di Nane Bianche nel disco della nostra Galassia mostrano età di 9.3 ± 2 Gyrs, in ottimo accordo con i dati della cosmo-cronologia Galattica.

Datazione delle stelle piu' vecchie nella nostra Galassia. Se la maggior parte delle stelle della Galassia hanno una età di circa 10 Gyrs, alcune stelle dell'alone che sono state studiate con spettroscopia ad alta risoluzione sono risultate molto piu' antiche ⁵, e forniscono i vincoli piu' estremi e importanti sull'età dell'Universo.

L'abbondanza dell'isotopo radio-attivo Uranio-238 è stato misurato con grande precisione in una stella estremamente debole dell'alone. La tecnica basata sul rapporto $^{238}\text{U} \rightarrow ^{235}\text{U}$ ha fornito una età di 12.5 Gyrs.

In un altro caso è stato possibile misurare l'abbondanza di Berillio in due stelle dell'ammasso globulare NGC 6397, tra i piu' antichi della Galassia. L'età dell'ammasso, stimata con i metodi precedentemente discussi dell'evoluzione stellare, è di 13.4 ± 0.8 Gyrs. L'osservazione dell'abbondanza di berillio (^9_4Be , che è prodotto dall'urto di nuclei piu' pesanti, C,N,O, con raggi cosmici nella Galassia) ha permesso di stimare che il gas da cui si è formato l'ammasso è rimasto nell'ambiente galattico circa 200 - 300 milioni di anni). La somma delle due quantità fornisce un limite inferiore all'età dell'Universo di 13.6 ± 0.8 miliardi di anni. Come vedremo, questo valore risulta molto prossimo all'età stimata dell'Universo per altra via, cosa che implica che queste stelle si sono formate nell'immediata prossimità del Big Bang.

5.7 Il paradosso di Olbers.

Si tratta di un classico test della cosmologia osservativa che data ai primi dell'800. Olbers e altri (Halley) hanno provato a portare all'estremo l'argomento relativo ad un universo omogeneamente popolato di stelle (e galassie, aggiungerei noi), e hanno confrontato questa ipotesi con quella, vigente all'epoca, di un universo infinito.

Proviamo a calcolare, sotto queste due ipotesi, quale dovrebbe essere la brillantezza superficiale del cielo in ottico (ovvero, il fondo cielo ottico). Una shell di stelle tutte della stessa luminosità L e di densità spaziale pari a Φ , in numero pari a

$$dN = \Phi r^2 dr, \quad \text{con } S \propto L / r^2,$$

⁵ Si veda: <http://www.eso.org/public/science/stars/>

darebbe un contributo all'intensità del fondo per unità di angolo solido pari a

$$dI = S \cdot dN = \Phi \cdot L \cdot dr$$

ove dI è il contributo differenziale della shell di sorgenti alla intensità I della radiazione di fondo cosmico nella banda osservata. Una distribuzione omogenea tra $r=0$ e $r=R$ darebbe così:

$$I = \Phi \cdot L \cdot R$$

Se davvero fosse $R \rightarrow \infty$, allora $I \rightarrow \infty$. L'argomento, davvero semplice, si complica un po' se consideriamo che, ad una certa distanza, la luce di una sorgente tende a sovrapporsi e confondersi con altre lungo la linea di vista e la sua luce nel cammino verso di noi viene intercettata dalle altre sorgenti. In questo modo la brillantezza superficiale del cielo dovrebbe tendere a quella delle singole sorgenti (e quindi alla brillantezza superficiale del Sole).

Il fatto che la luminosità superficiale del cielo notturno sia enormemente inferiore a questa ha costituito un paradosso per lungo tempo, e pone comunque interessanti vincoli alla struttura spazio-temporale dell'universo. Oggi sappiamo che la risposta a questo problema è dovuta ad una serie di fattori, principalmente quello che l'Universo ha una età finita ed è attualmente in espansione (entrambi i fatti deducibili dalla legge di Hubble). Tenendo conto che anche la velocità di propagazione della luce è finita, ciò pone un limite ad R , e quindi all'intensità totale I . La soluzione moderna completa del paradosso è discussa ampiamente in Sez. 9.6.

6. STRUTTURA GENERALE DELL'UNIVERSO. **Modellistica interpretativa.**

Una volta esaminati una serie di dati empirici, nelle Sezioni precedenti, sulle proprietà strutturali generali dell'universo, cerchiamo ora di interpretare questi dati nell'ambito di una adeguata rappresentazione fisico-matematica. Nel modo più completo e auto-consistente, questa rappresentazione richiede l'utilizzo di una teoria completa della struttura spaziale e temporale dell'universo e anche della gravità, ad esempio la Teoria delle Relatività Generale. La linea logica che seguiremo farà per il momento a meno della teoria completa, in quanto alcuni dei principali risultati e delle assunzioni di base si possono formulare indipendentemente da una conoscenza dettagliata di essa ¹. È comunque da sottolineare con tutta la possibile enfasi lo straordinario contributo di Albert Einstein all'elaborazione dei concetti fondamentali sui quali tuttora si basa la nostra comprensione e descrizione dell'Universo: egli ha elaborato, con il massimo del rigore e completezza formale, i presupposti e le equazioni fondamentali, rimasti a tutt'oggi insuperati, senza poter contare sui dati osservativi oggi a nostra disposizione e che all'epoca non esistevano, basandosi sulla sua straordinaria intuizione fisico-matematica. Solo la leggerezza di assumere *a-priori* un presupposto di staticità per l'Universo, dato dalle concezioni dell'epoca, gli ha impedito di pervenire a quella che poi sarebbe stata la pittura completa del cosmo nel corso del secolo XX. Per questo sono occorsi molti successivi anni di riflessione ed analisi osservative. Tuttavia, persino questo involontario errore ha portato Einstein ad una "geniale intuizione", come discuteremo nella Sez. 10.

6.1 Legge generale di espansione. Significato della legge di Hubble.

La caratteristica generale e fondamentale dell'universo è il suo moto di espansione, scoperto da Hubble nel 1929, che consiste in un allontanamento progressivo nel tempo di due punti presi a caso nello spazio. Le caratteristiche di questo moto di espansione si deducono dalla combinazione dell'isotropia osservata su grande scala, e l'omogeneità che se ne inferisce, con la legge di Hubble. Formalmente ciò si può vedere dalla semplice considerazione seguente.

Consideriamo un sistema di punti in espansione uniforme, una situazione nella quale la distanza dei due punti presi a caso, ad esempio sulla superficie di una sfera o su un piano, aumenta dello stesso fattore dopo un certo intervallo di tempo. Ovvero si ha che:

¹ Una rivisitazione di tutti i concetti che andremo ad esporre sarà possibile dopo eventualmente aver seguito il corso di Relatività Generale della Laurea Magistrale. Questo fornirà un più completo formalismo geometrico, ma non nuovi contenuti fisici, rispetto all'approccio euristico qui illustrato.

$$\frac{r_1(t_2)}{r_1(t_1)} = \frac{r_2(t_2)}{r_2(t_1)} = \dots = \frac{r_n(t_2)}{r_n(t_1)} = \alpha = \text{cost} \quad [6.0]$$

ove, se l'espansione e' uniforme, la quantita' α non dipende dalla posizione (mentre puo' dipendere eventualmente dal tempo). La velocita' di recessione dall'origine della galassia 1 e' quindi

$$v_1 = \frac{r_1(t_2) - r_1(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{r_1(t_1)}{t_2 - t_1} \left[\frac{r_1(t_2)}{r_1(t_1)} - 1 \right] = \frac{r_1(t_1)}{t_2 - t_1} [\alpha - 1] = H_0 r_1(t_1)$$

avendo posto in H_0 tutte le costanti non dipendenti dalla posizione. Cio' vale per un qualunque punto, quindi possiamo scrivere

$$v_n = \frac{r_n(t_1)}{t_2 - t_1} [\alpha - 1] = H_0 r_n(t_1).$$

Quindi una espansione uniforme risulta automaticamente in una legge velocita'-distanza del tipo $v \propto r$.

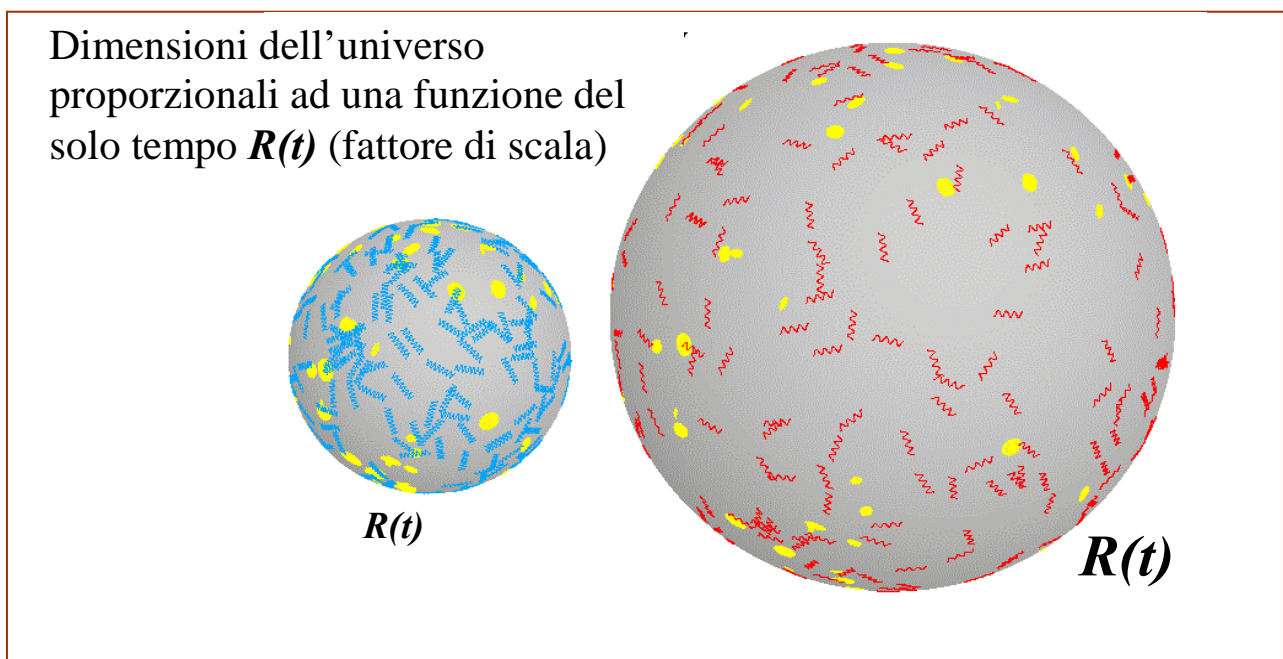


Figura 1. Rappresentazione dell'espansione dell'universo come palloncino che si gonfia al trascorrere del tempo t . Sulla superficie del palloncino sono indicate le posizioni delle galassie, che si allontanano tra loro. Sono anche indicati con onde fotoni che navigano nell'universo. Si tratta ovviamente di una analogia bidimensionale di una realta' spazialmente tridimensionale.

Alcune definizioni: substrato cosmico e osservatori fondamentali.

Per descrivere l'universo non siamo interessati a, ne' in grado di, seguire e descrivere le singole particelle costituenti, ma, analogamente alla descrizione di sistemi di numerose particelle (ad es. i gas in fluidodinamica) definiamo alcune quantita'

macroscopiche – densità, pressione, temperatura – e ne seguiamo l'evoluzione con il tempo.

Immaginiamo che la materia nell'universo sia distribuita omogeneamente, come appunto in un fluido: questo fluido ideale è chiamato il **substrato cosmico**. Va da sé che il substrato cosmico è costituito da varie componenti fisiche, sia non-relativistiche come i barioni, sia relativistiche come fotoni e neutrini.

Un **osservatore fondamentale** è un sistema di riferimento solidale localmente con il substrato. Se il substrato è in moto, allora l'osservatore fondamentale sarà detto **comovente** (comoving) con il substrato. In pratica identifichiamo osservatori fondamentali con galassie, ma occorre tenere in conto che esse presentano sempre, sovrapposto al moto generale di espansione, un moto proprio indotto dalle disomogeneità locali nella distribuzione della materia gravitante.

Un **modello cosmologico** è una descrizione formale dell'universo come visto da un osservatore fondamentale.

6.2 Il Principio Cosmologico.

È evidente che, nell'era post-Copernicana, non vi sono motivi per ritenere che la nostra posizione nell'universo abbia alcunché di privilegiato (principio Copernicano). Una ulteriore precisazione di tale principio è il Principio Cosmologico², che si può enunciare in vari modi, in particolare affermando che *l'Universo visto da osservatori fondamentali appare omogeneo e isotropo*.

Per **isotropia** intendiamo che in ogni direzione lo si guardi l'universo appare essenzialmente lo stesso a tutti gli osservatori fondamentali che lo guardino ad un determinato istante di tempo cosmico.

Per **omogeneità** intendiamo che *ogni* osservatore fondamentale vede la stessa pittura generale dell'universo in funzione del solo tempo cosmico.

Ovviamente, mentre l'isotropia è direttamente verificabile, l'omogeneità può essere fondamentalmente dedotta dalla prima e dal principio Copernicano, come discusso in Sez. 5.

Una enunciazione alternativa del Principio Cosmologico è che *l'Universo appare lo stesso in tutte le direzioni a tutti gli osservatori fondamentali che si trovino ad osservare al medesimo tempo cosmico*.

² La storia dell'origine di questo fondamentale assunto per la cosmologia è molto interessante. La denominazione è stata per la prima volta formulata da Milne nel 1935, che l'ha chiamato "il principio cosmologico di Einstein". In effetti il principio era stato implicitamente assunto già da Einstein nel lavoro sul primo modello d'Universo del 1917. L'interesse sta nel fatto che Einstein aveva a sua disposizione solo il dato relativo all'esistenza della nostra Galassia, una situazione quindi per nulla indicativa di un universo omogeneo e isotropo! In realtà Einstein aveva inferito questo assunto dal principio di Mach, che prevedeva che le caratteristiche d'inerzia dei corpi fossero dovute alla distribuzione di masse gravitanti su grandissima scala: se tale distribuzione fosse stata altamente asimmetrica, ne sarebbero risultate altrettante asimmetrie nelle proprietà dei moti inerziali dei corpi, in violazione dei dati osservativi e degli stessi presupposti della Relatività.

Ovviamente, da quanto visto in precedenza, il Principio vale solo su scale spaziali grandi (superiori ad un centinaio di Mpc almeno), in quanto su scale piu' piccole si manifestano deviazioni dall'omogeneita' che sono sempre piu' rilevanti man mano che si scende in scala.

La rilevanza del Principio Cosmologico consta nella sua conseguenza che, al fine di ottenere una descrizione compiuta dell'Universo, e' sufficiente una serie di misure dal nostro sistema di riferimento come osservatorio fondamentale e non sono necessarie informazioni da parte di altri osservatori fondamentali (peraltro non possibili da ottenere, ovviamente).

Un concetto implicito in tutto cio' e' quello relativo all'esistenza di un tempo cosmico universale, che denotiamo con t . E' il tempo, ad esempio misurato dal Big Bang, al quale tutti gli osservatori fondamentali che facciano misure osserverebbero le stesse proprieta' generali dell'universo. Possiamo in prima approssimazione pensare che il tempo cosmico corrisponda alla scala temporale in uno spazio-tempo quadridimensionale di tutti i sistemi di riferimento dotati di moto nullo rispetto al fluido cosmico locale. L'Universo puo' cosi' essere concepito come una varieta' spazio-temporale quadridimensionale, che ha come sezioni a tempo costante sottospazi a 3 dimensioni. La natura di questa concezione verra' progressivamente approfondita in questo capitolo.

L'importante differenza rispetto a trattazioni basate sulla Relativita' Speciale e' che in ambito cosmologico ha senso fare riferimento ad un tempo assoluto, che e' quello che accomuna tutti gli osservatori fondamentali che vedono la stessa pittura dell'Universo. E' importante sottolineare che questo non e' solo un concetto astratto, ma che esistono osservazioni che permettono di sincronizzare tutti gli osservatori fondamentali. La piu' ovvia di queste osservazioni riguarda la temperatura della radiazione cosmica di fondo nelle microonde, una componente radiativa che permea l'Universo: noi possiamo ad es. immaginare di informare altri osservatori in altri punti dello spazio-tempo con i quali noi veniamo in contatto, dicendo che noi "ci troviamo al tempo cosmico corrispondente ad una temperatura della radiazione di fondo di $T_{\text{CMB}}=2.725 \text{ K}$ ". Il tempo cosmico attuale e' indicato con t_0 .

6.3 Sistema di coordinate comoving. Fattore di scala cosmico $R(t)$.

Riprendiamo l'equazione dell'espansione isotropa $\mathbf{v} = H_0 \mathbf{d}$, dove \mathbf{v} e' la velocita' del moto di espansione di Hubble e \mathbf{d} la distanza tra due punti tra i quali io misuro tale velocita' di recessione. La relazione sottintende il fatto che il fattore H_0 , che lega la velocita' di recessione con la distanza, possa in realta' dipendere dal tempo. Generalizziamo ora dunque questa relazione. Sapendo che $\mathbf{v} = d\mathbf{d} / dt$, avremo

$$\frac{d\mathbf{d}}{dt} = H(t) \mathbf{d} \quad [6.1]$$

ad un qualunque tempo generico t . Immaginiamo ora di effettuare la posizione

$$\mathbf{d}(t) \equiv \frac{R(t)}{R_0} \mathbf{r} \quad [6.2]$$

ove $R(t)$ e' una funzione del solo tempo cosmico t e \mathbf{r} corrisponde ad un sistema di coordinate fisso nel tempo, e dove

$$R_0 \equiv R(t_0)$$

con t_0 che indica il tempo cosmico attuale. Sostituendo la [6.2] nella relazione di Hubble [6.1] si ottiene

$$\frac{dR(t)}{dt} \frac{\mathbf{r}}{R_0} = H(t) \frac{R(t)}{R_0} \mathbf{r} \quad [6.3]$$

che e' quindi verificata ove si ponga

$$H(t) = \frac{1}{R(t)} \frac{dR(t)}{dt} \quad [6.4]$$

La funzione $R(t)$ e' detta **fattore di scala universale**, e stabilisce come si espanda o si contragga l'universo al trascorrere del tempo. Al tempo cosmico attuale, $H(t)$ coincide con il parametro H_0 .

Il sistema di coordinate \mathbf{r} e' chiamato **sistema di coordinate comovente** (*comoving*), nel quale la posizione di osservatori fondamentali non cambia con il tempo cosmico: tali osservatori hanno per definizione moto nullo in questo sistema di riferimento. Lo si puo' immaginare come un sistema di etichette, o bandierine, associate agli osservatori fondamentali, che non cambia con t . La situazione e' rappresentata in Fig.1, immaginando che ogni galassia (oss. fondamentale) abbia la sua etichetta associata, nel mentre che il pallone, che rappresenta lo spazio cosmico sottostante, si espande con il tempo.

Pertanto, il volume in unita' fisiche (*unita' proprie*) sara' proporzionale a $R(t)^3$, quindi la densita' del substrato cosmico evolvera' nel tempo come:

$$\rho(t) \propto R(t)^{-3}, \quad \text{ossia} \quad \rho(t) = \rho_0 R_0^3 R(t)^{-3}, \quad \text{ove} \quad \rho_0 = \rho(t_0) \quad [6.5]$$

Invece le densita' (sia numeriche che di materia o energia) nel volume comovente sono costanti nel tempo per definizione.

6.4 Dalla teoria della Relativita' Speciale alla Generale.

La teoria Speciale descrive un Universo privo di gravita' partendo dal semplice presupposto di una invarianza universale della velocita' della luce in tutti i sistemi di riferimento inerziali (ovvero privi di accelerazione). I risultati fondamentali della

teoria riguardano: a) il fattore di Lorentz $\gamma=(1-v^2/c^2)^{-1/2}$ che stabilisce lo scaling spaziale, temporale e angolare tra sistemi di riferimento in moto con velocità v ; b) il principio di equivalenza massa-energia $E=mc^2$, per cui l'energia totale di una particella include un fattore legato alla massa a riposo mc^2 ed uno all'energia cinetica, con un totale dato da $E_{tot}=\gamma mc^2$; c) la metrica spazio-temporale (metrica di Minkowski), data da:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \quad [6.6]$$

ove ds^2 è la distanza tra due "eventi" generalizzata allo spazio quadridimensionale. Due eventi collegati da un segnale luminoso hanno distanza nulla $ds^2=0$.

La teoria della Relatività Speciale tratta in modo completo ed auto-consistente l'elettromagnetismo classico (non-quantistico, soddisfa ad es. le eq. di Maxwell), una serie di fenomeni che fanno riferimento ad una interazione fondamentale, l'elettromagnetismo, che si manifesta come una forza a distanza con una ben definita dipendenza quadratica dell'intensità della forza dalla distanza ($\propto d^{-2}$). Vi è in natura un'altra interazione fondamentale che mostra la stessa dipendenza quadratica dalla distanza, la forza gravitazionale. Ovviamente la presenza di un campo di gravità modifica completamente la situazione descritta dalla Relatività Speciale.

Quest'ultima è ovviamente strutturalmente inconsistente con la teoria Newtoniana della gravità, che per essere trattata consistentemente con l'impostazione della Speciale, ne richiede una modifica ed estensione, che ha dato luogo alla cosiddetta teoria della Relatività Generale.

La base della teoria Generale è il Principio di Equivalenza, che prende spunto dall'esperimento di Galilei: tutti i corpi cadono nel vuoto nello stesso modo, con la stessa velocità e accelerazione (che implica l'identità tra massa inerziale e massa gravitazionale). Il principio afferma dunque che il campo di gravità si annulla in un sistema di riferimento in caduta libera.

Quindi, il campo di gravità è assimilabile localmente ad un sistema di riferimento non inerziale in accelerazione. Viceversa in un sistema di riferimento in caduta libera la metrica locale è quella di Minkowski [6.6] e l'effetto della gravità si annulla completamente. Tuttavia questo annullamento della gravità non funziona globalmente in tutto lo spazio, ma solo localmente. Per corpi sufficientemente lontani tra loro noi verifichiamo che cadono verso il centro di gravità, il centro della Terra nel nostro caso, lungo traiettorie leggermente convergenti tra loro verso il baricentro. Ciò esprime il fatto, secondo la teoria Generale, che lo spazio (ovvero lo spazio-tempo) è incurvato dalla gravità.

Quindi in Relatività Generale avremo a che fare con spazi curvi, per i quali l'intervallo spazio-temporale infinitesimo si scriverà in modo generale:

$$ds^2 = \sum_{\lambda,\mu=0}^3 g_{\lambda\mu} dx_\lambda dx_\mu \quad [6.7]$$

ove le tre dimensioni $\lambda, \mu=1,2,3$ sono spaziali e ove la quarta $x_4=t$ costituisce la coordinata temporale. Le funzioni $g_{\lambda\mu}$ dipendono dalla posizione e dal tempo e determinano la curvatura dello spazio, che è proporzionale all'intensità del campo di gravità.

L'espressione generale [6.7] si può specializzare al caso della metrica di Minkowski della Relatività Speciale (eq.[6.6]), nel caso in cui vi sia un'assenza di sorgenti del campo gravitazionale, e per la quale

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -\frac{1}{c^2}; \quad g_{00} = 1; \quad g_{\lambda\mu} = 0 \text{ se } \lambda \neq \mu \quad [6.8]$$

Mentre in questo spazio le traiettorie dei fotoni sono linee rette, in Relatività Generale esse divengono le **linee geodetiche** curve, ossia le curve di distanza minima tra due punti in uno spazio curvo.

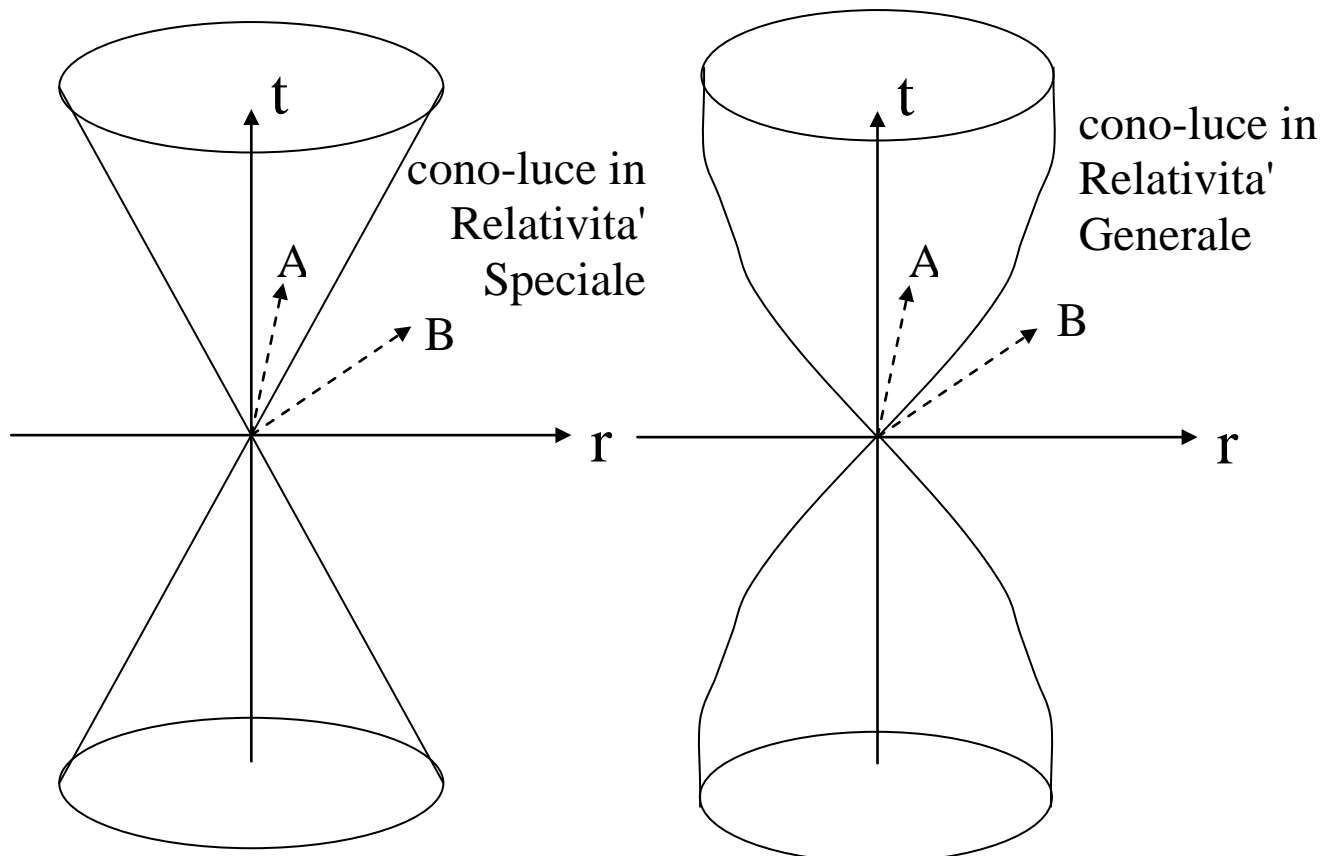


Figura 2 È qui a sinistra rappresentata la situazione descritta dalla Relatività Speciale, nella quale i raggi luminosi si propagano in modo rettilineo. In relazione al cono-luce ivi riportato, si distinguono eventi di tipo-tempo come A (rispetto all'origine), e di tipo-spazio come B. A è un evento legato causalmente all'origine O ($ds^2 > 0$); B un evento non legato causalmente a O ($ds^2 < 0$). In Relatività Generale si applica una situazione identica, salvo che il cono-luce è incurvato dalla gravità e le geodetiche stesse sono incurvate (figura a destra).

In conclusione, abbiamo presentato il punto di vista iniziale corretto per la costruzione di modelli d'Universo, e per studiarne la storia evolutiva. Questo punto di partenza si basa su due presupposti fondamentali, ovvero l'assunzione formulata nel Principio Cosmologico riguardante le caratteristiche generali di omogeneità e isotropia dell'universo, e il fatto che esso sia in uno stato di espansione uniforme. Il fatto poi che l'Universo contenga una enorme quantità di materia gravitante e radiazione implica che una sua descrizione completa può avvenire solo nell'ambito della teoria della Relatività Generale, a tutt'oggi la teoria più corretta e consistente della gravità. Il Principio Cosmologico fornisce la possibilità di semplificare in modo straordinario la descrizione fisico-matematica dell'Universo, che altrimenti sarebbe impraticabile. In questo modo la descrizione di una realtà così complessa come l'Universo diviene possibile.

6.5 Spazi curvi isotropi.

Teorie geometriche riguardanti spazi curvi, che hanno pertanto superato l'ambito descritto dalla geometria Euclidea, sono state sviluppate durante il XIX secolo. Il principale protagonista di questa elaborazione possiamo dire sia stato Carl Frederick Gauss (Germania, 1777-1855), uno dei maggiori matematici dell'era moderna. La relazione fondamentale tra gravità e curvatura spaziale è stata ottenuta da Einstein con la sua teoria Generale, che ha combinato la Relatività Speciale con la gravità attraverso il formalismo di Gauss e Riemann degli spazi curvi e il calcolo tensoriale. La teoria che ne è conseguita realizza quindi una straordinaria sintesi, la cui validità è stata verificata durante un secolo di esperimenti ed osservazioni, e costituisce il riferimento fisico-matematico fondamentale ed insuperato per la comprensione della gravità.

Sottolineiamo, quindi, che una rappresentazione completa ed auto-consistente della struttura generale dell'Universo è possibile solo nell'ambito della teoria della Relatività Generale³. Vedremo più avanti che alcuni aspetti importanti di questa rappresentazione non sono trattabili nell'ambito della teoria Newtoniana (la curvatura dello spazio-tempo, la costante cosmologica, le condizioni al contorno dei modelli d'Universo, ecc.). Lo stesso Einstein, solo un anno dopo aver pubblicato la teoria Generale, nel 1917 presentò un lavoro che realizzava un modello formalmente corretto d'Universo (pur sbagliato in quanto non considerava il fenomeno dell'espansione).

Purtroppo, la teoria completa è molto laboriosa matematicamente, anche se è molto semplice per quanto riguarda la sua base concettuale (accennata precedentemente in questa Sezione). In quanto segue mostreremo, però, che molti risultati riguardanti la

³ Per uno studio approfondito della teoria della Relatività Generale rimandiamo necessariamente alla Laurea Magistrale in Astronomia.

struttura fisica e geometrica dell'Universo, ed anche alcuni aspetti fondamentali della sua dinamica nella Sez. 7, possono essere ottenuti senza fare ricorso ai dettagli matematici di tale teoria, in particolare quelli riguardanti la trattazione tensoriale 4D completa e generale delle equazioni fondamentali della Relativita'.

Per cominciare, in questo capitolo tratteremo la questione di come rappresentare la struttura geometrica dell'Universo, lasciando a capitoli successivi il problema di trattare la sua dinamica. Per questo, partiamo dalla caratteristica fondamentale che e' stata espressa nel Principio Cosmologico: vogliamo realizzare una rappresentazione formale di questa situazione, ovvero ottenere una espressione per il tensore $g_{\lambda\mu}$ in [6.7] che la rappresenti e realizzi. Sottolineiamo come, nella trattazione che segue, non viene utilizzata in nessun modo una teoria della gravitazione, quale potrebbe essere la Relativita' Generale, ma puramente le condizioni di simmetria imposte dal Principio Cosmologico. I risultati che otterremo sulla geometria saranno quindi molto generali e varranno indipendentemente dalla teoria specifica della gravita' che sia adottata.

Iniziamo a considerare un caso semplificato, ovvero uno spazio bidimensionale curvo, che possa rappresentare un sottospazio di tipo "spazio" della varieta' quadridimensionale che rappresenta l'Universo su grande scala. Il caso piu' semplice ed intuitivo di un tale sottospazio a 2D e' rappresentato dalla superficie di un sfera, uno spazio, come vedremo, a curvatura positiva (Fig.3). Dunque useremo questa superficie come analogia del caso piu' generale 3D.

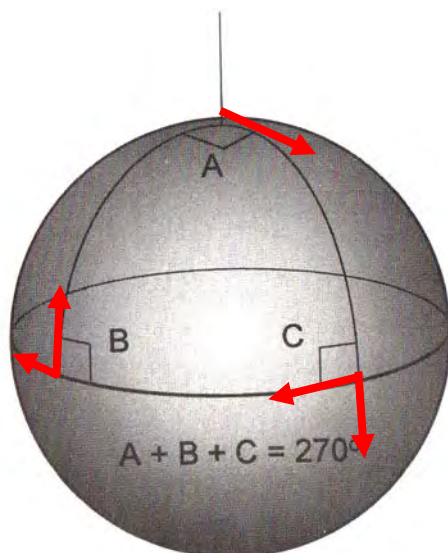


Figura 3 Rappresentazione della superficie di una sfera come spazio curvo a 2 dimensioni (2D). I 3 segmenti AB, AC, BC sulla superficie rappresentano geodetiche, ovvero curve di lunghezza minima tra questi punti. Il triangolo ABC disegnato sulla superficie ha una somma di angoli interni pari a 270 gradi, trattandosi di un triangolo massimo posto entro uno spazio curvo.

Occorre elaborare una procedura tramite la quale definire (misurare) la quantita' fondamentale che definisce questo spazio omogeneo, che e' la sua curvatura (teniamo in mente che tale curvatura sara' alla fine proporzionale al campo di gravita' medio che opera nello spazio). Una tale procedura, gia' molto tempo fa individuata da Gauss

⁴, consiste ad esempio nell'effettuare il *trasposto parallelo* di un vettore all'interno di questo spazio, ad esempio allo scopo di misurare la somma degli angoli interni di un triangolo o un quadrilatero posti entro questo spazio curvo. La procedura formale completa di trasporto parallelo in uno spazio curvo a qualunque dimensione si basa sull'uso dei *vettori di Killing*.

Limitiamoci qui, invece, ad un approccio semplificato, ma pure molto efficace per mostrare le basi logiche del problema ⁵. Operiamo il trasporto parallelo sul contorno di un triangolo "massimo" tipo quello in Fig. 3, facendo ruotare ogni volta il vettore indicato nel punto A in modo tale da riportarlo parallelo alla direzione iniziale.

Facendo viaggiare il vettore da A a C parallelamente alla superficie della sfera, nel punto C dovremo effettuare una rotazione di 90° per riportarlo alla direzione iniziale, così nei punti B e infine A: la rotazione complessiva sarà quindi di 270°, anziché i 180° di un triangolo piano. Supponiamo ora che l'angolo in A, invece che 90°, sia un angolo θ : allora si vede immediatamente che la rotazione complessiva non sarà 270°, ma $180^\circ + \theta$. Ora consideriamo la dipendenza di proporzionalità che c'è tra l'angolo di rotazione (o la somma degli angoli interni del triangolo) dall'area racchiusa dal triangolo, che è: $A = \theta R_c^2$. Se $\theta = 0$, $A = 0$ e la somma degli angoli interni è 180°, se $\theta = 90^\circ$, $A = \pi R_c^2$ e la somma 270°. Possiamo così individuare la regola generale di proporzionalità tra area racchiusa e differenziale dell'angolo conseguente al trasporto parallelo (o della somma degli angoli interni) rispetto al caso di uno spazio piatto:

$$(\text{somma angoli interni} - 180^\circ) \propto (\text{area del triangolo}). \quad [6.9.0]$$

Ovviamente la costante di proporzionalità in questa relazione, stabilendo l'angolo di deviazione dal caso piatto in funzione dell'area della figura, dipenderà sostanzialmente dal grado di curvatura dello spazio.

Vediamo ora una generalizzazione di questo risultato al caso di uno spazio curvo generico (pur sempre in una semplificazione bidimensionale che facilita la rappresentazione), considerando un quadrilatero ABCD posto entro uno spazio curvo (Fig.4a). Il quadrilatero è costruito con due lati che sono segmenti di due semirette geodetiche che si dipartono da una comune origine O . Nota che in questo caso tali geodetiche si ravvicinano tra loro a grande distanza (curvatura positiva), ma analogo è il caso di curvatura negativa con curve che si allontanano progressivamente. Data la generalità della situazione, definiamo una funzione arbitraria del raggio vettore r , $\xi(r)$, che stabilisca come scalano le distanze AB o CD all'aumentare di r . $\xi(r)$ rappresenta l'andamento con la distanza radiale r della dimensione trasversale propria, date le dimensioni angolari $d\theta$.

⁴ Istruttivo ricordare che lo stesso Gauss ha applicato questi concetti nel tentativo di determinare la curvatura dello spazio tramite il calcolo degli angoli interni di un triangolo definito da tre picchi nelle montagne del Harz, nel centro della Germania. Ovviamente questo esperimento ha prodotto risultato nullo (somma degli angoli interni = 180 gradi) sia a causa delle dimensioni ridotte del triangolo (alcuni Km), sia per la curvatura trascurabile indotta dal moderato campo di gravità terrestre.

⁵ Questa dimostrazione è presa da M. Longair, Galaxy Formation, ma è stata originariamente proposta da Peter Scheuer.

Operiamo quindi il trasporto parallelo del vettore che sta lungo r nel punto A originariamente ortogonale ad AB, lungo il quadrilatero, operando al solito le rotazioni per riportarlo ortogonale al lato. Nel punto B la rotazione per portarlo ortogonale a BC sarà semplicemente di un angolo pari a $90^\circ - \beta$, ove β sarà dato da come cambia la distanza ξ con r : $\beta = d\xi/dr$. In C la rotazione sarà di un angolo $90^\circ + \beta + d\beta$, ove $d\beta$ stabilisce quanto cambia β aumentando la coordinata radiale di dr : $d\beta = d^2\xi/dr^2 \times dr$. Infine spostando il vettore in D e infine in A avremo, per costruzione, due ulteriori rotazioni di 90° . Complessivamente la rotazione totale del vettore sarà stata pari alla somma degli angoli interni della figura in uno spazio piatto (nel caso pari a 360°) sommata algebricamente alla quantità angolare $-\beta + \beta + d\beta = d\beta = d^2\xi/dr^2 \times dr$. Questa differenza $d\beta$ rispetto al caso piatto stabilisce il grado di curvatura dello spazio. Tale risultato è alquanto intuitivo se si consideri che solo se la derivata seconda di $\xi(r)$ è diversa da zero lo spazio è curvo (se $d^2\xi/dr^2 = 0$ significa che le semicurve in Fig. 4 sono in realtà semirette e lo spazio è piatto).

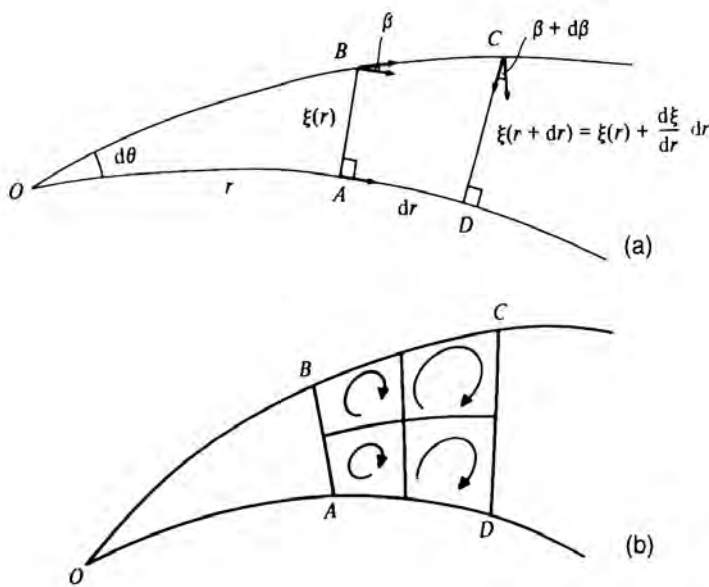


Figura 4

(a) Rappresentazione del trasporto parallelo in uno spazio qualunque. Si noti che gli angoli in A e in B sono di 90° .

(b) Effetto della dipendenza dall'area racchiusa nel definire la somma degli angoli interni della figura, e quindi la curvatura stessa dello spazio: l'angolo di rotazione differenziale $d\beta$ è proporzionale all'area della figura e si annulla quando l'area è infinitesima.

Occorre a questo punto sfruttare il concetto che il grado di curvatura sia proporzionale all'area racchiusa dalla figura (vedi Fig.4b), tramite una costante che, per quanto detto a proposito della relazione [6.9.0], definirà il grado di curvatura dello spazio. L'area del quadrilatero nel nostro caso è: $dA = \xi(r)dr$. Potremo così stabilire la seguente relazione:

$$d\beta = \left(\frac{d^2\xi}{dr^2} \right) dr = -k\xi dr \quad \text{ovvero} \quad \left(\frac{d^2\xi}{dr^2} \right) = -k\xi \quad [6.9.1]$$

ove k e' una costante generica di proporzionalita', presa con segno meno per comodita'. Il segno meno stabilisce il fatto che, se il differenziale $d\beta$ e' negativo, lo spazio e' a curvatura sferica (somma degli angoli interni $>360^\circ$) e la costante $k>0$; viceversa nel caso di $d\beta$ positivo, che implica costante di curvatura negativa e derivata seconda negativa. La [6.9.1] rappresenta una condizione sull'andamento di $\xi(r)$ in funzione di r , che risulta cosi' dipendere dal solo parametro k .

Nel caso $k>0$, la [6.9.1] e' una ovvia equazione di un moto armonico, che ha come soluzione

$$\xi(r) = \xi_0 \sin(k^{1/2}r)$$

in cui la costante ξ_0 si trova facilmente considerando l'espressione limite nel caso Euclideo, che corrisponde ad aree del quadrilatero molto piccole, ovvero r piccolo: avendo posto $\theta = \xi(r)/r$, avremo $\xi(r) = \theta r \sim \xi_0 k^{1/2} r$, che fornisce $\xi_0 = \theta/k^{1/2}$.

Cosi' si ottiene

- $$\xi(r) = \frac{\theta}{k^{1/2}} \sin(k^{1/2}r) \quad [6.9]$$

se k e' definito positivo. Se invece il parametro di curvatura k e' negativo, occorre risolvere l'eq. [6.9.1] in termini del suo opposto $k' = -k$ utilizzando, anziche' le funzioni trigonometriche, quelle iperboliche ⁶:

- $$\xi(r) = \frac{\theta}{k^{1/2}} \sinh(k^{1/2}r) \quad [6.10]$$

Si puo' facilmente verificare da [6A.1] la validita' di questa soluzione.

Nel caso di spazio piatto, tutto si riduce all'andamento Euclideo

- $$\xi(r) = \theta r. \quad [6.10b]$$

Il risultato ottenuto e' estremamente generale e include tutti i possibili spazi a curvatura positiva, nulla o negativa, che avranno quindi la costante k positiva, nulla o negativa. Tale quantita' sara' costante nello spazio se e solo se lo spazio e' omogeneo e isotropo (come abbiamo dimostrato essere lo spazio universale reale almeno su grandi scale). Diversamente k dipendera' dalla posizione.⁷ La stessa costante, in

⁶ Per un pro-memoria riguardo al significato delle funzioni iperboliche, si veda Appendice [6A].

⁷ Ci si puo' chiedere a questo punto riguardo all'effetto delle forti disomogeneita' nella distribuzione di materia che la nostra analisi nella Sez. precedente ha evidenziato verificarsi sulle piccole scale (< 100 Mpc). Ci si puo' porre il problema di capire se e come queste modificano localmente il parametro di curvatura o il raggio R_c . In realta' l'effetto risulta modesto ovunque tranne in prossimita' delle maggiori condensazioni gravitazionali, in particolare degli ammassi ricchi di galassie. Uno degli effetti della modifica della curvatura locale va sotto il nome di *lensing gravitazionale* e verra' trattato in corsi successivi. Altre strutture non influiscono significativamente sulla curvatura, dal momento che la quantita' di materia coinvolta (in eccesso, o in difetto come ad es. nei grandi vuoti) non e' tale da produrre effetti rilevanti. In ogni caso le minime modifiche della curvatura spaziale indotte dalla struttura sono oggetto di studio con il nome di *lensing debole* (*weak-lensing*).

riferimento all'analogia con quanto avviene alla superficie della sfera, sarà legata al raggio di curvatura dello spazio dalla relazione (vedi Figura 6 sotto):

$$R_c = \frac{1}{k^{1/2}} \quad [6.11]$$

con R_c che è positivo, infinito o immaginario nei tre casi, rispettivamente. I tre casi di spazio corrispondenti sono illustrati nella Figura 5: a parte il caso ovvio piatto-Euclideo, un modello a curvatura positiva è rappresentato molto bene dall'analogia con quanto accade alla superficie di una sfera, mentre il caso a curvatura negativa ha una analogia con quanto accade alla superficie di una sella, nella quale le linee geodetiche che si dipartono da un punto tendono a progressivamente divaricarsi. Si parla rispettivamente di spazi sferici, piatti e iperbolici. In quest'ultimo caso la somma degli angoli interni di un triangolo sulla superficie è $< 180^\circ$, mentre è $> 180^\circ$ nel caso di un modello sferico a curvatura positiva.

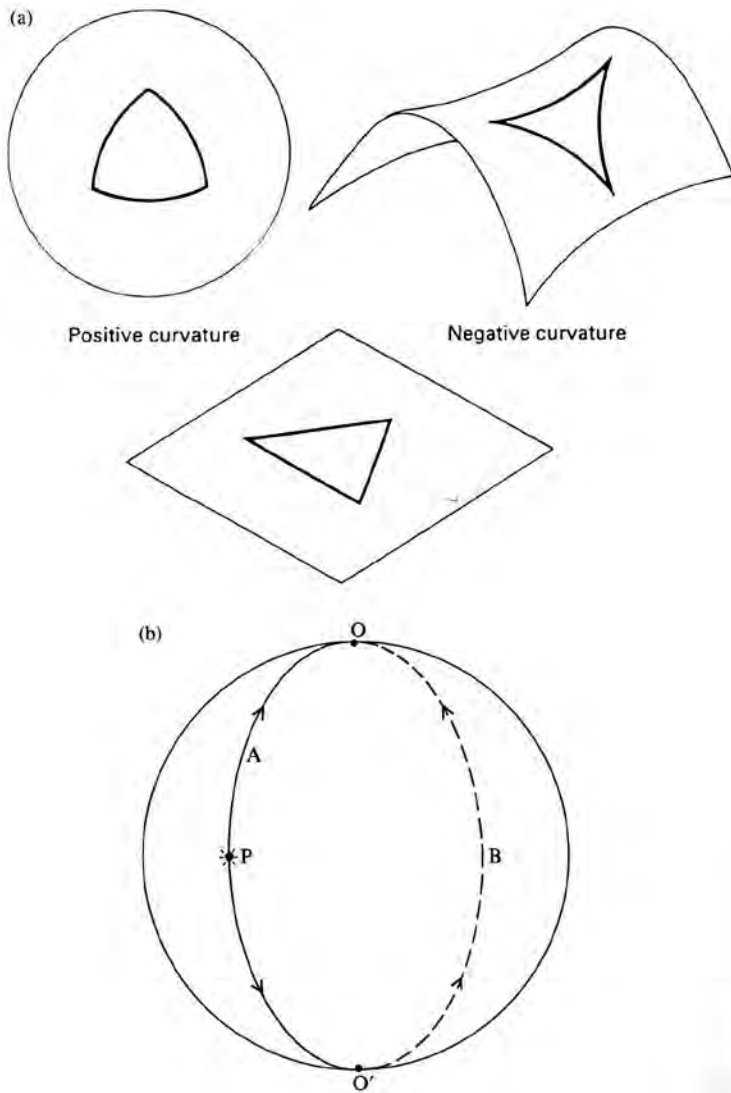


Figura 5

(a) Rappresentazione dei tre tipi diversi di curvatura per spazi omogenei, con $k > 0$, $k < 0$, e $k = 0$ in senso orario.

(b) Rappresentazione di uno spazio curvo a curvatura positiva, finito ma illimitato (un raggio di luce può viaggiare per un tempo infinito e compiere una serie di cicli ritornando a tempi diversi nella stessa posizione).

Una volta chiarito il significato del parametro di curvatura k ovvero R_c , il nostro successivo passo sarà di definire in questo spazio la metrica, che corrisponde a definire la distanza generalizzata in termini di un tensore metrico. Con riferimento alla Fig. 6, il sistema di coordinate naturale in questo spazio isotropo a 2 dimensioni è ancora, ad esempio, quanto rappresentato dalla superficie sferica illustrato nella figura, la cui origine sta nel polo, con coordinata radiale $\rho = \theta R_c$, cosicché l'elemento metrico si scrive

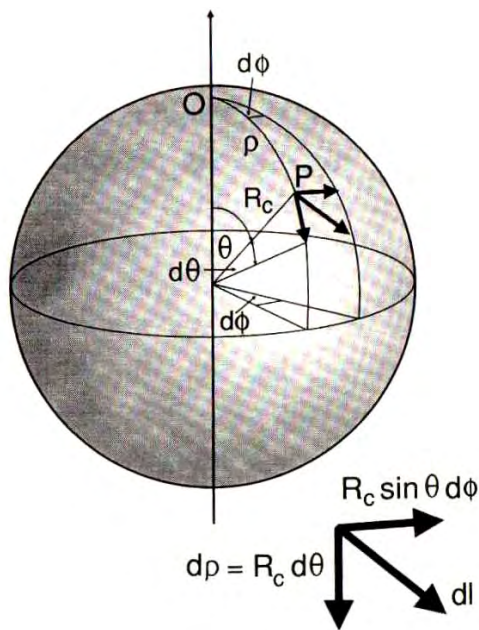


Figura 6

Superficie di una sfera come più semplice caso di uno spazio 2D a curvatura positiva. R_c è il raggio della sfera, e quindi rappresenta la curvatura stessa dello spazio. È indicato un sistema di coordinate sferiche sulla superficie.

$$dl^2 = d\rho^2 + R_c^2 \sin^2 \left(\frac{\rho}{R_c} \right) d\phi^2 \quad [6.12]$$

In questo caso $R_c > 0$. Analogamente a quanto visto sopra, per $R_c = \infty$ ($k=0$) avremo $dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2$, e se R_c è immaginario $dl^2 = d\rho^2 + R_c^2 \sinh^2 \left(\rho/R_c \right) d\phi^2$.

Per motivi che vedremo, è più frequente e naturale usare la seguente forma alternativa per la misura di distanza radiale sulla superficie: con riferimento alla [6.12], si potrà definire

$$x = R_c \sin(\rho / R_c)$$

che differenziata da'

$$dx = R_c \cos(\rho / R_c) \frac{1}{R_c} d\rho = \cos\left(\frac{\rho}{R_c}\right) d\rho$$

$$dx^2 = \left[1 - \sin^2\left(\frac{\rho}{R_c}\right)\right] d\rho^2 \quad \text{e infine} \quad d\rho^2 = \frac{dx^2}{1 - \frac{x^2}{R_c^2}} = \frac{dx^2}{1 - kx^2} \quad [6.13]$$

con costante di curvatura k data dalla [6.11]. Da notare che la quantità $dl = x d\phi$ che abbiamo definito corrispondere ad una distanza propria ortogonale alla coordinata radiale ρ , va sotto il nome di distanza di diametro angolare (discuteremo più avanti meglio la cosa). Sia la distanza radiale ρ che la distanza radiale x sono comunemente usate nella rappresentazione metrica; dalla [6.13], se usiamo x l'incremento di distanza geodetica sarà $d\rho = dx / (1 - kx^2)^{1/2}$.

Generalizziamo ora al nostro caso reale tri-dimensionale, scrivendo alternativamente

$$dl^2 = d\rho^2 + R_c^2 \sin^2\left(\frac{\rho}{R_c}\right) [d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2] \quad \text{oppure} \quad [6.14]$$

$$dl^2 = \frac{dx^2}{1 - kx^2} + x^2 [d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2] \quad [6.15]$$

È evidente dal confronto della [6.14] con la [6.15] il vantaggio di quest'ultima, che consiste nel trattare la curvatura generalizzata dello spazio-tempo con un solo parametro reale, k , anziché con un numero R_c , che nel caso più semplice piatto e infinito ($R_c \rightarrow \infty$), oppure addirittura immaginario nel caso di uno spazio iperbolico a curvatura negativa.

Interessante notare infine che, nelle rappresentazioni [6.14] e [6.15], al crescere del tempo e del fattore di scala $R(t)$ il termine di curvatura k diventa sempre più piccolo e il raggio di curvatura $R_c(t)$ sempre più grande.

6.6 La metrica di Robertson-Walker.

Le relazioni [6.14] e [6.15] forniscono la parte spaziale della metrica per uno spazio 3D omogeneo e isotropo. Per generalizzare al caso di uno spazio-tempo quadridimensionale, occorrerà aggiungere la componente temporale in modo da ottenere l'elemento di distanza generalizzato $ds^2 = dt^2 - dl^2/c^2$, ottenendo ad esempio

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} \left\{ d\rho^2 + R_c^2 \sin^2\left(\frac{\rho}{R_c}\right) [d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2] \right\} \quad [6.16.0]$$

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} \left[\frac{dx^2}{1-kx^2} + x^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad [6.16]$$

ove le coordinate ρ, x, θ, ϕ sono quantita' proprie, non comoventi. Il problema con questa relazione e' che, a causa della velocita' finita di propagazione della luce, noi vediamo un qualunque oggetto ad una certa distanza appartenere al nostro cono-luce passato (si veda Fig. 2), quindi non osserviamo oggetti al tempo attuale ma come erano nel passato, quando la costante di curvatura k e il raggio R_c erano diversi dagli attuali. La rel. [6.16] invece si riferisce a distanze misurate da un osservatore *non-fisico* ad una singola epoca cosmica. Da questo punto di vista le distanze definite sopra con i simboli ρ ed x non hanno un reale significato applicativo (sarebbero idealmente misurabili da una catena di osservatori fondamentali posta in sequenza lungo la coordinata radiale, che misurassero la distanza propria tra loro ad un determinato tempo cosmico - ad es. quando la radiazione di fondo ha $T=2.725$ K, e facessero la somma delle misure di ciascuno). In conclusione, anche i secondi termini spaziali in [6.16], e in particolare la costante k e il raggio R_c , dipendono dal tempo nella situazione reale, mentre noi vogliamo separare e fattorizzare per quanto possibile le dipendenze spaziali e temporali.

Nella realta', noi sappiamo bene come le distanze proprie ρ ed x variano con il tempo cosmico. Sappiamo da [6.0] e [6.2] che queste quantita' evolvono con il tempo come

$$\frac{x_1(t_2)}{x_1(t_1)} = \frac{x_2(t_2)}{x_2(t_1)} = \dots = \frac{x_n(t_2)}{x_n(t_1)} = \text{costante} = \frac{R(t_2)}{R(t_1)}$$

ovvero tramite la variazione del fattore di scala universale $R(t)$ con t . Quindi potremo scrivere per quanto riguarda le distanze radiali

$$\rho(t) = \frac{R(t)}{R_0} r \quad \text{e} \quad x(t) = \frac{R(t)}{R_0} r \quad [6.17]$$

con r coordinata radiale comoving (essenzialmente la distanza radiale calcolata al tempo cosmico attuale). Se inseriamo ora queste condizioni nelle [6.14]-[6.15] nel differenziale 3-spaziale della metrica otteniamo, per quanto riguarda il termine radiale, molto semplicemente la condizione:

$$\frac{dl(t)}{dl(t_0)} = \frac{d\rho(t)}{d\rho(t_0)} = \frac{R(t)}{R_0}; \quad d\rho^2(t) = \frac{R^2(t)}{R_0^2} d\rho^2(t_0).$$

Se ora consideriamo distanze proprie ortogonali alla linea di vista ($d\rho=d\phi=0$), otteniamo invece da [6.14] e [6.15]:

$$dl(t) = x(t)d\theta = R_c \sin\left(\frac{\rho}{R_c}\right) d\theta,$$

una relazione che ovviamente coinvolge il raggio di curvatura. Imponendo la condizione che anche i rapporti tra distanze proprie ortogonali alla linea di vista scalino pur sempre con il fattore di scala $R(t)$, otterremo la seconda condizione:

$$\frac{dl(t)}{dl(t_0)} = \frac{R(t)}{R_0} = \frac{R_c(t)}{R_c(t_0)} \frac{\sin\left(\frac{\rho}{R_c(t)}\right) d\theta}{\sin\left(\frac{r}{R_c(t_0)}\right) d\theta} \quad [6.18]$$

dove abbiamo assunto con r la distanza radiale comoving (quindi al tempo attuale). Questa equazione ha una semplice soluzione se facciamo coincidere gli argomenti delle funzioni trigonometriche, in modo da semplificarle sopra e sotto, ottenendo così una semplice regola di evoluzione del raggio di curvatura con il tempo cosmico:

$$\frac{R_c(t)}{R_c(t_0)} = \frac{R(t)}{R_0} \quad [6.19]$$

(nota che la condizione imposta dall'eguaglianza degli argomenti della funzione seno coincide con quella dell'eguaglianza dei fattori moltiplicativi nella [6.18]). Un fondamentale risultato espresso dalla [6.19] è che la costante (o il raggio) di curvatura non cambia segno con il tempo cosmico: essa rimane rispettivamente positiva, o nulla o negativa per qualunque valore del tempo cosmico. Il raggio di curvatura cambia invece il suo valore assoluto con il tempo.

In questo modo, per quanto riguarda la rappresentazione "geometrica" avremo

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} \frac{R^2(t)}{R_0^2} \left[dr^2 + R_c^2(t_0) \sin^2\left(\frac{r}{R_c(t_0)}\right) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad [6.20]$$

avendo sostituito

$$d\rho^2(t) = (R/R_0)^2 dr^2 \quad \text{e} \quad R_c^2(t) = (R/R_0)^2 R_c^2(t_0)$$

Lo *scaling* nel tempo del raggio di curvatura $R_c(t)$ tramite il fattore di scala implica un analogo *scaling* del parametro di curvatura k nella [6.11]:

$$k = 1/R_c(t)^2 \propto R(t)^{-2}.$$

Tenendo conto che la coordinata radiale propria $x \propto R$ e $R_c \propto R$, dalla [6.16] si verifica analogamente la validità dell'espressione metrica alternativa:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} \frac{R^2(t)}{R_0^2} \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad [6.21]$$

ove la coordinata radiale comoving r è stata ri-scalata in modo tale da far sì che il parametro di curvatura k assuma il valore $+1, 0, -1$ per universi rispettivamente a curvatura positiva, nulla o negativa. I tre casi vanno sotto i nomi rispettivamente di

universi sferici, piatti e iperbolici. Nota che, analogamente a $R_c(t_0)$, k non cambia segno nel tempo, per quanto visto sopra, e in realta' non cambia per nulla, in quanto le dipendenze da $r(t)$ a denominatore nella [6.16] si semplificano. Le espressioni [6.20] e [6.21] sono due formulazioni analoghe della metrica universale ottenuta per la prima volta da Robertson e Walker (d'ora in poi utilizzeremo l'acronimo RW).

Con riferimento alla [6.7] e [6.8], nell'ipotesi di omogeneita' e isotropia il tensore metrico rimane una matrice diagonale ($g_{\mu\nu}=0$ se $\mu\neq\nu$) e i suoi termini diversi da zero sono:

$$g_{00} = 1; \quad g_{11} = -\frac{R^2(t)}{c^2 R_0^2} \frac{1}{1-kr^2}; \quad g_{22} = -\frac{R^2(t)}{c^2 R_0^2} r^2; \quad g_{33} = -\frac{R^2(t)}{c^2 R_0^2} r^2 \sin^2 \theta .$$

Ricordiamo ancora una volta che la derivazione della metrica di Robertson-Walker sopra riportata si basa solo sul Principio Cosmologico (quindi sulle proprieta' di simmetria dell'Universo) e non utilizza la Relativita' Generale. E' quindi un risultato assai generale e valido anche se si verificasse che la corretta descrizione della gravitazione non e' fornita dalla Relativita' Generale, ma da un'altra teoria.

Concludiamo con un commento chiarificatore riguardante la descrizione geometrica generale dell'Universo. La domanda che fondamentalmente ci poniamo e' quale sia la relazione tra la metrica di Minkowski [6.6], [6.8] e la metrica piu' generale [6.21]. Anche dall'espressione formale di quest'ultima possiamo immediatamente evincere che la soluzione RW rappresenta il caso generale di un universo a massima simmetria spaziale (stabilita dal Principio Cosmologico), che ha come caso limite, per valori della coordinata radiale comoving r sufficientemente piccoli, la soluzione di Minkowski: infatti per r piccoli il termine di curvatura k diventa ininfluenza nella [6.21], che si riduce alla [6.8] in questo limite, salvo il termine espansivo $\propto R^2(t)$ a fattore (che pero' non influisce sulla geometria locale). Cio' sta a dire che entro un volume sufficientemente piccolo intorno ad un qualsiasi osservatore fondamentale la metrica e' essenzialmente quella della relativita' ristretta di Minkowski (salvo il termine espansivo), ovvero che la curvatura indotta dal contenuto di materia gravitante nell'Universo non si fa risentire nella descrizione metrica. L'effetto di curvatura si manifesta solo, laddove la costante k sia diversa da zero, per distanze dall'osservatore sufficientemente grandi da implicare una grande quantita' di materia gravitante che deformi lo spazio tra osservatore e sorgente. Entro volumi piccoli, tale quantita' di materia contenuta e' troppo piccola per deformare (incurvare) lo spazio-tempo. Si potra' verificare inseguito che questa condizione di piatezza fornisce una buona approssimazione se ci limitiamo a sottospazi tridimensionali 3D della varieta' spazio-temporale la cui estensione sia sufficientemente minore del raggio di Hubble, ~ 4000 Mpc. Anche le disomogeneita' nella distribuzione di materia, che abbiamo verificato sussistere su scale fino a qualche decina di Mpc, si puo' verificare che non modificano in modo significativo la metrica locale (a meno non ci si trovi in presenza

di enormi concentrazioni come in prossimità di buchi-neri o dei cores di ammassi ricchi di galassie)⁸.

Il significato fisico e il destino delle diverse soluzioni geometriche verranno discussi nelle Sezioni successive.

6.7 Proprietà geometriche dello spazio-tempo descritto dalla metrica di Robertson-Walker.

Riportiamo in sintesi alcune delle proprietà di modelli d'universo rappresentati dalla metrica di Robertson-Walker a seconda dei diversi valori che può assumere il parametro di curvatura k .

A) Caso con $k=0$. Ad un determinato istante di tempo, la sezione spaziale della RW diviene semplicemente l'usuale spazio Euclideo ($R_c(t) \rightarrow \infty$, $k=0$) con metrica

$$dl^2 = dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Il volume racchiuso da un tale universo, per ogni valore del tempo cosmico, è dato dall'integrale di dl ed è quindi infinito.

B) Caso con $k=+1$. La sezione spaziale della RW ad un certo tempo è

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

dove ovviamente r può assumere solo valori compresi tra 0 e 1, altrimenti l'elemento di distanza radiale $dr / \sqrt{1-r^2}$ andrebbe ad assumere valori immaginari. Quindi, se pure un fotone, ad es. emesso da un certo osservatore fondamentale, si muove in senso radiale rispetto all'osservatore, la sua coordinata radiale aumenterà sino ad un valore massimo, oltre il quale un successivo apparente allontanamento corrisponderà in realtà ad un avvicinamento all'osservatore quando tale movimento attraverserà gli *antipodi*: una situazione ben illustrata dall'analogia con quanto avviene alla superficie di una sfera, illustrato ad es. in Fig. 5b: al crescere di ρ oltre il massimo la distanza diminuisce. In un universo di questo tipo è possibile per un fotone, in linea di principio, navigare nello spazio-tempo ed incrociare più volte lo stesso osservatore fondamentale, il quale così raccoglierebbe più immagini dello stesso oggetto con fotoni che hanno compiuto cammini ottici molto diversi tra loro. La cosa importante da considerare è che in questo caso il dominio delle coordinate radiali comoving è limitato.

⁸ Manifestazioni di queste piccole deformazioni della metrica locale producono l'effetto di lente gravitazionale, oggetto di discussione nella Magistrale.

Si tratta quindi di un caso molto interessante di un universo che ha un volume finito e un'area superficiale finita, ma non ha un limite (situazione rappresentata in Fig. 5b).

Per verificare questo proviamo ad integrare sulla coordinata radiale $dr/\sqrt{1-r^2}$ entro i limiti imposti al raggio r . Definiamo con x il valore della coordinata radiale comoving, che si puo' ottenere come integrale di questo termine differenziale, risultando essere ⁹:

$$x = \arcsin(r).$$

La superficie di questo universo, ovvero il luogo dei punti aventi tutti la stessa coordinata radiale x rispetto ad un qualunque osservatore fondamentale e il suo volume contenuto sono immediatamente ottenibili utilizzando l'analogia della sfera. Per la superficie di questa sfera di raggio comoving x abbiamo:

$$S(x) = 4\pi \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \sin^2 x$$

che ha un massimo quando $\sin^2 x = 1$, ovvero $x = \pi/2$, e dipende dal fattore di scala: a R_{max} la superficie massima sara' $S_{max} = 4\pi(R_{max}/R_0)^2$.

Analogamente per il volume, anche il volume racchiuso da questo universo e' finito: a R_{max} il volume massimo sara' $V_{max} = 2\pi^2(R_{max}/R_0)^3$.

In questo universo finito, un raggio luminoso puo' navigare compiendo piu' cicli, passando cosi' piu' volte per uno stesso punto (uno stesso punto nel sistema comovente).

C) Caso con $k=-1$. Si tratta di un universo cosiddetto iperbolico, che ha caratteristiche molto simili a quelle di un universo piatto.

La sezione spaziale della RW diviene:

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Mentre l'integrazione dell'elemento di coordinata radiale dl da' [vedasi Appendice 6A]

$$x = \arcsin h(r)$$

con r che quindi puo' assumere qualunque valore. E' un universo formalmente infinito, quindi con una superficie totale e un volume infiniti ad ogni istante di tempo cosmico.

⁹ $x = \int_0^r dr'/\sqrt{1-r'^2} = \arcsin(r)$ si trova con posizione $r' = \sin y$, $dr' = \cos y \cdot dy$.

Solo quando avremo discusso le caratteristiche dinamiche dell'Universo, saremo nella possibilita' di associare a queste rappresentazioni matematiche un piu' preciso significato fisico.

6.8 Alcune considerazioni sui modelli geometrici di Robertson-Walker.

Quanto possiamo ritenere le rappresentazioni fisico-matematiche sopra discusse realmente descrittive dell'Universo reale? Ad esempio, i modelli di Universo con curvatura nulla o immaginaria ($k=0$, $k=-1$) implicano formalmente volumi e un'estensione spaziale infinita. Ma quanto e' verificabile questa previsione? Ovviamente si tratta, per il momento, di mere rappresentazioni matematiche della realta' fisica.

Nonostante, come vedremo, possiamo svolgere osservazioni in grado di stabilire con grande precisione queste caratteristiche geometriche, non possiamo dire nulla al momento (e verosimilmente mai) riguardo alla totalita' della struttura spaziale dell'Universo, e, particolarmente per i casi a curvatura nulla e negativa, se ad es. siano davvero illimitati e infiniti come il modello prevedrebbe. Come si e' detto piu' volte, noi abbiamo una visione dell'Universo limitata al nostro cono-luce passato. Così, pur se possiamo misurare le caratteristiche di questa parte dell'Universo, non siamo realmente in grado di vincolare la sua struttura in regioni molto lontane dal cono-luce, e dunque stabilire se in zone molto piu' (spazialmente) remote rispetto allo stesso le caratteristiche di omogeneita' e isotropia assunte siano ancor valide, o addirittura se vi possa essere un limite spaziale alla sua estensione, così come vedremo esservi un limite temporale.

APPENDICE 6A:

FUNZIONI IPERBOLICHE.

Ricordiamo qui definizioni delle funzioni iperboliche in uso in questa e nelle prossime Sezioni.

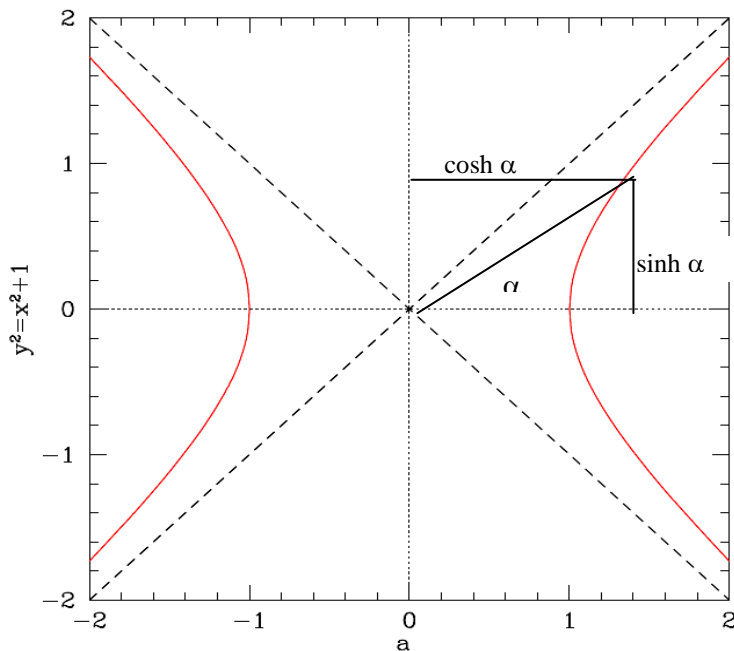


Figura A1.

La figura illustra il significato geometrico della funzione seno e coseno iperboliche. Le due funzioni fanno riferimento al ramo di destra dell'iperbole $x^2 - y^2 = 1$. Si noti la differenza con le funzioni \sin e \cos , che fanno invece riferimento alle coordinate dei punti su un cerchio centrato nell'origine.

Il seno iperbolico e' definito come

$$\sinh(a) = (e^a - e^{-a}) / 2, \quad [5A.1]$$

mentre

$$\cosh(a) = (e^a + e^{-a}) / 2 \quad [5A.2]$$

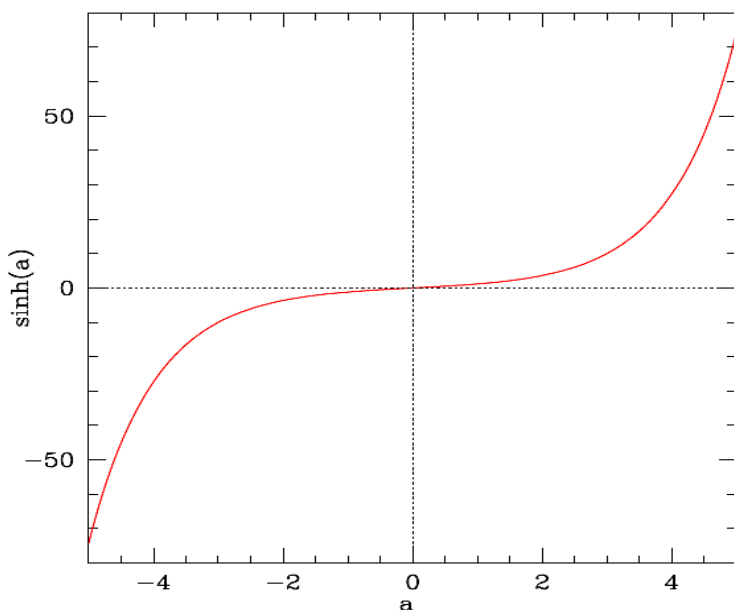


Figura A2.

La figura illustra l'andamento della funzione seno iperbolico $\sinh(a)$. Da [5A.1] e' chiaro che la funzione e' completamente anti-simmetrica sull'argomento a , e l'argomento puo' assumere valori tra $-\infty$ e $+\infty$, con la funzione che diverge esponenzialmente ai due limiti.

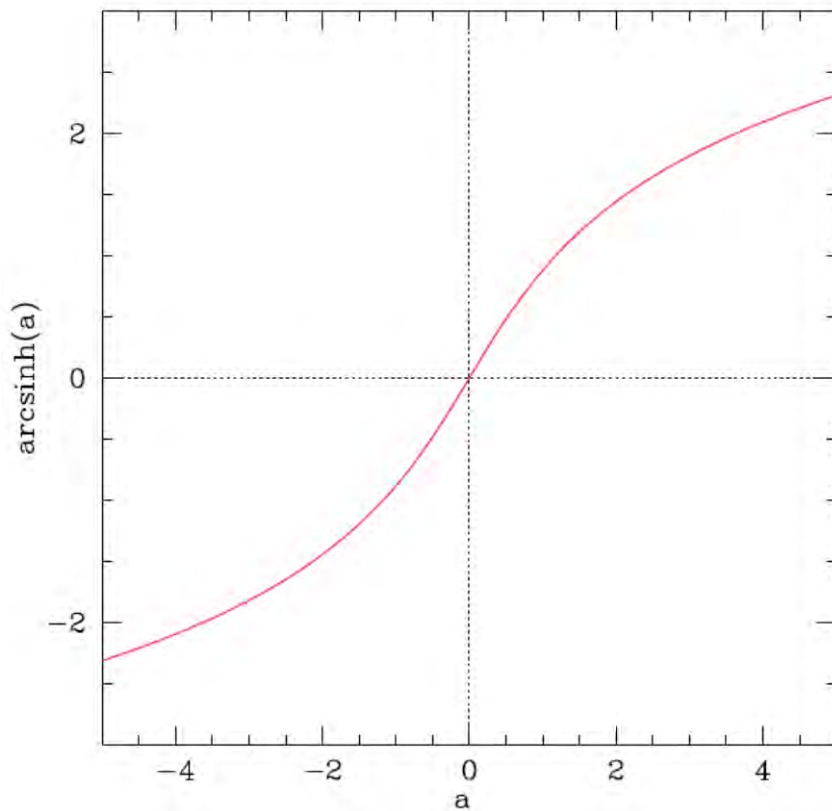


Figura A3.

La figura illustra la funzione inversa arcoseno iperbolico, $\text{arcsinh}(a)$.

Rappresentazioni delle funzioni inverse:

$$\text{arcsinh}(a) = \ln(a + \sqrt{a^2 + 1}) \quad [5A.3]$$

$$\text{arcosh}(a) = \ln(a + \sqrt{a^2 - 1})$$

Derivate:

$$\frac{d}{da} \text{arcsinh}(a) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \quad [5A.4]$$

$$\frac{d}{da} \text{arcosh}(a) = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}$$

7. MODELLI DINAMICI STANDARD.

La metrica di Robertson-Walker che abbiamo ricavato nella Sezione 6, per come e' stata ottenuta, ovvero solo sulla base di considerazioni geometriche e di simmetria dell'Universo, fornisce solo una rappresentazione generale della metrica universale, ma non dice come essa evolva nel tempo, ossia come evolva il fattore di scala $R(t)$ e non stabilisce se l'Universo sia chiuso, piatto o aperto ($k=1,0,-1$).

Per ottenere queste cruciali informazioni occorre impostare e risolvere condizioni ed equazioni dinamiche sull'universo. Per raggiungere questo risultato sono possibili varie strade: possiamo, a livello euristico, fare ricorso ad un approccio semplificato che utilizza essenzialmente una trattazione Newtoniana, oppure in alternativa uno piu' completo e auto-consistente che si basa sulla trattazione general-relativistica della gravita' ed utilizza le cosiddette *equazioni di campo* della Relativita' di Einstein. In questa prima parte della Sezione descriveremo una serie di risultati fondamentali ottenuti nell'approccio semplificato, e dedicheremo successivi capitoli alla trattazione piu' completa. Anticipiamo che la trattazione dinamica in questa Sez. considerera' essenzialmente la situazione dell'Universo locale, che, come sappiamo da Sez. 3.5, e' dominato energeticamente dalla materia gravitante. Situazioni dinamiche diverse, quali quelle verificatesi in remote epoche passate, verranno discusse nelle Sezioni successive (Sez. 11 in particolare).

7.1 Trattazione Newtoniana.

Consideriamo un qualunque osservatore fondamentale in un generico punto-evento dello spazio-tempo, che chiamiamo O. Consideriamo una shell di particelle-eventi ad una distanza comoving \mathbf{r} da O. Tale shell si allontanera' da O con velocita' $\dot{R}(t)\mathbf{r} / R_0$ e con accelerazione $\ddot{R}(t)\mathbf{r} / R_0$.

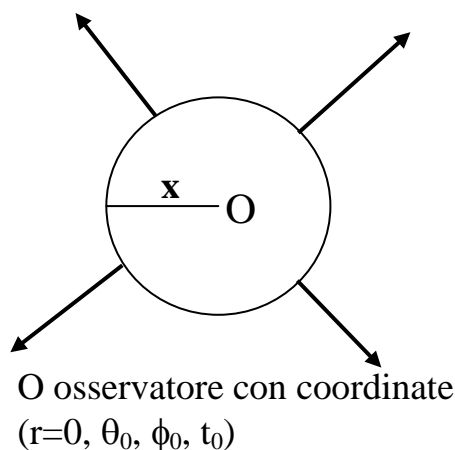


Figura 1 Schema di una trattazione Newtoniana della dinamica cosmica. Shell di particelle a distanza propria \mathbf{x} dall'osservatore O.

Nella teoria Newtoniana della gravitazione sappiamo che, per il teorema di Gauss, la forza che agisce su ogni particella della shell dipende solo dalla quantita' di materia gravitante contenuta entro la sfera. Nell'ambito della Relativita' Generale e in un universo infinito si applica un analogo teorema (di Birkhoff) che prova la validita' della stessa affermazione in condizioni piu' generali. Cosi' avremo

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{x}} = \frac{-Gm\rho V \bar{\mathbf{x}}}{x^3} = \frac{-4\pi Gm\rho \bar{\mathbf{x}}}{3}$$

Sostituendo ora il vettore di coordinate proprie $\bar{\mathbf{x}}$ con quello in coordinate comoving \mathbf{r} ed eliminando m

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{R}}\mathbf{r} / R_0 &= \frac{-4\pi G\rho(t) R(t)\mathbf{r}}{3 R_0} \\ \ddot{R}(t) &= \frac{-4\pi G\rho(t) R(t)}{3} \end{aligned} \quad [7.0]$$

Sostituendo ora $\rho(t) = \rho_0 [R(t) / R_0]^{-3}$ dalla [6.5], otteniamo la *prima equazione dinamica*

$$\ddot{R}(t) = -\frac{4\pi}{3} G\rho_0 R_0^3 R(t)^{-2} . \quad [7.1]$$

Si puo' facilmente verificare che la seguente equazione, detta di Friedmann o *seconda equazione della dinamica* cosmica, ne e' una soluzione generale:

$$\dot{R}^2(t) = \frac{8\pi}{3 R(t)} G\rho_0 R_0^3 - k c^2 \quad [7.2]$$

Infatti, se proviamo a differenziare questa seconda, abbiamo:

$$\frac{d}{dt} \dot{R}^2(t) = 2\dot{R}\ddot{R} = \frac{8\pi}{3} G\rho_0 R_0^3 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{R(t)} \right) = \frac{8\pi}{3} G\rho_0 R_0^3 \frac{-1}{R^2} \dot{R}(t)$$

e, semplificando,

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi}{3} G\rho_0 R_0^3 \frac{1}{R^2} .$$

Eq. [7.1] e' evidentemente una equazione dinamica, che pone in relazione l'accelerazione delle particelle del sistema con le forze in gioco. Eq. [7.2] e' invece una equazione di conservazione dell'energia, il membro a sinistra \dot{R}^2 corrisponde all'energia cinetica; il 1° termine a secondo membro e' l'energia del potenziale gravitazionale ($\propto GM/R$), mentre l'addendo kc^2 corrisponde ad una costante di integrazione al momento arbitraria.

Prima di tentare di ottenere soluzioni di queste equazioni, procediamo a una chiarificazione e un approfondimento del significato di queste equazioni in un ambito piu' generale. Sottolineiamo che la deduzione di carattere euristico svolta in questo capitolo non puo' in ogni caso essere considerata completamente auto-consistente, come discusso nel prossimo capitolo.

7.2 Teoria della gravitazione di Einstein. Equazioni del campo gravitazionale e dinamica cosmica.

Vi e' un fondamentale aspetto, tra altri, ancora non chiarito per quanto riguarda la nostra precedente discussione delle proprieta' dinamiche dell'Universo, e riguarda il significato delle costanti k che compaiono da una parte nella metrica RW, e dall'altra nell'equazione di Friedmann (ad es. la [7.2]). La deduzione della Friedmann nella Sez. precedente, in particolare, non ci dice nulla al proposito, se non che si tratta di una costante di integrazione, non ovviamente legata alla geometria dello spazio-tempo. Per chiarirne il significato, occorre utilizzare l'intero armamentario della Relativita' Generale come teoria completa della gravitazione. A questo e' dedicata un'ampia Appendice [7A], alla quale demandiamo gli interessati ad un eventuale approfondimento.

Ovviamente, oltre alla questione legata al significato del parametro k , vi sono piu' ancora profonde motivazioni per fare riferimento alla teoria della Relativita' Generale per una descrizione della dinamica dell'Universo. Il semplice riferimento alla dinamica Newtoniana per una situazione di questo genere non e' chiaramente del tutto auto-consistente, se consideriamo ad esempio il problema di definire le condizioni al contorno, che nell'ambito di questa non e' possibile: se la velocita' di propagazione dell'*informazione gravitazionale* e' infinita, per trattare la dinamica locale siamo nella necessita' di includere contributi da un Universo illimitato che istantaneamente si farebbero risentire in ogni punto dello stesso. Solo la Relativita', con l'assunzione fondamentale di una velocita' di propagazione finita che limita sostanzialmente le porzioni d'Universo in grado di influenzare la dinamica locale, ci permette di definire un sistema di condizioni al contorno al nostro problema dinamico che sia auto-consistente.

Ci limitiamo qui a ricordare alcuni passaggi fondamentali di questa complessa deduzione delle equazioni dinamiche dalla teoria completa della Relativita'. La relazione completa tra sorgenti del campo gravitazionale, quindi il contenuto di materia ed energia nell'Universo, e la metrica spazio-temporale stessa, e' fornita dalle *equazioni di campo* della Relativita':

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}, \quad [7.3]$$

con $R_{ik} = R'_{ilk}$ tensore di Ricci dato dalla contrazione del tensore di Riemann R'_{ijk} , e con $R = g^{ik} R_{ik}$ che e' una quantita' scalare, detto scalare di curvatura, dove la quantita' g^{ik} e' il tensore metrico gia' discusso nella Sez. 6. Vale la pena qui commentare brevemente in modo analogico il significato del sistema di equazioni [7.3], che verranno pero' discusse in modo piu' formale e completo in Appendice 7A. In analogia a quanto espresso dall'equazione di Poisson, che formalizza la relazione tra sorgenti del campo gravitazionale e campo stesso in meccanica Newtoniana, i tensori di Riemann, di Ricci e lo scalare di curvatura R che compaiono al primo membro contengono essenzialmente derivate prime e seconde del tensore metrico g^{ik} , mentre il tensore metrico stesso e' l'equivalente del potenziale gravitazionale della teoria Newtoniana. Sempre in analogia con la Poisson ¹, il secondo membro e' il termine sorgente del campo gravitazionale ed e' linearmente proporzionale alla densita' di massa-energia. La [7.3] generalizza la Poisson alla condizione di invarianza in forma (*covarianza*) dell'equazione dinamica per qualunque trasformazione di coordinate (tra sistemi in qualunque moto tra loro ed in un arbitrario campo gravitazionale).

Il tensore T_{ik} descrive il contenuto di massa-energia del fluido cosmico, ossia la massa gravitazionale a riposo, la quantita' di moto totale, energia e pressione. Assumendo che il fluido cosmico sia assimilabile ad un fluido perfetto, il tensore energia-impulso ha la forma:

$$T_{ik} = (p + \rho c^2) U_i U_k - p g_{ik} . \quad [7.4]$$

dove p e ρc^2 sono, rispettivamente, pressione e densità di energia della materia e U_i è la quadrivelocità del fluido. Sottolineiamo che alla gravita' contribuiscono non solo la massa gravitante a riposo, ma anche tutti i termini di natura energetica, quali ad esempio la pressione e ogni forma di energia.

Sostituendo la metrica RW nelle eq. di campo, come descritto in Appendice 7A, si ottengono un set di 2 equazioni (uno per la parte tempo ed uno per la parte spazio), che corrispondono alla prima e seconda equazione dinamica, oltre ad altre regole di conservazione della massa-energia, vedi ad es. eq. [6.5]. Ora, l'equazione di Friedmann rimane identicamente eguale alla [7.2], tuttavia il risultato fondamentale introdotto dalla derivazione relativistica e' che la costante k che appare nella [7.2]

$$\dot{R}^2(t) = \frac{8\pi}{3R(t)} G \rho_0 R_0^3 - k c^2 \quad [7.2]$$

risulta appunto coincidere con la costante di curvatura che appare nella metrica di RW, per la quale e' appunto usato lo stesso simbolo.

¹ Ricordiamo l'equazione: $\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho$, con ϕ potenziale gravitazionale, ρ densita' di materia. Il Laplaciano

quadro ∇^2 corrisponde in uno spazio Euclideo all'operatore differenziale $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$.

Il secondo fondamentale contributo è che la prima equazione dinamica [7.0] viene generalizzata con l'inclusione di termini di pressione come contribuenti al campo di gravità:

$$\ddot{R}(t) = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) R(t) \quad [7A.37]$$

avendo trascurato contributi dovuti a moti macroscopici (vedi App. 7A). Questa equazione costituisce un fondamentale progresso rispetto alla Newtoniana [7.0], mostrando che anche termini di pressione nel fluido cosmico contribuiscono alla dinamica. Da notare tuttavia che quest'ultimo è fortemente penalizzato dal fattore c^{-2} , cosicché solo in un fluido dominato da particelle relativistiche esso risulta importante. Per questo motivo, tale termine è da noi trascurato nei capitoli seguenti, ma sarà riconsiderato nel Cap. 11.

Un approccio alla dinamica cosmica che utilizzi la teoria completa di Einstein risulterà anche necessario in relazione a un altro aspetto della dinamica che verrà discusso nel Cap. 10 e che riguarda l'introduzione di un nuovo termine, la costante Λ (si veda eq. [7A.21-40-41]).

7.3 Alcune soluzioni delle equazioni dinamiche. Modelli cosmologici.

Procediamo esaminando brevemente alcune semplici soluzioni formali delle equazioni dinamiche [7.1-2]. Il significato fisico di queste soluzioni verrà discusso nel capitolo successivo.

A) **Il modello di Universo di Milne.** Corrisponde al caso più semplice, in cui la densità di materia è nulla $\rho=0$ e $k=-1$. È un universo di particelle di massa nulla (potremmo ad esempio dire, in prima approssimazione, un universo di fotoni). L'equazione di Friedmann [7.2] diviene

$$\dot{R}^2(t) = \frac{8\pi}{3R(t)} G \rho_0 R_0^3 - k c^2 = -k c^2 = c^2; \quad \frac{dR(t)}{dt} = \pm c$$

che ha soluzione $R(t) = \pm ct$, ove $t=0 \rightarrow R(t)=0$

L'Universo si espande o contrae in modo lineare uniforme e monotono. Se ne veda una rappresentazione grafica in Figura 2.

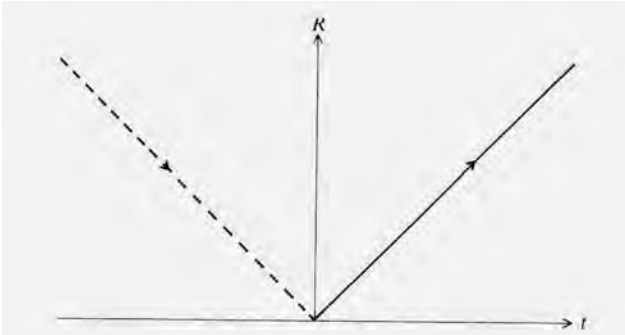


Figura 2

Fattore di scala $R(t)$ contro il tempo cosmico nel modello di Milne, nella soluzione formale a contrazione (tratteggiata) e in quella ad espansione (continua). Tempo $t=0$ coincide con l'istante del Big Bang, l'inizio dell'espansione.

B) **Il modello "piatto" di Einstein-De Sitter. Il Big Bang.** Il modello di Einstein-de Sitter corrisponde al caso di uno spazio-tempo a curvatura nulla $k=0$ e $R_c \rightarrow \infty$. Il modello e' detto "piatto" in quanto rappresenta uno spazio piatto (a curvatura nulla) in espansione. La soluzione in questo caso e'

$$\dot{R}^2(t) = \frac{8\pi}{3} G \rho_0 R_0^3 R^{-1}(t)$$

$$\frac{dR}{dt} = \text{cost } R^{-0.5}; \quad \int_0^{R(t)} R^{0.5} dR = \text{cost } t; \quad \frac{R^{1.5}}{1.5} \Big|_0^{R(t)} = \text{cost } t; \quad t \propto R^{3/2}.$$

Fissando la costante: per $t=t_0 \rightarrow R(t)=R_0(t_0)$ si ottiene la soluzione per il fattore di scala

$$R(t) = \pm R_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3}.$$

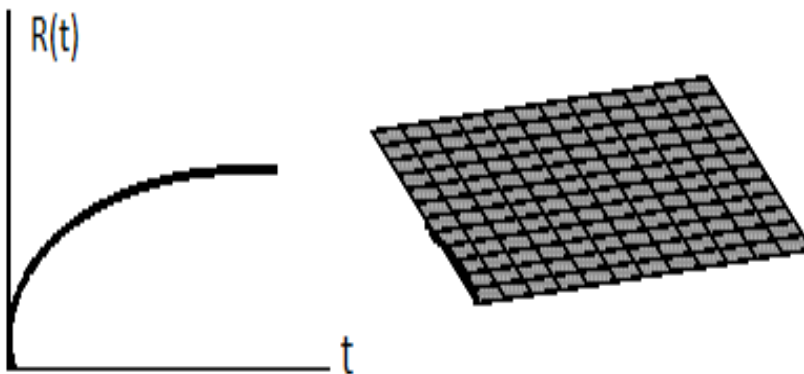


Figura 3

Modello di Einstein-deSitter. $R(t)$ ha derivata infinita a $t=0$ e nulla al limite per $t \rightarrow \infty$. Il modello e' in questa figura rappresentato da uno spazio piatto, perche' questo corrisponde formalmente al caso $k=0$.

E' illustrativo analizzare la derivata di $R(t)$: $\frac{dR}{dt} = \frac{2}{3} t^{-1/3}$, che per $t \rightarrow \infty$ tende a

zero, mentre per $t \rightarrow 0$ diverge. Consideriamo innanzitutto che cosa succede a $t \rightarrow 0$. Un aspetto rilevante di questa soluzione delle equazioni dinamiche riguarda il fatto che il fattore di scala $R(t)$ va a zero ad un determinato istante di tempo cosmico,

chiaramente indicato nella figura. Questa caratteristica e' comune in realta' a tutti i modelli discussi in questo Capitolo, incluso il modello di Milne. A questo istante di tempo cosmico, detto del **Big Bang**, si verifica che i valori di tutti i parametri dinamici e, come vedremo, termodinamici subiscono una divergenza. Ad esempio la densita' di materia-energia dall'eq. [6.5], e lo stesso tasso di espansione \dot{R} nel modello Einstein-de Sitter, come si e' visto, subiscono una divergenza a $t=0$.

L'altro aspetto interessante e' che a $t \rightarrow \infty$ il tasso di espansione dR/dt va a zero, ossia l'espansione si arresta, e l'universo tende alla condizione di un universo statico con densita' di materia nulla.

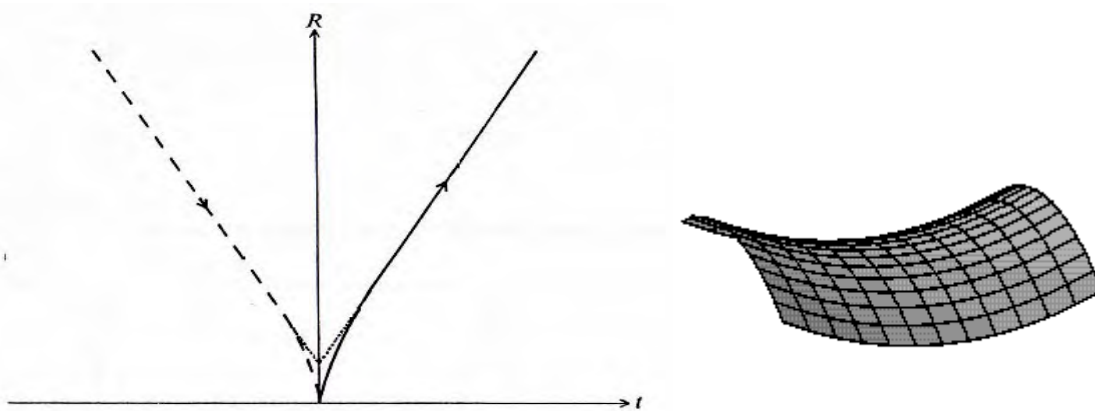


Figura 4 Modello di Universo aperto, $k=-1$. Sono mostrate le due soluzioni formali a collasso per $t < 0$ ed espansione per $t > 0$. $R(t)$ ha derivata infinita a $t=0$ (tasso di espansione infinito) e costante per $t \rightarrow \infty$. Per tempi sufficientemente avanzati tende alla soluzione di Milne con densita' di materia nulla. Il riquadro a destra mostra la rappresentazione grafica del modello geometrico, corrispondente allo spazio *a sella* gia' menzionato in Fig. 5 della Sez.6.

C) Il modello aperto. Corrisponde al caso di uno spazio-tempo con materia gravitante $\rho > 0$ e $k = -1$. In questo caso la Friedmann indica che il fattore di scala cosmico mantiene una derivata con lo stesso segno $\dot{R}^2(t) > 0$ per ogni valore di R , ovvero una espansione infinita e monotona. Quando, al crescere di t , $R(t)$ diventa molto grande, il termine kc^2 tende a dominare, cosicche' la soluzione diventa $\dot{R}(t) = \pm c$, quindi l'Universo tende progressivamente al caso dell'universo di Milne. Infatti l'espansione dell'universo fa si' che la densita' di materia tenda a zero al crescere del tempo e l'autogravita' dell'Universo ad annullarsi.

D) Il modello chiuso. Corrisponde al caso di uno spazio-tempo con materia gravitante $\rho > 0$ e $k = +1$. In questo caso la Friedmann indica che il fattore di scala cosmico a tempi sufficientemente avanzati mostra una derivata prima nulla $\dot{R}(t) = 0$ per un determinato valore di R :

$$R(t) = R_c = \frac{8\pi}{3c^2} G \rho_0 R_0^3$$

e, poiche' $\ddot{R}(t) < 0 \quad \forall R$, dopo l'arrestarsi dell'espansione si avra' una contrazione seguita alla fine da un completo collasso (*Big Crunch*).

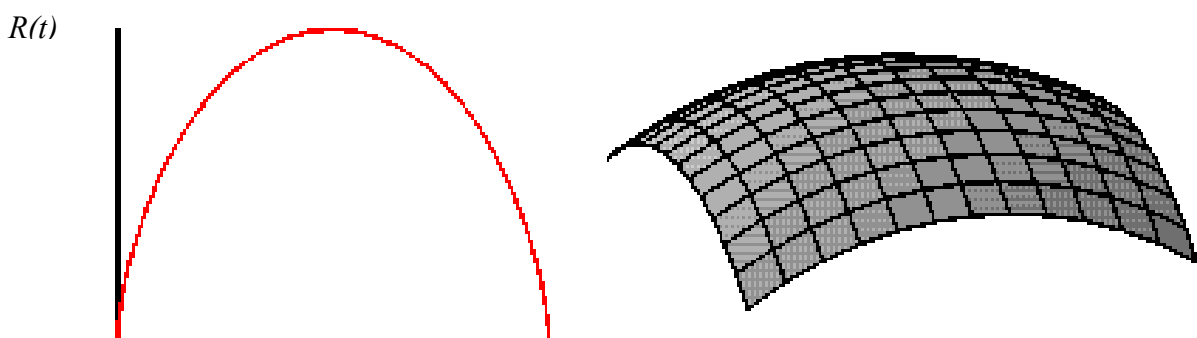


Figura 5 Modello di Universo chiuso, $k = +1$. $R(t)$ ha derivata nulla ad un determinato tempo cosmico e a tempi successivi ricollassa su se stesso. Il riquadro a destra mostra la rappresentazione grafica del modello, corrispondente allo spazio sferico gia' menzionato in Fig. 5 della Sez.6.

Da notare che qualunque sia il valore di k , il primo addendo della eq. di Friedmann tende a dominare per valori sufficientemente piccoli di $R(t)$, quindi la soluzione coincide in questo limite con il modello Einstein-deSitter. La stessa cosa si verifica anche per il modello aperto (non pero' per quello di Milne), per cui possiamo concludere che l'evoluzione del fattore di scala e' univoca per piccoli valori di R e t , ed e' quella prevista dalla soluzione Einstein-de Sitter. Quest'ultima, quindi, riveste un interesse del tutto particolare per una varieta' di motivi, non ultimo quello di costituire il caso di riferimento per epoche antiche dell'Universo.

Inevitabilita' della singolarita' iniziale. Poniamo l'accento ancora sull'importante caratteristica di tutte queste soluzioni (ricordiamo che si tratta per il momento di soluzioni formali, cui non abbiamo ancora attribuito un significato fisico particolare): i vari modelli che obbediscono alla [7.2] sono tutti modelli a *Big Bang*, ossia prevedono una singolarita' $R(t) \rightarrow 0$ ad un tempo finito nel passato. Cio' consegue dal fatto che $\ddot{R}(t) < 0$, ossia $R(t)$ e' concava verso il basso in funzione del tempo, come in Figura 6.

Nota infine che il Big Bang non e' da considerare un'esplosione entro un volume pre-esistente vuoto: l'ipotesi di omogeneita' insita nel Principio Cosmologico implica che l'intero Universo si espande e non vi e' un volume esterno vuoto entro il quale l'espansione avviene. E' lo spazio-tempo nel suo insieme che sta subendo una progressiva dilatazione.

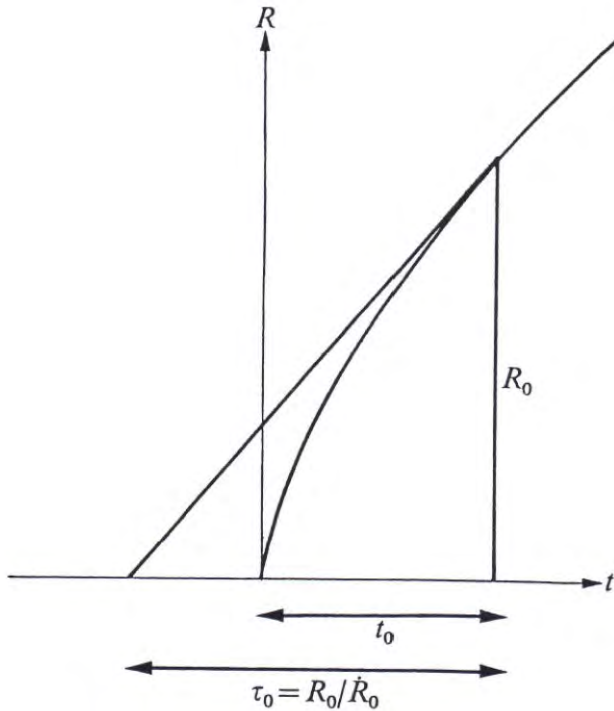


Figura 6

Illustra il motivo per cui un universo di Friedman standard che include materia gravitante ha un tempo di vita (quello compreso tra il Big Bang ed oggi) inferiore a $\tau_0 = 1/H_0$

Infatti il contenuto di materia gravitante implica una decelerazione nel ritmo di espansione e quindi una curvatura verso il basso di $R(t)$.

7.4 Parametri cosmologici.

Abbiamo in realta' gia' incontrato uno dei parametri cosmologici, che sono i parametri che descrivono lo stato e l'evoluzione dinamica dell'Universo: questo e' quello che descrive la derivata prima del fattore di scala $R(t)$:

$$H(t) \equiv \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}, \quad [7.5]$$

il parametro di Hubble, che fornisce una misura del tasso di espansione cosmico al tempo t . La costante di Hubble non e' altro che $H(t)$ al tempo cosmico attuale t_0 .

Il secondo parametro e' legato invece alla derivata temporale seconda del fattore di scala, e quindi all'accelerazione (o decelerazione) dell'espansione:

$$q(t) \equiv -\frac{R(t)\ddot{R}(t)}{\dot{R}^2(t)}. \quad [7.6]$$

Il suo valore al tempo attuale e' indicato come parametro q_0 .

Il terzo e' chiamato *parametro di densita'*, in quanto e' proporzionale alla densita' di materia presente nell'Universo:

$$\Omega(t) \equiv \frac{8\pi G \rho(t)}{3H^2(t)} \quad [7.7]$$

Inserendo queste definizioni nelle equazioni dinamiche [7.1] e [7.2], possiamo verificare il ruolo dei vari parametri nella descrizione dinamica. Dalla definizione di $q(t)$:

$$\frac{\dot{R}^2(t)}{R^2(t)} = -\frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} q^{-1}(t) = H^2(t)$$

$$\Omega(t) = \frac{8\pi G \rho(t)}{3H^2(t)} = \frac{8\pi G \rho R^2}{3\dot{R}^2(t)} = -\frac{8\pi G \rho}{3} \frac{R(t)}{\ddot{R}(t)} q(t)$$

e, sostituendo $\ddot{R}(t)$ dall'equazione dinamica [7.1] si ottiene:

$$\Omega(t) = -\frac{8\pi G \rho}{3} \frac{R q(t)}{-4\pi G \rho R / 3} = 2 q(t). \quad [7.8]$$

Quindi la densita' di materia e' legata alla decelerazione dell'espansione, cosa piuttosto intuitiva essendo il rallentamento dell'espansione dovuto al contenuto di materia gravitante nel volume medio d'Universo, e quindi all'autogravita' dell'Universo.

7.5 Relazione tra parametri cosmologici e geometria.

Una questione assai rilevante e' quella che riguarda la relazione tra parametri cosmologici, che sono i parametri fisici che descrivono lo stato dinamico dell'Universo, e le sue proprieta' geometriche. Ricordiamo ancora una volta che questa relazione e' ottenibile nell'ambito di un approccio relativistico alla gravitazione, mentre invece non e' ricavabile nell'ambito della teoria Newtoniana, nella quale la geometria e' comunque quella piatta di Euclide. La relazione tra geometria e parametri fisici si ottiene facilmente dalla Friedmann [7.2], ricordando che la costante k che cola' appare coincide con la costante di curvatura della RW per quanto visto nel Cap. 7.2:

$$k c^2 = \frac{8\pi}{3R(t)} G \rho_0 R_0^3 - \dot{R}^2(t). \text{ Ora da } H = \dot{R} / R \Rightarrow \dot{R}^2(t) = R^2 H^2(t) \quad [7.9]$$

$$k c^2 = \frac{8\pi}{3R(t)} G \rho_0 R_0^3 - R^2 H^2(t)$$

Ora dalla definizione di $\Omega(t)$:

$$\Omega(t) = \frac{8\pi G \rho(t)}{3H^2(t)} = \frac{8\pi G \rho_0}{3H^2(t)} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-3} \quad \text{si ha}$$

$$\Omega(t) H^2(t) R^2 = \frac{8\pi G \rho_0 R_0^3(t)}{3R}$$

e sostituendo nella [7.9]

$$k c^2 = \Omega(t) H^2(t) R^2 - H^2(t) R^2 = H^2(t) R^2 [\Omega(t) - 1]. \quad [7.10]$$

Da notare che, essendo la costante k invariante nel tempo per quanto discusso nel Cap. 6, si avra' parimenti $k c^2 = H_0^2 R_0^2 [\Omega_0 - 1]$. Si avra' quindi un Universo piatto se $k=0$, che implica $\Omega_0=1 \rightarrow q_0=0.5$. Se cio' si verifica ad un generico tempo cosmico, il parametro di densita' rimarra' $\Omega(t)=1$ per qualunque valore di t .

E' evidente che questa condizione e' verificata per un certo valore della densita' locale media di materia. Applicando la definizione [7.7] at tempo attuale $t=t_0$, la situazione $\Omega(t_0)=1$ corrisponde al caso in cui la densita' di materia al tempo attuale coincida con il valore

$$\rho_0 = \rho_c \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} \approx 10^{-29} \left(\frac{H_0}{70 \text{ Km / sec / Mpc}} \right)^2 \text{ in } gr / cm^3 \quad [7.11]$$

Dalla definizione

$$\Omega_0 = \frac{8\pi G \rho_0}{3H_0^2} \Rightarrow \Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_c} \quad [7.12]$$

ovvero al parametro di densita' eguale all'unita' corrisponde una densita' di materia pari alla *densita' critica* $\rho=\rho_c$, una costante $k=0$ e un modello geometrico di Universo piatto, il modello di Einstein-de Sitter. Da un punto di vista fisico, quindi, le caratteristiche geometriche dell'Universo riflettono il rapporto relativo tra i due ingredienti energetici fondamentali, il contenuto di materia gravitante come sorgente di potenziale gravitazionale, e l'energia cinetica media dovuta al moto di espansione. Nel caso queste due quantita' di energia per unita' di volume siano esattamente identiche, si ottiene una sorta di equilibrio dinamico (l'equilibrio del modello E-deS. che comporta moto nullo di espansione dopo un tempo infinito dal Big Bang), che a sua volta comporta la piatezza geometrica dell'Universo. Piatezza che ad es. si comprende bene considerando la situazione che si verifica a $t \rightarrow \infty$ nel modello EdS,

con la densita' di materia nulla ($\rho=0$) e velocita' nulla di espansione ($H=0$), ovvero un universo Euclideo. Questa piatezza deve quindi essere correttamente interpretata, non solo e non tanto come relativa ad un semplice modello d'universo statico in cui vale la geometria classica euclidea, ma ad uno in espansione in cui il bilancio tra le due energie produce un appiattimento della metrica, in un senso comprensibile ovviamente solo in un contesto general-relativistico.

7.6 Stato attuale dell'Universo. Densita' media di materia gravitante. Universo dominato dalla materia.

E' di ovvio interesse confrontare questi concetti di dinamica con dati osservativi sullo stato attuale dell'Universo nel quale ci troviamo, per comprendere quale possa essere lo stato dinamico. Si apprezzerà così ora lo sforzo che abbiamo fatto nella Sez. 3 (Cap. 3.5) nel cercare di determinare la densita' media di materia, tramite, ad esempio, le funzioni di luminosita' e di massa delle galassie.

Avevamo trovato:

$$\rho_{matter, stars} \approx 5 \cdot 10^8 M_{\odot} / Mpc^3 \approx 3.4 \cdot 10^{-29} Kg / m^3 = 3.4 \cdot 10^{-32} gr / cm^3.$$

Materia oscura in galassie (stimata per via dinamica) contribuisce per un fattore ~10 volte superiore:

$$\rho_{matter, dark} \approx 5 \cdot 10^9 M_{\odot} / Mpc^3 \approx 3.4 \cdot 10^{-28} Kg / m^3 = 3.4 \cdot 10^{-31} gr / cm^3.$$

Quindi confrontati questi valori con quello della densita' critica $\rho_c \approx 10^{-29} gr / cm^3$, la materia normale, barionica, racchiusa in galassie risulta dare un contributo di solo lo 0.5% circa a quanto necessario per chiudere l'universo, mentre la materia oscura contenuta nelle galassie stesse arriva a meno del 5%:

$$\Omega_{dark, galassie} = \frac{\rho_{dark, gal}}{\rho_c} \approx 0.034. \quad [7.13]$$

Notiamo che, per quanto riguarda la materia oscura, il valore sopra menzionato costituisce in realta' solo un limite inferiore, poiche' si limita a quanto misurato all'interno delle galassie, mentre e' verosimile che materia oscura sia presente in modo piu' diffuso nello spazio intergalattico. Da considerazioni che elaboreremo nell'ambito dei corsi della Magistrale, si evincerà che il valore piu' attendibile oggi per la quantita' media totale di materia (oscura + barionica) per unita' di volume si aggira su valori di circa

$$\Omega_{dark, tot} = \frac{\rho_{dark, tot}}{\rho_c} \approx 0.3, \quad [7.14]$$

comunque non in grado di chiudere l'Universo ($q_0 \approx 0.15$). A queste osservazioni e considerazioni preliminari, l'Universo nel quale viviamo appare dunque dominato

dalla materia gravitante (in particolare dalla *materia oscura*), anche se questa non sembra sufficiente per produrre uno spazio chiuso, e neppure uno spazio piatto di Einstein-de Sitter. I dati raccolti sinora indicano quindi un ***Universo aperto e dominato dalla materia (Matter Dominated Universe)***. Nella realta', anticipiamo che la situazione e' piu' complicata di cosi', ma su questo torneremo nel seguito (Cap. 10).

7.7 Eta' dell'Universo.

Avendo accertato che un momento assolutamente peculiare nella storia evolutiva dell'Universo si deve essere inevitabilmente verificato, un istante di singolarita' nel quale i valori dei parametri fisici come la densita' di materia-energia, ecc. assunsero valori infiniti, istante a partire dal quale si e' successivamente svolta l'intera sua storia evolutiva, e' ora interessante provare a calcolare, sulla base delle nozioni dinamiche che abbiamo sinora acquisito, quando questo istante si possa essere verificato. Chiamiamo *tempo cosmico attuale* t_0 quello che ci separa dal Big Bang. Possiamo scrivere, ovviamente,

$$t_0 = \int_0^{t_0} dt = \int_0^{R_0} \frac{dR}{\dot{R}}$$

ove la derivata del fattore di scala e' direttamente ricavabile dalla Friedmann. Ad es. si puo' usare la [7.9]

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi}{3R(t)} G \rho_0 R_0^3 - k c^2 \quad \text{con} \quad H = \frac{\dot{R}}{R}, \quad \Omega(t) = \frac{8\pi G}{3H^2(t)} \rho(t)$$

che, calcolata al tempo attuale, da'

$$\frac{8\pi G \rho_0}{3} = \Omega_0 H_0^2 \quad \text{e quindi} \quad \dot{R}^2 = \Omega_0 H_0^2 \frac{R_0^3}{R} - k c^2$$

dove la costante si ricava dalla [7.10] calcolata a $t=t_0$: $k c^2 = H_0^2 R_0^2 [\Omega_0 - 1]$, e pertanto si ottiene la seguente:

$$\dot{R}^2 = \Omega_0 H_0^2 \frac{R_0^3}{R} - R_0^2 H_0^2 (\Omega_0 - 1) = R_0^2 H_0^2 \left(\Omega_0 \frac{R_0}{R} - \Omega_0 + 1 \right), \quad [7.15]$$

una relazione fondamentale che lega il fattore di scala $R(t)$ e la sua derivata prima ai parametri cosmologici. In questo modo e' possibile calcolare il tempo t_0 :

$$\begin{aligned}
t_0 &= \int_0^{R_0} d \frac{R}{R_0} \tau_0 \left(\Omega_0 \frac{R_0}{R} - \Omega_0 + 1 \right)^{-1/2} = \\
&= \tau_0 \int_0^1 dx \left(\frac{2q_0}{x} - 2q_0 + 1 \right)^{-1/2}, \text{ con } x \equiv \frac{R}{R_0} \text{ e } \tau_0 \equiv \frac{1}{H_0} \text{ tempo di Hubble}
\end{aligned} \tag{7.16}$$

Come abbiamo discusso nella Sez. 5.4, le ultime campagne osservative con Hubble Space Telescope hanno permesso di valutare la costante H_0 con notevole precisione (Freedman, Wendy L., et al., 2001, *Final Results from the Hubble Space Telescope Key Project to Measure the Hubble Constant*, ApJ, 553, 47):

$$\begin{aligned}
H_0 &\approx 70 \pm 6 \text{ Km / sec / Mpc} \\
\text{dove } 1 \text{ Mpc} &= 3.08 \cdot 10^{24} \text{ cm} = 3.08 \cdot 10^{19} \text{ Km}.
\end{aligned} \tag{7.17}$$

Notiamo che questo valore della costante di Hubble e' oggi confermato da una varieta' di test cosmologici, e addirittura precisato riducendone l'incertezza a pochi percento (se ne parlera' nel corso Magistrale). In termini euristici, possiamo chiederci in quanto tempo questa distanza di 1 Mpc e' stata percorsa dal moto di espansione:

$$\begin{aligned}
\tau_0 &= \frac{3.08}{7} 10^{19-1} \approx 4.4 \cdot 10^{17} \text{ sec} \approx 14.6 \cdot 10^9 \text{ anni} \\
(1 \text{ anno} &\approx 3 \cdot 10^7 \text{ sec})
\end{aligned} \tag{7.18}$$

Dalla [7.16] si ottengono facili soluzioni dell'integrale nei due casi piu' semplici.

- Se $\Omega_0=1$ $q_0=0.5$ si ha $t_0 = \tau_0 \int_0^1 x^{0.5} dx = \frac{2}{3} \tau_0 \approx 10 \text{ Gyr}$ (E.-de S.)
- Se $\Omega_0=q_0=0$ si ha $t_0 = \tau_0 \approx 14.6 \text{ Gyr}$ (Milne)

L'integrale [7.16] e' comunque risolvibile analiticamente per qualunque valore di q_0 . Se $q_0 > 0.5$ possiamo procedere con un cambiamento di variabili ponendo

$$x \equiv \frac{2q_0}{2q_0 - 1} \sin^2 \vartheta, \text{ da cui } dx = \frac{2q_0}{2q_0 - 1} 2 \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta,$$

$$\text{con i limiti dati da: } x=0 \Rightarrow \vartheta=0; \quad x=1 \Rightarrow \sin \vartheta = \left(\frac{2q_0 - 1}{2q_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
t_0 &= \tau_0 \frac{2q_0}{2q_0 - 1} \int_0^{\arcsin \left(\frac{2q_0 - 1}{2q_0} \right)^{1/2}} \frac{2 \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta}{\left[\frac{2q_0 - 1}{\sin^2 \vartheta} + 1 - 2q_0 \right]^{1/2}} = \\
&= \tau_0 \frac{2q_0 \cdot 2}{(2q_0 - 1)^{3/2}} \int_0^{\arcsin \left(\frac{2q_0 - 1}{2q_0} \right)^{1/2}} \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta}{\left[\frac{1}{\sin^2 \vartheta} - 1 \right]^{1/2}} = \frac{4q_0 \tau_0}{(2q_0 - 1)^{3/2}} \int_0^{\arcsin \left(\frac{2q_0 - 1}{2q_0} \right)^{1/2}} \sin^2 \vartheta d\vartheta
\end{aligned}$$

avendo raccolto $2q_0-1$ a denominatore e considerando $\int \sin^2(ax)dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a}$, si ottiene dopo un po' di semplice calcolo:

- $t_0 = \frac{q_0 \tau_0}{(2q_0 - 1)^{3/2}} \left[\arcsin \left(\frac{2q_0 - 1}{2q_0} \right)^{1/2} - \left(\frac{(2q_0 - 1)^{1/2}}{2q_0} \right) \right] \quad \text{se } q_0 > 0.5$
- $t_0 = \frac{2\tau_0}{3} \quad \text{se } \Omega_0 = 1 \quad q_0 = 0.5 \quad [7.19]$
- $t_0 = \frac{q_0 \tau_0}{(1 - 2q_0)^{3/2}} \left[\left(\frac{1 - 2q_0}{2q_0} \right)^{1/2} - \arcsin h \left(\frac{(1 - 2q_0)^{1/2}}{2q_0} \right) \right] \quad \text{se } q_0 < 0.5$

con un risultato dunque analogo, coinvolgente le funzioni iperboliche, nel caso $q_0 < 0.5$. Il caso $\Omega_0 = 1$ e' immediatamente ottenibile integrando [7.16] con $q_0 = 0.5$.

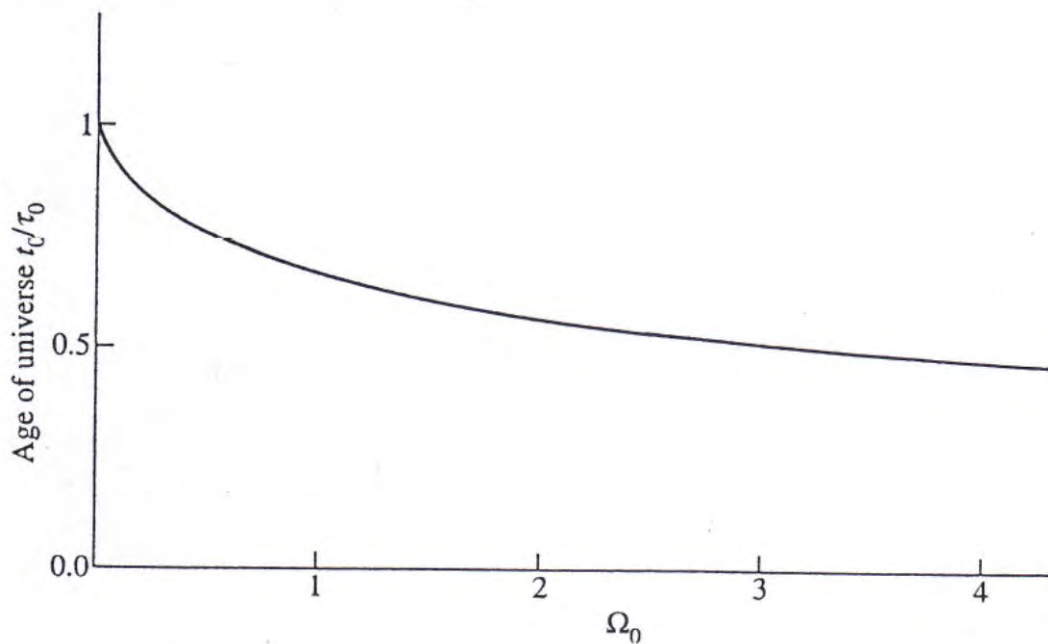


Figura 7 Dipendenza dell'eta' dell'Universo dal parametro di densita', espresso come rapporto t_0/τ_0 . All'aumentare di Ω , aumenta la curvatura verso il basso del fattore di scala $R(t)$ (Fig. 6) e quindi aumenta la correzione dovuta a questa curvatura rispetto al valore nel limite lineare τ_0 .

Gli andamenti normalizzati del tempo di Hubble t_0 sono riportati in funzione del parametro di densità in Figura 7. Un semplice calcolo mostra che, se H_0 e τ_0 valgono come in [7.17-18], si ha un tempo di Hubble $t_0 \sim 0.28 \times 15 / 0.585 \sim 11.55 \text{ Gyr}$ per un modello aperto con $\Omega_0=0.3$, e addirittura $t_0 \sim 10 \text{ Gyr}$ per un modello di Einstein de Sitter. In entrambi i casi ci troviamo nella situazione che questi tempi sono, o sicuramente più brevi dell'età degli ammassi globulari più antichi (si veda Sez. 5.6) come nel caso E. de S., oppure quasi certamente più brevi, come nel caso del modello aperto.

Si apre così un problema piuttosto fondamentale nella nostra interpretazione del cosmo: sembrano esservi sorgenti più antiche di quanto non risulti essere l'età complessiva dell'Universo. Ciò ovviamente contraddice l'assunto che nessuna sorgente o struttura cosmica (tanto meno ammassi globulari nella nostra Galassia) possa essere sopravvissuta a una eventuale fase precedente il Big Bang. Torneremo nel seguito, in particolare nella Sezione 10, a considerare altri dati e diverse soluzioni della modellistica cosmica, forse in grado di risolverci questo enigma. Per fare questo, però, dobbiamo prima dotarci di una serie di concetti e tecniche (oltre alle sofisticate tecnologie necessarie per le osservazioni) necessarie per effettuare misure quantitative riguardanti l'Universo lontano. A questo saranno dedicate le Sezioni 8 e 9.

7.8 Il modello dello Stato Stazionario.

Come interessante esercitazione sul materiale discusso nel capitolo, accenniamo prima di concludere al modello dello Stato Stazionario, un modello d'Universo che ha oggi un valore essenzialmente storico (anche se è stato recentemente ripreso nell'ambito di discussioni riguardanti modelli inflazionari dell'Universo primordiale), ma che ha avuto un ruolo importante durante la fase di definizione delle sue caratteristiche dinamiche. È stato per la prima volta proposto da T. Gold, H. Bondi (due cosmologi austriaci rifugiati in Inghilterra durante la 2^a guerra mondiale) e indipendentemente F. Hoyle nel 1948, e a lungo discusso e difeso negli anni '50 e '60 da Hoyle, Bondi, Gold, Sciamia. Si basa su una ulteriore estensione del Principio Cosmologico al cosiddetto *Principio Cosmologico Perfetto*, per il quale non solo l'Universo avrebbe dovuto apparire identico in qualunque direzione osservato da un qualunque osservatore ad un determinato tempo cosmico, ma *identico a quanto visto da qualunque osservatore fondamentale a qualunque tempo*. Ovvero il principio assume perfetta omogeneità e isotropia non solo spaziale ma anche temporale per l'Universo. È indubbiamente un postulato di grande valore "formale" e notevole attrattiva.

Per prima cosa la condizione che viene imposta è che la costante di Hubble sia realmente una costante indipendente dal tempo:

$$H = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} = \text{costante}, \text{ che ha soluzione } R(t) \propto \exp(t / \tau). \quad [7.20]$$

Una prima cosa che questo modello "cura" e' quindi l'inizio, il Big-Bang: l'andamento esponenziale [7.20] e' una curva tangente a $y=0$ per $t \rightarrow -\infty$, e che aumenta esponenzialmente su un tempo-scala τ , curva senza quindi origine nel tempo, che esclude il Big Bang.

Un'altra conseguenza del principio e' che anche la densita' di ogni componente del fluido cosmico, cosi' come ogni suo parametro termodinamico, sia costante.

Differenziando la relazione di conservazione della massa $\rho = \rho_0 (R / R_0)^{-3}$:

$$\frac{d\rho}{dt} = -3\rho \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-1} \frac{\dot{R}}{R_0} = -3\rho \frac{\dot{R}}{R} = -3\rho H \quad [7.21]$$

che deve essere nullo per il principio perfetto. Pertanto, per annullare la [7.21], occorre inserire un termine di creazione di massa-energia C che annulli il secondo membro

$$\frac{d(\rho)}{dt} = C = 3\rho / \tau \quad [7.22]$$

dove con τ abbiamo inteso l'inverso della costante di Hubble. La [7.22] stabilisce cosi' il tasso con il quale la materia deve essere continuamente creata per compensare l'espansione.

Si puo' vedere anche che la curvatura del sottospazio fisico 3D e' $\propto k/R^2$, per cui deve essere $k=0$, diversamente la curvatura varierebbe con il tempo.

Con la soluzione della [7.20-21] per il fattore di scala, $R(t) \propto \exp(t/\tau)$, la metrica spazio-temporale risulterebbe cosi' essere:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{\exp(2t / \tau)}{c^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad [7.23]$$

La soluzione delle equazioni dinamiche porta ad una condizione sulla densita' e su τ che si ottiene ponendo eguale a 1 il parametro di densita' Ω (infatti $k=0$ implica $\Omega=1$, per cui $8\pi G \rho \tau^2 / 3 = 1$, che se $\tau = 10$ Gyrs, implica una densita'

$\rho \approx 10^{-29} \text{ gr} / \text{cm}^3$). Cio' ci permette di stimare da [7.22] il tasso di creazione continua di materia necessario, che risulterebbe cosi' pari a ~ 1 atomo/ m^3 per miliardo d'anni! Un tasso quindi non osservabile in realta'.

Il modello dello Stato Stazionario aveva la caratteristica principale di evitare un'origine all'Universo. Una lunga serie di osservazioni hanno pero' provato la sua erroneita', come in parte abbiamo gia' visto e come vedremo piu' quantitativamente nella Sez. 9.3.

APPENDICE 7A:

CENNI ALLA TEORIA DELLA RELATIVITA' GENERALE. EQUAZIONI DEL MOTO E DEL CAMPO GRAVITAZIONALE. EQUAZIONI DI FRIEDMANN.

Ripercorriamo in questa Appendice alcuni aspetti riguardanti l'utilizzo della teoria della Relativita' Generale di Einstein per una soluzione generale al problema di definire in maniera completa ed auto-consistente la dinamica dell'Universo. L'Appendice e' proposta come lettura per studenti che vogliono approfondire il tema. Tuttavia facciamo presente che, per una comprensione ancora piu' completa, si rimanda alla Laurea Magistrale ed in particolare ai corsi cola' dedicati al tema ².

A.1 Dinamica Relativistica.

Nella teoria della Relativita Speciale, l'intervallo invariante tra due eventi di coordinate (t, x, y, z) e $(t + dt, x + dx, y + dy, z + dz)$ e' definito da

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad [7A.1]$$

dove ds e' invariante per cambiamento di sistema di coordinate e nel caso della propagazione dei fotoni (particella di massa nulla e velocita' c in qualunque sistema di riferimento) e' nullo. Il percorso di una particella materiale tra due eventi e' tale da rendere stazionario il valore di $\int_{path} ds$; questo corrisponde al percorso che minimizza la distanza quadri-dimensionale tra due punti.

La gravita' esercita la stessa forza per unita' di massa su tutti i corpi e l'essenza della teoria di Einstein e' la trasformazione di questa da campo di forze a proprieta' geometriche dello spazio-tempo quadri-dimensionale.

Lo spazio-tempo non e' piatto come nel caso di Minkowski ([7A.1]), ma e' in generale incurvato dalla presenza di materia gravitante ed energia. In questo caso l'intervallo tra due eventi deve essere generalizzato a

$$ds^2 = \sum_{\substack{j,i=3 \\ j,i=0}} g_{ij} dx^i dx^j \equiv g_{ij} dx^i dx^j \quad \text{con } i, j = 0, 1, 2, 3. \quad [7A.2]$$

(somme su indici identici nelle scritture tensoriali vengono sottintese e omesse). L'elemento generalizzato di distanza spazio-temporale ds^2 e' cosi' calcolato sulla base di un tensore g_{ij} detto tensore metrico, che rappresenta in modo completo le caratteristiche geometriche dello spazio. Il tensore g_{ij} potra' variare da punto a punto nello spazio, ad esempio in conseguenza della variazione della sua curvatura in quel

² Ringrazio Alice De Biasi per aver elaborato appunti relativi ai contenuti di quest'Appendice, utilizzando anche materiale del corso di Relativita' Generale, Laurea Magistrale in Astronomia.

punto. Nel caso generale di una particella libera in uno spazio-tempo non Minkowskiano, una *geodetica* e' una linea d'universo che minimizza la distanza spazio-temporale tra due eventi:

$$\delta \int_{path} ds = 0. \quad [7A.3]$$

e che si dimostra sia descritta dall'equazione del moto

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0 \quad [7A.4]$$

dove Γ_{kl}^i e' il simbolo di Christoffel, una quantita' lineare nelle derivate prime del tensore metrico, e definito da

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left[\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right] \quad [7A.5]$$

e

$$g^{im} g_{mk} = \delta_k^i \quad [7A.6]$$

ove δ_k^i e' il simbolo, o delta, di Kronecker, che e' uguale all'unita' per $i = k$ e zero negli altri casi. La *geodetica*, linea di percorso generalizzato minimo tra due eventi (punti nello spazio quadri-dimensionale), si riduce ad una linea retta nel caso di uno spazio Minkowskiano, ma sara' una curva piu' in generale. Si noti che la [7A.4] e [7A.5] contengono solo una regola sul comportamento del moto orbitale di particelle materiali entro una certa metrica spaziale.

Una particella libera si muove lungo una geodetica determinata dalla distribuzione di materia, la metrica stessa g_{ij} e' essa stessa determinata dalla materia. Il significato delle equazioni di Einstein consiste quindi nella relazione tra la distribuzione della materia e la metrica che descrive la geometria dello spazio-tempo.

In Relativita' Generale, cosi' come nella Speciale, tutte le equazioni sono tensoriali. In generale un tensore e' una quantita' che trasforma come segue quando si opera un cambio di coordinate da x^i a x'^i :

$$A'^{kl\dots} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^m} \frac{\partial x'^l}{\partial x^n} \dots \frac{\partial x^r}{\partial x'^p} \frac{\partial x^s}{\partial x'^q} \dots A^{mn\dots} \quad [7A.7]$$

dove gli indici in alto sono detti *controvarianti* e quelli in basso *covarianti*. Questa formalizzazione delle equazioni garantisce il rispetto del carattere fondamentale che queste devono avere, ossia quello della *covarianza generale*: l'origine di questo termine non e' chiara, ma il suo significato lo e': le equazioni devono mantenere la loro validita' qualunque sia il sistema di riferimento (inerziale o non-inerziale) rispetto al quale le varie quantita' sono definite. Ricordiamo che un identico concetto era stato espresso nell'ambito della teoria Speciale, nella quale si parla di *covarianza speciale* o *invarianza di Lorentz*, facendo riferimento in questo caso all'insieme dei sistemi di riferimento inerziali e alle conseguenti trasformate di Lorentz.

Nella fisica Newtoniana e nella Relativita' Speciale, un ruolo chiave e' giocato dalle leggi di conservazione di massa, energia e momento. Lo scopo quindi e' ottenere relazioni simili anche per la Relativita' Generale. Grazie all'equivalenza tra massa ed energia, le leggi di conservazione possono essere scritte in termini molto generali come

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x^k} = 0 \quad [7A.8]$$

dove T_{ik} e' il *tensore energia-impulso* che descrive la distribuzione della materia e le sue proprieta' fisiche. Per un fluido perfetto, con pressione p e densita' ρ , la definizione del tensore energia-impulso e':

$$T_{ik} = (p + \rho c^2)U_i U_k - p g_{ik}; \quad [7A.9]$$

dove il quadrivettore U_i e' la quadri-velocita' del fluido, espressa come

$$U_i = g_{ik} U^k = g_{ik} \frac{dx^k}{ds} \quad [7A.10]$$

con $x^k(s)$ linea Universo dell'elemento di fluido, cioe' la traiettoria seguita dalla particella nello spazio-tempo.

Si vede facilmente che la [7A.8] non e' un'espressione corretta in Relativita' Generale, dato che $\partial T^{ik} / \partial x^k$ e $\partial T_{ik} / \partial x^k$ non sono tensori. Poiche'

$$T'_{mn} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x^k}{\partial x'^n} T_{ik}, \quad [7A.11]$$

da questa e' evidente che $\partial T_{mn} / \partial x'^n$ coinvolge termini del tipo $\partial^2 x^i / \partial x'^m \partial x'^n$, cosi' che esso non puo essere un tensore. Esiste tuttavia una derivata a carattere tensoriale che prende il nome di derivata covariante. La derivata covariante di un tensore e' definita come

$$A_{pq\dots j}{}^{kl\dots} = \frac{\partial A_{pq\dots}{}^{kl\dots}}{\partial x^j} + \Gamma_{mj}^k A_{pq\dots}{}^{ml\dots} + \dots - \Gamma_{pj}^r A_{rq\dots}{}^{kl\dots} - \Gamma_{qj}^s A_{ps\dots}{}^{kl\dots} - \dots \quad [7A.12]$$

In questa espressione abbiamo utilizzato un nuovo simbolo " ; ", che rappresenta la *derivazione covariante* rispetto alla coordinata j in questo caso. Il simbolo " , " rappresenta invece la derivata parziale usuale $\partial / \partial x_j$. La forma un po' intricata [7A.12] diviene, ad esempio, nel caso di un tensore a due indici:

$$A_{ik;l} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma_{il}^j A_{jk} - \Gamma_{kl}^j A_{ij} = A_{ik;l} - \Gamma_{il}^j A_{jk} - \Gamma_{kl}^j A_{ij} .$$

La legge di conservazione puo' quindi essere riscritta nella forma completamente covariante

$$T_{i ;k} = 0. \quad [7A.13]$$

Nel limite appropriato, l'equazione [7A.13] si riduce a quella che stabiliscono la conservazione della carica e della massa-energia, ad es. $\vec{\nabla} \cdot \rho = -\frac{d\rho}{dt}$, e le analoghe leggi di conservazione della fluido-dinamica.

Einstein costruì una relazione tra materia e metrica, uguagliando T_{ik} al tensore ottenuto dalla metrica g_{ik} , che contiene solo le derivate prima e seconda della stessa e ha derivata covariante nulla.

Procediamo quindi a costruire la quantità tensoriale da uguagliare a T_{ik} . Le proprietà dello spazio sono definite dal tensore di Riemann-Christoffel, dato da

$$R^i_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl} \Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm} \Gamma^n_{kl}, \quad [7A.15]$$

che definisce localmente la curvatura e può quindi essere usato per determinare se lo spazio è curvo o piatto. Dal tensore di Riemann-Christoffel si ottiene il tensore di Ricci, contraendo il primo e il terzo indice:

$$R_{ik} = R^l_{ilk}, \quad [7A.16]$$

mentre contraendo il tensore di Ricci con la metrica si può quindi ottenere lo scalare di Ricci

$$R = g^{ik} R_{ik}. \quad [7A.17]$$

Possiamo ora definire il tensore di Einstein

$$G_{ik} \equiv R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R. \quad [7A.18]$$

L'identità di Bianchi inoltre pone

$$G^k_{i;k} = 0.$$

Il tensore G_{ik} contiene le derivate prime e seconde della metrica g_{ik} . Con una non banale deduzione, si verifica che le *equazioni del campo gravitazionale*, dette *equazioni di campo di Einstein*, prendono la forma

$$G_{ik} \equiv R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}, \quad [7A.20]$$

dove il termine $8\pi G / c^4$ assicura che l'equazione di Poisson nella sua forma standard ([7A.14]) risulti come condizione limite per campo gravitazionale debole.

Successivamente Einstein propose la seguente forma alternativa delle sue equazioni

$$G_{ik} \equiv R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R - \Lambda g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}, \quad [7A.21]$$

dove Λ rappresenta la *costante cosmologica*, ossia un parametro costante che non dipende da nessuna delle 4 coordinate spazio-temporali (in particolare non dipende dal tempo cosmico). Questa modifica, che venne proposta da Einstein per realizzare una soluzione di Universo statico nella quale forza di gravita' e forza di repulsione dovuta alla costante Λ si bilanciano, puo' avere un significato non banale. In ogni caso, [7A.21] e' l'unica generalizzazione delle equazioni di campo che mantenga il carattere di *covarianza generale* delle equazioni. Tale modifica delle equazioni di campo verra' ripresa e discussa nella Sezione 10.

Nel limite appropriato, l'equazione [7A.21] si riduce a quella di Poisson che descrive la gravita' Newtoniana:

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi G \rho. \quad [7A.14]$$

L'analogia tra le due leggi e' profonda. A secondo membro abbiamo, in entrambe, quantita' che esprimono (linearmente) la densita' di sorgenti del campo gravitazionale (ad es. la densita' di massa, ma anche la densita' di energia nell'approccio relativistico, essendo le due equivalenti). Nel primo membro abbiamo in un caso (linearmente) la derivata spaziale seconda del potenziale gravitazionale Newtoniano; nella [7A.20] abbiamo quantita' che contengono (sempre linearmente) derivate prime e seconde dell'equivalente del potenziale, che e' rappresentato dalla metrica spazio-temporale g_{ik} . Tutta la costruzione delle equazioni di campo da parte di Einstein ha seguito la logica di consistenza con la [7A.14] nel limite di campo debole e velocita' delle sorgenti non relativistiche.

A.2 Metrica di Robertson-Walker.

Per accordare la Relativita' Generale al Principio Cosmologico, richiesto dal nostro modello di Universo, e' necessario studiare le proprieta' di uno spazio omogeneo ed isotropo in espansione uniforme. A questo scopo e' utile considerare l'Universo come un fluido continuo, assegnando a ciascun elemento di fluido tre coordinate spaziali x^α con $\alpha = 1, 2, 3$, dette coordinate comoventi e una coordinata temporale che prende il nome di tempo proprio misurato con un orologio comovente all'elemento di fluido. Le proprieta' geometriche dello spazio tempo sono descritte da una metrica che, nel caso di un Universo in cui valga il Principio Cosmologico, assume la forma

$$ds^2 = (cdt)^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right], \quad [7A.22]$$

dove sono state usate le coordinate sferiche r , ϑ e φ , come coordinate comoving, t e' il tempo proprio, $a(t)$ e' il *fattore di scala cosmico* o parametro di espansione, definito da

$$a(t) \equiv \frac{R(t)}{R_0}$$

e dove k e' il *parametro di curvatura*, una costante che assume i valori 1, 0 o -1, avendo opportunamente ri-scalato la normalizzazione della coordinata radiale r . La metrica [7A.22] prende il nome di metrica di Robertson-Walker. In alternativa alla dimostrazione euristica elaborata nella Sez. 6.5 e 6.6, la metrica puo' essere ricavata utilizzando il concetto di trasporto parallelo di tensori con il formalismo tensoriale della Relativita' Generale, e che si realizza utilizzando i simboli di Christoffel (si veda eventualmente S. Weinberg "Gravitation & Cosmology", 1972). E' importante ricordare, pero', che la metrica esprime solo le proprieta' di simmetria del Principio Cosmologico e non necessita di una teoria specifica della gravita' quale quella espressa dalle equazioni di campo [7A.20] o [7A.21].

La metrica di Robertson-Walker e' diagonale, ossia non sono presenti termini misti del tipo tempo-spazio. Ponendo per semplicita' $c \equiv 1$ (le dipendenze da c nelle equazioni finali si possono re-inserire su base di argomenti dimensionali), possiamo scrivere per le varie componenti della metrica:

$$\begin{aligned} \text{Componente tempo-tempo} &\rightarrow g_{00} = 1 \\ \text{Componente mista spazio-tempo} &\rightarrow g_{\alpha 0} = g_{0\alpha} = 0 \\ \text{Componente spazio-spazio} &\rightarrow g_{\alpha\beta} = -a^2(t)\tilde{g}_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

dove $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ rappresenta la metrica diagonale di uno spazio tridimensionale la cui struttura dipende dal valore di k con 3 possibili soluzioni (chiuso, piatto e aperto), e le cui componenti sono

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{rr} &= \frac{1}{1-kr^2} \\ \tilde{g}_{\theta\theta} &= r^2 \\ \tilde{g}_{\phi\phi} &= r^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \tag{7A.23}$$

che serviranno per calcolare il tensore di Ricci, nel caso di un Universo omogeneo e isotropo.

A.3 Le equazioni di Friedmann.

Le equazioni della Relativita' Generale di Einstein legano le proprieta' geometriche dello spazio-tempo con il tensore energia-momento che descrive il contenuto dell'Universo (le sorgenti del campo di gravita'). In particolare, per un fluido perfetto omogeneo ed isotropo con densita' di energia di massa a riposo ρc^2 e pressione p , la soluzione delle equazioni di Einstein e' fornita dalle equazioni dinamiche di Friedmann.

Per ricavare tali equazioni si possono seguire due strade diverse.

- **Procedimento diretto:** consiste nel risolvere le equazioni partendo da T_{ik} (che descrive le proprietà delle sorgenti e il modo in cui il sistema reagisce alle perturbazioni della metrica) e ricavando da esse la geometria dello spazio-tempo. Tale procedimento è però reso assai complicato dalla non linearità delle equazioni di Einstein, ossia dal fatto che da una parte la massa-energia determina il campo di gravità, ma a sua volta il campo di gravità influenza le proprietà energetiche del sistema e le condizioni di moto delle sorgenti.
- **Procedimento inverso:** sulla base delle simmetrie dello spazio, si deduce prima la metrica RW (in modo analogo a quanto da noi fatto nella Sez. 6) e questa si introduce nelle equazioni del campo esplicitando le sorgenti del campo stesso (ossia il tensore T_{ik}).

Di seguito seguiremo il secondo procedimento, che presenta meno difficoltà rispetto al primo. Cerchiamo quindi di esplicitare i due lati dell'equazione di Einstein per un Universo omogeneo e isotropo in espansione.

Cominciamo a calcolare il membro a sinistra delle equazioni. Esaminiamo quindi il tensore di Ricci, il quale, dipendendo dalle derivate seconde della metrica, nel caso della metrica diagonale di Robertson-Walker risulterà esso stesso diagonale, cioè privo di termini misti. Le componenti del tensore di Ricci risultano così, da una serie di derivazioni operate secondo [7A.5-6] e [7A.15-17], uguali a:

$$\text{Componente tempo-tempo} \Rightarrow R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}$$

$$\text{Componente mista tempo-spazio} \Rightarrow R_{0\alpha} = R_{\alpha 0} = 0$$

$$\text{Componente spazio-spazio} \Rightarrow R_{\alpha\beta} = \tilde{R}_{\alpha\beta} + (\ddot{a}a + 2\dot{a}^2)\tilde{g}_{\alpha\beta} = (2k + \ddot{a}a + 2\dot{a}^2)\tilde{g}_{\alpha\beta}$$

dove il parametro k è quello di curvatura nella RW.

Ricaviamo a questo punto lo scalare di Ricci contraendo il tensore di Ricci con la metrica g_{ij} :

$$\begin{aligned} R \equiv g^{ab}R_{ab} &= g^{00}R_{00} + g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} \\ &= -3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{a^2}\tilde{g}^{\alpha\beta}[\tilde{R}_{\alpha\beta} + (\ddot{a}a + 2\dot{a}^2)\tilde{g}_{\alpha\beta}] \\ &= -3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{3}{a^2}(2k + \ddot{a}a + 2\dot{a}^2). \end{aligned} \quad [7A.24]$$

A questo punto siamo nelle condizioni di calcolare le componenti del tensore di Einstein, la cui componente tempo-tempo è'

$$\begin{aligned}
G_{00} &= R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R \\
&= -3 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{3}{2a^2} (2k + 2\ddot{a}a + 2\dot{a}^2) \\
&= \frac{3}{a^2} k + 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2
\end{aligned} \tag{7A.25}$$

e la componente spazio-spazio

$$\begin{aligned}
G_{\alpha\beta} &= R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R \\
&= (2k + \ddot{a}a + 2\dot{a}^2) \tilde{g}_{\alpha\beta} - \frac{3}{2} \tilde{g}_{\alpha\beta} (2k + 2\ddot{a}a + 2\dot{a}^2) \\
&= (-k - 2\ddot{a}a - \dot{a}^2) \tilde{g}_{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{7A.26}$$

Abbiamo così interamente esplicitato il lato sinistro dell'equazione di Einstein.

Possiamo a questo punto elaborare il membro di destra, ossia l'espressione del tensore energia-impulso, che per un fluido perfetto abbiamo visto essere uguale a [7A.9], e che possiamo riscrivere come

$$T_{\alpha\beta} = \underbrace{\rho}_{\text{densità}} c^2 U_\alpha U_\beta - \underbrace{p}_{\text{pressione}} h_{\alpha\beta} \tag{7A.27}$$

dove $h_{\alpha\beta}$ è uno spazio ortogonale alla direzione definita dal tempo proprio e si può esprimere come

$$h_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\beta} - U_\alpha U_\beta \tag{7A.28}$$

con

$$h_{\alpha\beta} U^\alpha = g_{\alpha\beta} U^\alpha - U^\alpha U_\alpha U_\beta = U_\beta - U_\beta = 0 \tag{7A.29}$$

Per un fluido generico l'espressione del tensore energia-impulso presenta termini aggiuntivi dovuti ad esempio alla presenza di stress anisotropo, assenti nel nostro caso.

Isoliamo anche in questo caso le diverse componenti del tensore energia-impulso, ricordando che la metrica di Robertson-Walker è quella di un osservatore comovente al fluido cosmico, e di conseguenza la quadri-velocità ha componenti

$$U_a = (1, 0, 0, 0) \tag{7A.30}$$

Quindi per il tensore energia-impulso otteniamo

$$\begin{aligned}
\text{Componente tempo-tempo} &\Rightarrow T_{00} = \rho c^2 \\
\text{Componente spazio-spazio} &\Rightarrow T_{\alpha\beta} = -p h_{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{7A.31}$$

Eguagliamo ora separatamente le componenti di tipo tempo-tempo e spazio-spazio del tensore di Einstein e del tensore energia-impulso:

$$\text{Componenti tempo-tempo} \Rightarrow G_{00} = 8\pi G T_{00}. \quad [7A.32]$$

Esplicitando le due componenti si ottiene

$$\frac{3k}{a^2} + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = 8\pi G \rho$$

che puo' essere posta nella piu' familiare forma

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2}, \quad [7A.36]$$

nella quale riconosciamo l' equazione di Friedmann, che quindi deriva dalla componente tempo-tempo in coordinate comoventi dell'equazione di Einstein e rappresenta una condizione di conservazione dell'energia (da notare il significato di k).

Passando ora alle componenti di tipo spazio-spazio:

$$\text{Componenti spazio-spazio} \Rightarrow G_{\alpha\beta} = 8\pi G T_{\alpha\beta}$$

esplicitando otteniamo da [7A.26] e [7A.31]

$$\begin{aligned} (-k - 2\ddot{a}a - \dot{a}^2) \tilde{g}_{\alpha\beta} &= 8\pi G (-p) (g_{\alpha\beta} - \underbrace{U_\alpha U_\beta}_0) \\ &= 8\pi G (-p) (-a^2 \tilde{g}_{\alpha\beta}) \\ &= 8\pi G p \tilde{g}_{\alpha\beta} a^2 \end{aligned}$$

avendo posto $=0$ i contributi dovuti a moti macroscopici (moti d'insieme a velocita' relativistiche) nel fluido cosmico ($U_\alpha U_\beta = 0$). Ora, dividendo tutto per a^2 , la precedente diventa

$$-\frac{k}{a^2} - 2\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = 8\pi G p$$

e utilizzando l'equazione di Friedmann

$$\frac{8\pi G}{3} \rho + 2\frac{\ddot{a}}{a} = -8\pi G p$$

troviamo infine

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) \quad [7A.37]$$

che e' l'espressione della 1° equazione dinamica (abbiamo qui per completezza reintrodotti i termini in c). Dalla [7A.36] possiamo derivare un'espressione per il parametro di curvatura k/a^2 :

$$\frac{k}{a^2} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \left[\left(\frac{\rho}{\rho_c}\right) - 1 \right], \quad [7A.38]$$

dove

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi G} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \quad [7A.39]$$

che e' detta *densita' critica*, che rappresenta la densita di un Universo con $k = 0$.

Le equazioni dinamiche di Friedmann hanno anche una versione estesa, comprendente un termine detto della *costante cosmologica* Λ , che riportiamo di seguito:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad [7A.40]$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda}{3} \quad [7A.41]$$

Come gia' detto, il significato e le importanti implicazioni di questa estensione delle equazioni di campo saranno oggetto di ampia discussione nella Sezione 10.

Le equazioni di Friedmann e la metrica di Roberson-Walker sono il punto di partenza per una descrizione dinamica di un Universo che rispecchia il Principio Cosmologico.

8. ALCUNI OSSERVABILI COSMOLOGICI.

La metrica di Robertson-Walker che abbiamo ricavato nella Sezione 6, congiuntamente con la modellistica dinamica che abbiamo introdotto nella Sezione precedente, forniscono un modo straordinariamente potente di descrivere l'Universo, permettendo quindi non solo di definirne le caratteristiche in modo quantitativo ed auto-consistente, ma anche di stabilire modalita' e procedure osservative rigorose.

Definiamo infatti ora i principali osservabili relativi a sorgenti fotoniche poste a distanze cosmologiche nello spazio-tempo. Questi osservabili riguardano misure di distanza, redshift, diametri, flussi e luminosita', volumi, conteggi di sorgenti, intensita' dei fondi cosmici di radiazione, e quant'altro. Tutto questo concerne in ultima istanza la propagazione nello spazio-tempo dei fotoni (o in generale particelle prive di massa), che e' qui analizzata in modo rigoroso ed auto-consistente.

8.1 L'osservabile fondamentale: il redshift cosmologico.

Il nostro punto di partenza e' la metrica RW che qui ricordiamo

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} \frac{R^2(t)}{R_0^2} \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad [8.0]$$

ove la coordinata radiale comoving r e' stata riscidata in modo tale da far si' che il parametro di curvatura k assuma il valore $+1, 0, -1$ per universi rispettivamente a curvatura positiva, nulla o negativa.

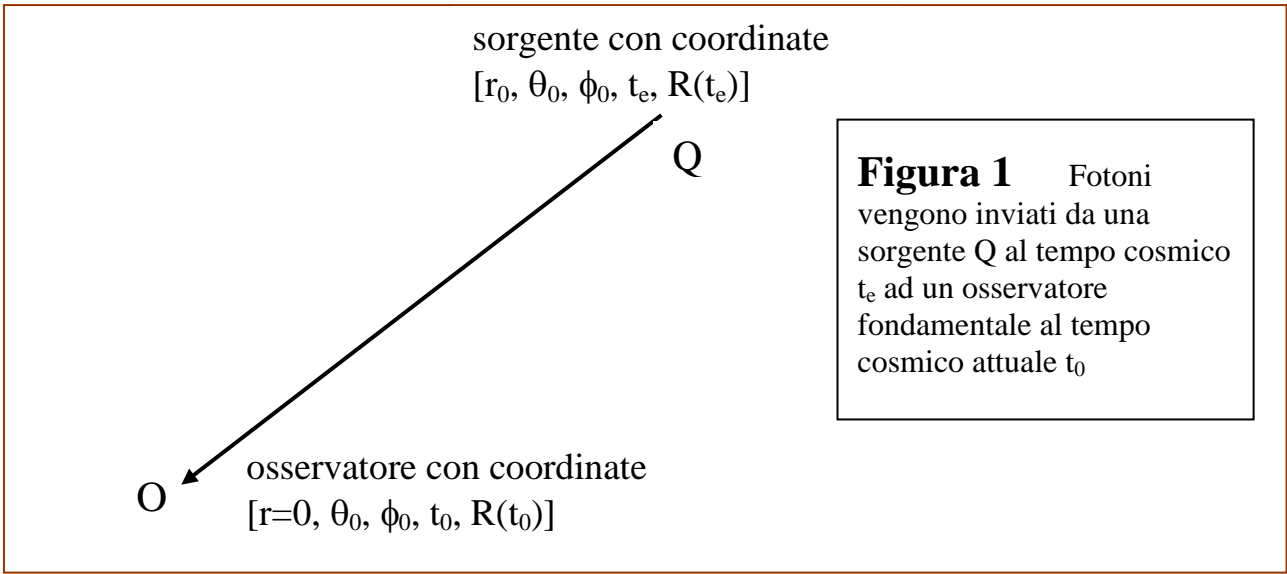
Immaginiamo ora di considerare due eventi (due punti nello spazio-tempo quadridimensionale, segnalati come Q e O nella Figura 1) collegati tra loro da un segnale luminoso (corrispondenti ad una sorgente ed un suo osservatore, considerati entrambi a riposo nei rispettivi sistemi di riferimento locali, quindi come osservatori fondamentali). I due saranno per definizione collegati da un intervallo spazio-temporale nullo $ds^2=0$.

Immaginiamo per semplicita' che gli assi di riferimento scelti permettano di non far variare tra Q e O gli angoli coordinati θ_0 e ϕ_0 tra la sorgente e l'osservatore. Il fotone viaggiera' dunque lungo una geodetica cosmica data dalla condizione

$$ds^2 = 0 = dt^2 - \frac{1}{c^2} \frac{R^2(t)}{R_0^2} \frac{dr^2}{1-kr^2}; \quad [8.1]$$

$$\frac{cR_0 dt}{R(t)} = - \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}$$

ove viene qui presa la soluzione con il segno negativo dell'eq. quadratica per rendere consistenti tra loro gli andamenti del tempo e della coordinata radiale (al crescere del primo, la seconda diminuisce).



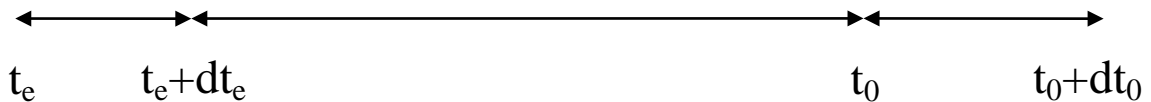
Integrando lungo la coordinata radiale comoving da Q a O:

$$\int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \int_{t_e}^{t_0} \frac{cR_0 dt}{R(t)} \quad [8.2]$$

Consideriamo ora come il segnale elettromagnetico consista in una serie di impulsi che vengono emessi con periodo dt_e nel sistema di riferimento della sorgente. Ricordiamo che, data una qualunque coppia sorgente-osservatore, al tempo t_e+dt_e la sorgente sara' ancora alla distanza radiale comovente r_0 . Quindi al tempo incrementato l'integrale di sinistra non cambia. Supponiamo che al segnale inviato al tempo incrementato corrisponda un segnale che arriva all'osservatore a t_0+dt_0 . Allora la [8.2] riferita a questo secondo segnale fornira' la condizione

$$\int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \int_{t_e+dt_e}^{t_0+dt_0} \frac{cR_0 dt}{R(t)}$$

Inserendo quest'ultima nella [8.2] e considerando i vari intervalli temporali coinvolti, come illustrato nello schema seguente:



si ottiene

$$\int_{t_e}^{t_e+dt_e} \frac{cR_0 dt}{R(t)} + \int_{t_e+dt_e}^{t_0} \frac{cR_0 dt}{R(t)} = \int_{t_e+dt_e}^{t_0} \frac{cR_0 dt}{R(t)} + \int_{t_0}^{t_0+dt_0} \frac{cR_0 dt}{R(t)}$$

con il secondo e terzo addendo, nell'ordine, che si eliminano. Essendo poi ovviamente $dt_e/t_e \ll 1$ e $dt_0/t_0 \ll 1$, si avra'

$$\frac{dt_e}{R(t_e)} = \frac{dt_0}{R(t_0)} \quad [8.3]$$

che costituisce la regola fondamentale con cui gli intervalli temporali scalano con il tempo cosmico cui fanno riferimento, e lo fanno proporzionalmente al fattore di scala a quel tempo. Le frequenze fotoniche vanno inversamente agli intervalli di tempo:

$$\frac{\nu_e}{\nu_0} = \frac{dt_0}{dt_e} = \frac{R(t_0)}{R(t_e)}. \quad [8.3b]$$

Se ora introduciamo il parametro redshift z gia' discusso a suo tempo (Sez. 5) e definito in termini di quanto sia variata la frequenza dei fotoni dal sistema di riferimento dell'emettitore a quello dell'osservatore:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\nu_e - \nu_0}{\nu_0} = z \quad [8.4]$$

otterremo la seguente relazione fondamentale tra tempi, frequenze, fattore di scala e redshift:

$$\frac{dt_0}{dt_e} = \frac{\nu_e}{\nu_0} = \frac{R(t_0)}{R(t_e)} = 1 + z. \quad [8.5]$$

Se l'Universo si espande, si ha un effetto generalizzato di spostamento delle frequenze fotoniche verso le basse frequenze, causato da un aumento del fattore di scala nella [8.4]. Questo corrisponde quindi ad un arrossamento dello spettro, ossia ad uno spostamento sistematico di tutti i fotoni ricevuti verso il rosso (red-shift). Se invece fossimo in una fase di contrazione universale, si verificherebbe un sistematico blue-shift. Nel suo significato piu' generale, quindi, il redshift cosmologico e' legato alla variazione del fattore di scala cosmico $R(t)$ tra il momento dell'emissione del fotone da parte della sorgente e quello della sua ricezione da parte dell'osservatore.

Nell'Universo vicino il redshift osservato e' legato semplicemente ad un effetto Doppler generato dal moto relativo di osservatore e sorgente, sempre dovuto alla legge di Hubble. Limitatamente all'Universo vicino, la metrica e' essenzialmente quella della Relativita' Speciale di Minkowski e gli effetti di curvatura universale indotti dalla materia contenuta nell'Universo sono trascurabili. Se consideriamo invece coppie osservatore-sorgente sufficientemente lontane tra loro, l'effetto di curvatura nel percorso tra i due diventa significativo ed e' compiutamente descritto

dalla metrica spazio-temporale di RW. Questo comporta importanti effetti di trasformazione dei tempi tra un sistema di riferimento e l'altro e conseguentemente importanti trasformazioni di quantità dipendenti dai tempi, il più rilevante essendo quello relativo alla trasformazione di frequenze e lunghezze d'onda dei segnali luminosi, espresso dalla [8.4]. Possiamo in conclusione dire che l'effetto di redshift (spostamento verso il rosso delle lunghezze d'onda fotoniche) ha una interpretazione "locale" che è profondamente diversa da quella "generale": la locale interpreta il redshift come semplice effetto Doppler dovuto al moto relativo sorgente-osservatore tra sistemi di riferimento inerziali entro scale spaziali piccole, mentre l'interpretazione generale fa riferimento a trasformazioni dei tempi indotte da variazioni del fattore di scala cosmico $R(t)$.

È importante infine sottolineare che questo risultato riguardo al redshift, fondamentale per la cosmologia, fa riferimento ad una regola di trasformazione dei tempi che riguarda la propagazione dei fotoni ($ds^2=0$). Una importante verifica di questa nuova trasformazione, indotta dalla legge di espansione universale e dalla metrica di RW, è fornita dal risultato osservativo in Figura 2. Si tratta di una evidenza diretta che la durata di un evento di supernova (la curva di luce), il cui periodo è noto da osservazioni delle curve di luce di oggetti a bassi redshift, nel sistema di riferimento di un osservatore lontano aumenta proporzionalmente al redshift dell'oggetto secondo il fattore $(1+z)$.

Immaginando infine di osservare fotoni emessi al Big Bang, a $t_e=0$, $R(t_e)=0$, avremmo che questi fotoni sarebbero osservati con un redshift infinito, ovvero si verificherebbe una totale perdita di energia di questi fotoni per un osservatore che tentasse di osservarli ad un qualunque tempo. Nella realtà questo non è comunque possibile. Anticipando risultati che vedremo discussi solo nel seguito, sorgenti poste a redshift superiori a $z=1000$ (corrispondente ad un fattore di scala $1/1000$ dell'attuale R_0) non sono direttamente osservabili. Ciò a causa del fatto che l'Universo in quelle epoche remote conteneva plasma completamente ionizzato a causa delle elevate temperature ($T>5000$ K). Il conseguente gran numero di elettroni liberi nel fluido cosmico e la loro elevata sezione d'urto σ_T implicano un cammino libero medio dei fotoni molto piccolo e l'impossibilità di osservare oltre questi z .

Il redshift cosmologico è un osservabile di interesse primario per la cosmologia. È innanzitutto da sottolineare che si tratta, appunto, di un osservabile, ossia può essere misurato in maniera diretta con dati spettrali su sorgenti lontane confrontati con spettri simili ottenuti da sorgenti in laboratorio (per dedurre la differenza relativa in frequenza). Allo stesso tempo il redshift fornisce una quantificazione magnificamente semplice, compatta, persino adimensionale, della distanza nello spazio-tempo cosmico tra due osservatori posti a due epoche diverse e a grandi distanze tra loro. Da qui in poi il redshift sarà quindi da noi usato come la misura fondamentale, e persino la più semplice, di distanza spazio-temporale.

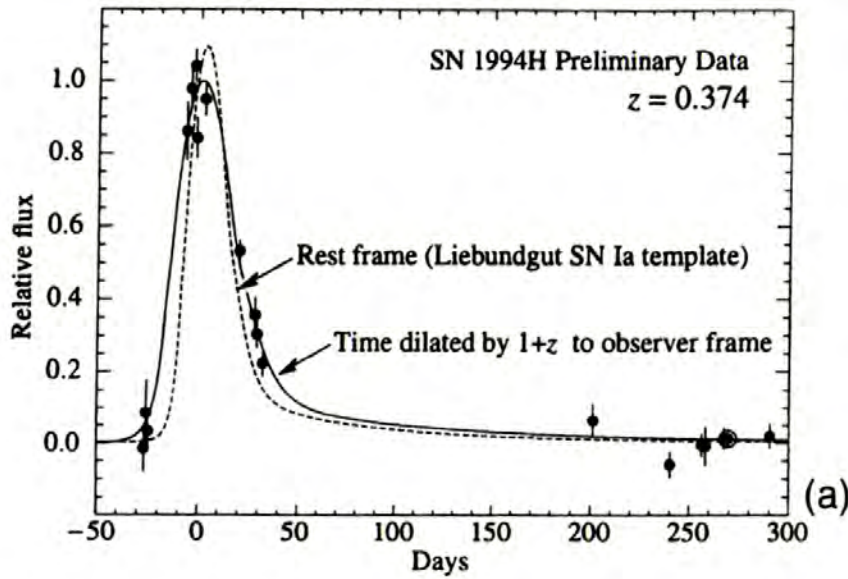
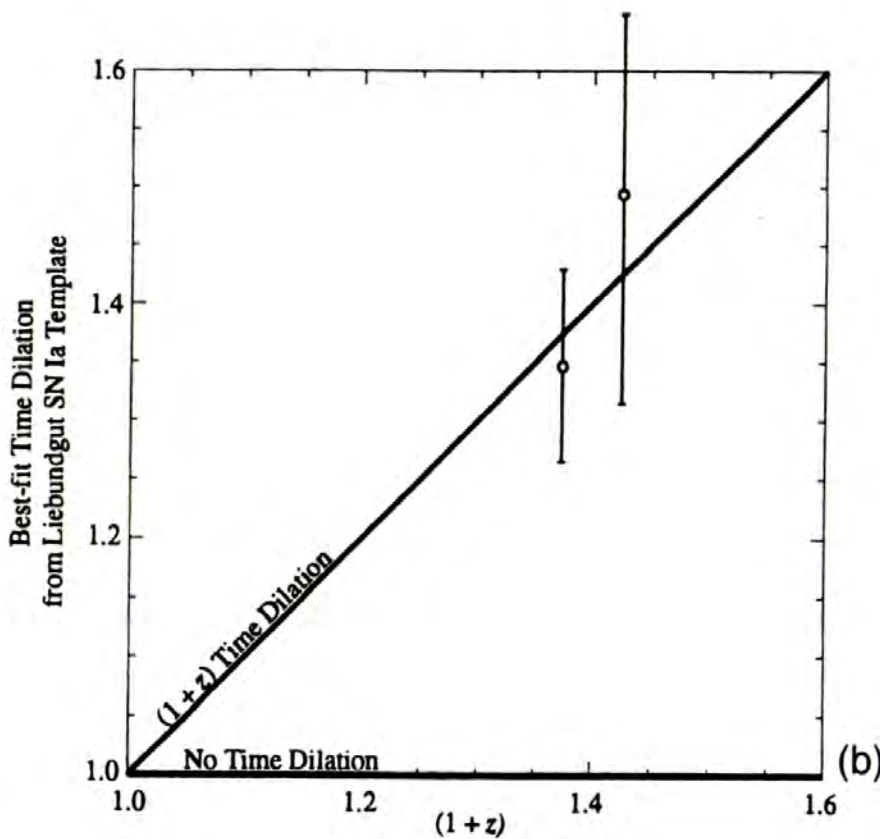


Figura 2

Verifica sperimentale dell'effetto di trasformazione dei tempi indotto dal redshift cosmologico.

a) Confronto tra la curva di luce media di supernove nell'universo locale (curva a tratti) e quella di una SN osservata al redshift $z=0.374$, che risulta dilatata per un fattore pari a $R(t_0)/R(t)=1+z=1.374$

b) Dilatazione temporale contro redshift per questa e altre supernove.



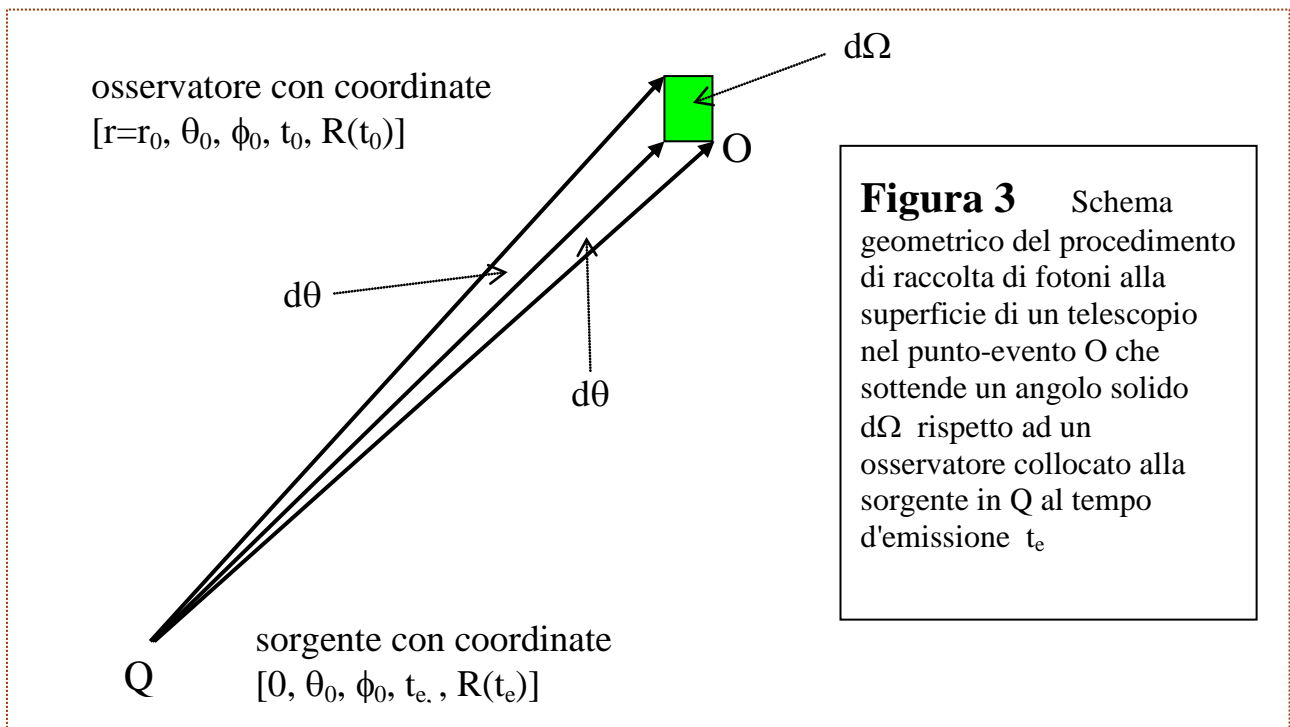
8.2 La distanza di luminosita'.

Un secondo osservabile fondamentale in astronomia e in cosmologia e' costituito dal flusso fotonico in una certa banda e.m. che noi raccogliamo con il nostro telescopio, emesso da una sorgente cosmica lontana. Questo flusso dipendera' principalmente dalla luminosita' intrinseca della sorgente e dalla sua distanza o redshift, fatte salve

eventuali perdite di fotoni lungo il cammino ottico, ad es. a causa di polveri o altri assorbitori frapposti.

In riferimento allo schema in Figura 3, consideriamo dunque una sorgente nel punto Q che emetta fotoni in tutte le direzioni in modo isotropo. Consideriamo attorno ad essa una superficie sferica di raggio comoving $r=r_0$ centrata nell'evento sorgente Q e che passa presso l'osservatore in O. Calcoliamo l'elemento di area in O che sottende un angolo solido alla sorgente:

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi.$$



Per calcolare l'area sottesa da questo elemento nel nostro spazio-tempo cosmico, consideriamo la distanza fisica (propria) tra i due bordi del telescopio (meglio potremmo dire del raccogliatore primario di fotoni) come visti nel sistema di riferimento della sorgente. Uno schema di questa situazione e' riportato in Fig. 3. Tali bordi saranno ovviamente caratterizzati da avere $dt=0=dr$, con la distanza propria tra i bordi del telescopio che sara' fornita dalla distanza generalizzata $(-c^2 ds^2)^{1/2} \Big|_{dt=0}$.

Sempre considerando la metrica RW avremo come elemento d'area

$$dA = R(t_0)^{-2} R(t_0) r_0 d\theta \cdot R(t_0) r_0 \cdot \sin \theta d\phi = r_0^2 d\Omega.$$

Riferendoci ad una area unitaria ($dA=1$), che corrisponde a considerare il flusso di energia radiante per unita' di area, da cio' avremo

$$d\Omega = r_0^{-2} . \tag{8.6}$$

Quindi, essendo l'energia emessa per sec in $d\Omega$ nel sistema di riferimento della sorgente data da $L \cdot d\Omega / 4\pi$, il flusso totale di energia fotonica per unita' di area raccogliatrice ricevuto dall'osservatore in O sara' proporzionale al flusso emesso in quella direzione

$$S = \frac{L}{4\pi r_0^2} \cdot \frac{1}{(1+z)^2} \quad [8.7]$$

Il fattore correttivo $(1+z)^2$ che qui compare corrisponde alle seguenti considerazioni. Un fattore $(1+z)$ e' necessario per tenere conto del fatto che ogni fotone perde energia a causa del redshift proporzionalmente a $R(t_0)/R(t)$. Un secondo fattore e' dovuto al fatto che anche il ritmo di arrivo dei fotoni e' inferiore al ritmo di emissione ancora per lo stesso fattore $R(t_0)/R(t)$.

Dalla [8.7] discende quindi immediatamente la definizione corretta della distanza di luminosita' d_L in ambito cosmologico, ovvero la distanza propria (fisica) spazio-temporale alla quale una sorgente di luminosita' L e' vista con flusso S:

$$d_L = \left(\frac{L}{4\pi S} \right)^{1/2} = r_0 \cdot (1+z) \quad [8.8]$$

dove la coordinata comoving r_0 e il redshift z sono legati, tramite la [8.2], da

$$\int_{R_0/(1+z)}^{R_0} \frac{c R_0 dR}{R\dot{R}} = \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} \quad [8.9]$$

Il secondo integrale e' risolvibile analiticamente e fornisce

$$\int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \begin{cases} \arcsin(r_0) & \text{se } k=1 \\ r_0 & \text{se } k=0 \\ \operatorname{arcsinh}(r_0) & \text{se } k=-1 \end{cases} \quad [8.10]$$

dove ovviamente il caso $k=0$ corrisponde al modello a curvatura nulla e il caso $k=-1$ ha come soluzione la funzione arcoseno iperbolico.

Volendo considerare osservazioni di sorgenti collocate nell'Universo remoto, le relazioni [8.9] e [8.10] devono essere risolte facendo riferimento ad un qualche modello d'Universo, cosa che ci permette di definire un certo andamento funzionale per il parametro di scala $R(t)$ da inserire in [8.9]. E ovviamente ci riferiamo per questo a quanto precedentemente discusso in Sez. 7.6, ovvero ad un Universo dominato dalla materia nel caso piu' semplice di nostro interesse. Riportiamo in Appendice 8A i dettagli di questo calcolo, i cui risultati sono riassunti nella relazione di *Mattig*, che lega la coordinata radiale comoving r_0 con il redshift, relazione mediata dai parametri cosmologici:

$$r_0 = \frac{c}{H_0} \frac{q_0 z + (q_0 - 1)(\sqrt{1 + 2q_0 z} - 1)}{q_0^2 (1 + z)} \quad [8.11]$$

Si tratta di una delle relazioni piu' importanti, assieme alla [8.7], della cosmologia osservativa. Interessanti considerazioni di carattere storico al proposito sono riportate in Appendice 8B. Possiamo quindi utilizzare la relazione per ottenere una espressione assai utile per la distanza di luminosita': dalla [8.8] e [8.11]

$$d_L = r_0 (1 + z) = \frac{c}{H_0} \frac{q_0 z + (q_0 - 1)(\sqrt{1 + 2q_0 z} - 1)}{q_0^2} \quad [8.12]$$

e ovviamente analoga relazione in termini del parametro Ω_0 .

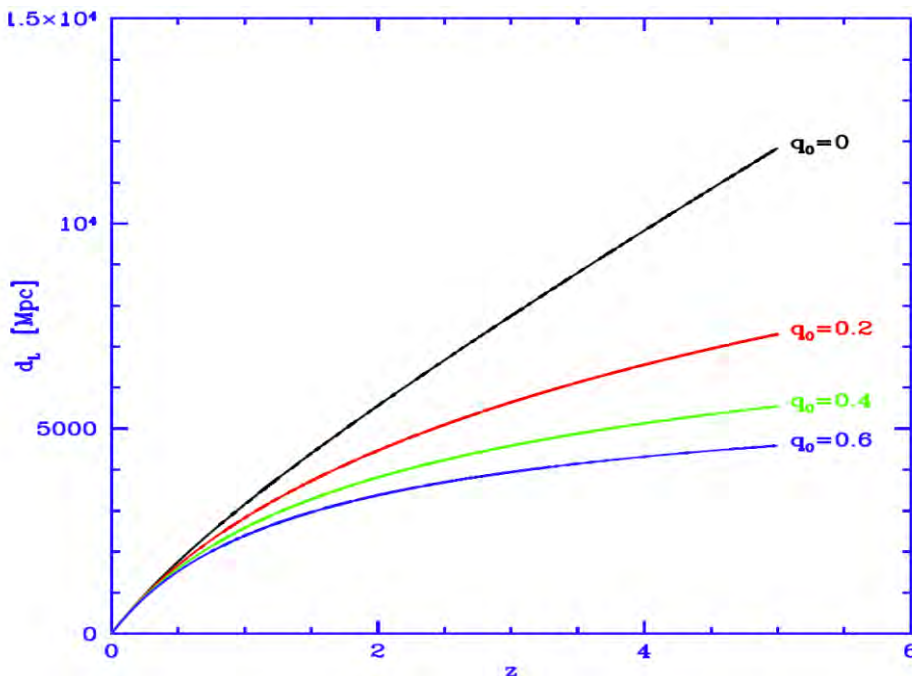


Figura 4

Rappresentazione dell'andamento della distanza di luminosita' con il redshift per diversi valori del parametro di decelerazione (equivalente a diversi valori per il parametro di densita' $\Omega_0 = 2q_0$). Al diminuire di q_0 aumenta d_L poiche' domina la dipendenza da q_0 a denominatore.

E' immediato verificare che, nel limite in cui si consideri un sotto-spazio 3D Euclideo locale attorno ad un qualunque osservatore fondamentale (corrispondente come si diceva a ridurre la metrica RW a quella di Minkowski, ossia per $z \ll 1$), la relazione [8.12] si riduce alla semplice relazione di Hubble tra redshift e distanza (o velocita' radiale e distanza), che nella fattispecie e' la distanza di luminosita'. Questo caso limite si ottiene considerando la porzione di spazio attorno all'osservatore corrispondente a redshifts $z \ll 1$ (approssimazioni sufficientemente accurate si ottengono per $z \leq 0.1$). Sviluppando infatti in serie il termine $\sqrt{1 + \Omega_0 z}$ nella [8.12], avremo

$$\sqrt{1 + \Omega_0 z} \approx 1 + (1 + \Omega_0 z)^{-1/2} \Big|_{z=0} \Omega_0 z / 2 + \dots = 1 + \Omega_0 z / 2 + \dots \quad \text{da cui}$$

$$d_L \approx \frac{c}{H_0} z; \quad v \approx H_0 d, \quad [8.13]$$

appunto la relazione di Hubble, considerando che $cz=v$ e' la velocita' di recessione. Cio' dimostra che la legge di Hubble e' il caso limite di quella piu' generale di un universo curvo (eq. [8.12]), limite che si applica nel sottospazio locale Minkowskiano in espansione.

8.3 Densita' di flusso. La correzione K.

Le quantita' luminosita' L e flusso S che abbiamo discusse precedentemente sono dette *bolometriche*, in quanto si riferiscono al totale dell'energia radiante emessa e osservata (il totale dei fotoni emessi dalla sorgente e raccolti dall'osservatore, indipendentemente dalla loro frequenza). Nella realta', gli osservabili che fanno riferimento al flusso di una sorgente non sono mai di questo tipo, ma riguardano piuttosto i soli fotoni raccolti dal telescopio entro un limitato intervallo di frequenza, definito dalle caratteristiche del telescopio stesso e del suo rivelatore di fotoni. Quello che viene comunemente fatto, quindi, e' definire, anziche' un flusso totale, una *densita' di flusso* (*flux density*), ovvero un flusso per unita' di frequenza ad una certa frequenza fotonica ν (flusso ad esempio definito in unita' fisiche di $[erg/cm^2/sec/Hz]$ nel sistema CGS). Allora immaginiamo sia $L(\nu_e)d\nu_e$ l'energia emessa per secondo nell'intervallo di frequenza tra ν_e e $\nu_e+d\nu_e$ e supponiamo che l'energia corrispondentemente ricevuta sia $S(\nu_0)d\nu_0$, dove

$$\nu_e = \nu_0(1+z). \quad [8.14]$$

Allora, dalla definizione di distanza di luminosita' avremo

$$S(\nu_0)d\nu_0 = \frac{L(\nu_e)d\nu_e}{4\pi \cdot d_L^2}$$

e dalla [8.14]

$$S(\nu_0) = \frac{L(\nu_e)(1+z)}{4\pi \cdot d_L^2}. \quad [8.15]$$

Possiamo vedere ora la cosa da un punto di vista ancora piu' operativo. Supponiamo che la combinazione telescopio+rivelatore+assorbimento atmosferico facciano filtrare una frazione $\propto \Phi(\nu_0)$ dell'energia incidente in funzione della frequenza fotonica ν_0 . Supponiamo anche che tale distribuzione-filtro in frequenza sia normalizzata ad 1. Il flusso misurato in una certa banda B corrispondente alla frequenza fotonica ν_0 , ad esempio, sara' dunque

$$\begin{aligned}
S(\nu_0) &= \int_{banda} \Phi(\nu) \cdot S(\nu) d\nu = \\
&= \frac{(1+z)}{4\pi \cdot d_L^2} \int_{banda} \Phi(\nu) \cdot L[\nu(1+z)] d\nu
\end{aligned} \tag{8.16}$$

che si potrà anche scrivere

$$S(\nu_0) = \frac{1}{4\pi \cdot d_L^2} L(\nu_0) \cdot K(z) \quad \text{con} \quad L(\nu_0) \equiv \int_{banda} \Phi(\nu) \cdot L(\nu) d\nu \tag{8.17}$$

avendo definito la correzione K (K -correction) come

$$\begin{aligned}
K(z) &\equiv (1+z) \frac{\int_{banda} \Phi(\nu) \cdot L[\nu(1+z)] d\nu}{\int_{banda} \Phi(\nu) \cdot L(\nu) d\nu} \\
&\approx (1+z) \frac{L[\nu_0(1+z)]}{L(\nu_0)}
\end{aligned} \tag{8.18}$$

dove la seconda relazione può essere utilizzata quando la funzione di trasmissione sia sufficientemente stretta attorno alla cosiddetta frequenza efficace (ν_0). Analoghe espressioni si utilizzerebbero volendo ragionare in termini di magnitudini anziché di flussi:

$$\begin{aligned}
m_B &= M_B + 5[\log d_L / 10 \text{ pc}] + K(z) \quad \text{con} \\
K(z) &\equiv -2.5 \cdot \log \left\{ (1+z) \frac{\int_{banda} \Phi(\nu) \cdot L[\nu(1+z)] d\nu}{\int_{banda} \Phi(\nu) \cdot L(\nu) d\nu} \right\} .
\end{aligned} \tag{8.19}$$

Per semplificare queste espressioni, si utilizza talvolta il fatto che spettri di sorgenti cosmiche si possono rappresentare entro limitati intervalli di frequenza con leggi di potenza (in alcune sorgenti, come le radiogalassie descritte in Sez. 12, gli spettri sono a legge di potenza su ampi intervalli di ν):

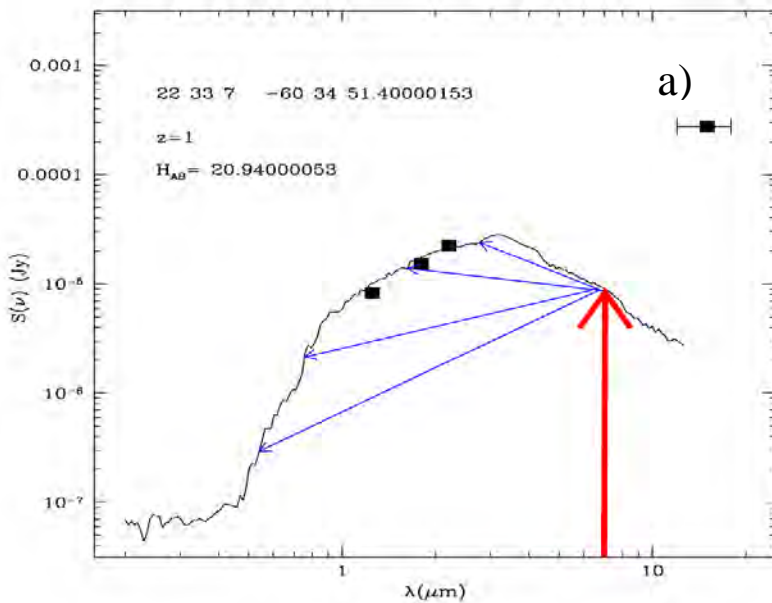
$$L(\nu) \propto \nu^{-\alpha}$$

α essendo l'indice spettrale a quella frequenza. In questo caso, un fattore $(1+z)^{-\alpha}$ può essere portato fuori l'integrale a numeratore, cosicché

$$S(\nu_0) = \frac{1}{4\pi \cdot d_L^2} L(\nu_0) \cdot K(z) \quad \text{con} \quad K(z) = (1+z)^{1-\alpha} \tag{8.20}$$

dalla [8.18]. Per le magnitudini si ha

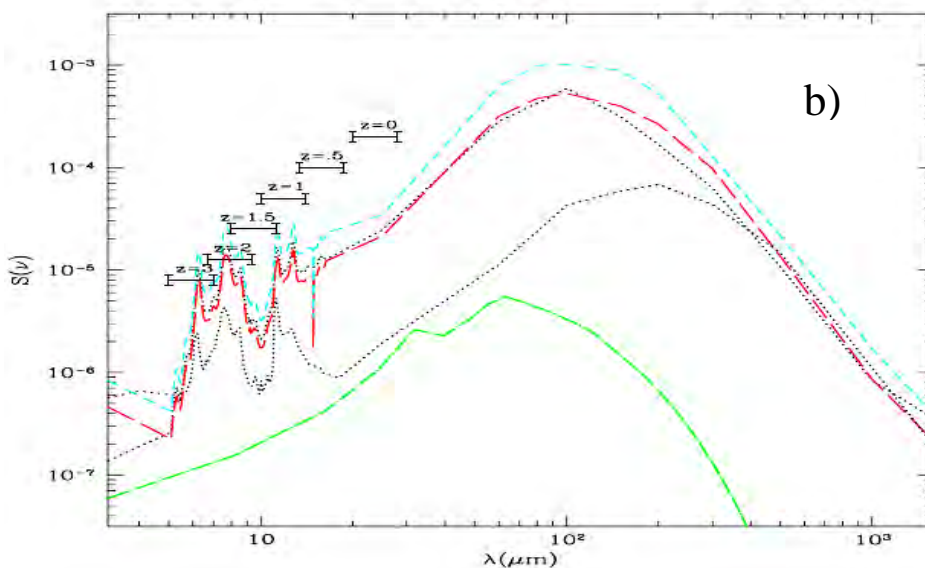
$$K(z) = 2.5 \cdot (\alpha - 1) \log(1+z) .$$



Rappresentazione dell'effetto della correzione K .

a) Osservazioni a $\lambda=7 \mu\text{m}$ campionano lo spettro di una sorgente a λ piu' corte pari a $\lambda_c = \lambda_o / (1+z)$.

b) Rappresentazione dell'effetto di spostamento apparente della banda di osservazione al crescere del redshift della sorgente. La corrispondente osservazione avviene, nella figura, in una banda compresa tra 20 e 28 μm nel rest-frame dell'osservatore.



In generale, dunque, la correzione K tiene conto dell'effetto del redshift, ossia che noi osserviamo a frequenza ν_0 fotoni che sono emessi a $\nu_0(1+z)$. Fotoni che io osservo a frequenza ν_0 non sono stati emessi a quella frequenza, pertanto io osservo diverse porzioni dello spettro di una determinata categoria di sorgenti cosmiche al cambiare del redshift della singola sorgente (ovvero la sua distanza spazio-temporale). La situazione e' schematizzata nelle figure sopra.

Ovviamente, l'effetto della correzione-K non dipende solo dal redshift, ma anche dalla forma dello spettro della sorgente osservata e, infine, anche dalla banda di osservazione. Cio' e' chiaramente mostrato in Figura 5. Questa caratteristica di campionare diverse porzioni dello spettro e.m. di sorgenti collocate a diversi redshift

e' stata, ed e', sfruttata per aumentare la copertura spettrale delle osservazioni (ad esempio nella banda degli X duri).

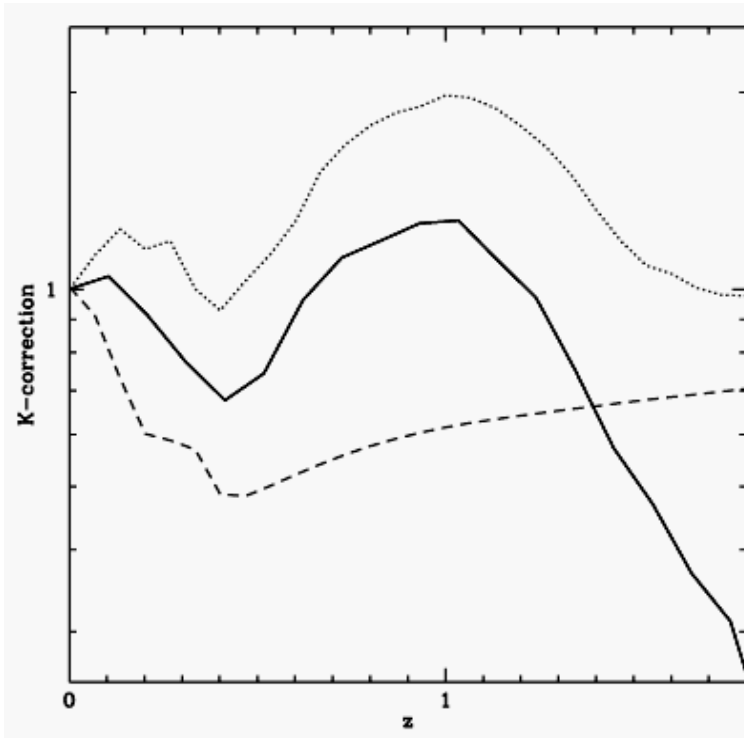


Figura 5

Mostra varie diverse dipendenze della correzione K dal redshift z della sorgente osservata. Le diverse curve si riferiscono a sorgenti con diversi spettri a grande banda. Le correzioni si riferiscono a osservazioni condotte con un filtro a larga banda centrato a $\lambda_0=15 \mu\text{m}$. La curva continua si riferisce allo spettro della sorgente starburst M82, quella a puntini ad una spirale normale. La curva tratteggiata mostra la correzione per osservazioni della spirale condotte invece a $\lambda_0=12 \mu\text{m}$. Anche la banda di osservazione ha quindi un ruolo importante nel definire la correzione K.

Un caso particolare di correzione-K e' illustrato in Figura 6. Se osserviamo sorgenti lontane alle lunghezze d'onda del sub-millimetrico, tra 100 e 1000 μm , a causa della ripidezza dello spettro in questa regione spettrale (ricordiamo che la componente spettrale e' quella delle polveri calde presenti nel mezzo interstellare, discussa in Sez. 2), la correzione-K e' estremamente elevata [$K=(1+z)^{4.5}$]. La conseguenza di questo e' che la densita' di flusso, anziche' diminuire con l'aumentare del redshift della sorgente a causa della maggiore distanza di luminosit', addirittura aumenta con esso: la sorgente appare piu' luminosa al crescere del redshift (come illustrato nelle relazioni flusso-redshift in Fig. 6b, curve rosse e marrone).

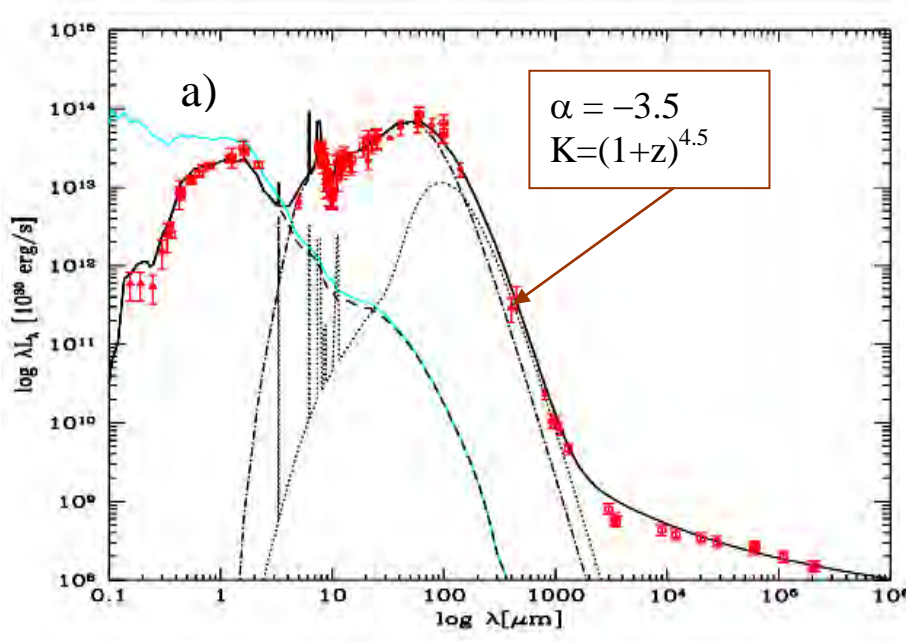


Figura 6
 a) Un caso estremo di correzione-K e' quello che si verifica ad es. nel sub-millimetrico (sopra indicato), dove lo spettro aumenta molto rapidamente al diminuire della lunghezza d'onda. La correzione-K in questo caso e' molto grande e ha una forte dipendenza dal redshift, che fa si' che sorgenti osservate mostrino una densita' di flusso che addirittura aumenta al crescere del redshift [pannello (b), da Blain et al. 2002].

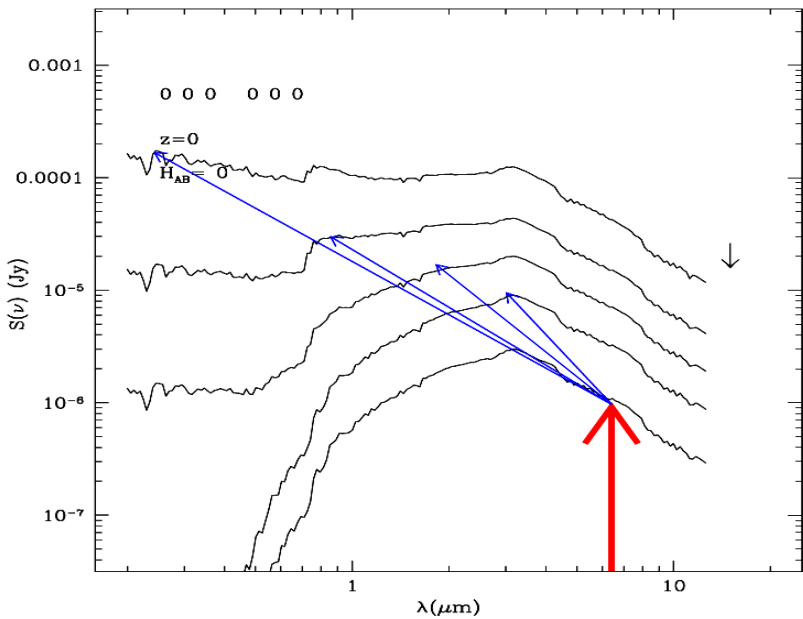
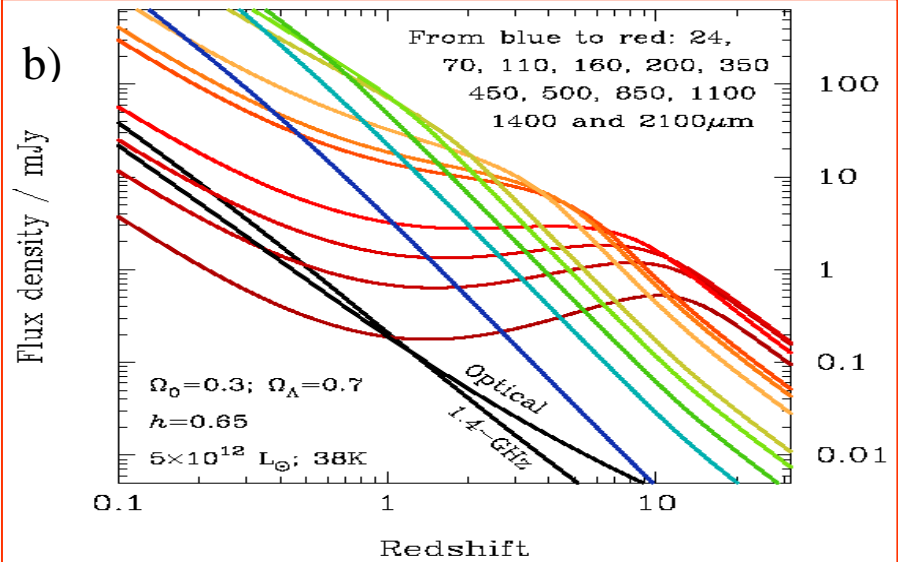


Figura 7
 Effetto combinato della correzione K e della correzione evolutiva. Entrambe vengono conglobate in una unica funzione del redshift, secondo la formula in eq. [8.18]. Come nella precedente figura, si fa riferimento qui ad osservazioni a lunghezza d'onda di 7 microm.

Infine, nelle Fig. 4, 5 e 6 viene assunto che gli spettri della popolazione di sorgenti in esame non dipendano dal tempo cosmico, e quindi dal redshift. In generale, però, per quanto visto nelle Sez. 2 e 4, gli spettri medi cambieranno anche in modo sostanziale con il trascorrere del tempo. Nel caso delle galassie, questo può succedere come conseguenza dell'invecchiamento medio delle popolazioni stellari (si vedano ad es. le Fig. 2.9 e 2.13 della Sez. 2). In presenza di effetti evolutivi negli spettri, spesso si fa riferimento ad una correzione combinata K ed evolutiva, sempre sulla base della definizione della correzione che abbiamo riportato in eq. [8.18]. La quantità $L[v_0(1+z)]$ si può riferire quindi alla luminosità alla frequenza ν_e per una sorgente il cui spettro e la cui luminosità sono calcolati al tempo cosmico corrispondente al redshift z . Una illustrazione è fornita in Figura 7.

8.4 Diagramma di Hubble. Primi vincoli sul parametro q_0 .

Quanto descritto nelle Sez. 8.1, 8.2 e 8.3 ci fornisce concetti e metodi per iniziare ad effettuare misure su sorgenti cosmiche a qualunque distanza spazio-temporale. Ovvero, se consideriamo le dipendenze del flusso dal redshift e dai parametri cosmologici in eq. [8.7], [8.8] e [8.12], per sorgenti di determinata luminosità, possiamo immaginare di utilizzare osservazioni di campioni di sorgenti cosmiche di cui conosciamo la luminosità per ricavare non solo H_0 , ma anche i parametri di densità e di decelerazione, Ω_0 e q_0 .

Il problema ovviamente fondamentale è stabilire la luminosità intrinseca della popolazione. Abbiamo già visto che le funzioni di luminosità delle galassie sono descrivibili come leggi di potenza troncate esponenzialmente (legge di Schechter). È parso quindi naturale fare riferimento alle galassie più luminose in ammassi di galassie come sorta di candele campione. Per oggetti di questo tipo già Hubble stesso aveva graficato la magnitudine apparente in una certa banda contro il redshift misurato per via spettroscopica, utilizzando lo spostamento verso il rosso delle righe spettrali (in emissione o in assorbimento). In questo modo sono stati ottenuti grafici come quello riportato in Figura 8, che vanno sotto il nome di *diagrammi di Hubble* (il primo che li ha utilizzati per ricavare i parametri cosmologici).

L'analisi della Fig.8 ha mostrato che il migliore accordo tra dati e teoria si ottiene con valori di best-fit per il parametro di decelerazione pari a

$$q_0 \approx 1.6 \pm 0.4,$$

valore che implicherebbe un Universo fortemente chiuso ($\Omega_0=3$) con una età $\tau_0 < 0.5/H_0$ (vedi Sez. 7.7), ossia dell'ordine o inferiore a 7 Gyrs, ampiamente inconsistente con l'età stimata degli ammassi globulari più antichi (>10 Gyrs).

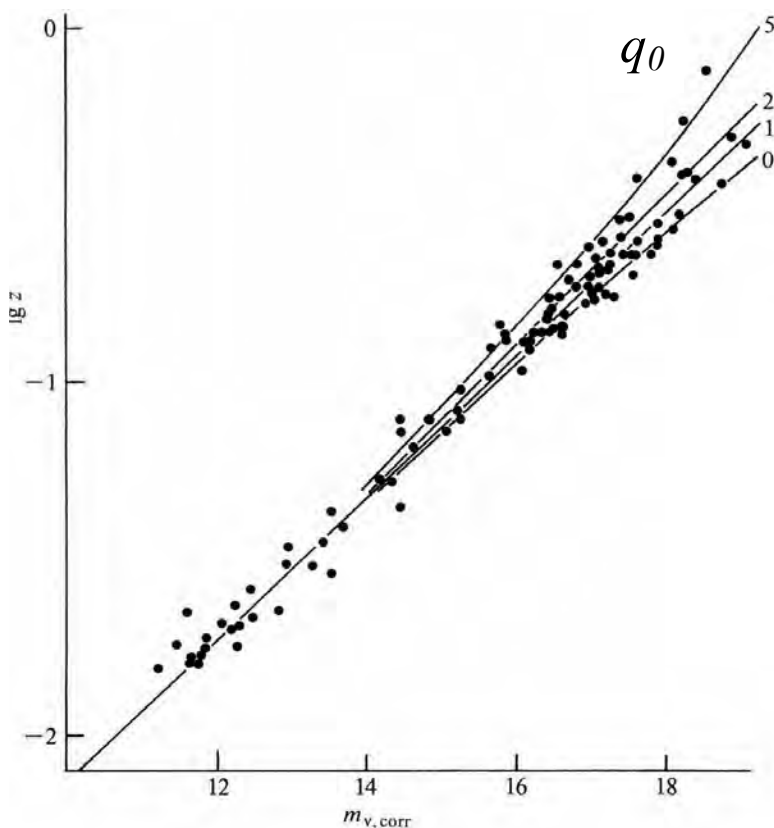


Figura 8

Diagramma di Hubble magnitudine-redshift per le galassie piu' brillanti in 103 ammassi di galassie (campione di Sandage e Visvanathan). In asse Y il logaritmo del redshift, in X la magnitudine V corretta per correzione-K, senza tenere conto dell'effetto evolutivo.

Le diverse curve corrispondono a predizioni basate su diverse scelte per il parametro di decelerazione q_0 . All'aumentare di quest'ultimo, diminuisce in modo continuo la distanza di luminosita' e aumenta il flusso osservato (diminuisce la magnitudine apparente).

Questa inconsistenza viene spiegata considerando che le galassie mutano nel tempo le loro proprieta', come ampiamente discusso nella Sez. 2. Con riferimento alla figura, considerando che le galassie a piu' alti redshift sono piu' giovani, esse contengono anche popolazioni stellari piu' giovani e quindi in media piu' luminose. Una maggiore luminosita' delle galassie lontane spiega che, a parita' di redshift, si ottengano magnitudini apparenti piu' brillanti e quindi valori elevati di q_0 sulla base del diagramma di Hubble. In generale notiamo infatti che all'aumento della curvatura dello spazio-tempo (q_0, Ω_0) le distanze si accorciano in modo sistematico.

Da notare in ogni caso che la dispersione dei valori della magnitudine e' molto elevata, in conseguenza dell'elevato dispersione dei valori di L . Analizzeremo ulteriormente l'effetto evolutivo delle componenti dell'Universo discutendo dei conteggi di sorgenti nella Sez. 9.

Infine, una cosa utile da sottolineare, in particolare per quanto vedremo nel Cap. 10, riguarda la dipendenza della magnitudine apparente dal parametro di decelerazione q_0 , e quindi dal parametro di densita' Ω_0 , espresso in Fig. 8: la magnitudine aumenta, ovvero il flusso diminuisce, al diminuire di q_0 e Ω_0 e risulta massima (minimo il flusso) per $q_0 = 0 = \Omega_0$, corrispondenti al modello cosmologico di Milne (privo di sorgenti di gravita', Sez. 7.3) – infatti l'infinitesimo che domina nella [8.12] e' il q_0^2 a denominatore, come illustrato in Fig. 4.

8.5 Distanza di diametro angolare. Brillanza superficiale.

Potrebbe risultare non intuitivo, a prima vista. Tuttavia in cosmologia, e da un punto di vista osservativo, non esiste un concetto univoco di distanza, salvo la distanza nelle coordinate comoving r_0 di cui si e' detto precedentemente. Esistono diversi modi operativi di definirla, a seconda dei diversi osservabili cui ci si puo' riferire per misurarla. Abbiamo utilizzato nella Sez. 8.2 la relazione luminosita'-flusso di una data sorgente per definirne la distanza di luminosita'. Sfruttiamo ora un altro metodo astronomico per determinare le dimensioni intrinseche di una sorgente cosmica, conoscendone le dimensioni angolari apparenti, cosa che richiede la definizione di una nuova distanza, detta di diametro angolare.

Per definire in modo rigoroso la relazione tra dimensioni apparenti e intrinseche, consideriamo un oggetto di dimensione fisica l posto alla distanza comoving $r=r_0$ e che sottende un angolo $d\theta$, come nello schema di sopra.

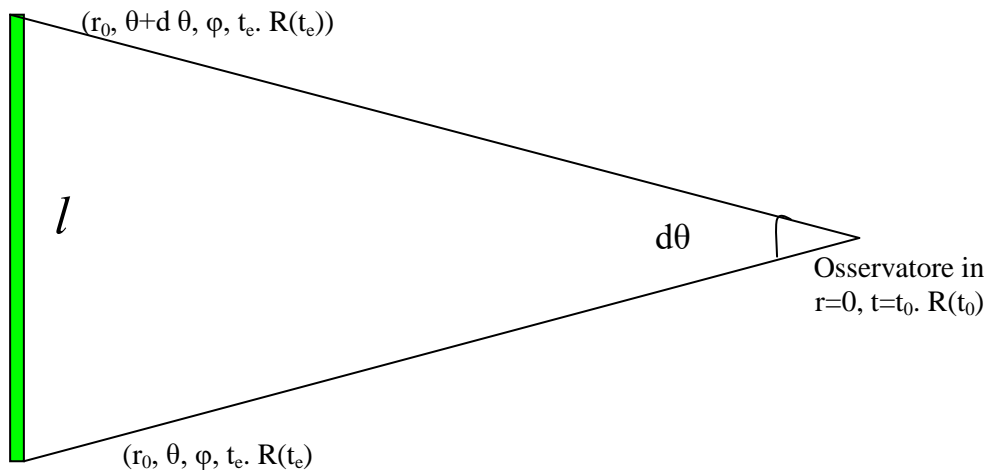
Consideriamo al solito la distanza propria tra gli estremi dell'oggetto:

$$-(c^2 ds^2)^{1/2} \Big|_{dt=0} = \frac{R(t_e) r_0 d\theta}{R_0} = l$$

Cosicche' avremo

$$d\theta = \frac{R_0 l}{R_e r_0} = \frac{l(1+z)}{r_0} = \frac{l}{d_A} \quad [8.21]$$

dove, appunto, la distanza di diametro angolare e' stata definita come rapporto tra dimensione propria della sorgente e la sua dimensione angolare apparente $d_A \equiv \frac{l}{d\theta}$, con angoli al solito espressi in radianti.



Da [8.21] e dalla Mattig [8.11] otteniamo la relazione tra d_{diam} e redshift:

$$d_A = \frac{r_0}{(1+z)} = \frac{c}{H_0} \frac{\left[q_0 z + (q_0 - 1)(\sqrt{1 + 2q_0 z} - 1) \right]}{q_0^2 (1+z)^2} . \quad [8.22]$$

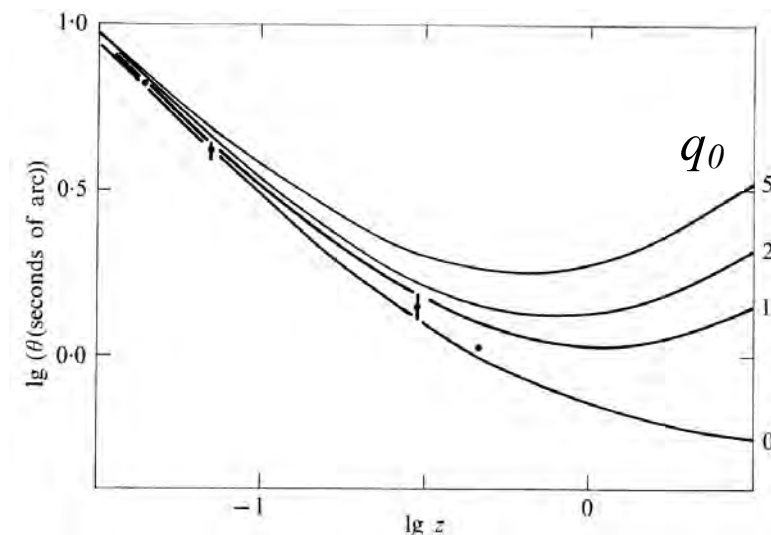


Figura 9

Diametro angolare apparente in funzione del logaritmo del redshift, $d\theta = l/d_A$.

Le diverse curve corrispondono a previsioni basate su diverse scelte per il parametro di decelerazione q_0 (valori indicati a destra). Al crescere di q_0 le curve mostrano un appiattimento a redshift ~ 1 e quindi addirittura un aumento del diametro apparente a z piu' alti.

La Figura 9 illustra l'andamento della dimensione angolare di una sorgente in funzione del redshift, e le sue dipendenze dai parametri cosmologici. Per piccoli valori di z ($z \ll 1$) l'andamento e' quello previsto in un universo Euclideo $d_A \propto z^{-1}$. All'avvicinarsi a $z=1$ si verifica un appiattimento, e per valori di z ancora piu' elevati addirittura una inversione, del tutto inaspettata in un universo Euclideo, nella quale al crescere della distanza spazio-temporale la dimensione apparente della sorgente cresce. Questo effetto e' dovuto al fatto che, per distanze spazio-temporali cosi' elevate, cominciano ad intervenire effetti di curvatura che modificano le traiettorie dei fotoni rispetto alla propagazione rettilinea Euclidea. Poiche' la curvatura dipende dalla quantita' di materia gravitante media nell'unita' di volume, vi sara' una dipendenza dai parametri di decelerazione e densita', come mostrato nella Fig. 8. Possiamo vedere la cosa come un effetto di "lente gravitazionale" operata dall'intero Universo e il cui risultato e' di ingrandire le dimensioni apparenti di oggetti lontanissimi.¹

Le dimensioni apparenti e le distanze di diametro angolare per sorgenti di cui si riteneva di conoscere le dimensioni fisiche intrinseche sono pure state utilizzate per test cosmologici. Sono state utilizzate, allo scopo, le dimensioni angolari e i redshift delle galassie piu' brillanti d'ammasso, oppure dei nuclei (*cores*) degli ammassi di

¹ Approfondiremo questo effetto di "lente gravitazionale" nel corso di Cosmologia della Magistrale.

galassie, o le dimensioni di alcune categorie di radiogalassie. In questi casi, i valori del parametro di decelerazione che si ottengono tendono ad essere bassi, in media:

$$q_0 \approx 0$$

L'utilizzo del test in riferimento alle dimensioni angolari di radiosorgenti compatte osservate con il sistema interferometrico ad altissima risoluzione VLBI e' consistente invece con $\Omega_0 = 1$, $q_0 = 0.5$, come mostrato in Figura 10.

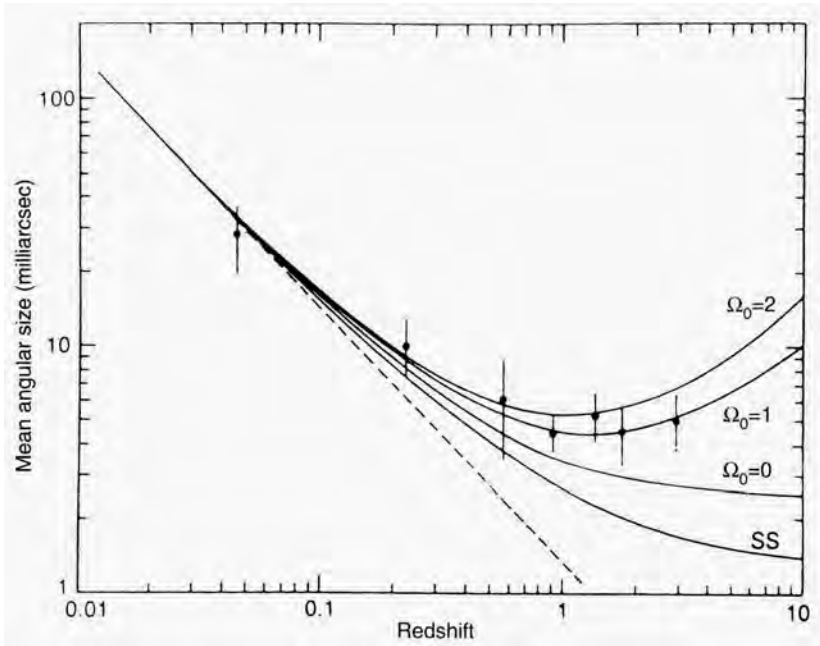


Figura 10

Diametro angolare apparente (in milli-arcsec) in funzione del redshift per 82 radiosorgenti compatte osservate con tecnica interferometrica a super-risoluzione VLBI (da Kellermann et al., Nature, 1993).

Le diverse curve corrispondono a predizioni basate su diverse scelte per il parametro di densità Ω_0 .

E' interessante, tra le altre cose, il confronto tra le proprietà della distanza di diametro angolare e la distanza di luminosità'. Esse hanno in particolare due dipendenze molto diverse dal redshift (vedi [8.8]), che portano alla relazione

$$d_A = \frac{r_0}{(1+z)} = \frac{d_L}{(1+z)^2} \quad [8.23]$$

A ciò collegato, vi e' un altro importante osservabile, la **brillanza superficiale**, definita come il flusso di una sorgente cosmica per unità di area di cielo:

$$\mu = \frac{S}{(d\theta)^2} \propto d_L^{-2} d_A^2 \propto (1+z)^{-4} . \quad [8.24]$$

Quindi la brillantezza superficiale di un oggetto diminuisce molto rapidamente al crescere del redshift z . Da notare che, invece, μ non varia al cambiare della distanza in un universo Euclideo (ossia finché $z \ll 1$), in quanto il flusso scala in questo limite con il quadrato della distanza nello stesso modo con cui scala l'area di cielo coperta dalla sorgente. Solo quando z si avvicina o supera il valore di $z=1$, il taglio

$\propto (1+z)^{-4}$ si fa sentire. Questo andamento e' d'altra parte facilmente prevedibile se si consideri che da una parte il flusso e' $\propto(1+z)^{-2}$, e dall'altra che ad alti redshift le dimensioni angolari delle sorgenti aumentano anziche' diminuire, cosa che fa diminuire ulteriormente il valore della brillantezza superficiale.

Le conseguenze della [8.24] sono alquanto serie per quanto riguarda lo studio di strutture cosmiche diffuse (quali le galassie) ad alti redshifts. Il fattore di penalizzazione $(1+z)^{-4}$ diviene rapidamente molto alto a $z=1$ e superiori, cosa che si somma ad una eventuale correzione K di segno negativo nel caso ad esempio di osservazioni in ottico. Il risultato e' che osservazioni di galassie a $z>1$ richiedono enormi tempi di integrazione con i piu' potenti telescopi (ad es. HST) per arrivare a rilevare tali strutture diffuse.

8.6 Relazioni tempo-redshift.

Abbiamo visto nelle Sez. precedenti le relazioni che intercorrono tra la nostra misura fondamentale di distanza nello spazio-tempo, il redshift z , e le distanze cosmiche di carattere operativo, d_L e d_A . Vediamo ora brevemente un'altra relazione fondamentale, quella tra redshift e tempo cosmico. Anche questa relazione e' mediata dai parametri cosmologici. Cio' si ottiene facilmente generalizzando quanto gia' ricavato in Sez. 7.7. Dalla [7.15] abbiamo:

$$\dot{R} = R_0 H_0 (\Omega_0 (1+z) - \Omega_0 + 1)^{1/2} = R_0 H_0 \sqrt{1 + \Omega_0 z}$$

cosi'

$$t(z) = \int_0^t dt = \int_0^t \frac{dR}{\dot{R}} = \int_0^t \frac{dR}{R_0 H_0 \sqrt{1 + \Omega_0 z}} \quad . \quad [8.25]$$

$$\dot{R} = H_0 R_0 \sqrt{1 + \Omega_0 z}, \quad \frac{dR}{R_0 dt} = H_0 \sqrt{1 + \Omega_0 z}, \quad \text{da cui}$$

$$dt = \frac{\frac{dR}{R_0}}{H_0 \sqrt{1 + \Omega_0 z}} = \frac{d(1+z)^{-1}}{H_0 \sqrt{1 + \Omega_0 z}}, \quad \text{con} \quad d(1+z)^{-1} = -\frac{dz}{(1+z)^2}$$

ed infine

$$\frac{dz}{dt} = -H_0 \sqrt{1 + \Omega_0 z} (1+z)^2$$

$$t(z) = \frac{1}{H_0} \int_z^\infty \frac{dz}{(1+z)^2 \sqrt{1 + \Omega_0 z}}$$
[8.26]

E' molto semplice integrare numericamente questa relazione. Analogamente a quanto precedentemente fatto in [7.7], possiamo anche integrare analiticamente, ponendo

$$x \equiv (\Omega_0 - 1) / [\Omega_0 (1 + z)] \quad \text{se } \Omega_0 > 1$$

ottenendo cosi' il tempo dal Big Bang

$$t(z) = \frac{\Omega_0}{H_0 (\Omega_0 - 1)^{3/2}} \left[\arcsin x^{1/2} - x^{1/2} (1 - x)^{1/2} \right].$$

Analogamente per $\Omega_0 < 1$:

$$x \equiv (1 - \Omega_0) / [\Omega_0 (1 + z)], \quad t(z) = \frac{\Omega_0}{H_0 (1 - \Omega_0)^{3/2}} \left[x^{1/2} (1 + x)^{1/2} + \arcsin hx^{1/2} \right]$$

Gli andamenti del tempo dal Big Bang ($t=0$) al tempo cosmico corrispondente a z e del tempo da ora al redshift z sono riportati in Figure 11 e 12 rispettivamente.

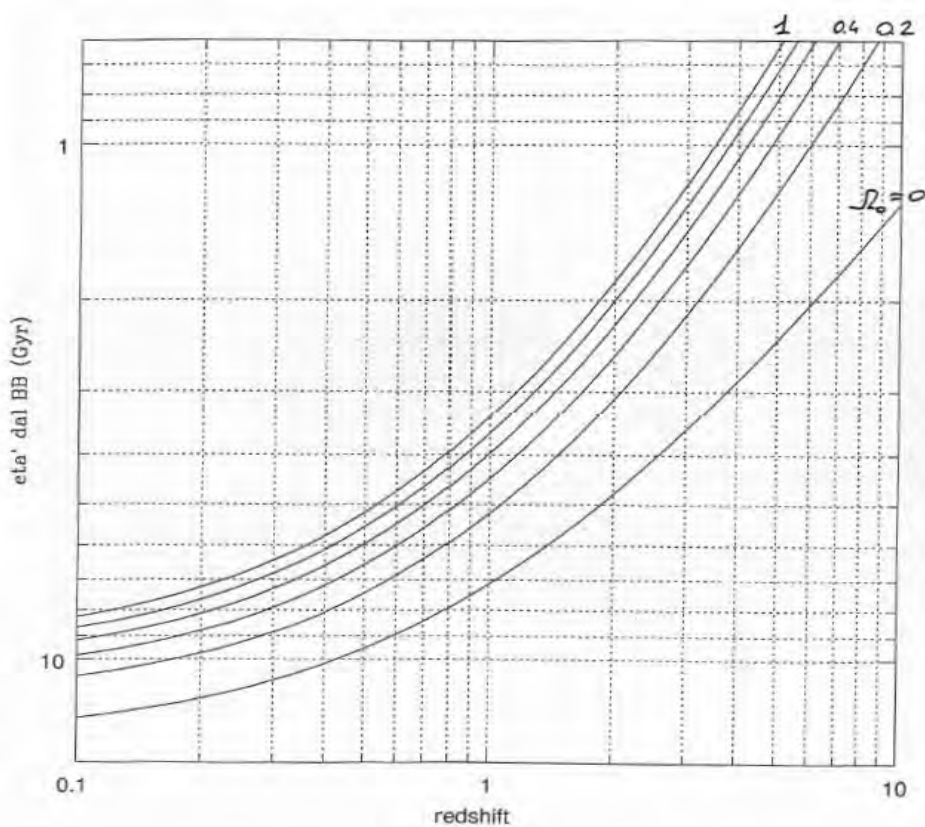


Figura 11

Tempo in Gyrs (miliardi di anni) dal Big Bang al tempo corrispondente al redshift z , in funzione del redshift.

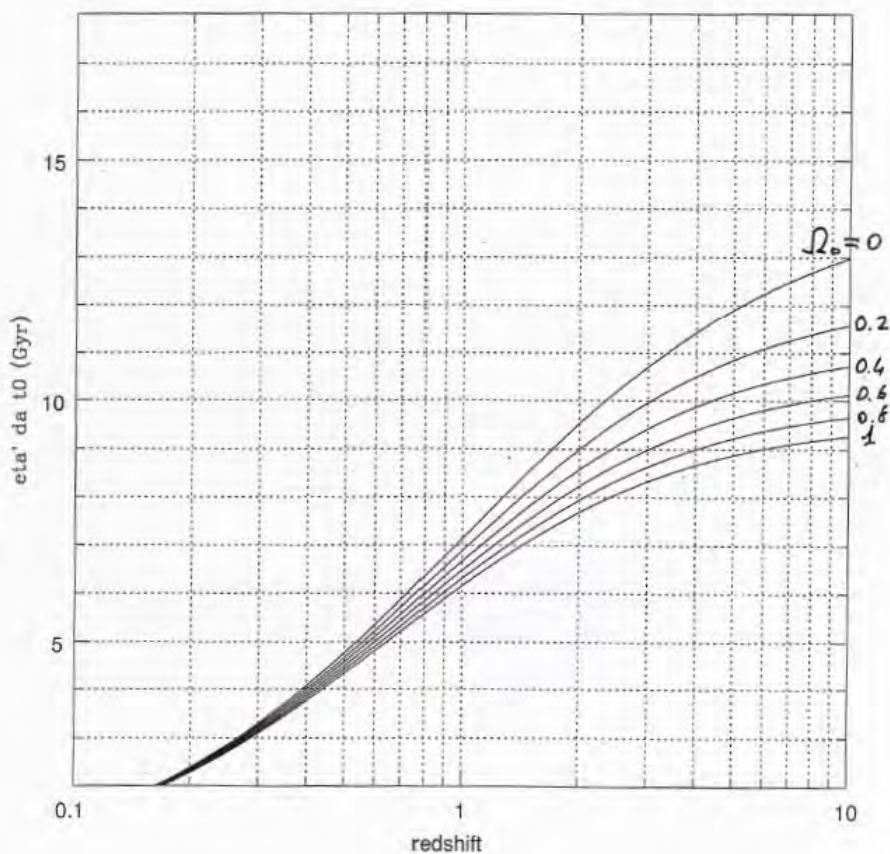


Figura 12

Tempo in Gyrs (miliardi di anni) dal tempo cosmico attuale al tempo corrispondente al redshift z , in funzione del redshift.

APPENDICE 8A:

LA RELAZIONE DI MATTIG.

La relazione di Mattig fornisce essenzialmente un legame formale tra la coordinata radiale comoving r_0 e il redshift, mediato dai parametri cosmologici. Ha avuto un grande importanza per la cosmologia osservativa, anche da un punto di vista storico (vedi Appendice 8B). La sua deduzione richiede un po' di calcolo. Iniziamo con l'integrare radialmente la Robertson-Walker [8.0],

$$\int_{R_0/(1+z)}^{R_0} \frac{c R_0 dR}{R \dot{R}} = \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \begin{cases} \arcsin(r_0) & \text{se } k=1 \\ r_0 & \text{se } k=0 \\ \arcsin h(r_0) & \text{se } k=-1 \end{cases} \quad [8A.1]$$

dove nel membro a sinistra occorre porre la Friedmann come in eq. [7.15], sufficientemente semplificata. Limitiamo la seguente derivazione al caso di universo chiuso $k=1$, considerando che gli altri casi hanno un trattamento identico (sostituendo ad es. al solito i sin con sinh, ecc.). Allora riscriviamo la Friedmann:

$$\frac{\dot{R}^2}{c^2} = \frac{8\pi G \rho_0 R_0^3}{3c^2 R} - k = \frac{\alpha}{R} - 1, \quad \text{avendo definito } \alpha \equiv \frac{8\pi G \rho_0 R_0^3}{3c^2} \quad [8A.2]$$

ovvero

$$\begin{aligned} \frac{\dot{R}}{c} &= \left(\frac{\alpha}{R} - 1 \right)^{1/2}, \quad \text{e la [8A.1]} \quad \int_{R_0/(1+z)}^{R_0} \frac{c R_0 dR}{R \dot{R}} = \int_R^{R_0} \frac{dR}{R \sqrt{\frac{\alpha}{R} - 1}} = \\ &= \int_R^{R_0} \frac{dR}{\sqrt{\alpha R - R^2}} \equiv \chi(R) \end{aligned} \quad [8A.3]$$

che deve essere un po' elaborata per renderla analiticamente integrabile:

$$\begin{aligned} \int_R^{R_0} \frac{dR}{\sqrt{\alpha R - R^2}} &= \int_R^{R_0} \frac{dR}{\sqrt{\alpha R - R^2 + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^2}{4}}} = \int_R^{R_0} \frac{dR}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \left(R - \frac{\alpha}{2}\right)^2}} \\ &= \frac{2}{\alpha} \int_x^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{\alpha}\right)^2}} = \int_x^{x_0} \frac{d(2x/\alpha)}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{\alpha}\right)^2}}, \quad \text{avendo posto } x \equiv R - \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

poiche' $dR = dx$. Ora l'integrale e' analitico e da'

$$\chi(R) = \arcsin(2x/\alpha) \Big|_{2R_0/\alpha(1+z)-1}^{2R_0/\alpha-1} = \arcsin\left(\frac{2R_0}{\alpha}-1\right) - \arcsin\left(\frac{2R_0}{\alpha(1+z)}-1\right).$$

La coordinata radiale comoving r sara' dunque data dalla inversione della [8A.1]:

$$r = \sin[\chi(R)] = \sin\left[\arcsin\left(\frac{2R_0}{\alpha}-1\right) - \arcsin\left(\frac{2R_0}{\alpha(1+z)}-1\right)\right]$$

per la quale dovremo usare la $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$, e, dove occorre, considerare che $\cos(\arcsin b) = \sqrt{1-b^2}$, per cui

$$r = \sin[\chi(R)] = \left(\frac{2R_0}{\alpha}-1\right)\left(1-\left[\frac{2R_0}{\alpha}-1\right]^2\right)^{1/2} - \left(\frac{2R_0}{\alpha(1+z)}-1\right)\left(1-\left[\frac{2R_0}{\alpha(1+z)}-1\right]^2\right)^{1/2}$$

Occorre ora considerare che, poiche' dalla prima eq. dinamica [7.1] e dalla

definizione [7.10], si ha $\ddot{R} = -\frac{4\pi G\rho R_0^3}{3R^2}$, $-\frac{\ddot{R}}{R_0}\Big|_{t_0} = \frac{4\pi G\rho_0 R_0^2}{3R_0^2} = q_0 H_0^2$, ma

$kc^2 = H_0^2 R_0^2 (2q_0 - 1)$, con $k = 1$, per cui $\frac{c^2}{H_0^2 R_0^2} = (2q_0 - 1)$, dunque

$$\frac{2R_0}{\alpha} = \frac{3c^2}{4\pi G\rho_0 R_0^3} = \frac{c^2}{q_0 H_0^2 R_0^2} = \frac{2q_0 - 1}{q_0}. \quad \text{Per cui}$$

$$r = \left(\frac{q_0 - 1}{q_0}\right)\left(1-\left[\frac{q_0 - 1}{q_0}\right]^2\right)^{1/2} - \left(\frac{2q_0 - 1}{q_0(1+z)}-1\right)\left(1-\left[\frac{2q_0 - 1}{q_0(1+z)}-1\right]^2\right)^{1/2}$$

che, dopo un po' di elementare algebra, diventa:

$$r_0 = \frac{c}{H_0} \frac{q_0 z + (q_0 - 1)(\sqrt{1 + 2q_0 z} - 1)}{q_0^2 (1 + z)}. \quad [8A.5]$$

E' la relazione di Mattig. Si tratta di una espressione generale, che vale per qualunque valore di q_0 (si noti infatti che per la deduzione sopra abbiamo assunto il caso $q_0 > 0.5$, il caso con $q_0 < 0.5$ sarebbe stato identico con la sostituzione delle funzioni arcsin con arcsinh). L'unica limitazione e' che abbiamo assunto equazioni dinamiche standard di Friedmann tipo [7.1-2] e [7A.36], e prive del termine Λ di costante cosmologica che ad es. compare in [7A.40-41].

APPENDICE 8B (NOTA STORICA)

THE MATTIG REVOLUTION 1958-1959 (from Allan Sandage, 1998)

Now we come to the watershed for practical cosmology itself in a fundamental development that changed the field.

Reading most of the many papers on observational cosmology before the early 1960s, nowhere does one see the modern approach of solving the Friedmann equation that describes the development of the scale factor $R(t)$ with time, and how the closed form of $R(t)$ for arbitrarily high z is to be used to obtain the exact equations necessary to interpret the observations, valid for all redshifts. What in fact is the correct equation for the interval "distance," r , as a function of redshift?

Before the correct equations became known in the late 1950s, all relations involving observed magnitudes, angular diameters, redshifts, spatial volumes, and the consequently $N(m)$ counts were given in Taylor series expansions in z , using only $R(t_0)$ and the first several derivatives of $R(t)$ about the present epoch. The only assumption on $R(t)$ was that it is a smooth enough function for the Taylor expansion to mean something. These series expansions, while good for small redshifts, were worthless for redshifts larger than perhaps 0.3, which was in fact near the limit of redshifts known even in the late 1950s.

What is remarkable about this situation is that the Friedmann equation and its solution never entered most of these papers at the interface between theory and observation. Examples are the marvelously complicated series-expansion papers by Davidson (1959a, b, 1960), and even more remarkably, the first edition of the famous text book by McVittie (1956).

The developments that began the modern era were the derivations of all the relevant equations using the Friedmann equation to give the explicit solutions of $R(t)$ for all t (i.e., for arbitrarily high redshifts). Remarkably, the complete development is set out in two short papers by Mattig (1958, 1959). In the first he derives the famous $r(z, q_0)$ relation [8A.5]. The paper is only three pages long. The second, in which he derives the volume elements (both Euclidean and noneuclidean) also as functions of z and q_0 is done in only two pages.²

Yet these two papers changed the subject. An example is the second edition of McVittie's (1965) text book where every equation in practical cosmology is based on Mattig, in contrast to the 1956 first edition where everything is in series expansions of $R(t)$, sans even the Friedmann equation as a guide.

² In a later paper Mattig (1968) introduced closed equations valid for a finite cosmological constant.

The important point for our purposes is the comparison of Mattig's exact theory with Hubble's intuitive assumption for the relation between interval "distance" and redshift³. Hubble's assumption for an (R_0r, z) relation was,

$$R_0r = \frac{c}{H_0}z \quad [8B.6]$$

The correct (Mattig 1958) equation for any q_0 and z is equation [8A.5] above, for which the two most interesting special cases are for $q_0 = 0$ in a zero density (massless) universe, and $q_0 = 1/2$ for flat spacetime curvature.

The step beyond equation [8A.5] in Mattig's derivation is to use the Robertson (1938) equation for how the received flux of a source of absolute luminosity, L , varies with redshift⁴. This equation relates the redshift and the received bolometric luminosity, l , with L and with the interval "distance" R_0r from equation [8A.5] as obtained in the eq. for the luminosity distance [8.7] to finally obtain the predicted count-brightness $N(m)$ relation for galaxies distributed uniformly back in space. (5) This prediction also differs from Hubble's assumption that $\log N(m) \sim 0.6m$ for a space with zero curvature.

Fig. 5 shows the Mattig (1959) predictions for the $N(m)$ count distribution in the ideal case of a single fixed absolute luminosity (a delta function luminosity distribution) for the counted galaxies, bolometric magnitudes (i.e., corrected for K dimming, both selective and non-selective), and no evolution, either luminosity or density, in the look-back time. The differences between the Hubble assumption (the upper dashed line) and the exact Mattig predictions above are evident in Fig. 5.

³ See McVittie (1974) for an interesting discussion of why "distance" is an ambiguous concept in cosmology, differing depending on the parameters used to measure it. Because of this ambiguity, it is necessary that no equations that connect observables should contain "distance" in their final form. The equations must all be constituted to contain only the directly observed parameters of flux, angular size, and redshift.

⁴ The crucial Robertson equation (4.5) was in contention for many years, with arguments of various subtleties occurring between such giants as de Sitter, von Laue, Tolman, Vogt, and others as to whether the factors of $(1 + z)$ in the denominator should be as shown or rather only the first power, or even to the third power. Robertson gave the definitive proof of equation (4.5) in the cited reference.

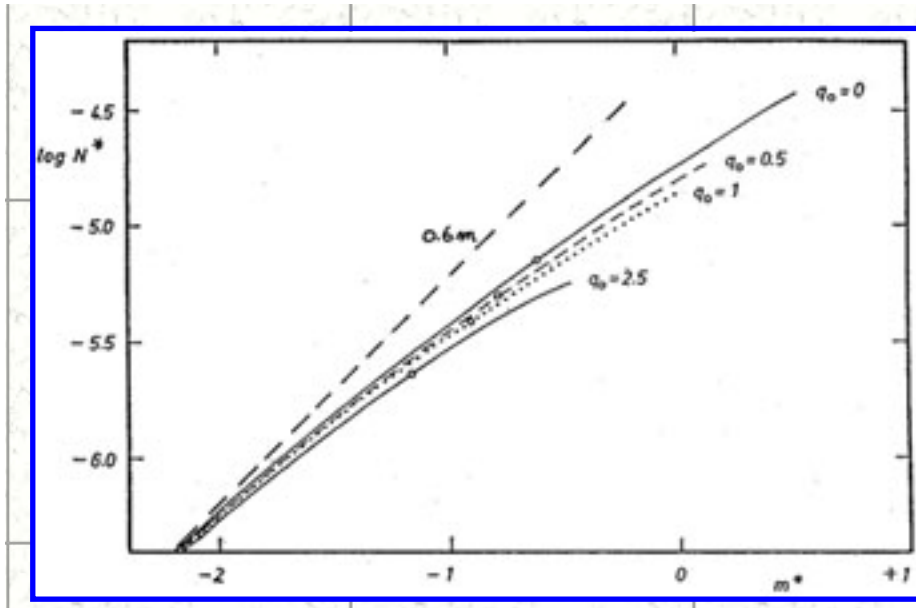


Figure 5. Comparison of Hubble's assumption of the expected $\log N(m) \sim 0.6m$ relation (upper dashed line) with the correct Mattig (1959) prediction (no evolution) in closed form, based on the solution of the Friedman equation, rather than on previous formulations via series expansions in z . Diagram from Mattig (1959) with Hubble's assumption put in as the dashed line.

In this and the previous section we have seen how (1) errors in the K term evaluation, (2) errors in the apparent magnitude scale, and (3) errors in the precepts of the proper equations for "distances" and the consequent variation of apparent magnitude with distance for arbitrarily high redshifts affected Hubble's conclusions. The two remaining considerations concerning these conclusions are (a) a comparison of Hubble's $N(m)$ count data with the modern counts, and (b) replacing Hubble's analysis that used mean values for absolute magnitude and the apparent magnitudes at given redshifts by proper distribution functions of (m, z) and $(M, \text{morphological type})$ luminosity functions.

9. CONTEGGI DI SORGENTI. RADIAZIONI NEL COSMO. STORIA DELLA FORMAZIONE STELLARE E DELLE GALASSIE.

I conteggi di sorgenti cosmiche costituiscono, come già precedentemente anticipato, un importante osservabile cosmologico. I conteggi di galassie in funzione del flusso (sia conteggi integrali che differenziali, secondo quanto discusso in Sez. 3 e 4) hanno fornito un metodo di indagine del cosmo già con l'iniziatore della cosmologia osservativa moderna, Edwin Hubble. Per un po' i conteggi di sorgenti (galassie o radio-galassie) sono stati considerati anche come osservabile fondamentale per vincolare, se non misurare, i parametri cosmologici, in particolare il parametro di densità q_0 . Finché non si realizzi che le proprietà evolutive delle sorgenti, menzionate nella precedente Sez. 4, impediscono nella realtà un uso di questo genere, una situazione nella quale sono piuttosto le proprietà evolutive delle sorgenti cosmiche ad essere oggetto di indagine tramite i conteggi. Infine, uno dei temi maggiormente dibattuti della cosmologia osservativa negli ultimi decenni ha riguardato le radiazioni cosmiche di fondo scoperte via via a partire dalla banda X, a quella gamma, nelle microonde, nel radio, nell'ottico ed infine nell'infrarosso. Vi è ovviamente una profonda relazione tra sorgenti cosmiche in una certa banda e la radiazione diffusa, relazione che è determinata appunto dai conteggi. Queste varie problematiche sono brevemente discusse nella presente Sezione, assieme ad una breve sintesi della storia cosmica della formazione delle stelle e degli elementi chimici nelle stelle, derivata dai dati osservativi.

Abbiamo accennato ad un uso di conteggi di sorgenti nella Sez. 3 nel caso di un universo Euclideo (ovvero limitatamente a sorgenti a $z \ll 1$). Generalizziamo ora questo calcolo sulla base della descrizione dell'Universo elaborata nelle Sez. precedenti.

9.1 Il calcolo dei volumi cosmici.

Occorre in primo luogo definire procedure rigorose di calcolo dei volumi, sempre basate sulla metrica RW

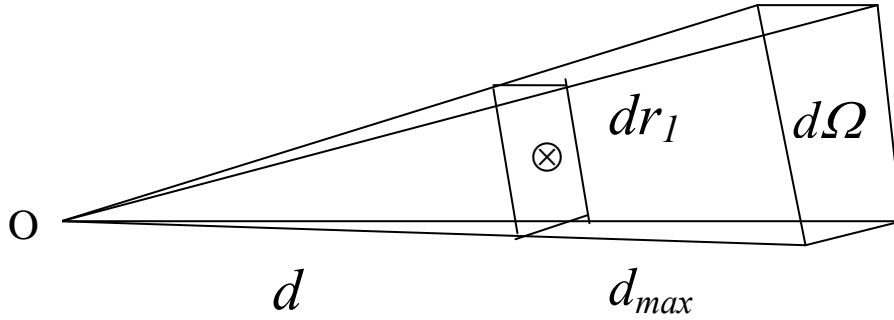
$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} \frac{R^2(t)}{R_0^2} \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]$$

Il volume proprio infinitesimo (nel sottospazio fisico a 3D) compreso tra la coordinata comoving r_1 e $r_1 + dr_1$ e compreso entro un angolo solido

$$d\Omega = d\theta \cdot \sin \theta d\phi$$

rispetto ad un certo osservatore O sarà dato da

$$dV = \frac{R(t)dr_1}{R_0^3\sqrt{1-kr_1^2}} \cdot R(t)r_1d\theta \cdot R(t)r_1\sin\theta d\phi$$



cosicche' il volume per unita' di angolo solido ($d\Omega=1$) e'

$$dV = \frac{R^3(t)r_1^2 dr_1}{R_0^3\sqrt{1-kr_1^2}} . \quad [9.0]$$

Possiamo anche esprimere il volume in termini del redshift, la nostra fondamentale misura di distanza radiale, $c dt = R(t) dr_1 / R_0 \sqrt{1-kr_1^2}$:

$$dV = c \frac{R^2(t)}{R_0^2} r_1^2 dt = \frac{dV}{dz} dz$$

Utilizzando ora la Mattig [8.11] per esprimere r_1 e la relazione tempo-redshift [8.26]

$$dt = -\frac{1}{H_0} \frac{dz}{\sqrt{1+\Omega_0 z} (1+z)^2} , \quad \text{si ottiene infine per il differenziale del volume}$$

proprio (non *comovente*) per angolo solido unitario:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dz} &= \left(\frac{c}{H_0} \right)^3 q_0^{-4} \frac{(1+z)^{-6}}{\sqrt{1+2q_0 z}} \cdot \left[zq_0 + (q_0 - 1) \left(\sqrt{1+2q_0 z} - 1 \right) \right]^2 = \\ &= \frac{c}{H_0} \frac{d_L^2}{(1+z)^6 \sqrt{1+2q_0 z}} \quad \text{avendo usato la Mattig e } d_L = r_1(1+z) . \end{aligned} \quad [9.1]$$

Il *volume comovente* e' dato semplicemente dalla [9.1] moltiplicata per $(1+z)^3$.

9.2 Conteggi di sorgenti nel limite di bassi redshifts e flussi brillanti.

Elaboriamo in questa Sez. un calcolo (ripreso da Weinberg, *Gravitation & Cosmology*) dei conteggi integrali nel limite di flussi molto brillanti. Questo ci

permette di sviluppare l'argomento dell'integrale doppio dei conteggi in modo analitico, per evidenziare le principali dipendenze.

Assumiamo dunque di effettuare conteggi di sorgenti operando una selezione completa in flusso sulla base di osservazioni alla frequenza fotonica ν_0 . Allo scopo di interpretarne gli andamenti, assumiamo anche di conoscere la funzione di luminosita' della popolazione di sorgenti che contribuiscono ai conteggi. Secondo quanto discusso nella Sez. 3, la funzione di luminosita' $\Phi(t,L)dL$ fornisce il numero di sorgenti per unita' di volume e per unita' di intervallo di luminosita' al tempo cosmico t . Ovviamente, per quanto visto nella Sez. 8.3, se vogliamo considerare il contributo ai conteggi di sorgenti che si trovano ad un determinato tempo cosmico passato t , dovremo anche considerare la luminosita' alla frequenza trasformata $L[\nu_0(1+z)]$. In quanto segue, la luminosita' L e' considerata per unita' di frequenza (ad es. in $erg/sec/Hz$ nel sistema CGS), e pure il flusso e' per unita' di frequenza (parliamo di densita' di flusso, ad es. in $erg/cm^2/sec/Hz$).

Il prodotto del differenziale di volume [9.1] per la funzione di luminosita' fornira' il numero di sorgenti presenti in quel volumetto per unita' di angolo solido ($d\Omega=1$):

$$dN = \Phi(t,L)dL \cdot dV = \frac{R^3(t)r_1^2 dr_1}{R_0^3 \sqrt{1-kr_1^2}} \Phi(t,L)dL$$

ove $\Phi(t,L)$ e' definita per unita' di volume proprio. L'integrale si puo' altresì esprimere cambiando variabile da r_1 al tempo t , sempre tramite la [9.0]:

$$dr_1 = -(1-kr_1^2)^{1/2} c dt_1 R_0 / R(t_1), \text{ cosicche'}$$

$$dN = cR_0^{-2} R^2(t)r_1(t_1)^2 dt_1 \cdot \Phi(t,L)dL. \quad [9.2]$$

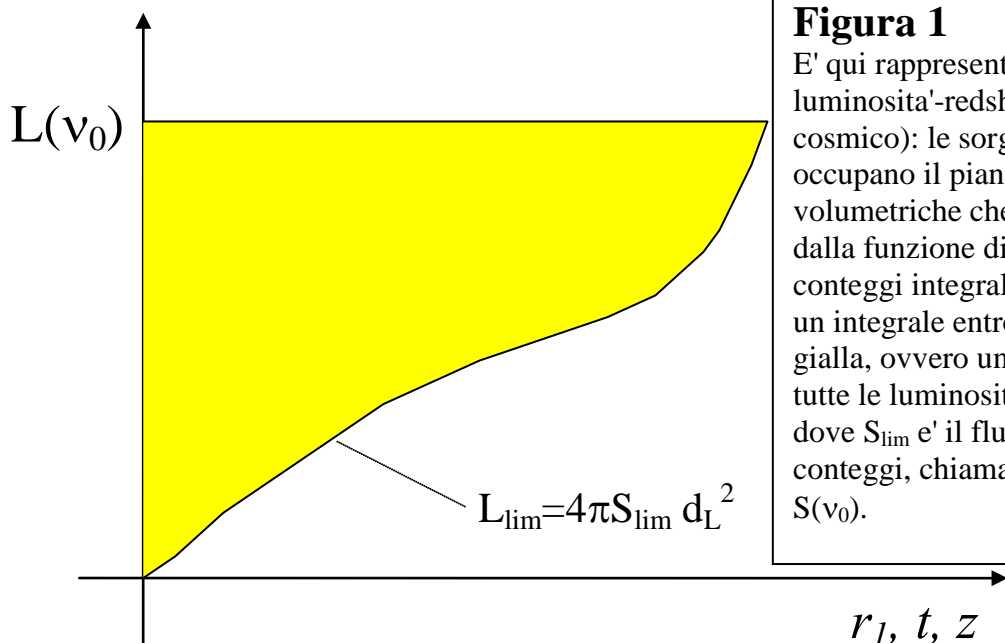


Figura 1

E' qui rappresentato il piano luminosita'-redshift (o tempo cosmico): le sorgenti occupano il piano con densita' volumetriche che dipendono dalla funzione di luminosita'. I conteggi integrali sono dati da un integrale entro la parte gialla, ovvero un integrale su tutte le luminosita' $L > L_{lim}$, dove S_{lim} e' il flusso limite dei conteggi, chiamato anche $S(\nu_0)$.

Occorre ora effettuare l'integrale sul tempo o sulla coordinata radiale comoving per calcolare il numero totale di sorgenti. Ovviamente dovremo porre adeguati limiti per tenere conto del fatto che un campionamento completo sara' comunque limitato in flusso (*flux-limited*) al di sopra di una certa densita' di flusso S (si veda al proposito la Figura 1). Occorre quindi utilizzare la relazione della distanza di luminosita' [8.8] e [8.15]:

$$S_0 = S(v_0) = \frac{L(v_e)(1+z)}{4\pi \cdot d_L^2} = \frac{L[v_0(1+z)]}{4\pi \cdot r_1^2(1+z)} \quad [9.3]$$

e quindi per i conteggi integrali avremo un integrale doppio

$$N(> S, v_0) = cR_0^{-2} \int_0^\infty dL \int_{t_S(L)}^{t_0} R^2(t) r_1^2(t_1) \cdot \Phi(t_1, L[v_0(1+z)]) dt_1 \quad [9.4]$$

dove il limite inferiore $t_S(L)$ e' ricavabile dalla relazione [9.3]:

$$r^2(t_S) = \frac{L[v_0(1+z)]}{4\pi S_{v_0}(1+z)} \quad [9.5]$$

E' utile semplificare la situazione al caso di spettri a legge di potenza $L(v) \propto v^{-\alpha}$. Poiche' una particolarmente importante applicazione in questa Sez. sara' fornita dai conteggi di radio-sorgenti, l'indice spettrale che per loro si applica mostra un valore caratteristico $\alpha_R=0.7$ (si veda Sez. 12). Per osservazioni in bande che non siano la radio, l'indice spettrale medio puo' assumere, come vedremo, valori assai diversi e persino negativi. La [9.5] si semplifica allora:

$$r^2(t_S) = \frac{L[v_0]}{4\pi S_{v_0}(1+z)^{1+\alpha}} \quad [9.6]$$

Il problema principale ora e' quello di esprimere la variazione della funzione di luminosita' al variare del tempo cosmico e della frequenza (le due cose sono ovviamente, per quanto detto, legate tra loro). Per quanto riguarda questa seconda, potremo imporre un criterio di conservazione del numero di sorgenti, tale che

$$\Phi(t, L[v])dL(v) = \Phi(t, L[v_0])dL(v_0)$$

$$\Phi(t, L[v]) = \Phi(t, L[v_0])dL(v_0) / dL(v) = \left(\frac{v}{v_0}\right)^\alpha \Phi(t, L[v_0]) \quad [9.7]$$

$$\text{poiche' } L[v_0] = \left(\frac{v}{v_0}\right)^\alpha L[v]$$

(d'ora in poi il tempo alla sorgente t_l viene indicato con t). Si puo' cosi' esprimere la variazione della $\Phi(t, L)$ in funzione della dipendenza dalla frequenza utilizzando la [9.7]. Sviluppiamo allora in serie la $\Phi(t, L)dL$ in un intorno di frequenza piccolo

attorno a v_0 , corrispondente ad un piccolo intervallo attorno a t_0 , in quanto vogliamo calcolare per il momento i conteggi entro un limitato intervallo di redshift attorno all'osservatore. Otterremo così:

$$\begin{aligned}
 \Phi(t, L[v]) &= \Phi(t, L[v_0]) + \left. \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right|_{v=v_0} \frac{dv}{v_0} + \dots \\
 &= \Phi(t, L[v_0]) + \alpha \left(\frac{v}{v_0} \right)^{\alpha-1} \left. \Phi(t_0, L[v_0]) \right|_{v_0} \frac{dv}{v_0} + \dots \\
 &= \Phi(t, L[v_0]) \{1 - \alpha H_0 (t_0 - t) + \dots\}
 \end{aligned} \tag{9.8}$$

avendo considerato che

$$\frac{dv}{v_0} = z, \quad \text{e dalla Hubble } \frac{c}{H_0} z = \text{distanza}, \quad \text{e } \frac{z}{H_0} = \frac{\text{distanza}}{c} = t - t_0.$$

Per quanto riguarda invece la dipendenza esplicita di $\Phi(t, L)$ dal tempo, se non vi è creazione o distruzione di sorgenti avremo (ricordiamo n è in unità proprie)

$$\Phi(t, L[v]) = \left[\frac{R(t_0)}{R(t)} \right]^3 \Phi(t, L[v_0]) dL(v_0). \tag{9.9}$$

Tuttavia questo non sarà vero in generale in presenza di evoluzione delle sorgenti. Più in generale, possiamo quindi definire un parametro che stabilisca il ritmo di evoluzione della funzione di luminosità con il tempo cosmico

$$\beta_0 \equiv H_0^{-1} \frac{1}{\Phi[t, L(v)]} \left. \frac{\partial \Phi[t, L(v)]}{\partial t} \right|_{t_0} = H_0^{-1} \left. \frac{\partial}{\partial t} \ln \Phi[t, L(v)] \right|_{t_0}. \tag{9.10}$$

Si potrà così esprimere la funzione di luminosità evolutiva sulla base di uno sviluppo in serie arrestato ai primi termini:

$$\begin{aligned}
 \Phi(t, L[v]) &= \Phi(t_0, L[v]) + \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{t_0} (t - t_0) + \dots \\
 &= \Phi(t_0, L[v]) \left\{ 1 - \frac{1}{\Phi_0} \left. \frac{\partial \Phi(t, L)}{\partial t} \right|_{t_0} (t_0 - t) + \dots \right\} \\
 &= \Phi(t_0, L[v]) \{1 - \beta_0 H_0 (t_0 - t) + \dots\}
 \end{aligned} \tag{9.11}$$

Si possono ora combinare insieme tra loro le dipendenze dalla frequenza e dal tempo moltiplicando tra loro i due sviluppi operati in [9.8] e [9.11]. Per quanto detto,

arresteremo lo sviluppo ancora ai primi termini (prodotti di termini infinitesimi saranno trascurati)

$$\begin{aligned}\Phi(t, L[v]) &\simeq \Phi(t_0, L[v_0]) \{1 - \alpha H_0(t_0 - t) + \dots\} \cdot \{1 - \beta_0 H_0(t_0 - t) + \dots\} \simeq \\ &\simeq \Phi(t_0, L[v_0]) \{1 - (\alpha + \beta_0) H_0(t_0 - t) + \dots\} .\end{aligned}\quad [9.12]$$

Ora per risolvere l'integrale [9.4] occorre trattare in modo semplificato il prodotto $R^2(t)r_l^2$ e infine integrare su t . Tenendo conto che limitiamo la nostra trattazione a piccoli intervalli spatio-temporali attorno all'osservatore, possiamo utilizzare rappresentazioni approssimate tra distanza radiale, redshift e tempo cosmico discusse in Appendice 9A, ottenendo così per il prodotto

$$\begin{aligned}r_1^2 R^2(t) &\simeq R_0^2 \{1 - H_0(t_0 - t) + \dots\}^2 \cdot \frac{c^2}{R_0^2} (t_0 - t)^2 \left\{1 + \frac{H_0}{2} (t_0 - t) + \dots\right\}^2 \simeq \\ &\simeq c^2 \{1 - 2H_0(t_0 - t) + \dots\} (t_0 - t)^2 \{1 + H_0(t_0 - t) + \dots\} \simeq \\ &\simeq c^2 (t_0 - t)^2 \{1 - 2H_0(t_0 - t) + H_0(t_0 - t) + \dots\} \simeq c^2 (t_0 - t)^2 \{1 - H_0(t_0 - t) + \dots\}\end{aligned}$$

Moltiplichiamo questa per [9.12] e linearizziamo l'argomento dell'integrale:

$$\begin{aligned}c^2 (t_0 - t)^2 \Phi(t_0, L[v_0]) \{1 - H_0(t_0 - t) - [\alpha + \beta_0] H_0(t_0 - t) + \dots\} &\simeq \\ \simeq c^2 (t_0 - t)^2 \Phi(t_0, L[v_0]) \{1 - [1 + \alpha + \beta_0] H_0(t_0 - t) + \dots\} .\end{aligned}$$

L'integrale sul tempo in eq. [9.4] avrà così due addendi:

$$\begin{aligned}N(> S) &\simeq c \int d(t_0 - t) c^2 (t_0 - t)^2 \Phi_0 - \int d(t_0 - t) c^2 (t_0 - t)^3 H_0 \Phi_0 [1 + \alpha + \beta_0] = \\ &= \frac{c^3 (t_0 - t)^3}{3} \Phi_0 - \frac{c^3 H_0 (t_0 - t)^4}{4} \Phi_0 [1 + \alpha + \beta_0] = \\ &= c^3 (t_0 - t)^3 \frac{\Phi_0}{3} \left\{1 - \frac{3}{4} [1 + \alpha + \beta_0] H_0 (t_0 - t)\right\}\end{aligned}\quad [9.13]$$

E' utile ora esprimere il differenziale del tempo $(t_0 - t)$ in termini di quantità più direttamente osservabili. Allora, dalla definizione di distanza di luminosità [8.8], trascurando la correzione $K = (1 + z)^{1 - \alpha}$, dato il valore tipicamente prossimo a 1 dell'indice spettrale α , $L[v]/4\pi S_\nu \simeq d_L^2 = r_1^2 (1 + z)$, e, sempre utilizzando relazioni semplificate tempo-redshift-distanza radiale [App. 9A], avremo

$$r_1^2(1+z) = L/4\pi S = c^2(t_0 - t)^2 \left\{ 1 + \frac{H_0}{2}(t_0 - t) \right\}^2 \cdot (1+z) \simeq$$

$$= c^2(t_0 - t)^2 \{1 + H_0(t_0 - t)\} \cdot \{1 + H_0(t_0 - t)\} = c^2(t_0 - t)^2 \{1 + H_0(t_0 - t)\}^2$$

avendo espresso, da [A9.2], $(1+z) \simeq 1 + H_0(t_0 - t) + \dots$, da cui, prendendo la radice quadrata,

$$(t_0 - t) \simeq \frac{1}{c} \sqrt{L/4\pi S} \{1 - H_0(t_0 - t) + \dots\}$$

che al 1° ordine da' $(t_0 - t) \simeq \frac{1}{c} \sqrt{L/4\pi S}$, e al 2° sostituendo la soluzione per il 1°

$$(t_0 - t) \simeq \frac{1}{c} \sqrt{L/4\pi S} \left\{ 1 - \sqrt{L/4\pi S} \frac{H_0}{c} + \dots \right\}. \quad [9.14]$$

Sostituendo ora [9.14] in [9.13] e inserendo tutto in [9.4]:

$$N(> S) \simeq \frac{S^{-3/2}}{3} \int_{L_{\min}}^{L_{\max}} dL L^{3/2} \Phi_0(L) \left\{ 1 - \sqrt{\frac{L}{4\pi S}} \frac{H_0}{c} \right\}^3 \cdot \left\{ 1 - \frac{3}{4} [1 + \alpha + \beta_0] \sqrt{\frac{L}{4\pi S}} \frac{H_0}{c} \right\}$$

Effettuando ancora uno sviluppo del cubo e la successiva moltiplicazione dei due fattori, limitandoci al solito al primo termine dello sviluppo, si ottiene infine

$$N(> S) \simeq \frac{S^{-3/2}}{3} \int_{L_{\min}}^{L_{\max}} dL L^{3/2} \Phi_0(L) \cdot \left\{ 1 - \frac{3}{4} [5 + \alpha + \beta_0] \sqrt{\frac{L}{4\pi S}} \frac{H_0}{c} \right\}. \quad [9.15]$$

Si tratta di una espressione compatta che illustra molto bene una serie di caratteristiche dei conteggi integrali di sorgenti cosmiche. Ricordiamo che la nostra assunzione di base nella [9.15] e' che ci siamo limitati ad intervalli spazio-temporali piccoli attorno all'osservatore, ossia $t_0 - t \ll t_0$. Sulla base della [9.14], questo corrisponde essenzialmente a limitare l'analisi a flussi delle sorgenti relativamente brillanti (a flussi deboli subentrano nei conteggi integrali molte sorgenti ad alti redshift).

9.3 Conteggi di radio-sorgenti brillanti. Evidenze di un universo evolutivo.

Alcune importanti applicazioni dei risultati della Sez. 9.2 sono state effettuate negli anni '60 e '70 in relazione ai primi conteggi di sorgenti radio. All'epoca si stava svolgendo un importante dibattito sulle caratteristiche generali dell'Universo. Come detto, per un certo periodo i conteggi sono stati considerati come test fondamentali dei parametri cosmologici (parametro di decelerazione o densita'). Tuttavia la loro piu' rilevante applicazione ha riguardato verifiche del modello di Universo dello Stato Stazionario, discusso in Sez. 7.8. Tale modello, che per circa 20 anni tra la fine degli

anni '40, quando e' stato proposto, e la fine degli anni '60 andava per la maggiore tra i cosmologi teorici, prevedeva che tutte le proprieta fisiche del cosmo rimanessero invariate nel tempo. Una talmente forte predizione prevedeva un andamento preciso per i conteggi di sorgenti, che i radio-astronomi hanno potuto confrontare con le loro osservazioni. Vediamo che cosa questo confronto ha prodotto.

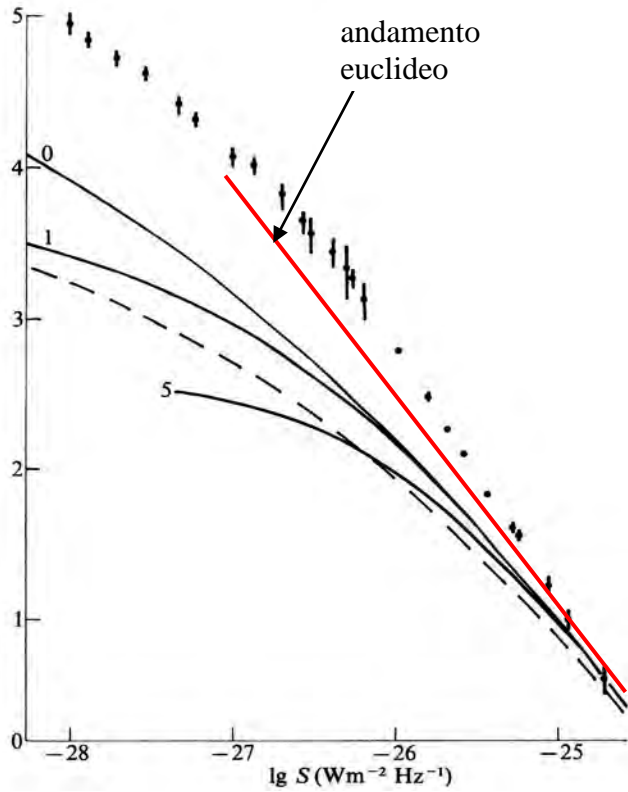


Figura 2

Conteggi integrali di sorgenti radio $N(>S)$ (in unita' del logaritmo della densita' areale di sorgenti per steradiante) in funzione del logaritmo del flusso. Le curve si riferiscono al caso di assenza di evoluzione della funzione di luminosita'. Le curve continue sono denominate a seconda del valore scelto per q_0 (piegano maggiormente verso il basso al crescere del parametro di decelerazione).

La curva tratteggiata rappresenta la predizione del modello dello Stato Stazionario.

Nella relazione [9.15] il parametro β_0 rappresenta il ritmo con cui la funzione di luminosita' evolve con il tempo cosmico. In assenza di evoluzione (ossia di creazione o distruzione di sorgenti, e di variazione della luminosita' delle sorgenti), dalla definizione [9.10] e dalla condizione di conservazione della densita'

$$\Phi(t, L) = \Phi(t_0, L) \left[R_0 / R(t) \right]^3, \text{ abbiamo } \partial n / \partial t = n_0 3 (R_0 / R)^2 \left(-R_0 \dot{R} / R^2 \right) \Big|_{t=t_0}$$

$$\beta_0 \equiv H_0^{-1} \frac{1}{\Phi[t, L(v)]} \frac{\partial \Phi[t, L(v)]}{\partial t} \Big|_{t=t_0} = -3 \Phi(t_0) H_0^{-1} \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \frac{\dot{R}}{R} \frac{1}{\Phi[t, L(v)]} \Big|_{t=t_0} = -3$$

cosicche' l'integrale diventa

$$N(> S_{v_0}) \propto S_{v_0}^{-3/2} \int_{L_{\min}}^{L_{\max}} dL L^{3/2} \Phi_0(L) \cdot \left\{ 1 - \frac{3}{4} [\alpha + 2] \sqrt{\frac{L}{4\pi S_{v_0}}} \frac{H_0}{c} \right\} \quad [9.16]$$

ove l'unico parametro libero in gioco e' l'indice spettrale medio delle sorgenti α .

L'andamento dei conteggi con queste assunzioni e' univoco: se $\alpha > -2$, il secondo addendo nella [9.16] rimane definito negativo, cosicche' al diminuire del flusso S_{v0} il termine correttivo in parentesi graffa diviene sempre piu' piccolo e si avvicina allo zero, tendendo cosi' a ridurre la pendenza dei conteggi.

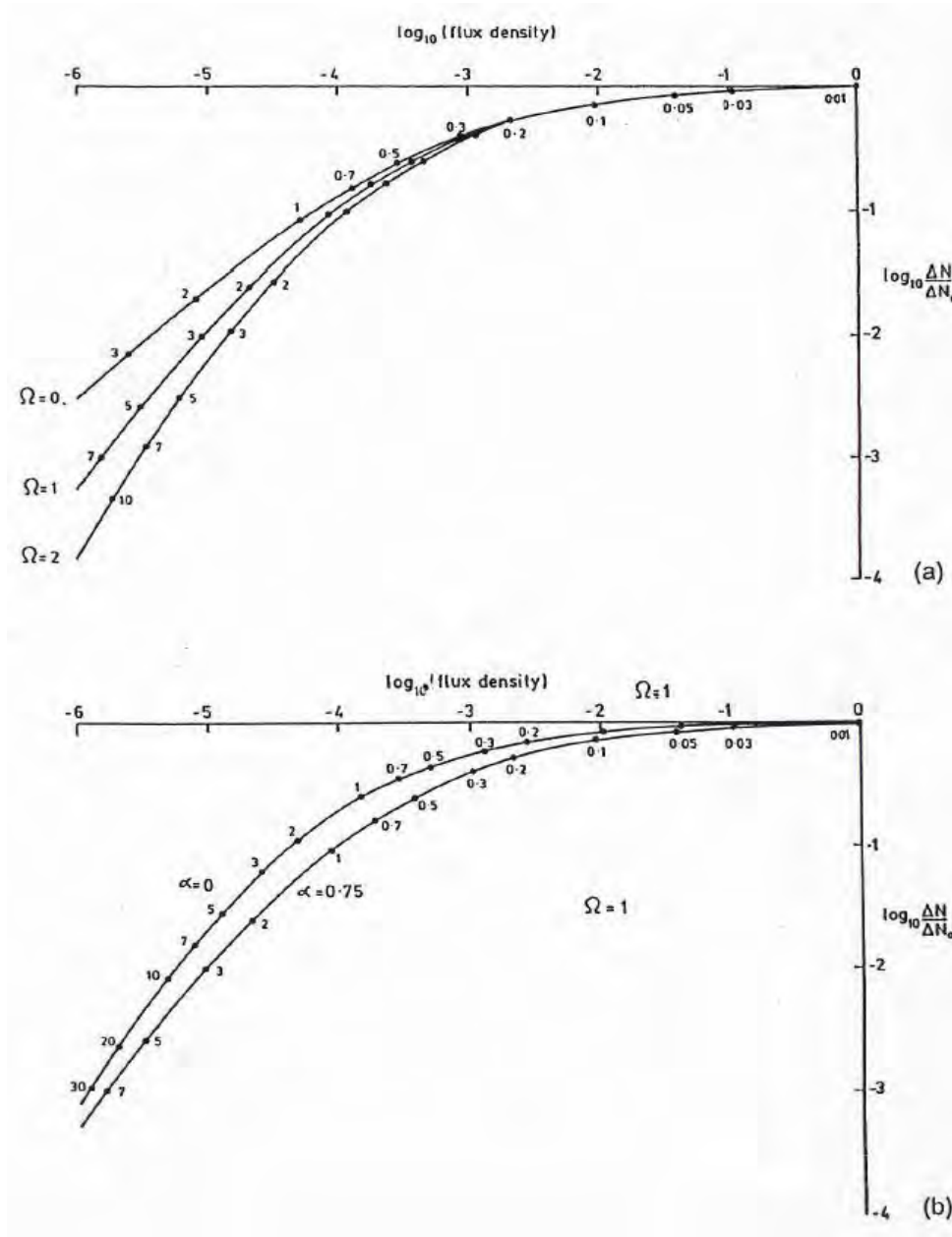


Figura 3
 Conteggi differenziali di sorgenti radio
 $N(S) = dN / dS \cdot S^{2.5}$
 normalizzati alla legge Euclidea $\Delta N_0 \sim S^{-2.5}$.
 Le curve mostrano gli andamenti dei conteggi per popolazioni di sorgenti non evolventi. Sono evidenziate le dipendenze dal parametro di densita' e dall'indice spettrale α . Sono anche indicati i valori del redshift medio delle sorgenti che contribuiscono ai vari flussi.
 (Da Longair "Galaxy Formation").

In questo modo i conteggi si discostano dall'andamento a legge di potenza $\propto S_v^{-1.5}$ verso valori piu' bassi del flusso e la pendenza dei conteggi diviene piu' piatta dell'andamento Euclideo $\propto S_v^{-1.5}$. La cosa e' rappresentata in Figura 2, che riporta il logaritmo dei conteggi integrali contro il logaritmo del flusso, la cosiddetta curva $\log N - \log S$. I dati ivi riportati riguardano osservazioni di radiosorgenti brillanti a 178

MHz con i radio-telescopi di Cambridge. Le curve continue rappresentate corrispondono al caso di assenza di evoluzione ($\beta_0 = -3$), con indice spettrale $\alpha = 0.7$ e per diversi valori del parametro di decelerazione q_0 .

La situazione riportata in Fig. 2 per quanto riguarda le curve teoriche e' piuttosto chiara: l'effetto combinato di correzione-K e dell'indebolimento delle densita' di flusso previste dalla relazione flusso-redshift ([9.3-6]) fa si' che i conteggi mostrino la pendenza Euclidea solo al limite di flussi molto brillanti (si veda la convergenza ad alti flussi in figura). Questo perche' le sorgenti a questi flussi si trovano principalmente a bassi redshift e quindi la situazione che qui si applica e' quella di un universo Euclideo (vedi eq. [3.3]). Appena i flussi diminuiscono, il redshift medio delle sorgenti aumenta (la distanza spazio-temporale aumenta) e cominciano cosi' a farsi sentire tutti gli effetti cosmologici, che fanno piegare i conteggi verso il basso.

Figura 3 mostra varie interessanti dipendenze espresse nell'andamento dei conteggi differenziali normalizzati con il flusso. L'andamento del redshift medio delle sorgenti in funzione del flusso (che aumenta al diminuire di questo) e' mostrato in figura, assieme ad altre dipendenze da α e dal parametro di densita'. Quest'ultima dipendenza e' illustrata in Fig. 3 per quanto riguarda il parametro Ω_0 e Fig. 2 per q_0 . La piegatura e' tanto maggiore quanto piu' grande e' la curvatura dello spazio-tempo (ovvero i parametri q_0 e Ω_0), dipendenza che si puo' capire considerando la dipendenza del volume da questi parametri. Ad es. eq. 9.1 riporta che $dV/dz \propto d_L^2$, mentre a sua volta d_L diminuisce molto al crescere di q_0 e Ω_0 (vedi Fig. 4 Sez. 8).

Fig. 2 mostra anche il confronto tra i dati osservativi e le predizioni del modello dello Stato Stazionario (curva a tratti), discusso nella Sez. 7.8, che come si nota sono completamente in conflitto tra loro. Da questi dati il modello e' stato cosi' completamente e definitivamente escluso (ricordiamo che il modello non ha nessun parametro libero, quindi non puo' essere in nessun modo "aggiustato" ai dati).

Una importante questione che i dati di Fig. 2 sollevano riguarda l'assenza di evoluzione per le radiosorgenti assunta in [9.16]: i dati mostrano una pendenza super-Euclidea (piu' ripida di -1.5). Per ottenere conteggi cosi' ripidi per una popolazione con indice spettrale ben definito $\alpha = 0.7$ occorre assumere un tasso evolutivo nella [9.15] molto elevato, ossia un parametro $\beta_0 < -5.7$, ossia che la funzione di luminosita' debba decrescere molto rapidamente con il tempo cosmico t , o viceversa crescere rapidamente con il redshift z , andando indietro nel tempo. In questo modo i dati di Fig. 2 mostrano chiaramente che le popolazioni che costituiscono l'Universo, e l'Universo stesso quindi, sono realta' che si modificano rapidamente con il tempo, ovvero sono realta' evolutive. Queste scoperte basate sullo studio dei conteggi di radio-sorgenti hanno portato ad un premio Nobel per il radio-astronomo Martin Ryle nel 1967.

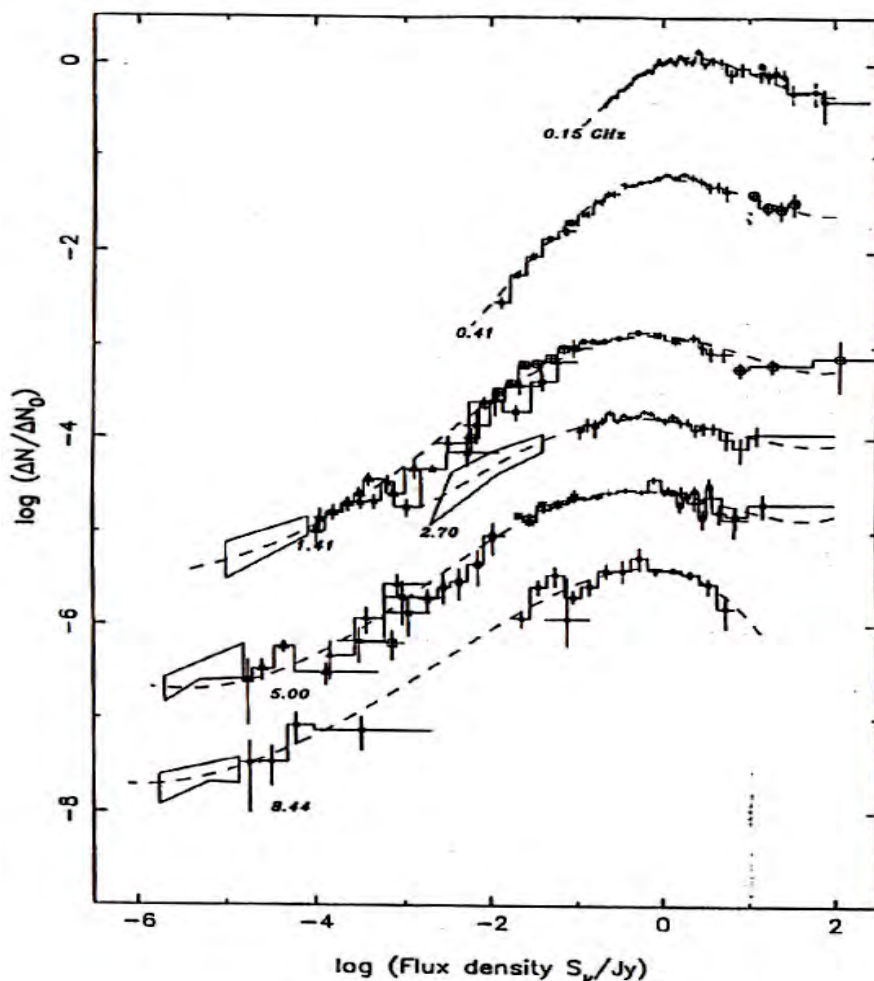


Figura 4

Conteggi differenziali normalizzati di sorgenti radio a varie frequenze (in GHz).

Figura 4 mostra una collezione di conteggi a diverse frequenze radio. Questi conteggi, come quelli in Fig. 3, sono normalizzati alla legge Euclidea $N(S) \propto S^{-2.5}$. I conteggi a tutte le frequenze mostrano un chiaro andamento super-Euclideo ai flussi brillanti ed una piu' lenta convergenza ai flussi deboli. La convergenza ai bassi flussi si verifica quando insorgono effetti di *dimming* cosmologico sui flussi per sorgenti ad alti redshift.

In Fig. 3 pannello sotto e' mostrata anche la dipendenza dal parametro α riguardante la correzione-K, che aumenta all'aumentare di α , se α e' positivo. La situazione ovviamente cambia se l'indice spettrale α diviene negativo, in particolare se $\alpha < -2$ potremo avere un certo irripidimento super-Euclideo dei conteggi anche senza evoluzione. Questo a causa della correzione-K che risulta in questo caso particolarmente elevata. Cio' si verifica in particolare nelle bande del sub-millimetro, dove l'indice spettrale caratteristico assume valori molto negativi, $\alpha \sim -3.5$, si veda al proposito le Fig. 8.6 (in Sez. 8). L'effetto della correzione-K nel produrre andamenti super-Euclidei anche in assenza di evoluzione e' illustrata nella Fig. 5.

Questo effetto della correzione-K non ha solo l'interessante effetto di irripidire i conteggi anche in assenza di evoluzione, ma fornisce l'occasione per rivelare con la massima efficienza sorgenti ad alti redshift grazie all'effetto della correzione-K che

essenzialmente sposta nella banda di osservazione il picco d'emissione delle polveri (vedi tutta la discussione in Sez. 8.3 e quanto riportato in Fig. 6 Sez. 8).

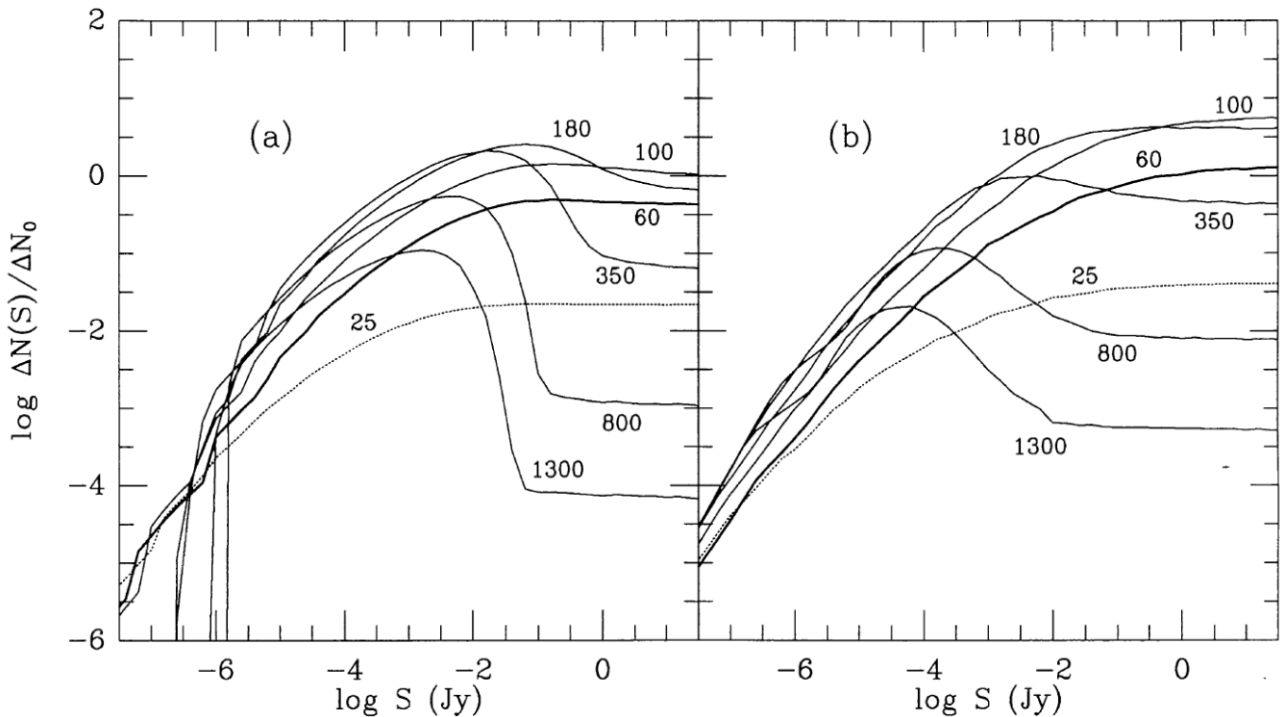


Figura 5 Conteggi differenziali di sorgenti millimetriche e nel lontano infrarosso, sempre normalizzate alla legge Euclidea. I numeri si riferiscono alle lunghezze d'onda effettive in μm . (a) popolazioni di sorgenti con evoluzione cosmologica. (b) popolazioni di sorgenti senza evoluzione. In questi casi si manifesta chiaramente l'effetto della correzione-K nel produrre andamenti super-Euclidei anche in assenza di evoluzione [da Franceschini et al. A&A Suppl., 1991].

9.4 Espressioni per i conteggi nel caso piu' generale.

Dopo la nostra discussione riguardante le dipendenze generali dei conteggi nella trattazione semplificata della Sezione 9.3, accenniamo ora ad alcune formule utili per il calcolo dei conteggi di sorgenti cosmiche nel caso piu' generale in cui non si ponga nessuna limitazione al redshift delle sorgenti (in questo caso avremo espressioni risolvibili solo per via numerica, anziche' analitica). Assumiamo comunque un Universo dominato dalla materia (approssimazione peraltro certamente valida fino ad alti redshift, come vedremo, di almeno $z \sim 1000$), e una dinamica di Friedmann priva della costante cosmologica (ma la generalizzazione e' molto semplice, come vedremo).

I conteggi integrali si possono esprimere nel caso generale in termini di una integrazione sul tempo, oppure sul redshift. In relazione al tempo avremo che il numero di sorgenti per area unitaria di cielo con densita' di flusso $>S_v$ e' data dalla [9.4]

$$N(> S, \nu_0) = cR_0^{-2} \int_0^\infty dL \int_{t_S(L)}^{t_0} R^2(t) r_1^2(t_1) \cdot \Phi(t_1, L[\nu_0(1+z)]) dt_1$$

dove $t_S(L)$ e' il tempo a cui una sorgente di luminosita' L e' vista con flusso S_v :

$$r^2(t_S) = \frac{L[\nu_0(1+z)]}{4\pi S_{\nu_0}(1+z)}.$$

Sostituendo con la Mattig [8.11]:

$$r^2(t_S) = \frac{c^2}{H_0^2} \frac{\left[q_0 z - (1 - q_0)(\sqrt{1 + 2q_0 z} - 1) \right]^2}{q_0^4 (1+z)^2}.$$

ed utilizzando sempre la [8.26]

$$dt = -\frac{dz}{H_0 \sqrt{1 + \Omega_0 z} (1+z)^2},$$

otteniamo i conteggi integrali in termini del redshift, ricordando che $R(t) \propto (1+z)^{-1}$:

$$\begin{aligned} N(> S_{\nu_0}) &= 4\pi \left(\frac{c}{H_0} \right)^3 \int_0^\infty dL \int_0^{z_S(L)} q_0^{-4} \frac{(1+z)^{-6}}{\sqrt{1+2q_0 z}} \cdot \\ &\cdot \left[zq_0 + (q_0 - 1)(\sqrt{1+2q_0 z} - 1) \right]^2 \cdot \Phi(z, L[\nu_0(1+z)]) dz = \quad [9.18] \\ &= \int_0^\infty dL \int_0^{z_S(L)} \frac{dV}{dz} \cdot \Phi(z, L[\nu_0(1+z)]) dz \end{aligned}$$

che e' semplicemente l'integrale doppio nella porzione di piano L, z indicata in Fig. 1. Nella seconda espressione abbiamo utilizzato quella del differenziale del volume (proprio) data dalla [9.1]. Ricordiamo infine che la funzione di luminosita' $\Phi(L, t)$ e' per unita' di volume proprio.

Una diversa rappresentazione dei conteggi e' fornita dalla forma differenziale in flusso gia' discussa in Sez. 3 eq. 3.4. Si ottiene differenziando in dS quelli integrali

$$N(S_\nu) \equiv \frac{dN(> S_\nu)}{dS_\nu} = \frac{dL}{dS_\nu} \frac{dN(> S_\nu)}{dL} \quad [9.19]$$

dove $N(S_\nu)$ e' il numero di sorgenti per unita' d'area di cielo e per intervallo unitario di flusso, con flusso compreso in un intervallo infinitesimo tra S_ν e $S_\nu + dS_\nu$. Nella [9.19] abbiamo anche utilizzato la relazione biunivoca tra L e S per un cambiamento

di variabile. In questo modo l'espressione differenziale $N(S_\nu)$ e' ottenibile eliminando l'integrazione in L nella [9.18]:

$$N(S_\nu) = \frac{dL}{dS_\nu} \frac{dN(> S_\nu)}{dL} = \int_0^{z_S(L)} \frac{dV}{dz} \cdot \frac{dL}{dS_\nu} \Phi(z, L[\nu(1+z)]) dz =$$

$$= 4\pi \int_0^{z_S(L)} \frac{dV}{dz} \cdot d_L^2 \cdot K^{-1}(z) \cdot \Phi(z, L[\nu(1+z)]) dz$$
[9.20]

con dV/dz differenziale del volume proprio da [9.1] e d_L distanza di luminosita' da [8.8-12]. Le [9.18] e [9.20] sono espressioni molto generali per il calcolo dei conteggi e richiedono integrazioni numeriche.

9.5 Radiazioni cosmiche di fondo. Contributo di popolazioni di sorgenti.

I risultati della precedente Sez. 9.4 sono importanti per numerose applicazioni cosmologiche. Tra queste menzioniamo nel seguito alcune riguardanti l'interpretazione delle radiazioni di fondo cosmico osservate e il problema di Olbers.

Come gia' menzionato nella Sez. 1, una importante componente cosmica e' costituita dalle radiazioni di fondo. Si tratta di un bagno di fotoni che permeano in modo omogeneo l'Universo, e caratterizzati da uno spettro molto complesso ed esteso su un vasto intervallo di frequenze fotoniche, che riportiamo in Figura 6. Abbiamo gia' accennato alla presenza di queste radiazioni diffuse nella Sez. 5.2 e abbiamo utilizzato l'informazione sulla loro isotropia per derivare vincoli sull'omogeneita' dell'Universo.

Figura 6 riassume una enorme quantita' di informazione sul complesso delle radiazioni diffuse di origine cosmologica misurate dal nostro sistema di riferimento terrestre. Il grafico riporta in ordinata il log dell'intensita' νI_ν (espressa in $\text{erg/cm}^2/\text{sec}/\text{grado quadrato}$) contro il log della frequenza fotonica (espressa in Hz) o dell'energia.

Partendo da sinistra (corrispondente alle basse frequenze) e andando verso destra (alte frequenze) si notano le seguenti ben distinte componenti:

- il fondo radio (tratto a puntini), radiazione dovuta all'emissione integrata delle radio-sorgenti extragalattiche, da' un contributo minimo al campo di radiazione totale;
- il fondo cosmico nelle microonde (la curva di corpo nero continua con picco a 10^{11} Hz - corrispondente a 3 mm di lunghezza d'onda), e' la principale componente radiativa cosmica dal punto di vista energetico (densita' di energia pari a circa $1 \text{ eV/cm}^3 \approx 10^{-12} \text{ erg/cm}^3$) e origina dal plasma primordiale 380.000 anni dopo il Big Bang, ed e' di origine prettamente diffusa;

- il fondo nel lontano IR, recentemente scoperto (Hauser et al 1998), dovuto in buona parte all'emissione integrata delle galassie primordiali e dei primi quasars;
- il fondo ottico e vicino-infrarosso, misurato da osservazioni ultra-profonde con Hubble Space Telescope e dovuto all'emissione di galassie in ottico;
- il fondo in raggi X tra 10^{18} e 10^{20} Hz, effetto della produzione di energia per collasso gravitazionale su buchi neri supermassicci presenti nei quasar e nei Nuclei Galattici Attivi (vedi Sez. 12), e' stato il primo fondo cosmico scoperto nel 1962 (da Bruno Rossi e Riccardo Giacconi, Nobel nel 2002);
- il fondo in raggi Gamma sopra 10^{20} Hz, dovuto alle emissioni di particolari categorie di Nuclei Galattici Attivi;
- le radiazioni di fondo non sono misurabili tra 10^{16} e 10^{17} Hz a causa del completo assorbimento dei fotoni cosmici prodotto dall'idrogeno diffuso nella nostra Galassia: in questa regione sono riportati solo limiti superiori all'intensita' del fondo, non misure.

Come si vede dalla lista sopra, vi sono fondi cosmici rigorosamente diffusi, come il fondo di radiazione primordiale nelle microonde, ma la maggior parte di queste radiazioni originano dall'emissione integrata di vari tipi di popolazioni di sorgenti cosmiche. A seconda dello spettro caratteristico di queste e dalla loro distribuzione in redshift, avremo diverse forme spettrali per i rispettivi fondi di radiazione.

Osservazioni dei fondi cosmici hanno offerto ai cosmologi importantissimi vincoli sulla storia evolutiva delle sorgenti, in quanto forniscono dati sull'emissione integrata a qualunque epoca cosmica.

E' evidente, per quanto detto, che e' importante stabilire una relazione tra intensita' della radiazione diffusa e le proprieta' statistiche delle sorgenti che la compongono. In primo luogo questo puo' fornire una spiegazione dell'origine di questa radiazione diffusa; secondariamente, la radiazione fornisce un vincolo alle proprieta' integrate d'emissione della popolazione stessa.

Il calcolo dell'intensita' e' semplice: il flusso integrato proveniente da una certa area di cielo sara' l'integrale dei conteggi differenziali su tutti i valori della densita' di flusso. Per unita' di area di cielo si ha, sostituendo l'espressione dei conteggi differenziali $N(S)$, da [9.20]:

$$I_\nu = \int_0^\infty dS_\nu N(S_\nu) \cdot S_\nu = \int_0^\infty dS_\nu \cdot S_\nu \int_0^{z_s(L)} \frac{dV}{dz} \cdot \frac{dL}{dS_\nu} \cdot \Phi(z, L[\nu(1+z)]) dz \quad [9.21]$$

con

$$L_\nu = 4\pi d_L^2 S_\nu K^{-1}(z) \quad [9.22]$$

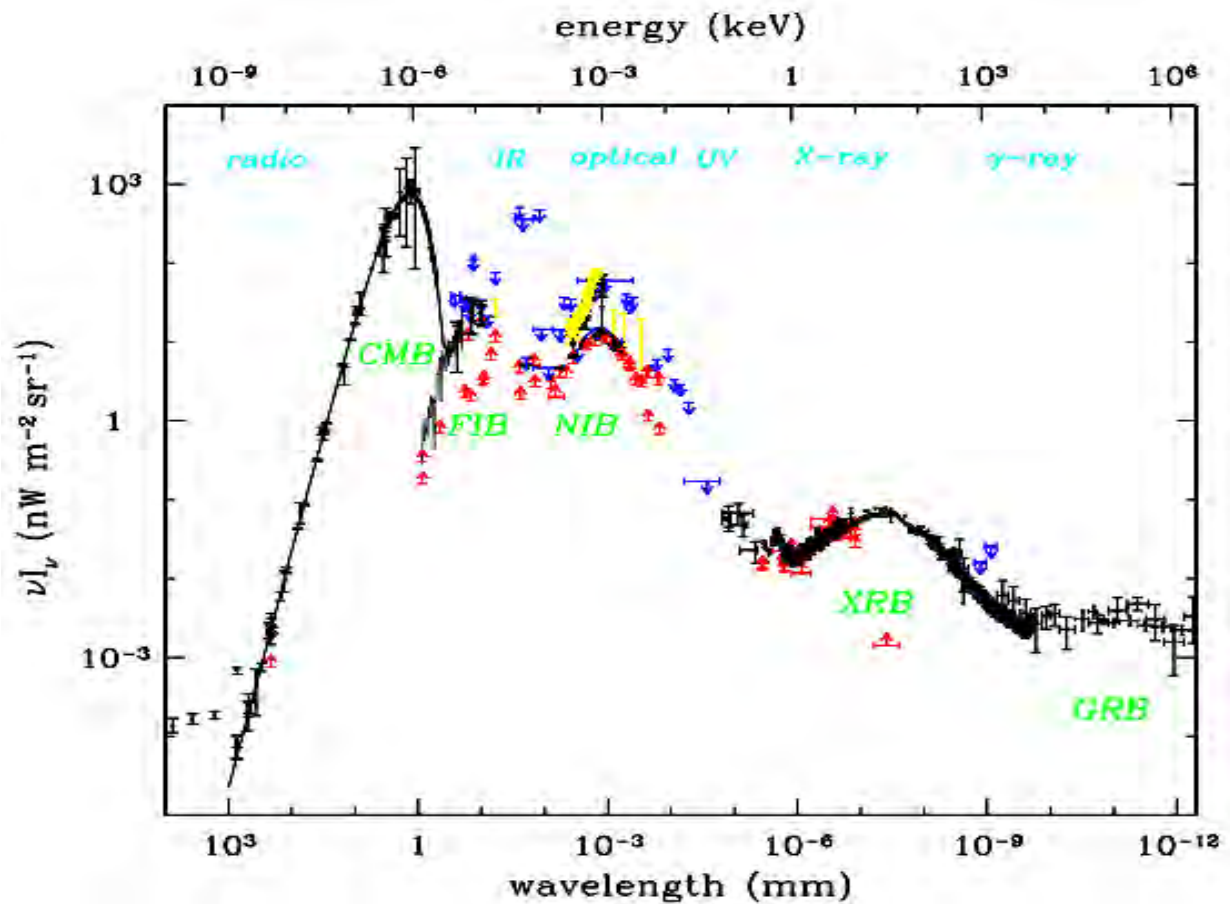


Figura 6

Intensità spettrale della radiazione cosmica di fondo su un vastissimo intervallo di frequenza. Il grafico log-log riporta in ordinata il log dell'intensità νI_ν (espressa in 10^{-9} Watt/m²/steradiante) contro il log della lunghezza d'onda (espressa in mm) e, sopra, della energia fotonica (in keV). Da sinistra (basse frequenze) a destra (alte frequenze) si notano: il fondo radio (puntini, dovuto all'emissione integrata delle radio-sorgenti extragalattiche), il fondo cosmico nelle microonde (curva di corpo nero continua con picco a 10^{11} Hz - 3 mm), il fondo nel lontano IR, il fondo ottico e vicino-infrarosso, il fondo in raggi X tra 1 e 1000 KeV, e il fondo in raggi Gamma sopra 1000 KeV. Notiamo che le radiazioni di fondo non sono misurabili tra 1000 Å e 100 Å a causa del completo assorbimento dei fotoni cosmici prodotto dall'idrogeno diffuso nella nostra Galassia: in questa regione sono riportati solo limiti superiori all'intensità del fondo, non misure.

Possiamo ora immaginare di scambiare la variabile di integrazione tra i due integrali e quindi effettuare una trasformazione dall'integrazione in S_ν ad una in L secondo la regola della distanza di luminosità

$$dS_\nu = \frac{dS_\nu}{dL_\nu} dL_\nu = \frac{dL}{4\pi d_L^2 K^{-1}(z)},$$

cosi' trovando

$$\begin{aligned}
I_\nu &= \int_0^\infty dS_\nu N(S_\nu) \cdot S_\nu = \int_0^\infty dz \cdot \int_0^\infty \frac{dV}{dz} S_\nu \cdot \frac{dL}{dS_\nu} \cdot \Phi(z, L[\nu(1+z)]) dS_\nu = \\
&= \frac{c}{H_0} \int_0^\infty dz \cdot \int_{L_{\min}}^{L_{\max}} S_\nu \frac{d_L^2}{(1+z)^6 \sqrt{1+2q_0 z}} \cdot \Phi(z, L[\nu(1+z)]) dL_\nu = \quad [9.23] \\
&= \frac{1}{4\pi} \frac{c}{H_0} \int_0^\infty dz \frac{j_\nu(z)}{(1+z)^6 \sqrt{1+2q_0 z}}
\end{aligned}$$

dove abbiamo sostituito l'integrazione in S con una in L , il differenziale del volume proprio dV/dz con la [9.1], il prodotto del flusso con la distanza di luminosit  quadrata $d_L^2 S_\nu = L \cdot K(z)/4\pi$ tramite la [9.22], e dove abbiamo definito una nuova quantita'

$$j_\nu(z) \equiv \int_{L_{\min}}^{L_{\max}} L_\nu \cdot \Phi(z, L[\nu]) \cdot K(z, \nu) dL_\nu \quad [9.24]$$

che e' chiamata *emissivita' di volume* (proprio, in quanto la $\Phi(z, L)$ e' definita nel volume proprio) della popolazione ad un certo redshift z . Al tempo cosmico attuale questa quantita' era gia' stata valutata nella Sez. 3.5. La [9.23] (con [9.24]) e' l'espressione generale rigorosa per stimare i contributi alle radiazioni di fondo a qualunque redshift.

Una illustrazione di applicazioni delle relazioni [9.23] e [9.24] e' riportata in Figura 7, nella quale vengono confrontati una serie di dati sulle intensita' spettrali della radiazione extragalattica dal millimetro all'ultravioletto con predizioni teoriche di un modello di evoluzione di galassie e Nuclei Attivi in ottico e IR. La curva in basso a trattini e' la predizione per una popolazione per la quale e' stata assunta mancanza di evoluzione cosmologica ($\beta_0 = -3$ nella rappresentazione precedente). In riferimento alle eq. [9.15] e [9.21], la predizione in assenza di evoluzione dipende solo dalla funzione di luminosit  e dalla forma spettrale delle sorgenti (parametro α in [9.15], mentre β_0 e' fisso a -3) e pertanto costituisce una predizione assai robusta di quello che e' il livello minimo aspettato per l'intensita' del fondo.

Compaiono in Fig. 7 due picchi nello spettro, uno centrato ad 1 μm , dovuto all'emissione delle stelle nelle galassie a qualunque redshift, ed uno a circa 150 μm proveniente da emissioni di polveri da galassie ad alti redshift. Lo spettro previsto senza evoluzione risulta molto vicino alle osservazioni nelle bande del vicino IR e nell'ottico, mentre sta molto basso ed e' inconsistente con i dati tra 10 e 1000 μm : mentre vi e' marginale evidenza da cio' di evoluzione per le galassie nell'ottico-vicino IR, forte evoluzione e' richiesta per l'emissione delle polveri: da cio' si evince che il fondo nel lontano IR non e' connesso con l'emissione attuale delle galassie in queste bande ed e' piuttosto dovuto a popolazioni di sorgenti non attualmente presenti, ma molto attive in epoche passate. L'interpretazione attuale e' che questa radiazione sia principalmente dovuta a galassie in formazione, le galassie primordiali, che sono

molto piu' ricche di gas e polveri di quelle attuali, nelle quali prevale l'emissione stellare diretta. E cio' risulta anche piuttosto intuitivo in considerazione della maggiore quantita' di mezzo interstellare presente, nel quale si stanno formando le stelle.

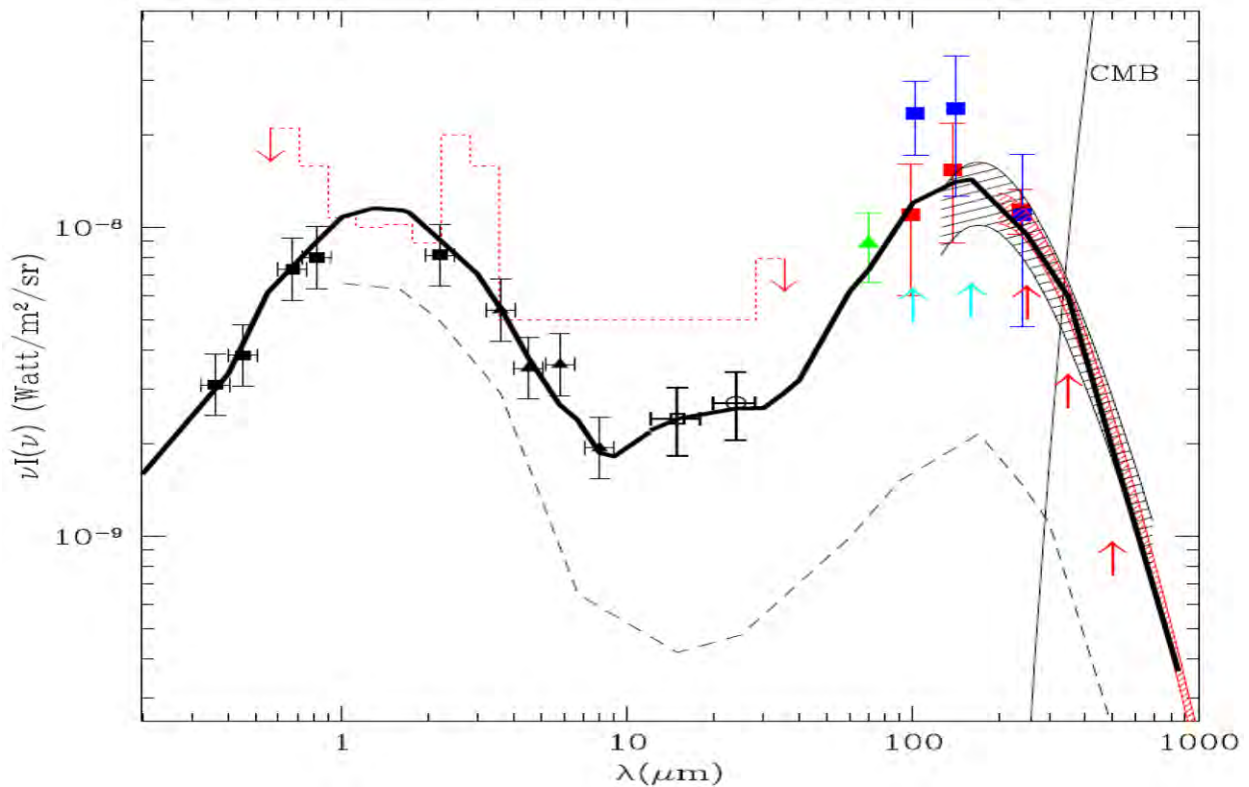


Figura 7 Intensita' spettrale della radiazione extragalattica dal millimetro all'ultravioletto. E' un ingrandimento della Fig. 3, in funzione della lunghezza d'onda in micron (ma invertito lungo l'asse x). Confronta alcuni dati di osservazioni di queste radiazioni con predizioni teoriche di un modello di evoluzione di galassie e Nuclei Attivi in ottico e IR. La curva in basso a trattini e' la predizione per una popolazione per la quale e' stata assunta mancanza di evoluzione cosmologica ($\beta_0 = -3$).

9.6 Storia cosmica della formazione delle stelle, degli elementi pesanti e delle galassie.

I dati sulle radiazioni diffuse discussi nel Cap. precedente e quelli riguardanti i conteggi nel Cap. 9.4, nonche' quanto discusso nelle Sez. 3 e 4 riguardo alle funzioni di luminosita' e del tempo cosmico, fanno parte di una ampia varieta' di informazioni sulla storia evolutiva e sulla formazione delle varie strutture che compongono l'Universo, in particolare stelle e galassie. Discutiamo dunque in questo capitolo una serie di applicazioni dei concetti di cosmologia osservativa discussi nei precedenti e

nella Sez. 8, in relazione anche a quanto abbiamo accennato nelle Sezioni 2, 3 e 4, con lo scopo principale di ricostruire la storia cosmica della formazione delle stelle e degli elementi pesanti da parte delle stelle stesse. Tutti questi processi hanno lasciato tracce piu' o meno evidenti nella radiazioni osservabili con telescopi da terra o dallo spazio. Tra l'altro, come sappiamo, la gran parte di questi processi che hanno riguardato la componente di materia normale nell'Universo (i cosiddetti barioni) sono avvenuti all'interno delle galassie. Pertanto questa storia e', al tempo stesso, la storia della formazione delle galassie.

La nostra discussione qui si limita ad un intervallo di tempo cosmico che copre all'incirca gli ultimi 10 Gyr, corrispondente ad un redshift massimo di circa $z=5$. Le indagini della cosmologia osservativa, grazie ai potentissimi strumenti attuali sia da terra che dallo spazio, hanno permesso di campionare con grande dettaglio e accuratezza stelle e galassie fino a questo redshift. In realta' alcune osservazioni si sono spinte anche oltre, oggetti cosmici particolarmente luminosi (galassie e quasar) sono stati scoperti fino a redshift di circa $z=10$ (una eta' corrispondente a 470 Myr dopo il BigBang). Tuttavia, come sappiamo ad esempio da Fig. 3.2 e 3.8 (Sez. 3), al crescere della distanza spazio-temporale si riduce l'intervallo di luminosita' che puo' essere campionato, ovvero solo oggetti estremamente luminosi sono rivelabili. Invece fino a $z \approx 5$, il grosso delle popolazioni di sorgenti possono essere individuate e analizzate. La nostra analisi seguente si limita, dunque, a questi redshift. Per il momento non consideriamo quanto avvenuto ad epoche cosmiche ancora piu' antiche ($z > 10$), perche' non esistono osservazioni a queste epoche.

L'osservabile statistico fondamentale, come abbiamo ampiamente visto, sono i conteggi profondi nelle varie bande osservative, dall'UV fino al millimetrico. Alcuni conteggi profondi in bande ottiche e del vicino IR sono riportati nella Fig. 8.

Se a questi dati di imaging fotometrico aggiungiamo osservazioni spettroscopiche per ogni galassia del campione in grado di fornirci la sua distanza spazio-temporale, ossia il redshift, a questi possiamo aggiungere ulteriori importanti dati statistici sull'Universo lontano. Da notare che, per ottenere con buona approssimazione il redshift di ogni galassia, non e' necessaria una osservazione spettroscopica ad alta risoluzione spettrale, in molti casi e' sufficiente una stima fotometrica del redshift (*redshift fotometrico*). Questa misura si ottiene osservando con elevata accuratezza fotometrica tutte le galassie in una determinata area di cielo, in piu' bande a diversa lunghezza d'onda, identificando in tutte le immagini le sorgenti che si riferiscono allo stesso oggetto cosmico e misurandone in ogni banda il flusso. Un tipico risultato di questa operazione e', ad esempio, riportato nella Fig. 2.15 della Sez. 2, dove si vedono i dati fotometrici per una galassia a $z=1.27$, confrontati con modelli spettrofotometrici dei flussi integrati di una galassia a diverse eta' galattiche, come cola' descritto. E' chiaro che il confronto di questi dati con i modelli non solo fornisce l'eta' delle galassie, ma, per effetto dello spostamento in lunghezza d'onda, anche il suo redshift. Il vantaggio di questa tecnica rispetto all'usuale misura di redshift spettroscopico consiste nel fatto che nel nostro caso e' possibile ottenere il

redshift fotometrico per un enorme numero di galassie entro il campo, simultaneamente, con solo un limitato numero di esposizioni in imaging fotometrico.

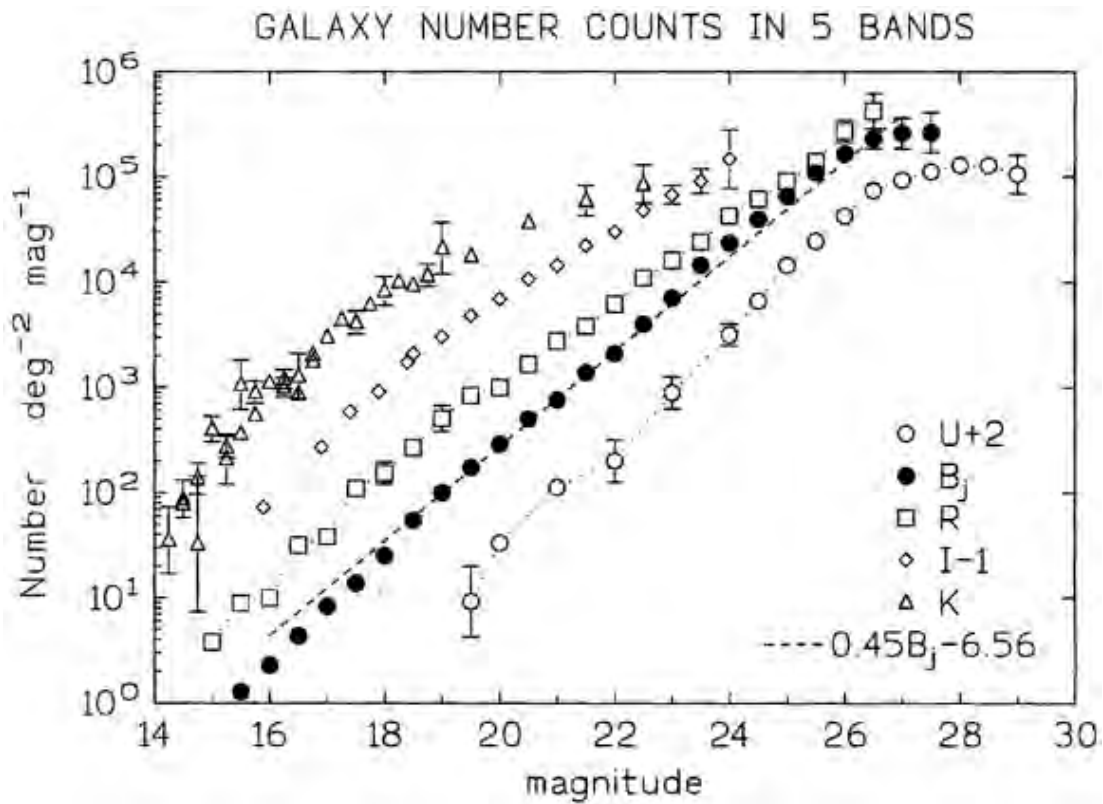


Figura 8: Conteggi differenziali di galassie in funzione della magnitudine in diverse bande dall'U al K. Si noti le diverse pendenze dei conteggi, che aumentano con la lunghezza d'onda. I conteggi sono estesi sino al limite di completezza delle varie surveys. [Da J.A. Tyson, <https://ned.ipac.caltech.edu>]

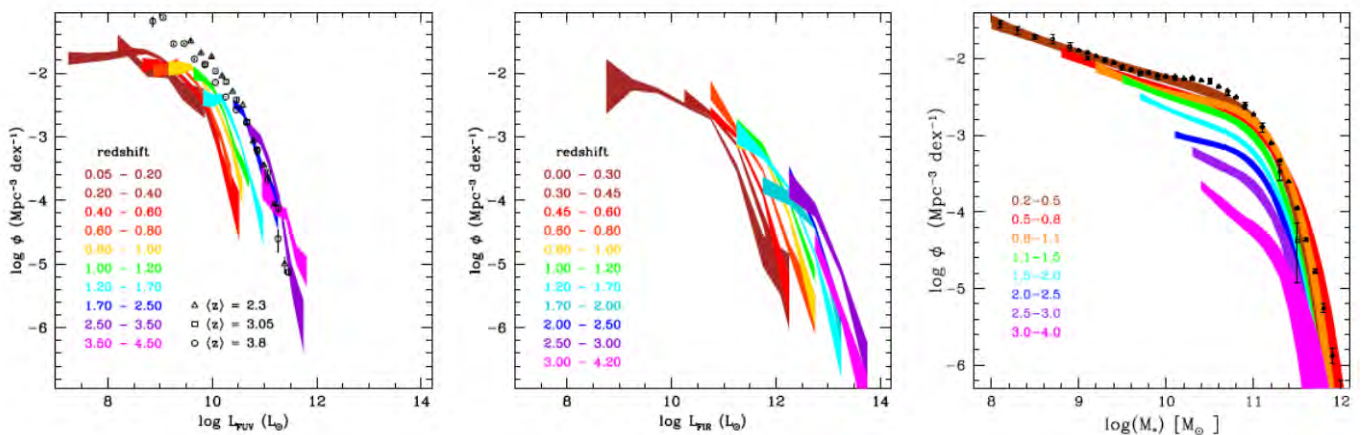


Figura 9. Sinistra: funzioni di luminosita' calcolate in vari intervalli di redshift e nelle bande del lontano ultravioletto (FUV). Al centro un analogo calcolo in bande del lontano infrarosso. A destra sono invece riportate funzioni della massa stellare, sempre calcolate in vari intervalli di redshift. Le bande colorate corrispondono a intervalli di confidenza corrispondenti al 68% di probabilita'. Tutte le funzioni sono calcolate nel volume comovente. [Da Madau & Dickinson 2014; Ilbert et al. 2013; Gruppioni et al. 2013].

Una volta conosciuto il redshift di tutti gli oggetti rivelati entro il flusso limite, sarà possibile calcolare le *funzioni di luminosità a diverse epoche cosmiche* e nelle diverse bande, seguendo le procedure discusse in Sez. 3. Ovviamente rispetto a quella discussione, qui non parleremo più di funzioni entro determinati intervalli spaziali o temporali, ma piuttosto entro intervalli di redshift (come d'altra parte mostrato per i quasars in Fig. 4.4 e per le galassie in Fig. 4.5). In particolare, ottenuto un catalogo completo in flusso ad una determinata frequenza di osservazione entro una certa area di cielo ed avendo per ciascuna sorgente il redshift, si inizia a segmentare (*binnare*) il campione in intervalli di z , mentre per ciascun oggetto viene calcolata la luminosità L_ν utilizzando la [9.22] con d_L dato da [8.12]. Qui occorre anche calcolare la correzione-K utilizzando informazioni spettrali sulle sorgenti. A questo punto si applica lo stimatore $1/V_{\max}$ discusso in eq. [3.8] per calcolare le funzioni di luminosità in ogni *bin* di redshift, ove i volumi si ottengono dal redshift integrando opportunamente la relazione [9.1].

Alcuni risultati per quanto riguarda funzioni di luminosità a diverse lunghezze d'onda sono riportati in Fig. 9, assieme alle funzioni di massa stellare (in analogia a quanto discusso in Sez. 4 Fig. 4.5). In Fig. 9 mostriamo in particolare funzioni di luminosità nel lontano UV e nel lontano IR, poiché le luminosità delle galassie a queste due frequenze possono essere usate molto efficacemente per stimare il tasso di formazione stellare (si veda eq. 4.5 Sez. 4). Con un maggiore dettaglio, le funzioni di luminosità bolometrica nel lontano IR sono riportate in Fig. 10. Tutte le funzioni di luminosità e di massa sono state calcolate per unità di volume *comovente*.

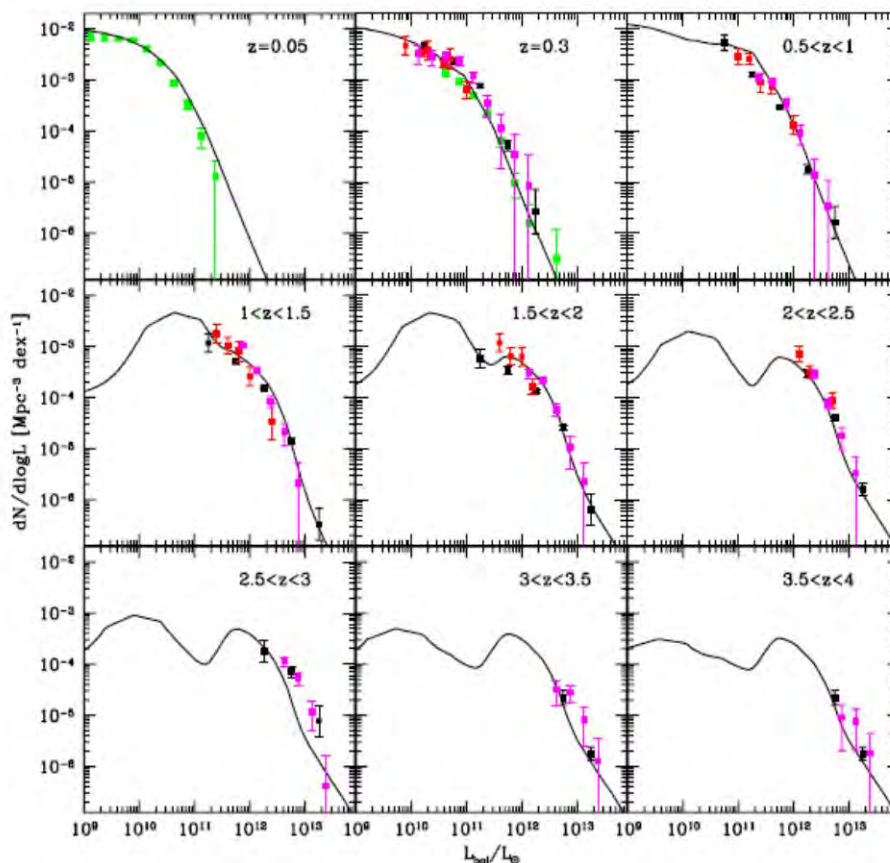


Figure 10. Funzioni della luminosità bolometrica nel lontano IR, calcolate a diversi redshift. L_{bol} è la luminosità tra 8 e 1000 μm ottenuta con osservazioni profonde dallo spazio dall'Osservatorio Spaziale Infrarosso Herschel, in particolare nel campo profondo COSMOS. I diversi colori corrispondono a dati ottenuti da diversi gruppi.

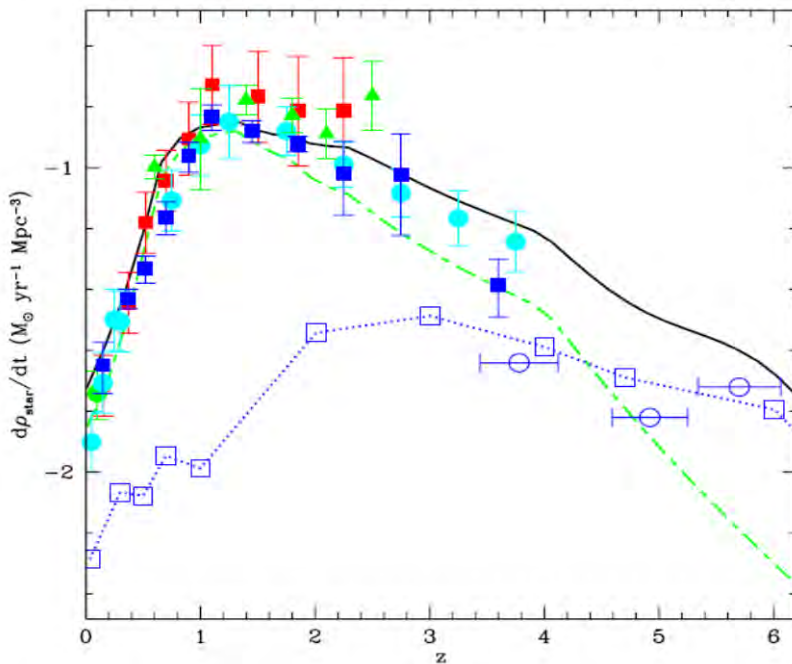


Figure 11. Il grafico riassume i risultati di surveys profonde riguardanti il tasso di formazione stellare medio, $SFR = d\rho_{star}/dt$ nelle galassie per unita' di volume *comovente*, in funzione del redshift. I dati a simbolo pieno sono dedotti da osservazioni nel lontano IR (Fig. 9), quelli a simbolo aperto da osservazioni UV (Fig. 8). La curva verde riproduce i dati di SFR IR, quelli in blu la SFR UV. La curva nera e' un modello di *best-fit* che rappresenta la somma dei contributi IR e UV alla SFR. Questa rappresentazione della storia evolutiva del cosmo e' anche conosciuta come grafico di *Lilly-Madau*.

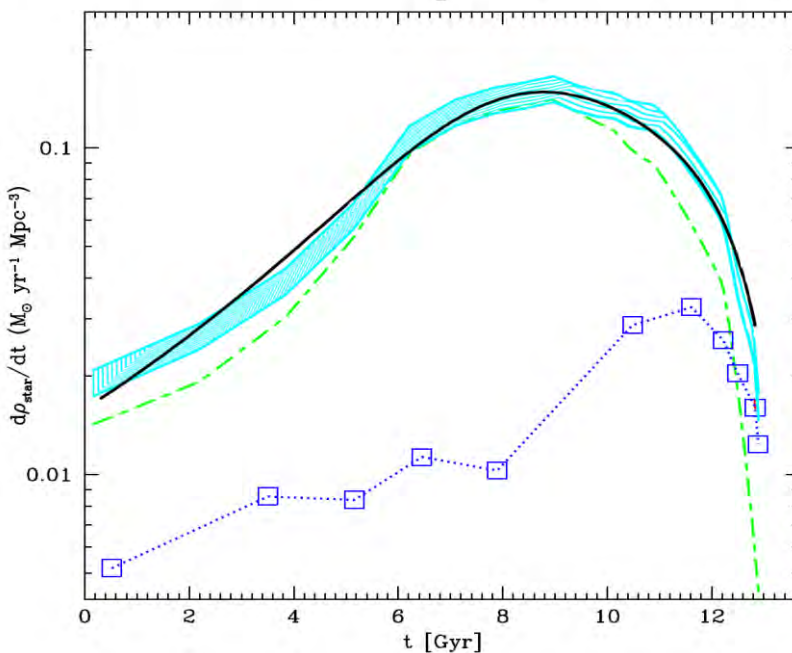


Figure 12. Come in Fig. 11, ma in funzione del tempo cosmico di *look-back*. La striscia azzurra demarca la distribuzione dei dati come da Fig. 11. Curve verdi e blu come da Fig. 11. La curva nera rappresenta un buon fit ai dati, la cui espressione analitica e'

$$SFR = \frac{d\rho}{dt} = \frac{0.121 [M_{\odot} yr^{-1} Mpc^{-3}]}{10^{-1.58(z-0.68)} + 10^{0.16(z-0.68)}}.$$

La curva nera nella Fig. 10 rappresenta un modello numerico che meglio riproduce i dati e che e' utilizzato come riferimento anche nelle indagini successive.

Sottolineiamo qui quanto accennato alla fine della Sez. 2 e nella Sez. 4, che **osservazioni cosmologiche multi-banda**, per quanto riguarda tutti i dati, dai conteggi all'intensita' delle radiazioni di fondo, alle funzioni di luminosita', sono essenziali per ottenere informazioni sui vari parametri fisici delle sorgenti. Ad es. per quanto visto cola', statistiche nel vicino IR (nel sistema di riferimento della sorgente!) sono ottimali per misurare la massa stellare delle galassie, mentre osservazioni fotometriche nel lontano IR e nell'UV misurano il numero di stelle giovani e massicce, proporzionale al tasso di formazione stellare $SFR = d\rho_{star}/dt$ (Sez. 4).

Dunque i dati sulle funzioni di luminosita' UV e IR in Fig. 9 e 10 sono stati trasformati in dati riguardanti i tassi di formazione stellare SFR in funzione della luminosita' ¹. In questo modo i dati sulla luminosita' bolometrica nell'asse X della 10 sono immediatamente convertiti in tassi di formazione stellare, mentre il dato in asse Y rimane il numero di galassie per Mpc cubico. Una volta calcolato il numero di galassie per unita' di volume comovente con determinata SFR (quindi per ogni valore della luminosita' e del redshift), si integra su tutti i valori di SFR, ottenendo cosi' *il tasso di formazione stellare per unita' di volume comovente calcolato ad ogni epoca cosmica*.

Il motivo per considerare volumi e densita' in unita' *comoventi* anziche' *proprie* deve risultare chiaro considerando che vogliamo misure di quanto sia avvenuto entro un volume rappresentativo d'Universo, contenente la stessa quantita' di componenti cosmiche (sorgenti) indipendentemente dall'espansione cosmica.

I risultati di queste operazioni sono riportati in Fig. 11 e 12, in funzione del redshift e del tempo da oggi (*look-back time*).

Come si vede, l'attivita' della formazione delle stelle nelle galassie (e quindi delle galassie stesse) ha avuto un massimo compreso tra redshift $z \approx 1$ e 3, ovvero un tempo di *look-back* tra circa 6 e circa 12 miliardi di anni da oggi (tempo cosmico tra 1.7 e 7.7 Gyr, tra il primo e il secondo). E' in questo intervallo che il grosso delle galassie e delle loro popolazioni stellari si sono formate.

Altra questione di rilevante interesse cosmologico riguarda **l'origine degli elementi pesanti** (anche altrimenti detti *metalli*). Come tali si definiscono specie con numero atomico superiore a quello del Litio ($Z > 6$, ossia dal Carbonio incluso). Vengono detti invece elementi leggeri quelli dal Litio compreso in giu', e il significato cosmologico di questa suddivisione risultera' chiaro dalle nostre discussioni nella Sezione 11. Non solo la formazione delle galassie e delle strutture e' influenzata dalla presenza di questi elementi (ad esempio aumentando il tasso di raffreddamento del gas nel collasso del gas primordiale che va a formare le strutture, aumentando l'opacita' dovuta alla polvere, intervenendo nell'evoluzione stellare, ecc.), ma ovviamente essi forniscono la materia costituente la parte piu' rilevante delle strutture cosmiche, i sistemi planetari.

Ora, poiche' gli elementi pesanti sono prodotti principalmente dalle stelle massicce, stelle che rilasciano nel mezzo interstellare i loro prodotti su tempi scala inferiori a ~ 1 Gyr, possiamo ritenere che la storia della formazione delle stelle descritta nelle Figure 11 e 12 sia anche approssimativamente quella della formazione dei metalli.

Ovviamente, poiche' tali metalli sono prodotti principalmente da stelle massicce, la relazione tra il tasso di formazione stellare (che considera invece tutte le stelle formate) e il tasso di produzione di metalli dipende anche dalla funzione iniziale di

¹ Da notare che la SFR dedotta dalle luminosita' UV e da quello IR sono completamente indipendenti e da sommare tra loro. Infatti, l'IR misura la luce delle stelle giovani ri-processata dalle polveri (vedi Sez. 2.6 e Appendice 2A), mentre l'UV misura la loro emissione non assorbita dalle polveri. Le due misure di SFR vanno dunque semplicemente sommate.

massa stellare (quella che abbiamo chiamato IMF in Sez. 2.3 e 2.7). Assumendo la piu' rappresentativa di queste funzioni IMF, quella di Salpeter (1955), si puo' calcolare sulla base della teoria dell'evoluzione stellare il rapporto tra il tasso di produzione di metalli e quello della produzione di massa stellare:

$$SFR_z [M_\odot yr^{-1} Mpc^{-3}] = \frac{d\rho_z}{dt} \approx \frac{1}{42} SFR = \frac{d\rho_{star}}{dt} [M_\odot yr^{-1} Mpc^{-3}]. \quad [9.30]$$

Utilizzando questo fattore e' immediato convertire le ordinate in Fig. 11 e 12 in tassi di produzione di metalli nell'Universo (dividendo i valori sugli assi per il fattore 42)². In ogni caso la storia evolutiva per stelle e metalli e' la stessa.

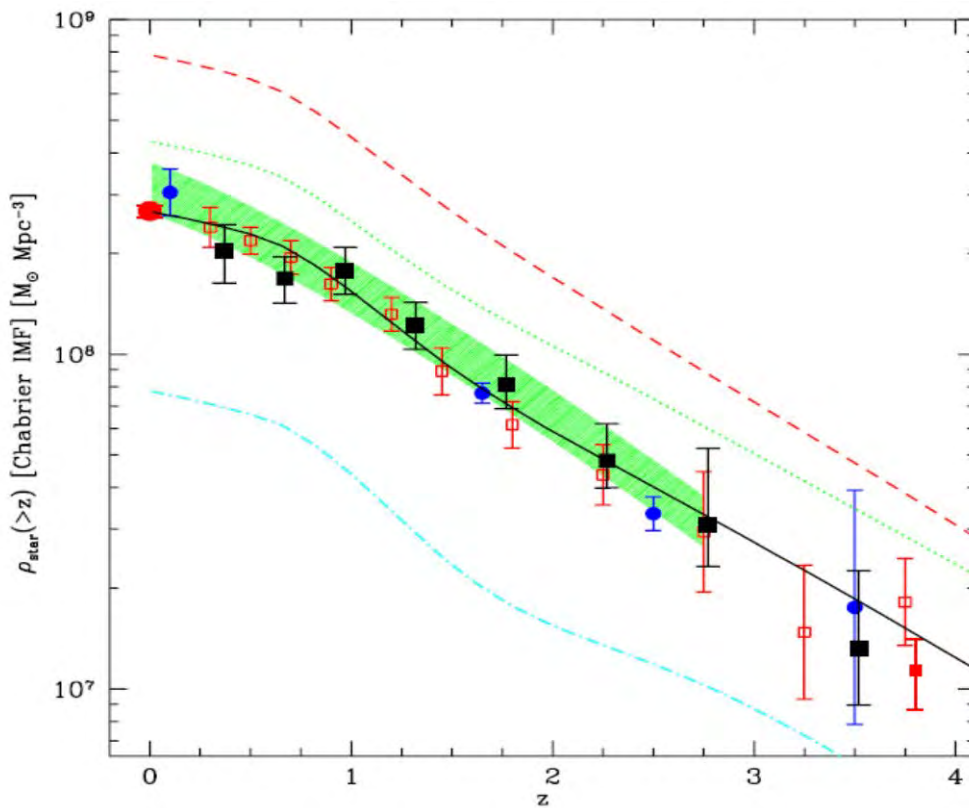


Figura 13. Distribuzione cumulativa nel tempo della densita' di massa stellare in funzione del redshift. Essa rappresenta la crescita della massa stellare nelle galassie al crescere del tempo cosmico (qui riportata in funzione del redshift). La curva nera e' l'integrale nel tempo delle corrispondenti curve nelle Fig. 11 e 12, e si basa sull'assunto che la funzione iniziale di massa stellare IMF sia la distribuzione di Chabrier (2003). Le curve con altri colori mostrano come peggiora l'accordo con i dati assumendo diverse IMF (la curva a puntini verdi assume una distribuzione standard di Salpeter, che fornisce un fit ai dati leggermente meno soddisfacente).

Interessante infine porre a confronto questi risultati sulla formazione delle stelle con evidenze riguardanti il progressivo accumulo di **massa in stelle delle galassie**, tramite quelle che abbiamo chiamato le funzioni di massa stellare evolutive, dipendenti dal tempo. Queste compaiono nella Fig. 9 a destra, calcolate a diversi

² Per un resoconto piu' dettagliato di quanto qui descritto rimandiamo al lavoro di Madau et al. 1996, MNRAS 283, 1388.

redshift. Come le masse in stelle delle galassie siano determinate per via fotometrica e' discusso nella Sez. 3.4: ovvero tramite una misura della luminosita', in particolare nel vicino IR, e utilizzando l'appropriato valore del rapporto massa/luminosita'. Ora, utilizzando i dati in Fig. 9 e integrandoli su tutti i valori della massa per ogni intervallo di redshift, otteniamo la densita' di massa stellare per volume comovente unitario, ovvero la densita' di massa di stelle gia' accumulate entro le galassie ad una determinata epoca cosmica. I dati relativi a questa misura, derivanti da varie indipendenti analisi) sono riportati in Fig. 13. La funzione del redshift qui riportata e' una funzione integrale che fornisce la massa totale in stelle gia' formate ad ogni valore del redshift z , e cresce quindi in modo monotono al diminuire dello z (al crescere del tempo cosmico t). Ovviamente l'andamento riportato in Fig. 13 e' esattamente l'integrale nel tempo (una volta che il tempo sia trasformato in redshift da eq. 8.25 ad esempio). In particolare la curva nera nella figura, che sembra riprodurre molto bene i dati, e' semplicemente l'integrale nel tempo delle curve nere nelle Fig. 11 e 12.

Nella Fig. 13 e' reso evidente l'effetto di diverse assunzioni operate per quanto riguarda la funzione iniziale di massa stellare, IMF. La curva nera di miglior fit e' stata calcolata assumendo una forma funzionale di IMF leggermente diversa da quella di Salpeter (1955), ovvero la funzione di Chabrier (2003): entrambe le distribuzioni sono leggi di potenza nella massa stellare (Sez. 2.3), ma, mentre la Salpeter ha la stessa pendenza tra 0.1 e 100 M_{\odot} , la Chabrier riduce il numero di stelle con $M < 1 M_{\odot}$. Con questa importante assunzione, una enorme varieta' di dati sulla storia cosmica della formazione delle stelle, delle galassie e degli elementi pesanti sono resi consistenti tra loro e forniscono un quadro osservativo auto-consistente.

Questi risultati, basati come detto sulle piu' profonde esplorazioni cosmologiche a tutte le lunghezze d'onda, risolvono dunque da un punto di vista osservativo un grande problema che ha assillato i cosmologi per mezzo secolo. Da un punto di vista fisico e interpretativo, tuttavia, molti aspetti di questa storia, riguardanti in particolare i processi fisici coinvolti in dettaglio, rimangono tuttora non compresi.

9.7 Soluzione del paradosso di Olbers.

I risultati discussi nelle Sezioni 9.5 forniscono anche la soluzione definitiva di un famoso paradosso della cosmologia osservativa noto da un paio di secoli, e menzionato in Sez. 5.7: il paradosso di Olbers. Il paradosso riguarda l'evidenza osservativa, di non ovvia interpretazione, dell'oscurita' del cielo notturno. I dati osservativi sono illustrati in Fig. 7, che quantifica l'intensita' della radiazione

cosmologica diffusa (dell'ordine, come abbiamo visto, di $10^{-8} \text{ Watt/m}^2/\text{sr}$ in banda ottica, poco piu' nell'infrarosso, e molto meno in raggi X).

Dal punto di vista interpretativo, per comprendere il fenomeno possiamo utilizzare le relazioni [9.23] e [9.24] che ci forniscono l'esatta stima del fondo contribuito da sorgenti. Vi sono due aspetti fondamentali dello spazio-tempo che limitano fortemente la luminosita' del cielo notturno: il primo fatto e' che l'Universo ha un'eta' finita, e quindi l'integrale in distanza espresso dalla [9.23] non ha contributi rilevanti a valori del redshift z elevati.

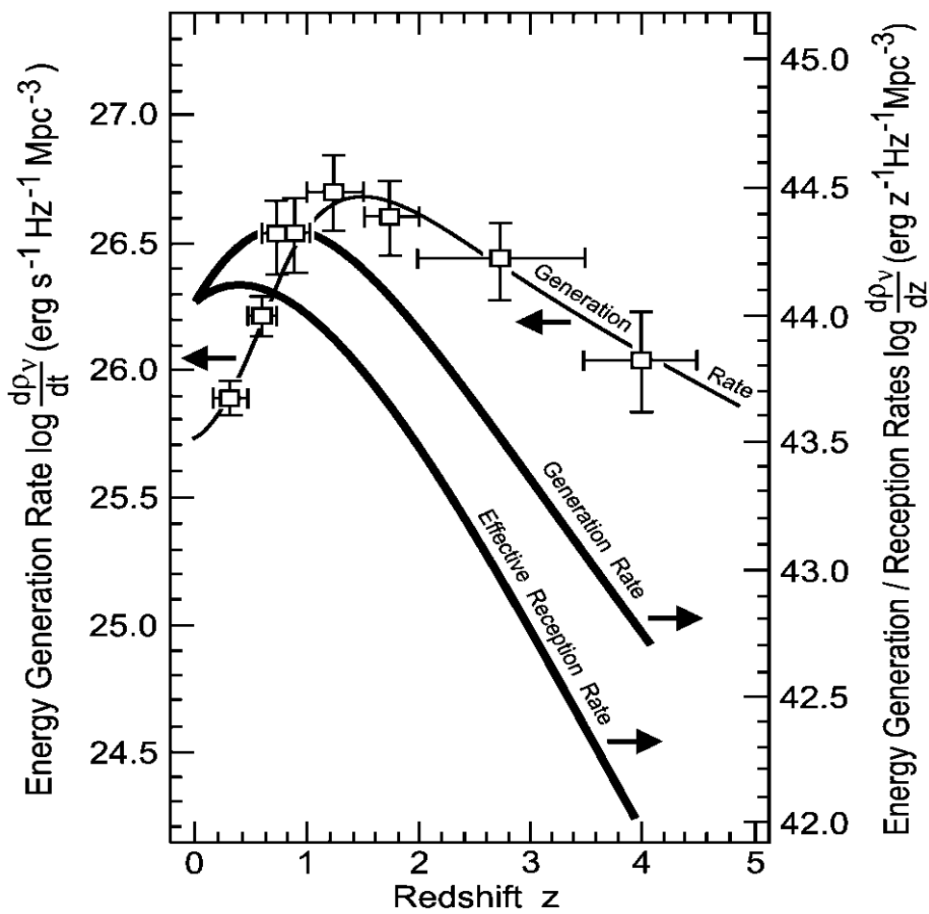


Figura 14 Dati: tasso di generazione di energia radiante per Mpc cubico nel volume *comoving* per unita' di tempo (asse a SX) e per unita' di redshift (a DX). La curva sottile e i dati a quadrato aperto si riferiscono all'asse a SX. Tali dati rappresentano misure dell'emissivita' galattica per volume *comoving* e per unita' di tempo, gia' riportati in Fig. 11.

Le due curve spesse (riferite all'asse a DX) traducono quanto osservato in contributi al fondo ottico-IR, e forniscono : quella a sinistra il contributo al fondo cosmico che un osservatore misura provenire dai vari redshift, per unita' di intervallo di redshift (eq. [9.31]); la curva spessa a destra il tasso di generazione di energia radiante per unita' di volume proprio e per unita' di intervallo di redshift, in funzione del redshift. Le due curve spesse differiscono per effetto del redshift che degrada l'energia dei fotoni prodotti, per il fattore $(1+z)$. [Da Harwit 1999].

Il secondo aspetto da considerare e' la dipendenza del flusso osservato di una sorgente cosmica dalla sua distanza tramite la distanza di luminosita' in eq. [8.8]: abbiamo visto che vi sono come minimo due fattori di penalizzazione pari a $(1+z)$ che fanno diminuire il flusso di una sorgente ad alti redshift. Cio' si traduce in un fattore di penalizzazione in funzione del redshift nella [9.23] che va all'incirca come $(1+z)^{-6.5}$ per tipici valori di q_0 . Gli andamenti complessivi del tasso di generazione di energia fotonica e del tasso di ricezione (che corrisponde a quanto flusso di fondo un osservatore terrestre misura) sono illustrati in Figura 14. Si tratta qui di una riedizione della precedente Fig. 11, nella quale al posto del tasso di formazione stellare e' stato posto il tasso di produzione di energia radiante, dal momento che le due quantita' sono proporzionali l'una all'altra, soprattutto se si tratta di fotoni a corte lunghezze d'onda dell'ottico o UV.

La figura mostra che, per storie evolutive plausibili dell'emissivita' per unita' di volume comovente (ovvero il tasso di produzione di energia radiante per unita' di tempo – linea sottile, che e' l'interpolazione dei dati rappresentati come quadrati aperti), il fondo e' prodotto principalmente a $z < 1$. L'emissivita' per volume *comoving* e per unita' di tempo e' dunque riportata come quadrati aperti in Fig. 14, dove pero' compare in unita' di volume *comoving*, ed e' quindi la [9.24] moltiplicata per $(1+z)^3$.

Quello che viene riportato come curva spessa a sinistra nella figura e' invece il tasso di ricezione di energia radiante ("*effective reception rate*"), corrispondente all'argomento dell'integrale [9.23], ossia la quantita'

$$\frac{dI_\nu}{dz} = \frac{1}{4\pi} \frac{c}{H_0} \frac{j_\nu(z)}{(1+z)^6 \sqrt{1+2q_0z}}, \quad [9.31]$$

dove l'emissivita' per volume proprio $j_\nu(z)$ e' il tasso di generazione di fotoni al redshift z per unita' di tempo (eq. [9.24]), mentre dI_ν/dz e' per unita' di redshift z .

La curva spessa a destra in Fig. 14 rappresenta il tasso di generazione di energia radiante per intervallo unitario di z , che differisce dall'altra solo per un fattore $(1+z)$. Infatti, riferendo le densita' ai volumi *comoventi*, il numero di fotoni non cambia con z , mentre la loro energia cambia per un fattore $(1+z)$ tra sorgente e osservatore.

Complessivamente risulta che l'integrale [9.23] puo' dunque essere tranquillamente limitato ad un redshift massimo di $z \sim 1$, sorgenti piu' lontane non contribuiscono significativamente al flusso di fondo anche se dovessero evolvere molto.

Con queste considerazioni, possiamo dare una stima semplificata del fondo in banda ottica integrando semplicemente la [9.23] e tenendo conto che: a) l'emissivita' di volume locale delle galassie e' $\sim 10^8 L_\odot/\text{Mpc}^3$ in banda B (vedi Sez. 3.5);

b) l'emissivita' nel volume *comoving* evolve poco e si puo' considerare in prima approssimazione costante con z tra $z=0.5$ e 1; c) il fondo in banda B sia prodotto a un redshift medio tipicamente $z^* \sim 0.5$; d) la correzione-K si puo' calcolare da [8.20] assumendo un certo indice spettrale, che in banda ottica si puo' assumere essere $\alpha \sim 1$, cosicche' $K(z) \sim 1$. Si trova cosi', per un intervallo unitario di z e assumendo $c/H_0 \sim 4200 \text{ Mpc}$,

$$\begin{aligned}
 I_\nu &= \frac{1}{4\pi} \frac{c}{H_0} \int_0^\infty dz \frac{j_\nu(z)}{(1+z)^6 \sqrt{1+2q_0 z}} \approx \frac{(4200 \text{ Mpc}) \cdot 10^8 \cdot (1+z^*)^3 L_\odot / \text{Mpc}^3}{4\pi \cdot (1+z^*)^{6.5}} \approx \\
 &\approx \frac{4200 \cdot 10^8 \cdot 4 \cdot 10^{33}}{4\pi \cdot 1.5^{3.5} (3 \cdot 10^{24})^2} \text{ erg / sec / cm}^2 / \text{sr} \approx \frac{4200 \cdot 10^8 \cdot 4 \cdot 10^{33} 10^{-3}}{4\pi \cdot 1.5^{3.5} (3 \cdot 10^{24})^2} \text{ W / m}^2 / \text{sr} \\
 &\approx 3.4 \cdot 10^{-9} \text{ W / m}^2 / \text{sr}
 \end{aligned}$$

un risultato dunque perfettamente consistente con il dato sull'intensita' del fondo ottico in banda B mostrato in Fig 7.

Un altro modo per ottenere un analogo risultato in grado di spiegare l'intera energetica fotonica contenuta nei fondi ottico-infrarosso di Fig. 7 e' quello di considerare il parametro di densita' dei barioni condensati in stelle $\Omega_{b,0}$ al tempo cosmico attuale e la relativa densita' di massa:

$$\rho_{b,0} \equiv \frac{\Omega_{b,0} 3H_0^2}{8\pi G} \approx 5 \cdot 10^8 M_\odot / \text{Mpc}^3 \quad [9.32]$$

$$\text{con } \Omega_{b,0} \approx 0.005$$

per quanto visto in Sez. 3.5. Possiamo cosi' scrivere, per la densita' al redshift z ,

$$\rho_b(z) = \rho_{b,0} (1+z)^3 = \frac{\Omega_{b,0} 3H_0^2}{8\pi G} (1+z)^3.$$

Sappiamo che questa densita' di massa stellare ha prodotto energia fotonica al redshift medio z con efficienza data dal parametro $\varepsilon \approx 0.0016$, in riferimento alla [2.12] e mediando la [2.13]³:

$$\rho_\gamma(z) = c^2 \varepsilon \rho_{b,0} (1+z)^3 = \frac{\Omega_{b,0} 3c^2 \varepsilon H_0^2}{8\pi G} (1+z)^3. \quad [9.33]$$

Assumendo, per quanto visto in Fig. 14, che questo evento di formazione stellare, e conseguente produzione fotonica, sia avvenuto a $z \approx z^* \approx 1$, questa densita' di

³ Il valore da noi adottato per l'efficienza ε corrisponde ad assumere una determinata funzione iniziale di massa stellare IMF (vedi Sez. 2.7 e Sez. 4), ossia quella di Chabrier, che oggi sembra meglio rappresentare una grande varieta' di dati sulla storia della formazione stellare nelle galassie (vedi Sez. 9.6).

energia fotonica al redshift z si tradurra' in una intensita' locale del fondo ottico-infrarosso, utilizzando la [1.1]:

$$\begin{aligned} \nu_0 I_0 &= \frac{c \rho_{\gamma,0}}{4\pi} = \frac{c}{4\pi} \frac{\rho_{\gamma}}{(1+z^*)^4} = \frac{c}{4\pi} \frac{\Omega_{b,0} 3c^2 \varepsilon H_0^2}{8\pi G(1+z^*)} \simeq \\ &\simeq 6.7 \cdot 10^{-8} \left(\frac{\Omega_{b,0}}{0.004} \right) \left(\frac{\varepsilon}{0.0016} \right) \left(\frac{2}{1+z^*} \right) \left(\frac{H_0}{70} \right)^2 \text{ Watt / m}^2 \text{ / sr} \end{aligned} \quad [9.34]$$

che e' una buona approssimazione dell'integrale su tutte le frequenze dei fondi di radiazione nell'ottico e nell'infrarosso in Fig. 7.

Questi fondi si possono dunque naturalmente spiegare come dovuti alla somma dei contributi di tutte le popolazioni stellari in galassie durante il tempo di Hubble.

9.8 Un caso di interesse: il fondo residuo diffuso nel vicino IR. Le prime luci, Stelle di Popolazione III?

Come applicazione finale di particolare interesse accenniamo alla recente osservazione di un apparente eccesso di fondo cosmico tra circa $1 \mu\text{m}$ e circa $5 \mu\text{m}$ basato su osservazioni dell'Infrared Telescope Facility (IRTF, un esperimento spaziale giapponese) e parzialmente confermate dallo stesso COBE, e riportato con dati in giallo in Fig. 6 (gli stessi dati non appaiono in Fig. 7, poiche' in quest'ultima sono solo riportate le stime del fondo ottico-IR basate su osservazioni di HST di sorgenti ultra-deboli in piccole aree di cielo, il fondo quindi dovuto a sorgenti discrete). Il fondo di IRTF invece e' riportato nella seguente Figura 15, e corrisponde a una stima del fondo totale, ottenuta su ampie aree di cielo, che include quindi sia i contributi delle sorgenti discrete (galassie), sia eventuali componenti realmente diffuse. Il fondo di IRTF a $1.5 \mu\text{m}$ ammonta a ben $6 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2/\text{sr}$, ossia 6 volte maggiore del fondo misurato da HST a queste frequenze e confrontabile, da solo, con il fondo totale in Fig. 7 e da noi stimato in eq. [9.34] come prodotto da tutte le stelle attive durante il tempo di Hubble. La forma spettrale ha un andamento tipo RJ $\propto \nu^2$, e crolla a $\lambda < 1 \mu\text{m}$.

Come si vede dal confronto di questi dati (in Fig. 15 e in giallo in Fig. 6) e le stime riportate in Fig. 7, assieme alla nostra analisi in Sez. 9.6, non vi e' nessun modo di spiegare il fondo IRTF con i contributi di sorgenti note, che si attestano, come abbiamo visto, su valori attorno a $10^{-8} \text{ W/m}^2/\text{sr}$. Tra l'altro, anche la forma spettrale e' impossibile da riconciliare con gli spettri di sorgenti note a redshift moderati ($z < 6$).

Escludendo sorgenti note, e' stato proposto che questa radiazione sia il prodotto di una popolazione di stelle assolutamente primordiale, denominate stelle di Popolazione III, probabilmente oggetti molto massivi ($> 100 M_{\odot}$) che si pensa

abbiano costituito le prime luci che si sono accese nell'Universo. La forma dello spettro IRTF, con il suo troncamento a $\lambda < 1 \mu\text{m}$, indicherebbe che queste sorgenti siano state attive a redshift attorno a $z \sim 8-10$. Questa interpretazione, che rappresenterebbe così un risultato di grandissimo interesse cosmologico, è tuttavia ancora incerta. Una possibilità alternativa che è stata considerata è che si tratti di una cattiva sottrazione della luce Zodiacale, molto intensa a queste lunghezze d'onda e non facile da valutare (si veda trattazione della luce Zodiacale in Fig. 1.11-1.12, Sez. 1).

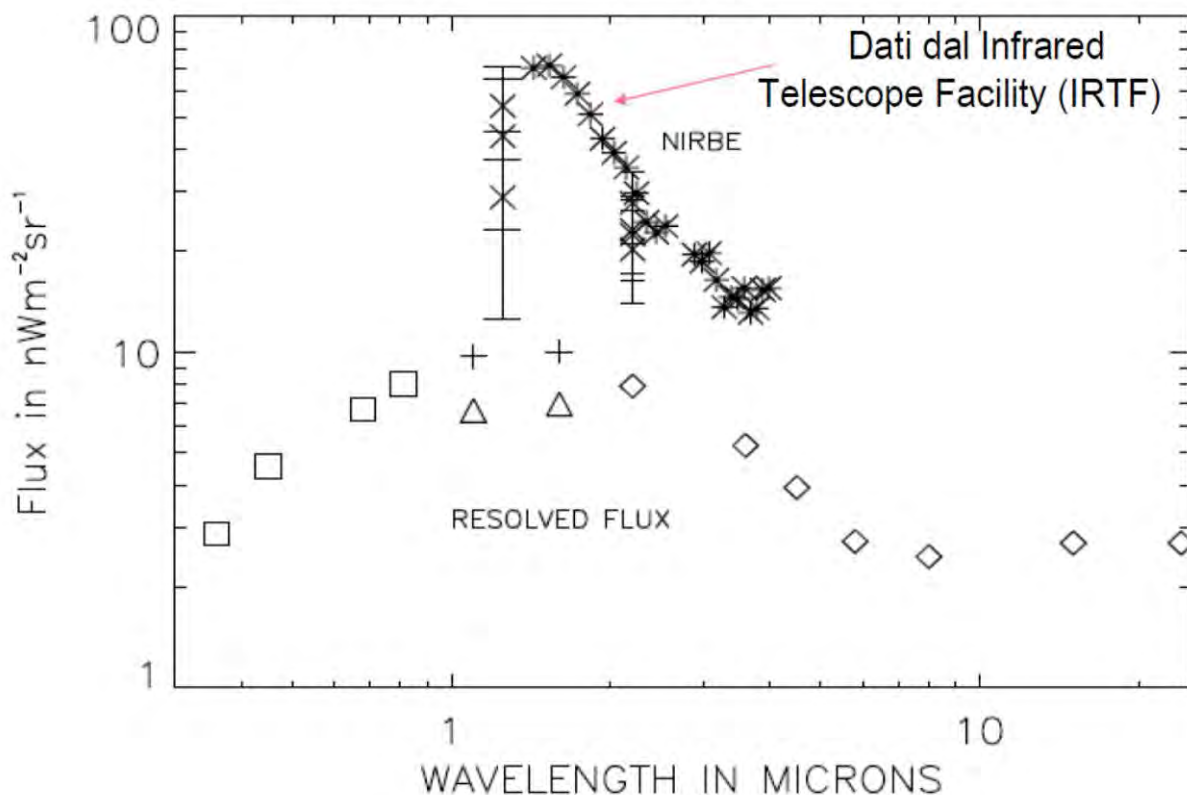


Figura 15 Grafico dell'intensità totale del fondo diffuso misurato dal Infrared Telescope Facility (IRTTF) riportato come asterischi. I quadrati sono i flussi integrati misurati da HST [Madau & Pozzetti (2000)], triangoli da Thompson et al. (2006), segni più' sono questi flussi corretti per le sorgenti deboli non dettate. Croci con barre d'errore alcune misure dello strumento DIRBE a bordo di COBE. [Da Matsumoto et al. (2005, 2011)].

APPENDICE 9A:

RELAZIONI APPROSSIMATE DISTANZA-TEMPO-REDSHIFT.

Otteniamo qui alcune sempli relazioni tra tempo cosmico, redshift, distanza radiale che valgano nel limite di bassi redshift.

Partiamo sempre dalla Robertson-Walker e integriamola radialmente:

$$cR_0 \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}, \quad \text{con} \quad z = \frac{R(t_0)}{R(t)} - 1, \quad d_L = r_0(1+z) \quad [\text{A9.1}]$$

Utilizzando i parametri che esprimono la derivata prima e seconda del fattore di scala $R(t)$ (H_0 e q_0), possiamo rappresentare il fattore di scala, per valori di r_1 non troppo grandi e per valori di t_1 non troppo diversi da t_0

$$R(t) \simeq R(t_0) \left[1 + H_0(t-t_0) + \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t-t_0)^2 + \dots \right] \quad [\text{A9.2}]$$

Sostituendo la [A9.1]

$$z \simeq H_0(t-t_0) + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0^2 (t-t_0)^2 + \dots \quad [\text{A9.3}]$$

che puo' essere invertita

$$(t_0 - t) \simeq \frac{1}{H_0} \left[z - \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) z^2 + \dots \right]. \quad [\text{A9.4}]$$

Per r_1 sufficientemente piccolo la [A9.1] da'

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} \simeq r_1 \simeq c \int_{t_1}^{t_0} dt \left[1 + H_0(t-t_0) + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0^2 (t_0 - t)^2 + \dots \right]$$

da cui, integrando,

$$r_1 \simeq c \left[t_0 - t + \frac{H_0}{2} (t_0 - t)^2 + \dots \right] \quad [\text{A9.5}]$$

ossia, sostituendo la [A9.4]

$$r_1 \simeq \frac{c}{H_0} \left[z - \frac{1}{2} (1 + q_0) z^2 + \dots \right] \quad [\text{A9.6}]$$
$$d_L \simeq \frac{c}{H_0} \left[z + \frac{1}{2} (1 - q_0) z^2 + \dots \right]$$

Si tratta di espressioni molto generali valide per qualunque cosmologia, per redshift z non troppo elevati.

10. LEGGI GENERALIZZATE DELLA DINAMICA COSMICA. L'ACCELERAZIONE DELL'ESPANSIONE E SUE INTERPRETAZIONI.

Nelle Sezioni precedenti abbiamo operato una approfondita analisi delle caratteristiche morfologiche, cinematiche e dinamiche dell'Universo come oggi lo osserviamo. Sulla base di una numerosa serie di dati a nostra disposizione abbiamo quindi proceduto ad una interpretazione di questa vasta realta' in termini geometrici (ovvero cercando di definire procedure di misura di distanze) ed in particolare dinamici (cercando di stabilire quali siano le forze in gioco che ne determinano la struttura e la sua evoluzione nel tempo). Importante sottolineare che questa analisi dinamica ha fatto sin qui riferimento alle leggi della "fisica classica", quivi comprendendo anche la Relativita' Generale nella sua formulazione appunto *classica* come teoria della gravita' costituente una generalizzazione della teoria di Newton. Complessivamente possiamo dire di aver compiuto un percorso di straordinario valore ed interesse. Possiamo dire che a questo livello si trovava la cosmologia sino a circa gli anni '80.

Tra i primi anni '80 e sino alla fine degli anni '90, pero', sono emersi una serie di problemi ed evidenze osservative che hanno richiesto significative modifiche nella nostra descrizione dell'Universo. Discutiamo in questo capitolo alcuni motivi di questa "*crisi*" e soluzioni proposte per superarla¹.

Nella realta', a guardare bene, avvisaglie di qualche problema nella trattazione precedentemente svolta era gia' emerso, ad esempio riguardo alla stima dell'eta' dell'Universo realizzata in Sez. 7.7. L'eta' che era stata possibile ottenere dipendeva dal valore del parametro di densita': per un modello aperto ($\Omega_m = \Omega_0 = 0.3$) risultava di poco piu' di 11 Gyrs, mentre per un modello piatto di Einstein-de Sitter ($\Omega_m = \Omega_0 = 1$), che per una serie di motivi che vedremo nella Magistrale sarebbe stato quello preferito dai cosmologi teorici, risultava addirittura di 10 Gyrs. (Si noti che da qui in poi useremo al posto di Ω_0 il parametro Ω_m , che comunque a questo livello coincidono). Nessuno dei due valori dell'eta' e' consistente con quelle stimate degli ammassi globulari piu' antichi sulla base di teorie assai precise ed attendibili di evoluzione stellare, eta' che si attestano o superano i 12 Gyrs (Sez. 5.6). Una volta che la costante di Hubble e' nota con sufficiente precisione, l'eta' dipende solo dal parametro Ω_m . Uno dei metodi piu' efficaci per la misura dei parametri cosmologici e' il diagramma di Hubble (Sez. 8.4). Tuttavia la nostra analisi dei diagrammi di Hubble di galassie, condotta in Sez. 8.4, non ha prodotto nessun risultato se non quello di verificare che le galassie sono sorgenti cosmiche le cui proprieta' di emissione fotonica evolvono rapidamente nel tempo. Un analogo problema ci ha

¹ Come al solito, nella presente Sezione discutiamo uno di questi problemi, mentre altri verranno menzionati e approfonditi nei corsi della Magistrale

impedito di ottenere vincoli particolarmente significativi sui parametri cosmologici dai conteggi di sorgenti o dal test dimensione angolare-redshift.

10.1 Diagrammi di Hubble delle Supernove di tipo 1A.

Un passo avanti decisivo nell'utilizzo del diagramma di Hubble allo scopo di stimare i parametri cosmologici e' stato quello di identificare una categoria di sorgenti cosmiche con migliori (molto migliori) proprieta' di candele campione (sorgenti di cui si conosca con precisione la luminosita' intrinseca). Come vedremo nella presente Sez., questo sviluppo della vicenda ha portato ad una grande sorpresa, non solo per i cosmologi, ma anche con conseguenze drammatiche per i fisici teorici. L'importante sviluppo e' stato ottenuto con un sistematico programma osservativo condotto da due gruppi, uno americano ed uno australiano ², che hanno identificato una categoria di sorgenti cosmiche come particolarmente adatta a fungere da candele campione: le Supernove di tipo 1A.

Le Supernove 1A originano da stelle nane bianche, costituite essenzialmente da nuclei di Carbonio e Ossigeno a temperatura superficiale elevata (decine di migliaia di gradi, che pero' diminuisce nel tempo per irraggiamento in assenza di produzione di energia, si veda Sez. 5.6), e densita' elevatissima, in un bagno di elettroni degeneri.

Si tratta di stelle, tipicamente in sistemi binari stretti, nelle loro fasi evolutive finali, dopo che hanno perso gli strati esterni. Esse sono portate ad esplodere a causa dell'accrescimento di gas dalla stella compagna o, addirittura, dello scontro diretto con essa (che puo' essere pur essa una nana bianca), risultato di un degrado dell'orbita binaria per emissione di onde gravitazionali, che porta i due oggetti a collassare l'uno sull'altro. I meccanismi dinamici dettagliati non sono ancora chiari. In ogni caso, cio' che succede e' che questo accrescimento di gas fa aumentare la massa e la densita' della stella. Superata la massa limite della nana bianca di $1.44 M_{\odot}$ (limite detto di Chandrasekhar), il sistema formato dalla nana bianca non e' piu' stabile, a seguito di un collasso la densita' nucleare raggiunge valori cosi' elevati che si innescano reazioni nucleari che coinvolgono il Carbonio e l'Ossigeno. La degenerazione degli elettroni impedisce alla stella di reagire "normalmente" all'energia rilasciata da queste reazioni, ad esempio aumentando il volume stellare per effetto dell'aumento della pressione, cosi' diminuendo la temperatura ³. In questo modo la temperatura sale rapidamente a dismisura. In un tempo brevissimo (meno di 1 sec), si verifica l'innescamento di reazioni nell'intero corpo della stella, con la conseguente sua catastrofica deflagrazione, che produrra' un immediato rilascio nell'ambiente circostante della intera massa stellare sotto forma di atomi principalmente di Ferro e Calcio, con un possibile residuo di Carbonio e Ossigeno. La luminosita' prodotta risulta piuttosto precisamente definita,

² I *principal investigators* di questi due programmi sono Saul Perlmutter, Adam Riess e Brian Schmidt, premi Nobel nel 2011 (50% del premio al primo, 25% agli altri).

³ In un gas degenere, infatti, la pressione non e' determinata dalla temperatura del plasma, ma dalla degenerazione elettronica.

relativamente costante da oggetto a oggetto e indipendente dalle condizioni ambientali, a causa del fatto che una massa costante di gas ($1.44 M_{\odot}$) viene processata nuclearmente e genera quindi la stessa quantita' di energia. Cio' fa si' che le SN Ia siano utilizzabili come eccellenti candele campione e quindi come indicatori di distanza.

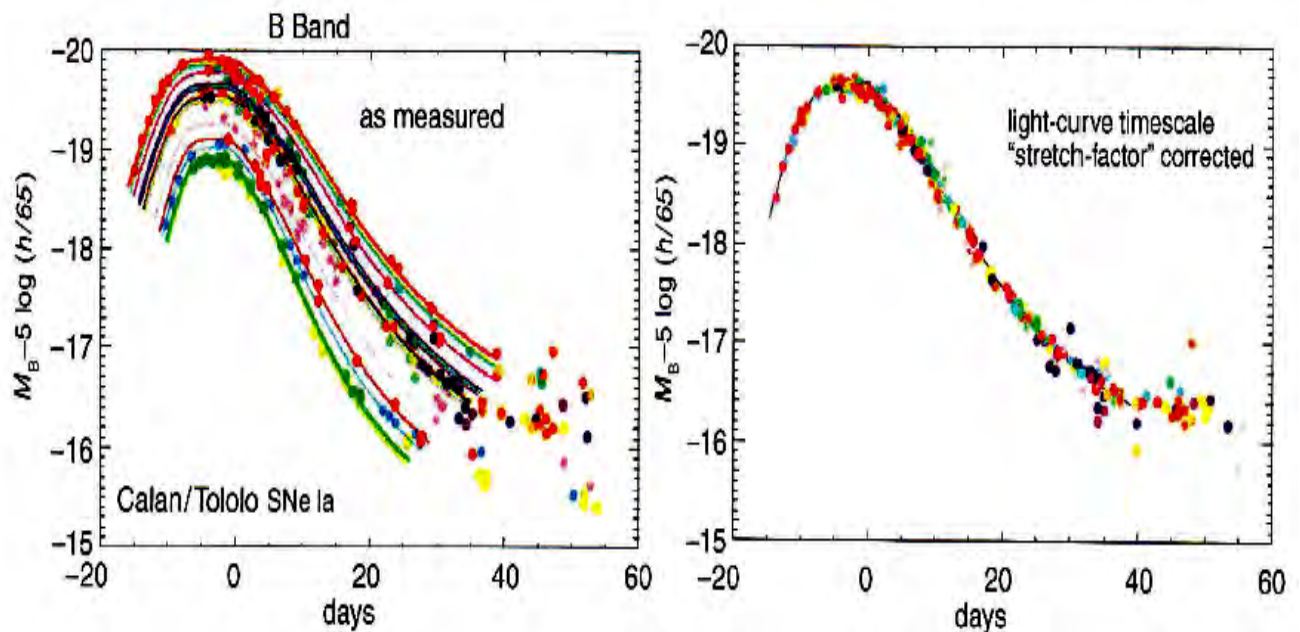


Figura 1

A sinistra e' mostrata la curva di luce di un campione di Supernove 1A: si notano vari andamenti molto regolari: al diminuire della luminosita' anche la durata del fenomeno diminuisce. Questa dipendenza e' facilmente parametrizzabile e permette di ottenere una stima precisa della luminosita' dal periodo ricavato dalla curva di luce. Una volta che si tenga conto di questo, correggendo la luminosita' in base al periodo (nonche' correggendo per estinzione interna alla galassia ospite), si ottengono andamenti della luminosita' dal tempo validi per tutti gli oggetti di questa categoria e riportati nel pannello a destra. [Da Kim et al. 1997].

In realta' questa aspettativa e' verificata solo in parte: le Supernove 1A per le quali e' stata possibile una determinazione indipendente della distanza, basata sugli indicatori di distanza, mostrano infatti una certa varietta' di curve di luce un po' diverse tra loro, cui si associano differenze nelle luminosita' al massimo, come mostrato in Figura 1 (a sinistra): gli oggetti con le curve di luce piu' allargate nel tempo sono anche i piu' luminosi (con una varianza della luminosita' al massimo di circa 1 mag). Il pannello di sopra in Figura 2 mostra che, in effetti, il diagramma di Hubble non corretto per un campione di queste Supernove ha una dispersione dei dati piuttosto elevata, se non viene tenuto conto di queste differenze tra un oggetto e l'altro.

Queste differenze tra oggetto ed oggetto mostrano tuttavia una notevole regolarita' e sono state modellate con semplici leggi empiriche, che hanno appunto posto in relazione la forma della curva di luce (in particolare il suo periodo) con la luminosita'. Il risultato di queste analisi e' che e' possibile correggere, sulla base della forma e in particolare del periodo della curva di luce, i flussi di ciascun oggetto, cosi' riportandoli ad una curva-tipo caratterizzata da un ben determinato valore della luminosita' al massimo, pari a

$$M_{B,\max} \approx -19.4 - 5 \log \left(\frac{H_0}{70 \text{ Km} / \text{s} / \text{Mpc}} \right) \quad [10.1]$$

(il termine tra parentesi corregge $M_{B,\max}$ volendo variare H_0). La curva di luce media cosi' corretta e' riportata nel pannello a destra della Fig.1, mentre in quello in basso nella Fig.2 si vede il risultato per quanto riguarda il diagramma di Hubble per sorgenti di basso redshift..

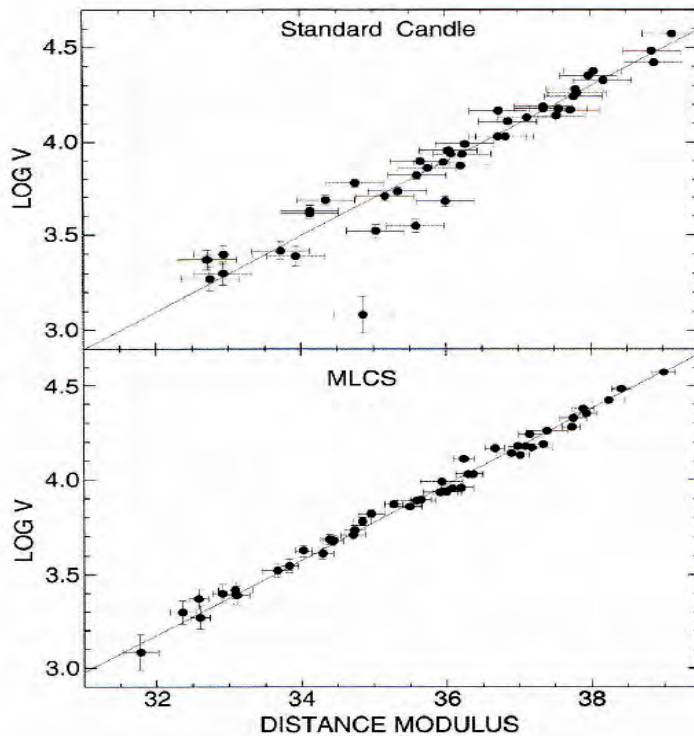


Figura 2

Diagramma di Hubble per un campione di Supernove 1A: velocita' di recessione contro modulo di distanza ($m-M$). Nel pannello in alto si vede il risultato senza nessuna correzione per il tipo di curva di luce. Nel pannello in basso quello dopo aver effettuato la correzione per il tipo di curva di luce e quella per assorbimento nella galassia ospite.

A quanto detto occorre aggiungere una correzione che e' stata apportata riguardante l'assorbimento della luce della Supernova da parte di polveri presenti nel mezzo interstellare nella galassia che la ospita. Questa correzione per estinzione viene calcolata sulla base dei colori ottici osservati (ottenuti dal confronto di curve di luce in diverse bande ottiche), oppure analizzando lo spettro della sorgente. L'accurata determinazione della curva di luce permette cosi' di determinare la luminosita' al massimo, rendendo questa categoria di sorgenti delle ottime *candele campione*.

Un altro grande vantaggio delle Supernove 1A per indagini cosmologiche risiede nella relativa facilità con cui possono essere identificate alle più grandi distanze spazio-temporali, grazie al fatto di essere *a)* estremamente luminose (quasi quanto una intera galassia), *b)* puntiformi (cosa che rende la loro fotometria facile anche in immagini confuse) e *c)* rapidamente variabili (che le rende identificabili tra una infinita di stelle in campi estesi di cielo). Le strategie osservative per la loro identificazione prevedono di osservare ampi campi di cielo in più bande ottiche con telescopi sensibili su una grande area, e ripetere le osservazioni con scadenza periodica (ad es. alcune settimane): le Supernove sono identificate confrontando (ossia facendo la differenza di) immagini prese a tempi diversi: immagini differenza nella stessa banda producono un chiaro segnale nella posizione in cui sia nel frattempo comparsa una Supernova. Si noti che nei campi di cielo investigati possono facilmente trovarsi molte migliaia, o varie decine di migliaia di galassie, cosicché, anche se la probabilità dell'esplosione di una Supernova entro una galassia è bassa (alcuni eventi per secolo al più), quella nell'immagine complessiva è relativamente elevata.

Ricavate con le tecniche precedentemente descritte la luminosità e il flusso al massimo (il loro rapporto viene indicato come il modulo di distanza $m-M$ ragionando in termini delle magnitudini), si ricava la distanza di luminosità dalla [8.8] e [8.12]. A questo punto è facile aggiungere a questo dato la determinazione del redshift sia della Supernova che eventualmente della galassia ospite, con telescopi di sufficiente potenza, e così ottenere il diagramma di Hubble con un numero sufficiente di oggetti.

Un primo risultato interessante di queste analisi è stata la verifica, già menzionata nella Sez. 8.1, dell'effetto del redshift cosmologico nel trasformare i ritmi temporali tra due osservatori fondamentali situati a due diversi tempi cosmici caratterizzati da diversi valori del fattore di scala $R(t)$: l'effetto del redshift, verificato da queste osservazioni, è quello di allungare i tempi-scala nel sistema di riferimento dell'osservatore, ossia nel nostro caso di allargare temporalmente le curve di luce proporzionalmente a $(1+z) = R(t_0)/R(t_e)$. Ovviamente di questo "allargamento cosmologico" occorre tenere conto nell'analisi delle curve di luce delle Supernove.

Uno dei primi diagrammi di Hubble di Supernove 1A così ottenuti è riportato in Figura 3. Innanzitutto è da notare che i dati qui riportati per supernove a bassi redshift sono perfettamente adeguati per una stima accurata della costante di Hubble, che risulta in ottimo accordo con i risultati di HST. In secondo luogo, le osservazioni di supernove a $z > 0.5$ forniscono a loro volta un modo per vincolare gli altri parametri cosmologici. Le varie curve riportate nella Fig. 3 si riferiscono a diverse scelte per il parametro di densità Ω_m , tutte facenti riferimento allo stesso valore di H_0 .

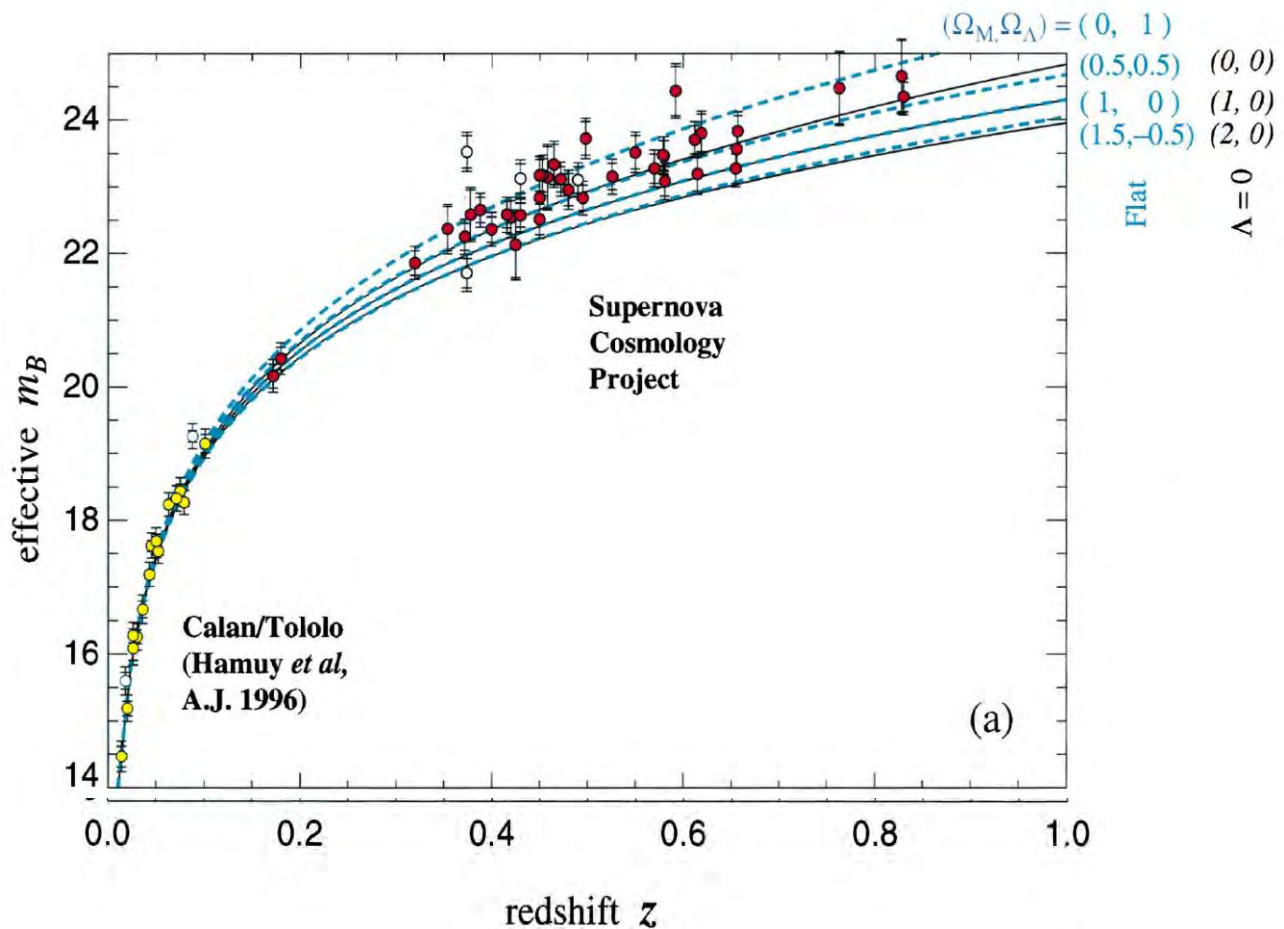


Figura 3

Diagramma di Hubble di un campione di Supernove 1A. I risultati di diversi gruppi osservativi sono qui riportati su un ampio intervallo di redshift. Le varie curve riportano le previsioni della relazione di Hubble per vari valori dei parametri cosmologici. La magnitudine m_B e' corretta per correzione K. La costante H_0 qui assunta, e perfettamente consistente con i dati sulla Supernove a bassi redshift, e' pari a 70 Km/sec/Mpc. [Da Perlmutter et al. ApJ 517, 565-586, 1999].

E a questo punto sorge il problema: la maggior parte delle Supernove tra $z=0.2$ e $z=0.8$ non solo si collocano a valori della magnitudine apparente piu' elevati rispetto alle previsioni di un modello di Einstein-de Sitter ($\Omega_m=1$), ma risultano anche piu' elevati di quelle in un modello aperto ($\Omega_m<1$), o persino in un modello di Milne ($\Omega_m=0$), dove con Ω_m viene indicato il parametro di densita' della materia gravitante. Come discusso in Sez. 8.4, il modello di Milne e' quello al quale corrispondono le piu' grandi distanze di luminosita' e i piu' deboli flussi per sorgenti a dato redshift.

La Figura 4 illustra con maggiore dettaglio il problema. In questa viene riportato, in funzione del redshift, non la magnitudine apparente, ma la differenza tra la magnitudine osservata e quella prevista nel caso del modello vuoto di Milne ($\Omega_m=0$). La magnitudine predetta dal modello di Milne e' calcolata sulla base del redshift

osservato assumendo per i parametri cosmologici che entrano nella distanza di luminosita' (eq. 8.12) i valori $q_0=0$, $\Omega_m=0$. Mentre il pannello alto mostra i valori per le singole Supernove, quello in basso mostra la magnitudine media per campioni di oggetti ai vari redshifts: e' qui molto evidente che non solo i dati stanno tutti molto al di sopra della previsione del modello standard classico con $\Omega_m=1$ (linea continua in basso), ma stanno anche significativamente sopra la predizione di un modello estremo come quello di Milne $\Omega_m=0$ per le Supernove tra i redshift $z\sim 0.2$ e ~ 1 . Il fatto che i valori medi delle magnitudini osservate siano maggiori significa che i flussi sono piu' deboli, quindi piu' grande la distanza di luminosita'. In linea di principio, questo si ottiene diminuendo il valore del parametro di densita' (si vedano ad es. le Figure 8.4 e il diagramma magnitudine-redshift in funzione di q_0 in Fig. 8.8), ma vi sono ovvi limiti alla possibilita' di modificare Ω_m .

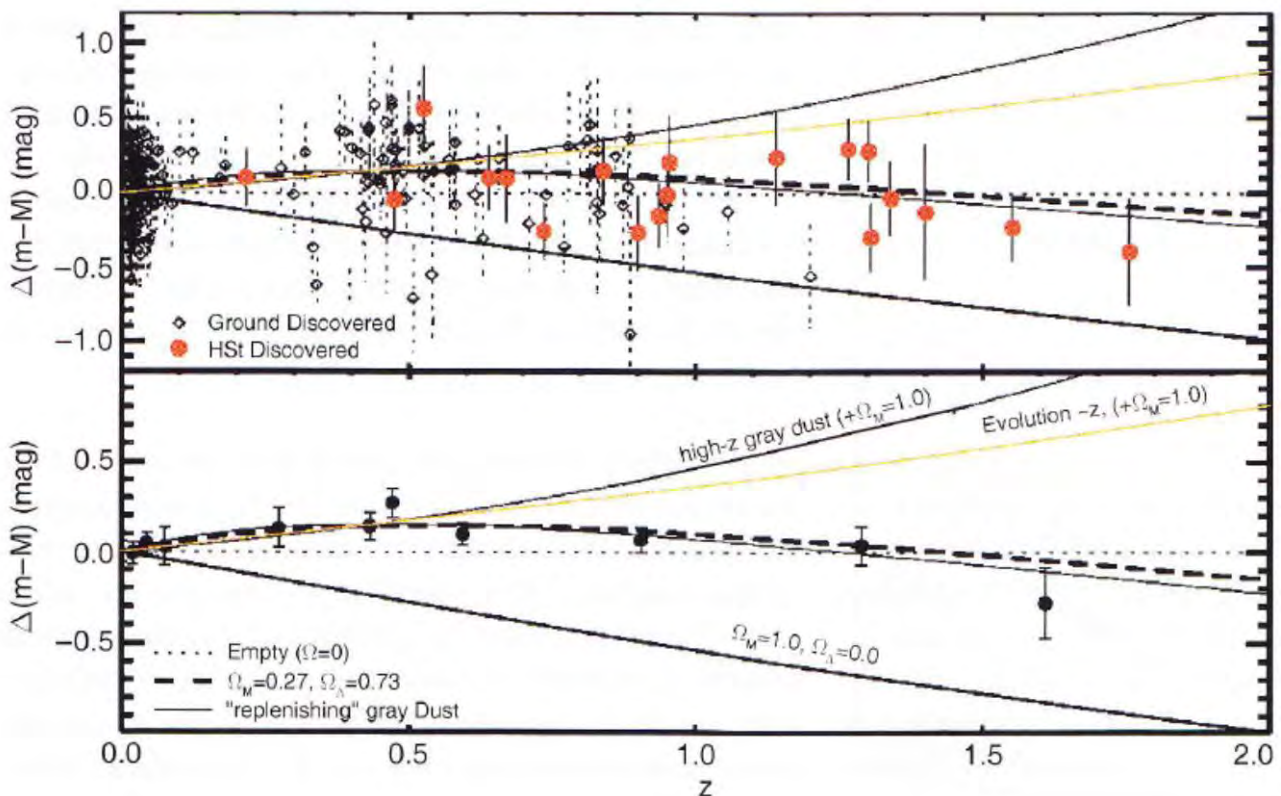


Figura 4

Il diagramma di Hubble per le Supernove 1A, nel quale la magnitudine osservata in ordinata e' normalizzata al valore predetto per un modello di Milne, ossia quello con il minimo contenuto di materia gravitante ($\Omega_m=0$). Nel pannello sopra sono riportati i dati per ogni singola Supernova, in quello sotto i valori medi in intervalli di redshift. Le Supernove indicherebbero che il modello di Milne sarebbe valido se si disponessero lungo la linea orizzontale punteggiata. Invece la eccedono tra $z\sim 0.2$ e $z\sim 1$. Peraltro il modello di Milne e' quello che assume il minimo contenuto possibile di materia gravitante, ossia densita' nulla e di massima d_L . I dati sembrerebbero quindi indicare una densita' di materia "negativa"!

[Figura tratta da Riess et al. 2004 ApJ 607, 655]

La situazione illustrata dalla Fig. 4 e' decisamente inaspettata ed insolita. Il modello di Milne e' infatti quello che assume il minimo contenuto possibile di materia gravitante, ossia densita' nulla. A questa corrisponde il massimo valore che puo' assumere la distanza di luminosita' a parita' di redshift e conseguentemente il minimo flusso (massima magnitudine). Ora, anche cosi' non si riescono a spiegare i valori osservati molto deboli delle magnitudini delle Supernove 1A: i dati sembrerebbero in sostanza richiedere un Universo con densita' di materia "negativa", nell'ambito del quale le distanze spazio-temporali sarebbero massimamente dilatate! Un Universo con distanze di luminosita' che superano quelle previste dal modello di Milne si troverebbe dunque in una **condizione di espansione accelerata!** Un risultato non comprensibile con la fisica che abbiamo sinora utilizzato nella nostra descrizione dell'Universo. Dobbiamo probabilmente fare ricorso ad una *nuova* fisica.

Date le conseguenze drammatiche che questi risultati potrebbero avere per la nostra comprensione dell'Universo, occorre concludere questo capitolo menzionando brevemente le due possibilita' che sono state considerate per spiegare il diagramma di Hubble di questi oggetti in termini della fisica *standard*. La prima possibilita' riguarda *effetti evolutivi* che il fenomeno di Supernova 1A possa aver subito in funzione del redshift. E' certamente plausibile che il fenomeno esplosivo sia dominato da effetti della fisica "locale" che regola la struttura degenerata della stella. Tuttavia un qualche piccolo effetto di variazione sistematica potrebbe ad esempio dipendere dalla metallicita' (contenuto di elementi pesanti prodotti dall'evoluzione delle stelle) e, assumendo una diminuzione sistematica di questa con il redshift, influire sul diagramma di Hubble. Tuttavia questa eventualita' dovrebbe avere un qualche effetto visibile negli spettri ottici delle Supernove, mentre nessuna differenza e' stata riscontrata confrontando spettri medi di questi oggetti ai diversi redshift. Quindi effetti evolutivi sembrano altamente improbabili.

Un'altra possibilita' e' legata all'estinzione da parte della galassia ospite. Il modo usuale di correggere per estinzione utilizza l'arrossamento degli spettri (assorbimento differenziale con la λ dei fotoni): occorrerebbe che l'arrossamento si disaccoppiasse dall'estinzione ad alti redshifts. Ma non vi e' nessuna evidenza che questo si verifichi, anzi supernove in galassie sferoidali (senza polveri) e a spirale (con polvere) appaiono avere le medesime proprieta'. Dunque una possibilita' considerata, che e' indicata come presenza di polvere grigia (*grey dust*) nelle galassie ospiti ad alti z , e' che si possa trattare di polvere che assorbe fotoni di qualunque λ allo stesso modo (disaccoppiando quindi arrossamento da estinzione). Ma non c'e' nessuna giustificazione fisica per una cosa del genere, l'ipotesi appare del tutto *ad-hoc*, e come tale respinta.

Da tutto cio' siamo portati a concludere che i diagrammi di Hubble di Supernove 1A dimostrino che la scala dell'Universo ad un dato redshift sia maggiore di quanto spiegabile da uno qualunque dei modelli dinamici sinora considerati e

conseguentemente soggetta ad una espansione accelerata. Dobbiamo investigare altre spiegazioni, che richiedono nuova fisica.

10.2 Equazioni di campo modificate della Relativita' Generale. Costante cosmologica.

Torniamo brevemente a quanto discusso nella Sezione 7. Abbiamo visto che la Relativita' Generale fornisce un contesto fisico-matematico generale e auto-consistente per trattare la dinamica cosmica (la teoria di Newton fornisce solo un approccio euristico). Come abbiamo visto, la Relativita' permette di definire condizioni al contorno adeguate alla modellistica cosmica, spiega come sia la materia gravitante che l'energia contribuiscano alla gravita', ecc. (vedasi App. A di Sez. 7).

Dobbiamo a questo punto pero' concludere che la Relativita' Generale, come teoria della gravitazione, fallisce di fronte alle evidenze osservative discusse nella precedente Sez. 10.1, e che pongono in crisi alcune soluzioni della dinamica cosmica basate sulle equazioni relativistiche del campo gravitazionale? E' probabile che oggi non siamo in grado di dare una risposta esauriente e definitiva a questa domanda. Ossia, non si puo' escludere che le nuove osservazioni implicino un problema nella trattazione della gravita' da parte sia della teoria della Relativita' che della teoria Newtoniana sulle grandissime scale, oltre qualche centinaia di Mpc.

Tuttavia la teoria della Relativita' ha interessanti risorse formali e concettuali per affrontare e forse parzialmente risolvere questa "crisi". Interessante notare come questo sviluppo, che andremo a discutere in questa e nelle prossime Sezioni, sia nato in parte per caso (ma non solo per caso). Einstein, infatti, alla ricerca di soluzioni per la dinamica dell'Universo nell'ipotesi di staticita', si rese conto che non poteva ottenerne nell'ambito delle equazioni di campo pubblicate nel 1916 (eq. [7.20-21] [7A.40-41]): la forza di autogravita' avrebbe fatto collassare l'Universo su se stesso su un tempo-scala dinamico $t \sim 1/\rho^{1/2}$. Un universo statico sarebbe formalmente ottenibile dall'equazione dinamica $\ddot{R} = -4\pi G/3 \left(\rho + 3p/c^2 \right) R$ solo considerando un fluido cosmico caratterizzato da densita' di energia o pressioni negative:

$$\rho = -3p/c^2$$

Poiche' un fluido del genere non sembrava fisicamente plausibile, essendo ovviamente in disaccordo con la gravita' Newtoniana e Relativistica sulle piccole scale, Einstein modifico' le equazioni di campo che aveva ricavato, introducendo il termine Λ , detto costante cosmologica, e pervenendo cosi' al risultato di eq. [7A.21]:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R - \Lambda g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij} \quad [7A.21]$$

Come menzionato in Sez. 7A, questa generalizzazione delle equazioni di campo corrisponde ad una nuova equazione fisica di carattere tensoriale, che tuttavia mantiene il carattere generalmente covariante dell'equazione [7A.20], a patto che Λ sia una costante universale (ossia indipendente dalla posizione e dal tempo, a differenza dello scalare di curvatura R che in generale dipende dalla posizione e dal tempo). Anzi, si tratta della forma piu' generale possibile delle equazioni di campo in grado di mantenere il carattere di covarianza. La costante Λ e' ovviamente un termine dinamico aggiuntivo del tutto impreveduto dalla teoria Newtoniana. Chiaramente il vincolo piu' forte sul valore di questa costante e' che sia sufficientemente piccolo da non modificare, ad esempio, le leggi del moto planetario.

La forma della [7A.21] esprime un significato fisico importante per quanto riguarda la costante Λ . Immaginiamo infatti di porre a zero tutte le sorgenti del campo, $T_{ij} \equiv 0$. In questo modo la [7A.21] diventa (portando a secondo membro l'addendo in Λ):

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \Lambda g_{ij}. \quad [7A.22]$$

Λ rappresenta formalmente in questo modo il tensore energia-impulso del vuoto.

La costante cosmologica Λ ha avuto una storia ad alti e bassi, ed ha avuto un ruolo molto rilevante nello sviluppo della cosmologia teorica. Dopo essere stata introdotta da Einstein, la costante e' stata da lui abbandonata ⁴, una volta che gli furono comunicati i risultati di Hubble riguardo al fatto che l'Universo non e' statico, ma in espansione, e dunque non necessariamente richiedente un termine di forza repulsiva. In seguito, la costante e' stata riconsiderata, dopo che Hubble aveva riportato una sua misura della costante $H_0 \approx 500 \text{ Km/s/Mpc}$, per far tornare i tempi scala cosmici, che altrimenti sarebbero stati troppo brevi. Poi di nuovo abbandonata quando si scopri' che $H_0 < 100 \text{ Km/s/Mpc}$. Recentemente e' stata riconsiderata sulla base dei risultati in Sez. 10.1, come andremo a vedere nel seguito, ed oggi fa parte integrante dello scenario interpretativo di riferimento della dinamica cosmologica.

Includendo la costante Λ nelle equazioni di campo [7A.21], le equazioni dinamiche divengono come [7A.40-41]:

$$\begin{aligned} \dot{R}^2 &= \frac{8\pi G}{3} \rho R^2(t) - kc^2 + \frac{\Lambda}{3} R^2(t) \\ \ddot{R} &= -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) R(t) + \frac{\Lambda}{3} R(t) \end{aligned} \quad [7A.40-41]$$

⁴ e definita dallo stesso Einstein come il suo piu' grande errore, come riferito da Gamow.

10.3 Interpretazioni della espansione cosmica accelerata e della costante cosmologica.

Il termine con Λ nella [7A.40] e' interpretabile, per quanto visto, come la densita' di energia del vuoto. Di questo termine non esiste un analogo nella fisica classica, ma vi puo' essere una naturale interpretazione nell'ambito della fisica quantistica.

In meccanica quantistica, anche lo spazio completamente vuoto puo' avere una densita' di energia finita, ed eventualmente negativa. Ad esempio, la teoria delle interazioni elettro-deboli (che unifica elettromagnetismo e forza debole) prevede l'esistenza di alcuni campi scalari, i campi di Higgs. Tali campi corrispondono ad una densita' di energia negativa, e si ritiene siano originati durante le prime fasi espansive dell'Universo, quando le interazioni elettromagnetiche e deboli si sono disaccoppiate.

Per quantita' fisiche che non coinvolgano la gravita', ad es. per l'elettromagnetismo, il valore di questa energia del vuoto e' ininfluente poiche' queste quantita' dipendono solo da differenze di energia. Per esempio l'energia di un fotone emesso durante una transizione atomica e' eguale alla differenza di energia tra i due corrispondenti stati dell'atomo. Cosi' il valore assoluto dell'energia e' definito solo a meno di una costante. Al contrario, invece, la gravita' e' sensibile a questo livello fondamentale che chiamiamo energia del vuoto, dal momento che la relazione $E=mc^2$ implica che a questa energia corrisponda una "massa" e quindi un effetto "gravitazionale" (di gravita' negativa in questo caso).

L'interpretazione piu' naturale della costante Λ e' di un termine di energia repulsiva del vuoto che si contrappone alla gravita'. Allora riprendiamo la [7A.40] ed esprimiamo il termine Λ come un termine energetico con densita' di massa a riposo ρ_V . Si puo' innanzi tutto verificare che a questa corrisponde una pressione data da

$$p_V = -\rho_V c^2 . \quad [10.2]$$

Questo deriva molto semplicemente dalla condizione che la densita' di energia del vuoto e' una costante che non dipende dal fattore di scala $R(t)$. Applichiamo infatti la prima legge della termodinamica

$$dE = -p dV \quad (p : \text{pressione}; V : \text{volume proprio}; E : \text{energia interna}) \quad [10.3]$$

Applicando questa relazione ad un universo vuoto, omogeneo e in espansione, otteniamo

$$\frac{d}{dt}(c^2 \rho_V R^3) = -p_V \frac{dR^3}{dt}$$

con $c^2 \rho_V$ densita' di energia associata. Se ora assumiamo che la densita' di energia del vuoto $c^2 \rho_V$ sia costante nello spazio e nel tempo, come richiesto dall'interpretazione relativistica, avremo

$$\frac{d}{dt}(c^2 \rho_v R^3) = c^2 \rho_v \frac{dR^3}{dt} = -p_v \frac{dR^3}{dt}, \quad \text{ossia} \quad [10.3b]$$

$$p_v = -c^2 \rho_v .$$

Quindi una costante cosmologica, ovvero un'energia del vuoto (l'interpretazione quantistica) completamente indipendente dallo spazio e dal tempo, e' vincolata a fornire una pressione negativa. Si tratta ovviamente di una forma assai peculiare di equazione di stato.

In questo modo, trascurando nelle equazioni di campo gravitazionale la pressione della materia – sempre trascurabile durante la gran parte del tempo di Hubble (vedi Sez. 11) – e rappresentando il termine $\Lambda R(t)/3$ nella [7A.41] nei termini dei suoi contributi a densita' e pressione come densita' e pressione del vuoto, l'equazione dinamica diviene:

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G R(t)}{3} \left(\rho_m + \rho_v + \frac{3p_v}{c^2} \right)$$

ossia da [10.3b]

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G R(t)}{3} (\rho_m - 2\rho_v) \quad [10.4]$$

dove ρ_m e ρ_v sono rispettivamente la densita' della materia gravitante e la densita' di massa equivalente dell'energia del vuoto.

Quando l'Universo si espande, avremo le seguenti leggi di conservazione:

$$\rho_m(t) = \rho_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^3, \quad \rho_v = \text{cost} \quad [10.5]$$

poiche' la densita' di energia del vuoto non dipende dal fattore di scala.

10.4 Il parametro Ω_Λ . Le nuove equazioni dinamiche.

Sulla base delle considerazioni precedenti, potremo riscrivere l'eq. dinamica [10.5]:

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G \rho_0 R_0^3}{3R^2} + \frac{8\pi G \rho_v R}{3} \quad [10.6]$$

che coincide con la soluzione dell'equazione di campo generalizzata [7A.41] se poniamo

$$\Lambda = 8\pi G \rho_v .$$

Al tempo cosmico attuale $t=t_0$

$$\ddot{R}(t_0) = -\frac{4\pi G \rho_0 R_0}{3} + \frac{8\pi G \rho_v R_0}{3}.$$

Analogamente a quanto fatto per il parametro di densita' della materia, possiamo introdurre un parametro di densita' Ω_Λ associato all'energia del vuoto ⁵

$$\Omega_\Lambda \equiv \frac{8\pi G \rho_v}{3H_0^2} = \frac{\rho_v}{\rho_c}, \quad \text{da cui} \quad \Lambda = 3H_0^2 \Omega_\Lambda \quad [10.7]$$

con il parametro Λ che dunque ha dimensioni [*tempo*⁻²]. Dunque i dati richiedono:

$$\rho_v \simeq 4 \times 10^{-29} \text{ [gr / cm}^3\text{]} \quad [10.8]$$

che e' un numero estremamente piccolo rispetto a valori che le teorie delle particelle elementari prevederebbero in modo naturale.

In termini di questi nuovi parametri Ω_Λ e Ω_m (ove $\Omega_m = 8\pi G \rho_m / 3H_0^2$ e' il solito parametro di densita' della materia gravitante), le equazioni dinamiche nell'Era Dominata dalla Materia prendono la forma (che trascura ancora gli effetti della pressione della materia e della radiazione):

$$\ddot{R}(t) = -\frac{\Omega_m H_0^2 R_0^3}{2R^2} + \Omega_\Lambda H_0^2 R \quad [10.9]$$

$$\dot{R}^2(t) = \frac{\Omega_m H_0^2 R_0^3}{R} - kc^2 + \Omega_\Lambda H_0^2 R^2 \quad [10.10]$$

Seguendo la stessa logica di quanto discusso in [7.6-8], possiamo ottenere una nuova relazione tra i parametri di densita' Ω_Λ e Ω_m e il parametro di decelerazione q_0 , considerando che

$$\begin{aligned} \ddot{R}(t) &= -\frac{4\pi GR}{3}(\rho_m - 2\rho_v) \\ q_0 &\equiv -\frac{R(t)\ddot{R}(t)}{\dot{R}^2(t)} \Big|_{t=t_0} = \frac{4\pi GR^2}{3\dot{R}^2}(\rho_m - 2\rho_v) \Big|_{t=t_0} = \frac{4\pi G}{3H_0^2}\rho_m - \frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho_v = \\ &= \frac{\Omega_m}{2} - \Omega_\Lambda \end{aligned} \quad [10.11]$$

che produce la richiesta espansione accelerata per valori di Ω_Λ sufficientemente elevati e Ω_m piccoli. Infine, sia Ω_Λ che Ω_m influiscono sulla geometria dell'Universo. Ricavando infatti il parametro di curvatura kc^2 dalla Friedmann generalizzata [10.10]:

⁵ Da notare che Ω_Λ nella [10.8], e l'analogo Ω_m , sono riferite qui e nel seguito al tempo attuale. Le analoghe quantita' al tempo generico t saranno rappresentate con $\Omega_\Lambda(t)$ e $\Omega_m(t)$.

$$kc^2 = \frac{\Omega_m H_0^2 R_0^3}{R} + \Omega_\Lambda H_0^2 R^2 - \dot{R}^2(t)$$

e calcolandolo al tempo cosmico attuale (kc^2 non dipende dal tempo, come abbiamo visto) si ottiene

$$kc^2 = H_0^2 R_0^2 [\Omega_m + \Omega_\Lambda - 1], \quad [10.12]$$

relazione fondamentale che ci dice che avremo, ad esempio, un Univeso piatto ($k=0$) se

$$\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1, \quad [10.13]$$

una relazione che generalizza la [7.10] ($\Omega_m=1$). Ricordiamo che se l'Universo e' piatto ora, deve esserlo sempre stato a qualunque tempo cosmico t . L'unica situazione in cui la somma $\Omega_m + \Omega_\Lambda$ rimane rigorosamente costante con il tempo e' quando la somma (incluso anche l'eventuale termine radiativo discusso in Sez. 11) e' rigorosamente uno (corrispondente ad un Universo piatto $k=0$).

Una importante nota riguarda come i parametri di densita' evolvono con il tempo cosmico. Lo fanno ovviamente in un modo molto diverso:

$$\begin{aligned} \Omega_m(t) &\propto \rho_m(t) H(t)^{-2} \\ \Omega_\Lambda(t) &\propto H(t)^{-2}. \end{aligned}$$

Al diminuire del tempo il parametro di densita' della materia $\Omega_m(t) \rightarrow 1$, ovvero la densita' della materia tende, come gia' abbiamo visto, al valore critico corrispondente al caso di un Universo di Einstein-de Sitter. Al contempo $\Omega_\Lambda \rightarrow 0$ al diminuire del tempo cosmico e al crescere di $H(t)$. Le convergenze dei due parametri avvengono in modo tale che, se $k=0$ a $t=t_0$, rimane $k=0$ a qualunque tempo e la somma $\Omega_m(t) + \Omega_\Lambda(t) = 1$ rimane valida $\forall t$ ⁶.

Da notare infine che la famosa relazione di Mattig [8.7] deve essere sostituita da una relazione piu' generale, in presenza di un termine di espansione accelerata (questo sara' fatto nel Cap. 10.8).

⁶ Questo si puo' dimostrare facilmente in modo generale. Poniamo dunque e verifichiamo: $1 = \Omega_m(t) + \Omega_\Lambda(t) = \Omega_{m0} \left(\frac{H(t)}{H_0} \right)^{-2} \left(\frac{R(t)}{R_0} \right)^{-3} + \Omega_{\Lambda 0} \left(\frac{H(t)}{H_0} \right)^{-2} = \left(\frac{H(t)}{H_0} \right)^{-2} \left[\Omega_{m0} (1+z)^3 + \Omega_{\Lambda 0} \right]$, che e' sempre appunto esattamente eguale a 1 data l'espressione per il parametro di Hubble, come si verifichera' in eq. (10.20) nel seguito.

10.5 Soluzioni generali della dinamica cosmica.

Riprendiamo ora le equazioni dinamiche generalizzate [10.9-10] e investighiamo nuove soluzioni della dinamica cosmica su questa base. Le situazioni che si prospetteranno saranno ovviamente molto diverse a seconda del segno che il parametro Λ assume (si tratta, come detto, di una quantità costante con il tempo ma che può assumere, in linea generale, un qualunque valore).

Caso con $\Lambda < 0$ $\Omega_\Lambda < 0$.

Si tratta di un caso non molto interessante dal punto di vista delle soluzioni dinamiche: si manifesterebbe come un termine attrattivo che andrebbe ad aggiungersi alla gravità e aumenterebbe la sua forza di attrazione relativa al progredire del tempo e all'aumentare del fattore di scala $R(t)$. Ciò implicherebbe un veloce rallentamento dell'espansione, con un successivo collasso (vedi eq. [10.9]). Questo ri-collasso sarebbe inevitabile nel futuro. È quindi un caso poco interessante.

Caso con $\Lambda > 0$ $\Omega_\Lambda > 0$.

In questo caso si prevede che esista un tempo cosmico t_{\min} corrispondente ad un minimo nel ritmo di espansione, ossia un minimo nel valore della parametro di Hubble $H(t)$. Questo minimo si può trovare da [10.6] e [10.9] ponendo $\ddot{R} = 0$:

$$R_{\min} = \left(\frac{4\pi G \rho_0 R_0}{\Lambda} \right)^{1/3} = \left(\frac{\Omega_m}{2\Omega_\Lambda} \right)^{1/3} R_0$$

corrispondente ad un redshift

$$z_{\min} = \left(\frac{2\Omega_\Lambda}{\Omega_m} \right)^{1/3} - 1 \quad [10.14]$$

Sostituendo questo nella Friedmann si ottiene il valore del tasso di espansione cosmica all'epoca della minima accelerazione:

$$\dot{R}_{\min}^2 = \frac{3H_0^2 R_0^2}{2} (2\Omega_\Lambda \Omega_m^2)^{1/3} - kc^2 \quad [10.15]$$

A questo punto si prospettano una varietà di diversi tipi di evoluzione del fattore di scala, a seconda che $\dot{R}_{\min} \geq < 0$.

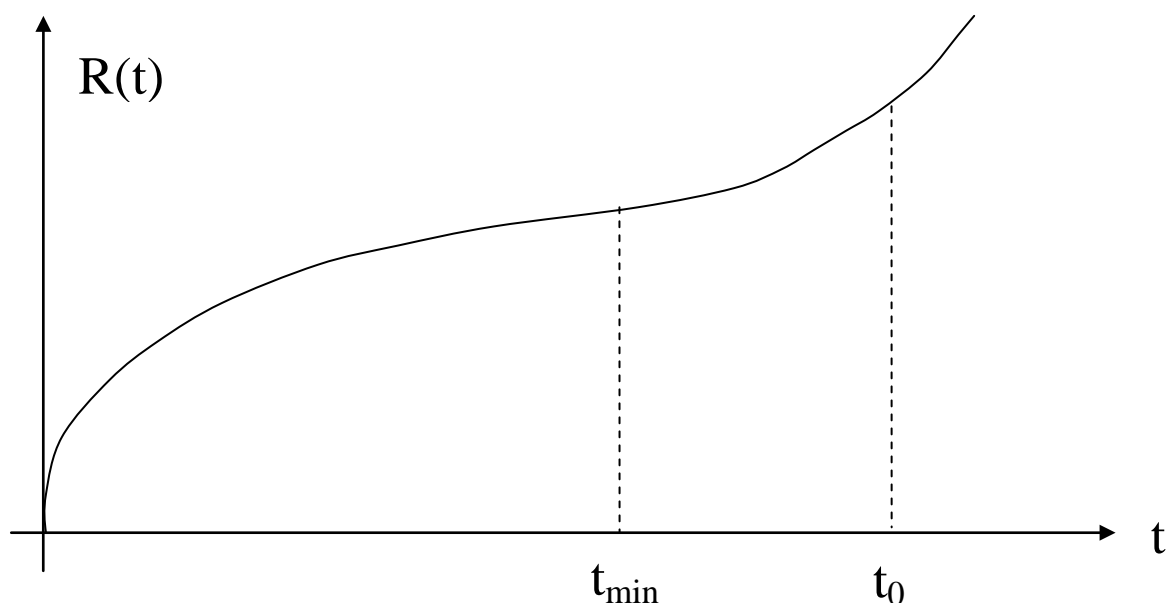


Figura 5

Evoluzione del fattore di scala $R(t)$ per un modello con $\Omega_\Lambda > 0$ e $\dot{R}_{\min} > 0$. Il fattore di scala all'inizio segue un modello piatto di Einstein-de Sitter, poi quando si fa sentire la Λ a $t=t_{\min}$ inizia una espansione esponenzialmente accelerata.

⊙ Se $\dot{R}_{\min} > 0$ avremo una evoluzione del tipo illustrato in Figura 5. In questo caso, per grandi valori di $R(t)$, il termine con Λ nella [10.9] comincerà a dominare su quello di auto-gravità, e finiremo così con l'avere asintoticamente una espansione esponenziale:

$$\ddot{R}(t) \sim \frac{\Lambda R(t)}{3} \quad \text{la cui soluzione è} \quad R(t) \propto \exp\left[\left(\frac{\Lambda}{3}\right)^{1/2} t\right] \quad [10.16]$$

⊙ Se $\dot{R}_{\min} \leq 0$ potremo avere una varietà di soluzioni come illustrato in Figura 6. Il caso (B1) in Fig.6 corrisponde a modelli d'Universo detti "rimbalzanti" (*bouncing universes*).

Il caso (B2) è assai simile alla soluzione in Fig. 5, salvo che ora $\dot{R}_{\min} = 0$.

I casi (B3) in Fig.6 sono interessanti da un punto di vista puramente teorico e vanno sotto il nome di modelli di Eddington-Lemaître. Il primo dei tre (1) è un universo in espansione esponenziale a partire da uno stato stazionario posto in un infinito passato. Il terzo (3) corrisponde ad una espansione iniziata in un tempo finito nel passato e che arriva alla situazione $\dot{R}_{\min} = 0$ per $t \rightarrow \infty$.

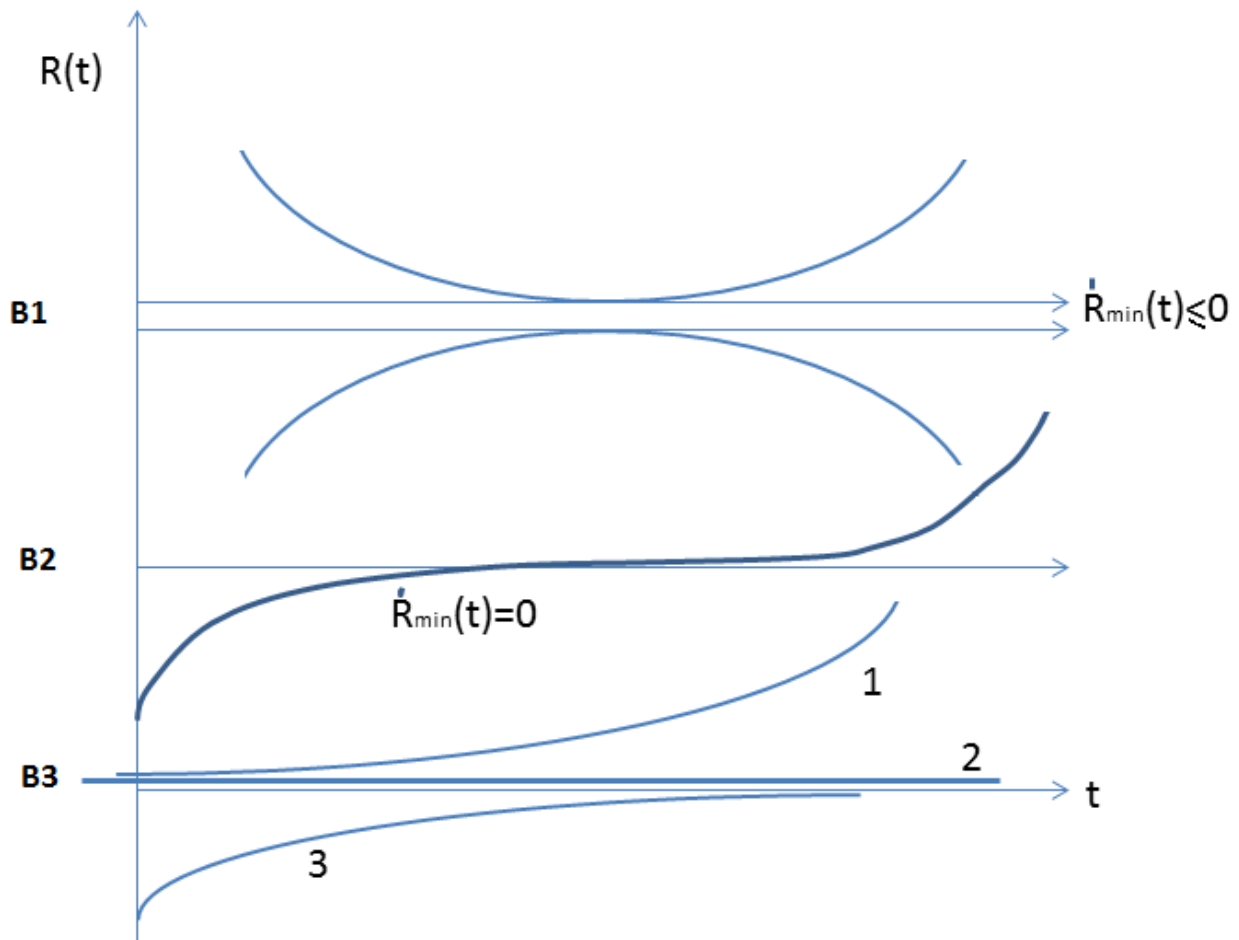


Figura 6

Vari tipi di soluzioni per l'evoluzione del fattore di scala $R(t)$ per un modello con $\Omega_\Lambda > 0$ e $\dot{R}_{min} \leq 0$. Si veda il testo per maggiori dettagli.

Infine il caso (2), che coincide con l'asse dei tempi nel pannello B.3, corrisponde alla **soluzione di un universo statico** proposta da Einstein nel 1917. La soluzione formale e' quella di un modello chiuso con $k=+1$ e $\rho = \rho_c$. Vi e' allora un valore critico di Λ , che chiamiamo Λ_c , per cui si ha $\ddot{R} = 0$ e $\dot{R} = 0$. Dall'eq. dinamica [7A.41], imponendo $\ddot{R} = 0$ e trascurando effetti di pressione ($p=0$), si ha

$$\frac{4\pi GR}{3} \rho = \frac{\Lambda}{3} R \quad \text{che fornisce la condizione } 4\pi G \rho_c = \Lambda_c.$$

Una seconda condizione si ottiene da $\dot{R} = 0$ nella [7A.40], che fornisce

$$\frac{8\pi G \rho R^2}{3} + \frac{\Lambda}{3} R^2 = kc^2$$

da cui sostituendo Λ_c

$$\Lambda_c = \frac{c^2}{R_c^2} = 4\pi G \rho_c,$$

dalla quale si ottiene infine R_c ossia una soluzione statica si ottiene formalmente $\forall t$ con $R=R_c$, $\Lambda=\Lambda_c$, $\rho=\rho_c$. Si tratta ovviamente di una soluzione instabile, poiche' ogni piccola deviazione, anche solo locale, della densita' in piu' o in meno rispetto ai valori sopra menzionati fara' ricadere quella porzione d'universo in uno stato di espansione esponenziale o di contrazione esponenziale.

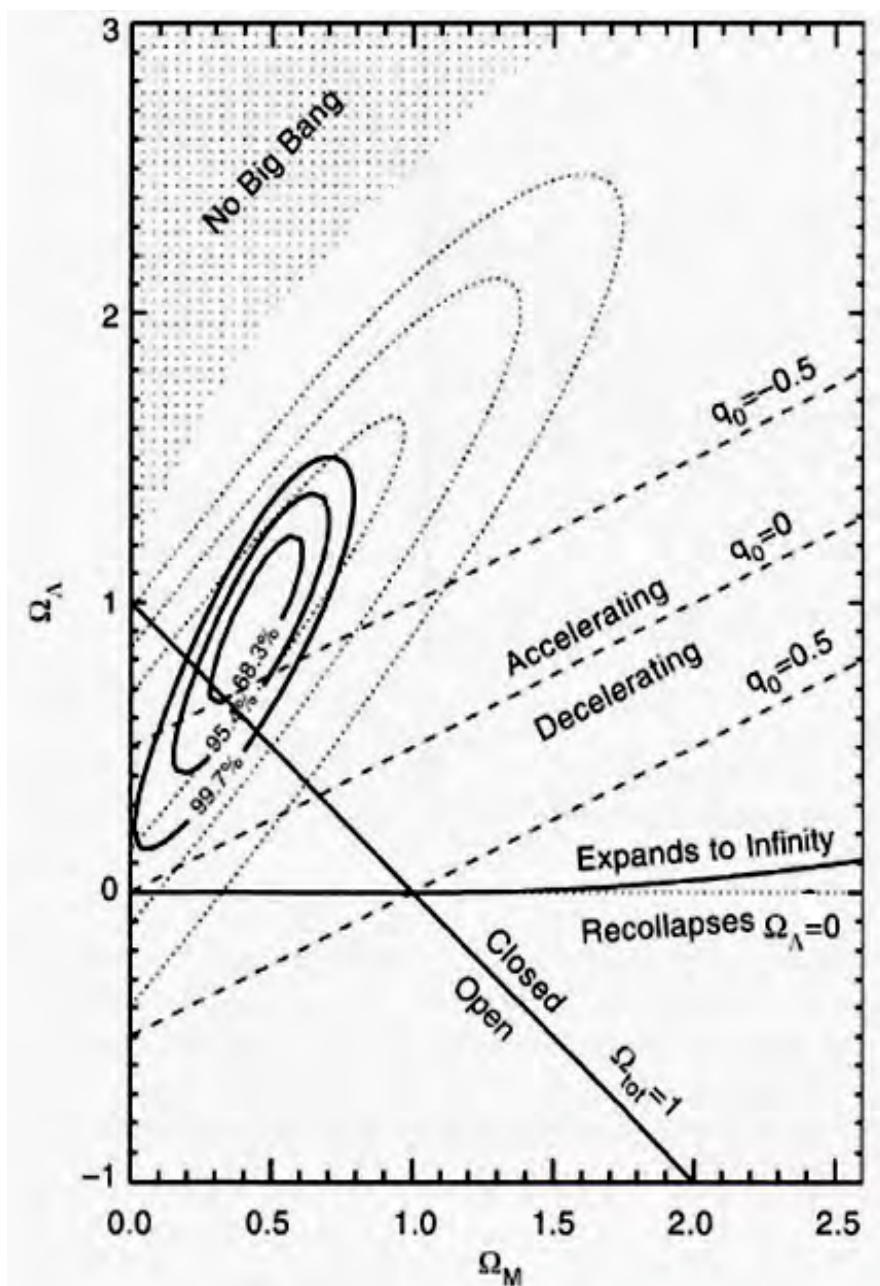


Figura 7

Prospetto riassuntivo delle varie soluzioni di modelli che includono la costante cosmologica, in funzione dei parametri Ω_m e Ω_Λ al tempo attuale. Le varie linee sono spiegate nel testo. Le curve ellissoidali corrispondono a contorni di probabilita' che i valori dei parametri cosmologici si trovino all'interno delle ellissi. Quest'ultime sono definite sulla base delle osservazioni dei diagrammi di Hubble di Supernove 1A. Ellissi a puntini: risultati delle prime osservazioni di SNIa del 1998. Ellissi a tratto continuo: risultati tratti da osservazioni di 157 SNIa in Fig. 4 [Figura tratta da Riess et al. 2004].

Nessuno dei modelli con $\dot{R}_{\min} \leq 0$ ha un reale interesse fisico: l'enorme mole di dati acquisiti sulla struttura dell'Universo mostra che nessuna delle soluzioni in Fig. 6 corrisponde al nostro Universo. In universi di questo genere tutte le statistiche (conteggi, distribuzioni dei redshift, test V/V_{\max} , ecc.) sulle sorgenti lontane sarebbero drammaticamente diverse da quanto invece osserviamo. Ad esempio, il modello rimbalzante in Fig. 6 implicherebbe che nessuna sorgente cosmica sarebbe vista a redshift superiori a quello di minima espansione, e così via.

La Figura 7 fornisce una efficace sintesi delle caratteristiche delle soluzioni dinamiche che includano una costante cosmologica. La linea diagonale continua corrisponde a soluzioni con geometria piatta [10.13], quella continua orizzontale separa universi sempre in espansione da quelli che ri-collassano: fondamentalmente un valore negativo di Λ (e Ω_{Λ}) implicano un ri-collasso dopo la fase espansiva (per effetto dell'aumentata autogravità dovuta al termine Λ). Le linee diagonali tratteggiate separano universi la cui espansione accelera da quelli in cui essa decelera. Per valori elevati di Ω_m si può avere decelerazione anche in presenza di una costante cosmologica positiva.

La parte ombreggiata a bassi valori di Ω_m e alti di Ω_{Λ} corrisponde ai casi di universo privi di singolarità iniziale (Big Bang): l'alto valore dell'energia repulsiva impedisce al fattore di scala di decrescere fino a zero.

10.6 Il nuovo modello standard d'Universo.

La gran parte delle soluzioni formali della dinamica cosmica discusse nella Sez. 10.5 precedente sono in evidente conflitto anche con le più semplici osservazioni cosmologiche, quali ad es. i conteggi di galassie. Al contrario, la soluzione rappresentata schematicamente in Fig. 5, corrispondente a valori attuali dei parametri $\Omega_m \sim 0.3$ e $\Omega_{\Lambda} \sim 0.7$, fornisce una rappresentazione dell'evoluzione del fattore di scala con interessanti proprietà. Fondamentalmente la relazione distanza di luminosità-redshift che le corrisponde, assieme al valore standard della costante di Hubble ($H_0 \sim 70$), permettono di riprodurre al meglio i dati del diagramma di Hubble delle Supernove 1A, discussi in Sez. 10.1: la curva tratteggiata spessa nella Fig. 4 corrisponde alla coppia di valori di 0.27 e 0.73 per i due parametri Ω_m e Ω_{Λ} , rispettivamente. Assumendo che corrispondano all'esatta realtà, questi valori implicherebbero un Universo piatto, $\Omega_m + \Omega_{\Lambda} = 1$, ma con una espansione con tasso che sta attualmente accelerando.

Questa soluzione dinamica, corrispondente al caso $\dot{R}_{\min} > 0$, ha un redshift di minimo tasso di espansione ricavabile da [10.14]: $z_{\min} \approx (\Omega_m / 2\Omega_\Lambda)^{-1/3} - 1 \approx 0.6 \pm 0.1$.

Durante la fase precedente questo redshift l'Universo si e' espanso con una legge simile a quella di Einstein-de Sitter (universo piatto dominato dalla materia), durante la quale l'effetto della costante cosmologica e' stato del tutto ininfluenza. In particolare tutta la discussione che faremo riguardo alle prime fasi espansive dell'Universo nella Sez. 11 puo' trascurare la presenza di Ω_Λ . Con l'espandersi dell'Universo, mentre la materia gravitante (oscura e barionica) si andava rarefacendo e l'auto-gravita' dell'Universo diminuiva, la costante cosmologica, rimanendo invariata, cominciava a prendere il sopravvento.

A partire dall'epoca corrispondente al redshift z_{\min} in poi, l'espansione e' progressivamente sempre piu' dominata dall'energia oscura, sino ad arrivare alla (futura) fase ad espansione esponenziale [10.16] in cui l'energia oscura dominera' l'auto-gravita'. Oggi ci stiamo avvicinando a questa fase.

Le curve a forma ellissoidale in Fig. 7 corrispondono a vincoli ai parametri di densita' dedotti dalle Supernove 1A (a puntini). Combinazioni con altre osservazioni cruciali (della radiazione di fondo cosmico nelle microonde), riducono ulteriormente le incertezze: una soluzione con $\Omega_m \sim 0.3$ e $\Omega_\Lambda \sim 0.7$ e' piuttosto vicina al centro dell'ellisse piu' interna, corrispondente a soluzioni di miglior fit (*best-fit*) a questi dati.

Un'espansione accelerata dell'Universo e' stata per la prima volta indicata da studi di Supernove ad alti z ; tuttavia conferme indipendenti di cio' si stanno ottenendo da un numero sempre maggiore di osservazioni.

Uno schema riassuntivo della composizione del cosmo attuale e' riportato in Figura 8. Esso illustra il fatto strabiliante che ben il 70% circa della massa-energia nell'Universo sarebbe sotto forma di una energia oscura (che abbiamo chiamato anche energia del vuoto, corrispondente alla misura di $\Omega_\Lambda \approx 0.7$), responsabile dell'espansione accelerata; il 30% circa si trova sotto forma di materia gravitante; di questa circa il 4% e' materia normale (barionica), e solo lo 0.4-0.5% e' gas, principalmente idrogeno, condensato in stelle e galassie. Come abbiamo discusso, le quantita' qui rappresentate sono i contributi al parametro di densita' totale, e quindi fanno riferimento alla densita' critica ρ_C come in eq. [7.11-12]. Le Fig. 7 e 8 condensano i piu' rilevanti risultati ottenuti da una enorme varieta' di osservazioni cosmologiche negli ultimi decenni.

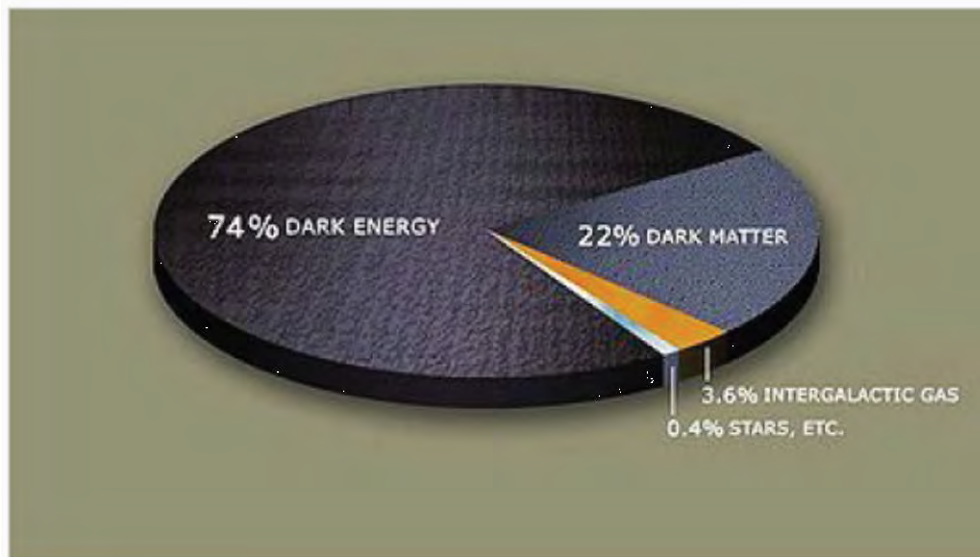


Figura 8

Prospetto riassuntivo delle varie componenti del cosmo al tempo cosmico attuale. Come si vede, solo lo 0.5% corrisponde a materia osservata e solo il 4% corrisponde a materia "normale" (ovvero plasmi di barioni). Il resto e' materia di origine oscura ed energia ancor piu' oscura.

10.7 Nuove equazioni della dinamica cosmica. Effetti della costante cosmologica sull'eta' dell'Universo.

L'introduzione della costante cosmologica ha un'importante effetto nel modificare la stima dell'eta' dell'Universo, risolvendo cosi' il problema dell'eta'.

Partendo dalla [10.10] ed usando la relazione tra parametro geometrico k e parametri di densita' data dalla [10.12], possiamo ottenere una generalizzazione dell'espressione [7.15] che esprime il tasso di espansione di Hubble in funzione del tempo cosmico (del redshift). Al solito, i parametri Ω_m e Ω_Λ sono da intendersi riferiti al tempo cosmico attuale. Così' abbiamo dalla Friedmann:

$$\begin{aligned} \dot{R}^2(t) &= \frac{\Omega_m H_0^2 R_0^3}{R} - kc^2 + \Omega_\Lambda H_0^2 R^2 = R_0^2 H_0^2 \left[\Omega_m (1+z) - \Omega_m - \Omega_\Lambda + 1 + \frac{\Omega_\Lambda}{(1+z)^2} \right] = \\ &= \frac{R_0^2 H_0^2}{(1+z)^2} \left[(1+z)^3 \Omega_m + (1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda)(1+z)^2 + \Omega_\Lambda \right] \end{aligned}$$

relazione fondamentale, valida nell'era dominata dalla materia e dalla costante Λ , che useremo molto nei corsi avanzati, e che si puo' riscrivere in termini del parametro di Hubble generalizzato (dipendente dal tempo):

$$H(t) \equiv \frac{dR(t)}{R(t) dt} = H_0 \left[(1+z)^3 \Omega_m + (1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda)(1+z)^2 + \Omega_\Lambda \right]^{1/2} \quad [10.18]$$

e con la quale possiamo scrivere

$$\frac{dR}{R_0} = dt H_0 (1+z)^{-1} \left[(1+z)^3 \Omega_m + (1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda)(1+z)^2 + \Omega_\Lambda \right]^{1/2}$$

ove

$$\begin{aligned} \frac{dR}{R_0} &= d(1+z)^{-1} = -\frac{dz}{(1+z)^2} \\ \frac{dz}{dt} &= -H_0 (1+z) \left[(1+z)^3 \Omega_m + (1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda)(1+z)^2 + \Omega_\Lambda \right]^{1/2} \end{aligned} \quad [10.19]$$

cosicche' la relazione tempo-redshift diviene

$$t = \int_0^t dt = \int_0^{R_0} \frac{dR}{\dot{R}} = \frac{1}{H_0} \int_z^\infty \frac{dz}{(1+z) \left[(1+z)^3 \Omega_m + (1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda)(1+z)^2 + \Omega_\Lambda \right]^{1/2}} .$$

Un caso di particolare interesse e largamente usato, previsto inoltre da modelli (inflazionari) del Big Bang, e' quello di un Universo piatto, $k=0$, $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$, per il quale si trova immediatamente

$$\begin{aligned} \dot{R}(t) &= R_0 H_0 (1+z)^{-1} \left[(1+z)^3 \Omega_m + \Omega_\Lambda \right]^{0.5}, \text{ ovvero} \\ H(t) &= H_0 \left[(1+z)^3 \Omega_m + \Omega_\Lambda \right]^{0.5} \end{aligned} \quad [10.20]$$

da cui

$$t = \frac{1}{H_0} \int_z^\infty \frac{dz}{(1+z) \left[(1+z)^3 \Omega_m + \Omega_\Lambda \right]^{1/2}} \quad [10.21]$$

che e' integrabile analiticamente in modo del tutto analogo all'integrale eseguito in Sez. 7.7:

$$t = \frac{2}{3H_0 \Omega_\Lambda^{1/2}} \ln \left(\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \right) \quad \text{con} \quad \tan \theta = \left(\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda} \right)^{1/2} (1+z)^{3/2} \quad [10.22]$$

relazione tra tempo cosmico e redshift nel caso piu' generale.

In questo modo l'eta' attuale dell'Universo si ottiene ponendo $t=t_0$ o $z=0$, e considerando che $\sin(\theta) = \sin[\arctan(\Omega_m/\Omega_\Lambda)^{1/2}] = \Omega_m^{1/2} / \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_m} = \Omega_m^{1/2}$ ⁷,

$$t_0 = \frac{2}{3H_0\Omega_\Lambda^{1/2}} \ln \left[\frac{1 + \Omega_\Lambda^{1/2}}{\Omega_m^{1/2}} \right] \quad [10.23]$$

Nel nostro caso, assumendo i seguenti valori approssimati dei parametri: $\Omega_m=0.3$, $\Omega_\Lambda=0.7$, $H_0=70$, si ottiene:

$$t_0 = \frac{0.964}{H_0} \approx 13.67 \text{ Gyrs} . \quad [10.24]$$

Interessante notare che recenti osservazioni della radiazione di fondo nelle microonde (Sez. 11) indicano, con elevata precisione, i seguenti valori: $\Omega_m=0.31$, $\Omega_\Lambda=0.69$, $H_0=67.74$ (quelli piu' precisi con cui sono conosciuti i parametri cosmologici), che implicano:

$$t_0 \approx 13.77 \text{ Gyrs} , \quad [10.25]$$

attualmente la stima piu' precisa dell'eta' dell'Universo.

In questo modo e' completamente risolto, dalla presenza di una costante cosmologica, un problema fondamentale che abbiamo incontrato nella Sez. 7.7. L'effetto della costante e' ben visibile in Fig. 5, ed e' quello di "stiracchiare" il fattore di scala lungo l'asse dei tempi, cosi' ottenendo di dilatare l'eta' pur in presenza di valore relativamente elevato della costante di Hubble (corrispondente ad una ripida pendenza della funzione $R(t)$ al tempo cosmico attuale t_0). L'eta' dell'Universo risulta cosi' completamente consistente con l'eta' stimata degli ammassi globulari e delle stelle piu' antichi (Sez. 5.6).

Da notare infine che la [10.18] e la [10.21] valgono nel limite di un Universo dominato dalla materia e privo di fotoni (o componenti relativistiche, vedi Sez. 11.4). Cio' non descrive accuratamente le prime fasi espansive, durante le quali, come vedremo, la componente fotonica e' stata importante.

10.8 Effetti della costante cosmologica su scale di distanza, volumi e dimensioni angolari.

Cosi' come le relazioni tempo-redshift- $R(t)$ risentono la presenza del termine Λ , altrettanto lo fanno tutte le misure di distanza e di volume. In sostanza, e' richiesta una completa riformulazione della relazione di Mattig rispetto a quanto discusso nella Sez. 8. Partiamo sempre dalla nostra metrica RW:

⁷ $\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$-\frac{1}{dt^2} + \frac{1}{c^2} \frac{R(t)^2}{R_0^2} \frac{dr^2}{1-kr^2} = 0 \Rightarrow \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = c(1+z)dt.$$

Considerando ora l'integrali in eq. [8.9] e la relazione tra i differenziali del tempo cosmico e del redshift [10.19], otteniamo:

$$\int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \begin{cases} \arcsin(r_0) & (se\ k=1) \\ r_0 & (se\ k=0) \\ \operatorname{arcsinh}(r_0) & (se\ k=-1) \end{cases} =$$

$$= \frac{c}{H_0} \int_0^{z_e} \frac{dz}{(1+z) \left[(1+z)^3 \Omega_m + (1-\Omega_m - \Omega_\Lambda)(1+z)^2 + \Omega_\Lambda \right]^{1/2}}$$

Cosicche' la Mattig assume ora la forma piu' complessa:

$$r_0 = \operatorname{sinn} \left\{ \frac{c}{H_0} \int_0^{z_e} \frac{dz}{(1+z) \left[(1+z)^3 \Omega_m + (1-\Omega_m - \Omega_\Lambda)(1+z)^2 + \Omega_\Lambda \right]^{1/2}} \right\} \quad [10.27]$$

dove $\operatorname{sinn}\{\} = \sin\{\}$ se $k>0$, $\operatorname{sinn}\{\} = \sinh\{\}$ se $k<0$, $\operatorname{sinn}\{\} = \{\}$ se $k=0$.

Si tratta della relazione fondamentale necessaria per il calcolo di distanze, volumi, ecc., in questa situazione generalizzata. La relazione e' semplicemente risolvibile per via numerica (solo nel caso $\Omega_\Lambda = 0$ corrisponde alla forma analitica [8.11]). [Come gia' notato, ai vari termini di eq. 10.27 manca solo quello relativo alle componenti relativistiche, che verra' discusso nella Sez. 11].

Figura 9 fornisce una sintetica ma efficace rappresentazione visuale dell'effetto dei vari parametri cosmologici Ω_m e Ω_Λ (a parita' di H_0) su distanze, angoli e volumi. Lungo l'asse Y e' rappresentata la coordinata radiale *comoving* (essenzialmente la distanza radiale calcolata al tempo cosmico attuale) in funzione del redshift. Sono riportati 3 casi corrispondenti a tre soluzioni della dinamica cosmica: quello a sinistra e' il modello piatto di Einstein-de Sitter, quello in mezzo corrisponde ad un Universo aperto ($\Omega_m = \Omega_0 = 0.2$ e $\Omega_\Lambda = 0$), quello a destra ad un modello piatto con costante cosmologica ($\Omega_m = 0.2$ e $\Omega_\Lambda = 0.8$).

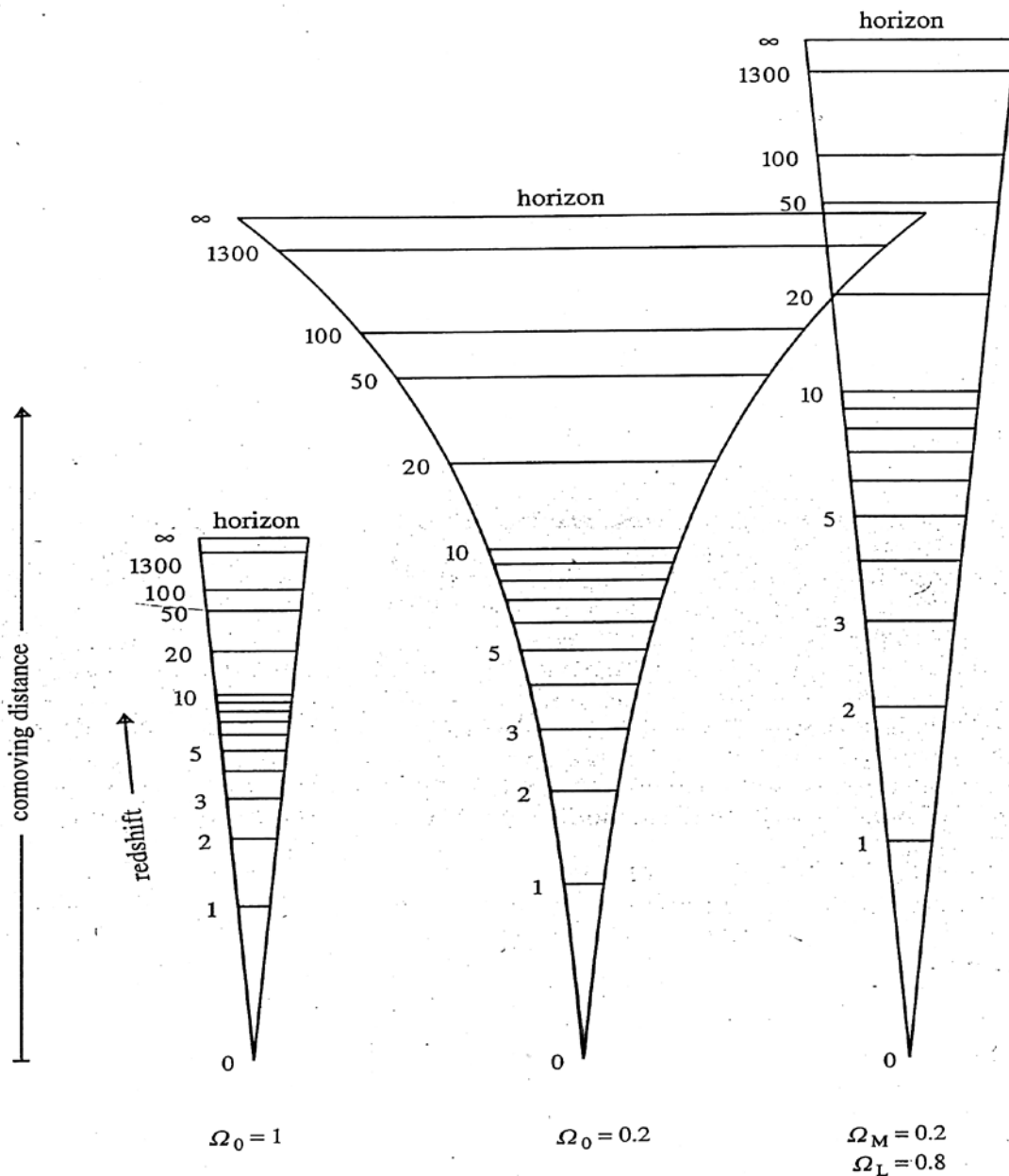


Figura 9

Schema dell'influenza dei parametri cosmologici su distanze, angoli e volumi. Si veda testo per maggiori dettagli. La distanza radiale comoviente e' associabile alla distanza di luminosita'. [Tratto dal libro "Cosmology" di Coles & Lucchin].

Per ogni pannello nella Fig. 9 sono indicati i redshift che corrispondono ad una certa distanza radiale (che possiamo associare alla distanza di luminosita'), e per ognuno l'ampiezza trasversale della base del cono rappresenta le dimensioni intrinseche (proprie) trasversali di un oggetto che e' visto da un osservatore sotto l'angolo indicato al vertice del cono (eguale quest'ultimo nei tre casi). La lunghezza del cono rappresenta la distanza di luminosita'. Il redshift $z=1300$ indicato nei tre casi corrisponde all'incirca all'epoca cosmica a cui si genera la radiazione di fondo

cosmico e corrisponde alla distanza massima raggiungibile dalle osservazioni astronomiche (si veda Sez. 11).

Il grafico mostra molto chiaramente vari effetti originati dai diversi valori dei parametri. Per quanto riguarda le scale radiali corrispondenti ad un certo redshift, il caso Einstein-de Sitter ha le dimensioni minime, mentre il caso con costante cosmologica quelle massime: e' in questo modo evidente l'effetto della costante nello "stiracchiare" le dimensioni complessive dell'Universo rispetto agli altri casi. Per quanto riguarda le dimensioni angolari, un oggetto di relativamente piccole dimensioni e' visto avere dimensioni angolari grandi per effetto della forte curvatura dell'Universo nel caso Einstein-de Sitter, dovuta alla elevata gravita'. La minore curvatura del caso aperto implica che solo oggetti ad alti redshift di dimensioni proprie enormi sono visti sotto un angolo apprezzabile dall'osservatore, mentre il caso con costante cosmologica si colloca in un regime intermedio. Complessivamente i volumi cosmici racchiusi entro un certo angolo solido ed un certo intervallo di coordinata radiale dipendono molto dai parametri cosmologici: il caso Einstein-de Sitter corrisponde ai volumi minimi (minima estensione radiale e trasversale), mentre i casi aperto e con Λ forniscono valori simili (e molto maggiori del caso precedente) in quanto vi e' una compensazione tra estensione radiale e trasversale (massima radiale, minore trasversale per il caso con Λ , massima trasversale e minore radiale per il caso aperto).

10.9 Interpretazioni alternative dell'espansione accelerata.

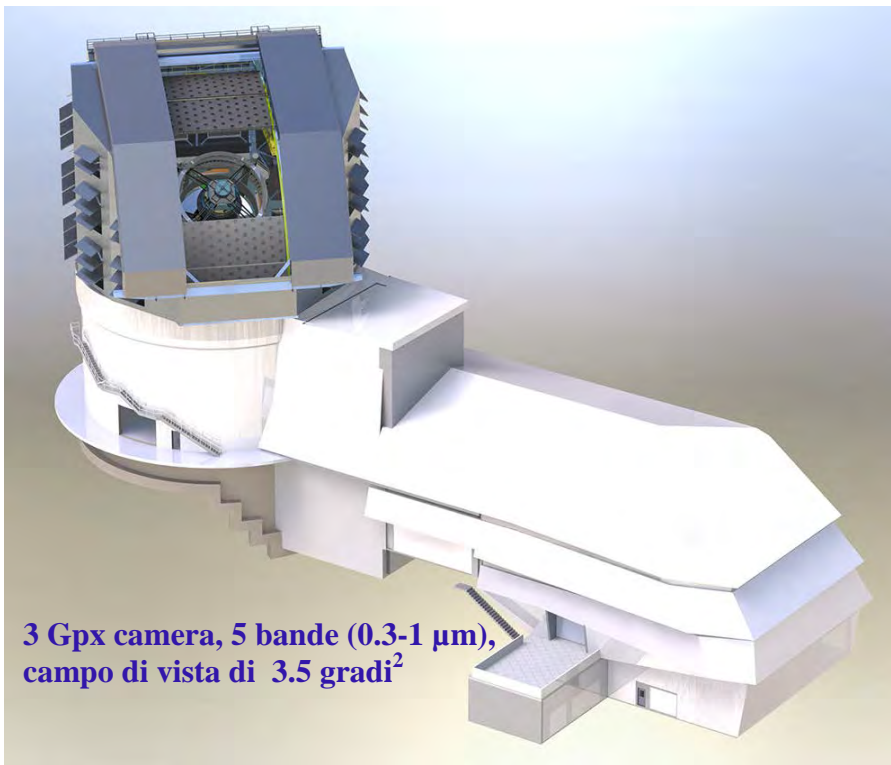
Abbiamo sinora interpretato l'evidenza di un Universo accelerato, basata sulle osservazioni di Supernove ad alti redshift in Sez. 10.1, in termini di una modifica delle equazioni di campo della Relativita' basate sul termine Λ introdotto da Einstein, un termine che abbiamo visto mantiene la covarianza dell'equazioni. Tuttavia questa interpretazione non e' l'unica. Una varieta' di altre spiegazioni fisiche sono state proposte, anche se siamo apparentemente lontani da una soluzione definitiva. Riassumiamo nel seguito le principali di queste idee.

- Presenza di una Costante Cosmologica nelle equazioni di campo relativistiche: e' una spiegazione semplice, ma non ha una motivazione fisica profonda, in termini di fisica fondamentale (a parte la storia della covarianza delle equazioni di campo, che ha una certa attrattiva matematica).
- Energia del vuoto: e' ben motivata fisicamente e matematicamente equivalente alla costante cosmologica; le predizioni della fisica delle interazioni fondamentali sono pero' in serio disaccordo, per molti ordini di grandezza, con i vincoli cosmologici sul valore di Λ , si veda eq. [10.8].

- Campi scalari: periodo temporaneo di accelerazione cosmica; in questo caso la quantità fisica corrispondente alla Λ può variare con il tempo.
- Una nuova fisica della gravitazione: l'evidenza per l'accelerazione dell'Universo potrebbe essere un'occasione per considerare modelli della gravitazione che vadano oltre la Relatività Generale, con deviazioni che si manifestano sulle grandi scale spaziali; tuttavia al momento nessun modello auto-consistente è stato proposto.
- Nell'ambito della fisica della gravitazione descritta classicamente dalla Relatività, un effetto di espansione accelerata potrebbe essere ottenuto con soluzioni metriche che rinuncino al Principio Cosmologico dell'omogeneità su scale simili o più grandi dell'orizzonte. Soluzioni di questo genere però confliggono in generale con le caratteristiche osservate dell'estrema isotropia della radiazione cosmica di fondo nelle microonde sulle grandi scale angolari (scale dell'ordine di 180°).

APPENDICE 10A: LSST, GRANDE PROGETTO DEGLI ANNI 2020.

Abbiamo dimostrato in questa Sez. che lo studio delle Supernove di tipo 1A (SN1A) fornisce vincoli di straordinaria precisione alla cosmologia, che si affiancano a numerosi altri test cosmologici che verranno discussi principalmente in corsi successivi. Abbiamo anche visto che l'identificazione e la caratterizzazione delle SN1A richiede osservazioni di imaging fotometrico ad intervalli temporali regolari su ampie aree di cielo in varie bande. Risulta così chiaro che un efficace approccio al problema di rivelare un grande numero di tali oggetti richiede un esteso campionamento del cielo in varie bande fotometriche con elevata frequenza temporale. Nessuno degli strumenti attualmente a disposizione fornisce tali possibilità'.



L'osservatorio LSST: 8.4-metri di diametro, usa uno speciale sistema ottico a 3 specchi, ottenendo così un campo di vista enorme di 3.5 gradi quadrati. Lo strumento ha la possibilità di osservare l'intero cielo in solo 3 notti. L'osservatorio è in fase di realizzazione presso il Cerro Pachón (2682 mslm) in Chile vicino a La Serena.

Per questo motivo è stato iniziato un progetto di grande valore destinato a realizzare un grande telescopio dedicato di 8.4 metri diametro entro il 2024. È il Large Synoptic Survey Telescope, LSST. Esso produrrà un campionamento in 5 diverse bande ottiche dell'intero cielo in soli 3 giorni, ripetendo poi in continuazione il ciclo osservativo. Le bande saranno (u,g,r,z,y) tra 0.3 e 1 μm .

In questo modo il tempo caratteristico di ogni esposizione in ogni banda è di circa 1 minuto (grazie al grande potere collettivo del telescopio), con 2 visite della stessa area di cielo ogni notte. Miliardi di galassie saranno identificate, assieme a moltissime SN1A.

11. BREVE STORIA TERMICA. BIG BANG. PRIME FASI EVOLUTIVE.

Affrontiamo in questa Sezione il tema di quali siano state le principali fasi della storia passata dell'Universo. Abbiamo già visto nella Sez. 4 una sua caratteristica fondamentale, quella di essere una realtà che si modifica con il tempo cosmico, un Universo evolutivo, a differenza di quanto previsto da alcuni modelli, quello dello *Stato Stazionario* ad esempio, che i dati hanno tuttavia dimostrato errati. Quello che scopriremo in questa Sez., però, è che non solo l'Universo è cambiato, ma lo ha fatto in modo assolutamente radicale, e la sua apparenza nel passato era totalmente diversa dall'attuale.

A dire il vero, ci siamo già imbattuti in una situazione assai sorprendente nella Sez. 7, dove era stata menzionata la possibile esistenza di un tempo "singolare" nel passato in cui il fattore di scala cosmico si è annullato, l'istante del Big Bang. Ma nella Sez. 7 non vi abbiamo dato troppo peso in quanto era sembrato più il risultato di una soluzione matematica che un qualche cosa di realmente accaduto. Vedremo ora che a questo concetto dobbiamo attribuire un significato fisico molto preciso, e addirittura sperimentabile, legato alla scoperta più drammatica dell'astronomia, e forse dell'intera scienza: quella di un inizio del "tutto" da condizioni fisiche di inimmaginabile densità, temperatura e pressione.

Questa Sezione è dedicata ad una disamina dei processi fisici principali che hanno regolato le principali fasi evolutive dell'Universo. Seguiremo un approccio semplificato che tratterà gli aspetti principali del problema, rimandando a corsi successivi per approfondimenti vari.

11.1 Evoluzione del contenuto di materia ed energia dell'Universo.

Nella nostra precedente discussione della dinamica dell'Universo abbiamo fatto principalmente riferimento ai contenuti attuali di massa-energia, che sono essenzialmente la materia gravitante (oscura e barionica) e il termine di energia oscura Ω_Λ . Vediamo ora come le varie componenti, ivi incluse anche quelle radiative, ossia le particelle relativistiche, evolvano nel tempo. Trascureremo in questa Sez. gli effetti della costante cosmologica Λ che, per quanto già visto, si manifestano solo in epoche cosmiche recenti e sono trascurabili a $z \gg 1$.

Possiamo ottenere i principali risultati sulla storia termodinamica dell'Universo con il seguente approccio semplificato, ma assai potente (già utilizzato nella Sez. 10.3, eq. [10.3] per discutere il comportamento della Λ). Immaginiamo di applicare la 1^a legge della termodinamica ad una porzione arbitraria d'Universo, purché sufficientemente rappresentativa. Ovviamente utilizziamo al proposito il principio cosmologico. La

legge stabilisce una semplice regola di conservazione dell'energia: il cambiamento di energia totale di un sistema in espansione eguaglia il lavoro delle forze di pressione (legge di espansione o contrazione adiabatica):

$$dE = -pdV \quad [11.1]$$

con E , p , V rappresentanti di energia, pressione e volume proprio dell'elemento considerato ¹, con l'energia che e' legata alla massa dalla relazione stabilita in Relativita' Speciale $E=mc^2$. I termini di densita' di massa-energia includeranno i contributi sia della materia gravitante ρ_m (che include particelle in moto non-relativistico), sia di particelle relativistiche ρ_γ (fotoni e neutrini, si veda Sez. 1):

$$E = (\rho_m + \rho_\gamma)c^2V = \rho c^2V \quad [11.2]$$

con ρ densita' totale di massa-energia. Nella [11.2] non facciamo rientrare il termine con costante cosmologica in quanto questa non evolve con il tempo cosmico, quindi non compie lavoro. Ora, causa l'espansione, il volume evolve in funzione del fattore di scala $R(t)$, $V \propto R(t)^3$, in modo tale che potremo scrivere da [11.1]

$$0 = \frac{dE}{dt} + p \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho R^3) + \frac{p}{c^2} \frac{d}{dt}(R^3) \quad [11.3]$$

Questa e' l'equazione fondamentale con la quale possiamo studiare alcuni aspetti fondamentali della storia termica dell'Universo. La stessa equazione si ottiene da una applicazione delle eq. di campo relativistiche (Appendice 7A).

Proviamo ora a trovare soluzioni della [11.3] inserendo i vari contenuti fisici nei termini di densita' e pressione. Scriviamo

$$\rho = \rho_m + \rho_\gamma \quad p = p_r = \rho_\gamma c^2 / 3, \quad [11.4]$$

dove si e' assunto che la pressione sia solo quella dovuta alla componente fotonica e che siano invece trascurabili termini di pressione della materia gravitante. Cio' corrisponde ad assumere che i moti peculiari delle galassie (vedi Sez. 5.4) avvengano con velocita' molto piu' piccole di quella della luce (vedremo nella Magistrale che questo e' sempre vero). Universi con pressione della materia trascurabile sono detti, nel linguaggio dei relativisti, universi di polvere (*dusty universes*). Sviluppiamo quindi la [11.3]

$$0 = \frac{d}{dt}(\rho_m R^3) + \frac{d}{dt}(\rho_\gamma R^3) + \frac{\rho_\gamma c^2}{3c^2} \frac{d}{dt}(R^3) \quad [11.5]$$

Con riferimento ai 2 ultimi addendi di [11.5] avremo

¹ La 1^a legge della termodinamica e' quella che regola, ad esempio, il riscaldamento dell'aria in una pompa di bicicletta quando il volume nella pompa venga ridotto e il gas compresso: il lavoro della forza di pressione viene trasformato in aumento dell'energia termica delle molecole d'aria.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\rho_\gamma R^3) + \frac{\rho_\gamma}{3} \frac{d}{dt}(R^3) &= R^3 \frac{d}{dt}(\rho_\gamma) + \rho_\gamma \frac{dR^3}{dt} + \frac{\rho_\gamma}{3} \frac{dR^3}{dt} = \\ &= \frac{1}{R} \left[R^4 \frac{d\rho_\gamma}{dt} + \frac{4}{3} \rho_\gamma R \frac{dR^3}{dt} \right] \end{aligned}$$

avendo moltiplicato e diviso per $R(t)$, cosa che porta i due addendi al risultato

$$\frac{1}{R} \left[R^4 \frac{d\rho_\gamma}{dt} + \frac{4}{3} \rho_\gamma R \cdot 3R^2 \dot{R} \right] = \frac{1}{R} \left[\frac{d}{dt}(\rho_\gamma R^4) \right]$$

e quindi la [11.5] sviluppata diviene:

$$\frac{d}{dt}(\rho_m R^3) + \frac{1}{R} \frac{d}{dt}(\rho_\gamma R^4) = 0 . \quad [11.6]$$

che esprime la condizione generale di espansione adiabatica.

In assenza di radiazione, la [11.6] esprime l'usuale legge di evoluzione di un *universo dominato dalla materia* gravitante,

$$\rho_m(t) = \rho_{m0} \left[\frac{R(t)}{R_0} \right]^{-3} . \quad [11.7]$$

con ovvio significato dei termini, relazione già precedentemente discussa. La novità piuttosto sta nel secondo termine riguardante la componente radiativa per la quale, ponendo per semplificare $\rho_m=0$, la legge evolutiva si esprime come

$$\rho_\gamma(t) = \rho_{\gamma 0} \left[\frac{R(t)}{R_0} \right]^{-4} . \quad [11.8]$$

Equazione [11.6] suggerisce che, in assenza di conversione da materia a radiazione e viceversa, ossia nell'ipotesi di stretta conservazione del numero di particelle, le due leggi evolutive per materia e radiazione valgono simultaneamente per le due componenti, ove presenti entrambe. Viceversa in presenza di una trasformazione energetica da una componente all'altra, come si potrebbe verificare per effetto di annichilazione, decadimento di particelle in fotoni, o altro.

E' utile sottolineare l'origine della diversa dipendenza dal fattore di scala dei due tassi evolutivi per materia e radiazione in [11.7-8]: ragionando in termini di densità numerica di particelle e fotoni, e' chiaro che in entrambi i casi tali numeri saranno $\propto R^{-3}$. Ora però, mentre le particelle materiali non perdono la loro massa-energia al trascorrere del tempo, i fotoni degradano in energia proporzionalmente a $(1+z)^{-1}$, e questo spiega come per i fotoni vi sia un fattore $R(t)/R_0$ aggiuntivo rispetto alla materia nell'evoluzione con il tempo cosmico.

11.2 Epoca della Equivalenza. Universi dominati dalla radiazione.

Abbiamo visto in Sez. 3.5 che localmente, al tempo attuale, la densita' di massa-energia della materia supera per almeno un fattore 1000 quella della radiazione. Le due leggi evolutive [11.7-8], tuttavia, suggeriscono che questo non sia rimasto vero a qualunque epoca passata: il rapporto infatti tra le due componenti in funzione del tempo e'

$$\frac{\rho_\gamma(t)}{\rho_m(t)} = \frac{\rho_{\gamma 0}}{\rho_{m 0}} \left[\frac{R(t)}{R_0} \right]^{-1} \quad [11.9]$$

che al diminuire del fattore di scala nel passato diventa un numero sempre piu' grande, fino al momento in cui le due quantita' si eguagliano, cosa che avviene all'*epoca detta dell'equivalenza*, ottenibile eguagliando ad 1 la [11.9]

$$\frac{R(t_{equiv})}{R_0} = \frac{\rho_{\gamma 0}}{\rho_{m 0}} = (1 + z_{equiv})^{-1} \quad [11.10]$$

Per quanto detto riguardo al rapporto attuale tra densita' di energia in materia e radiazione, dobbiamo aspettarci $z_{equiv} \geq 1000$. In epoche antecedenti l'epoca dell'equivalenza espressa dalla [11.10], la densita' di massa-energia della radiazione superava quella della materia, $\rho_\gamma > \rho_m$, mentre viceversa ha dominato la materia gravitante in epoche piu' recenti.

Studiamo brevemente le soluzioni della dinamica cosmica in un **universo dominato dalla radiazione**. Nel caso reale, questa soluzione si verifichera' ad alti redshift, ai quali sappiamo che le varie soluzioni dinamiche convergono verso quella di universo piatto con $k=0$ (vedi ad es. Sez. 7.3, e il ragionamento rimane valido anche in presenza di Λ , che diventa trascurabile nel passato). Nel caso di un Universo piatto dominato dalla radiazione l'equazione dinamica di Friedman si puo' risolvere facilmente:

$$\begin{aligned} \dot{R}^2 &= 8\pi G \rho R^2 / 3 && \text{e inserendo la [11.8]} \\ \frac{dR}{dt} &\propto R^{-1} && R^2 / 2 \propto t \\ R(t) &= R_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad [11.11]$$

soluzione che ha un andamento diverso da quello classico di Einstein-de Sitter dominato dalla materia $R(t) \propto t^{2/3}$ e che si applica nelle prime fasi espansive dell'Universo.

11.3 Equazioni dinamiche generalizzate con materia, fotoni, energia oscura.

La componente fotonica nell'Universo locale e' del tutto trascurabile da un punto di vista dinamico, come abbiamo visto nelle Sez. precedenti (si veda una piu' precisa quantificazione nella Sez. 11.5). E' chiaro che la componente fotonica influenza l'evoluzione dinamica del fattore di scala sia durante ovviamente l'era dominata dalla radiazione, ma anche in epoche piu' tarde.

Da quanto discusso nella Sez. precedente, e' facile generalizzare le equazioni dinamiche inserendo la componente radiativa. Così' ad esempio la relazione [10.19] che esprime parametro di Hubble, e necessaria per ottenere l'evoluzione del parametro di scala, viene modificata nella seguente relazione di validita' assolutamente generale

$$H(z) = H_0 \left[(1+z)^3 \Omega_m + (1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda)(1+z)^2 + \Omega_\gamma (1+z)^4 + \Omega_\Lambda \right]^{1/2} \quad [11.12]$$

dove Ω_γ e' il parametro di densita' relativo ai fotoni e particelle relativistiche al tempo cosmico attuale (rapporto tra la densita' di massa equivalente in fotoni, vedi ad esempio [1.3], e la densita' critica). Anche gli altri parametri di densita' nella relazione si riferiscono ai valori al tempo attuale. Nella [11.12] il termine $\Omega_\gamma (1+z)^4$ che contiene la densita' di energia fotonica si aggiunge all'analogo termine che contiene Ω_m , con le rispettive dipendenze dal redshift come da [11.7-8].

Eq. [11.12] e' l'equazione fondamentale e completa per risolvere la dinamica cosmica nelle varie epoche.

Così', nella sua espressione piu' generale che include la componente fotonica, la [10.21] che esprime la relazione tra tempo cosmico e redshift diviene:

$$t = \frac{1}{H_0} \int_z^\infty \frac{dz}{(1+z) \left[(1+z)^3 \Omega_m + (1+z)^2 (1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda) + \Omega_\gamma (1+z)^4 + \Omega_\Lambda \right]^{1/2}}, \quad [11.13]$$

e analogamente per quanto riguarda la relazione di Mattig, ecc. Il parametro Ω_γ verra' stimato con precisione nel seguito.

11.3 Radiazione Cosmica di Fondo nelle Microonde (Radiazione Fossile, CMB). Osservazioni.

Una scoperta che si sarebbe immediatamente rivelata cruciale per la nostra comprensione delle origini dell'Universo e' avvenuta nel 1965, in modo piuttosto casuale. Due tecnici della Bell Telephone stavano operando una antenna radio per sondare le condizioni elettromagnetiche alla superficie della Terra in vista

dell'utilizzo di onde elettromagnetiche a corta lunghezza d'onda per telecomunicazioni (Figura 1). Le loro misure del rumore atmosferico rivelarono un eccesso di segnale, tecnicamente un eccesso di temperatura d'antenna di circa 3°K rispetto a quanto si sarebbero aspettati. Essi così, molto onestamente, non riportarono in un lavoro su Nature la scoperta della radiazione primordiale, tale si sarebbe ben presto rivelata la loro scoperta, ma semplicemente un eccesso di rumore nei loro rivelatori.

Per quanto casuale e non intenzionale fosse stata la scoperta (valsa poi ai due il premio Nobel), il contributo dei due fisici è stato assai rilevante nel loro strenuo tentativo di ridurre e interpretare questo eccesso di rumore, cercando di comprendere se fosse dovuto ad effetti spuri nel loro sistema di ricezione non tenuti nel conto dovuto. Cercarono così di schermare il più possibile la strumentazione e ridurre a zero il rumore di lettura raffreddando il sistema. Tutto fu inutile, il segnale residuo rimase inalterato. Solo parlando con un gruppo di astrofisici e cosmologi di Princeton (Dicke, Roll, Wilkinson, Peebles), che stavano all'epoca costruendo un ricevitore radio proprio per rivelare quella radiazione primordiale che si aspettavano di trovare, Penzias e Wilson si resero conto di avere fatto una delle scoperte più sensazionali della storia della scienza, la scoperta della radiazione di fondo cosmico nelle microne (CMB).



Microwave Receiver



Arno Penzias



Robert Wilson

Figura 1

Gli scopritori della radiazione di fondo cosmico nelle microne, Arno Penzias e Robert Wilson, assieme all'antenna a corno usata per la scoperta, peraltro casuale.

Di lì inizio' una epopea di osservazioni e studi teorici tesi a caratterizzare con sempre maggior precisione questa radiazione per poter, tramite essa, indagare direttamente il Big Bang. Un contributo molto significativo in questo senso si ebbe con il lancio nel 1990 del satellite COBE, che portava a bordo un piccolo telescopio e tre strumenti (FIRAS, DMR, DIRBE) destinati a misurare spettro e distribuzione angolare della brillantezza superficiale della radiazione di fondo. Un fondamentale risultato di FIRAS

e' stato la misura (ottenuta con notevolissima precisione, tanto che non e' piu' stata ripetuta da allora) dello spettro della radiazione di fondo per fotoni di lunghezza d'onda da 1 cm a 0.5 mm. Il risultato fu spettacolare: uno perfetto spettro di corpo-nero, il piu' preciso mai osservato in natura, come illustrato in Figura 2. Anche le caratteristiche della distribuzione angolare della radiazione sono sorprendenti: COBE DMR fu in grado di rivelare deviazioni dalla perfetta isotropia solo per qualche parte su 100.000 in $\Delta T/T$, una radiazione quasi assolutamente isotropa². Questi risultati sono riportati in Fig. 5.8 Sez. 5. L'origine di questa radiazione e le sue implicazioni sono discusse nel seguito.

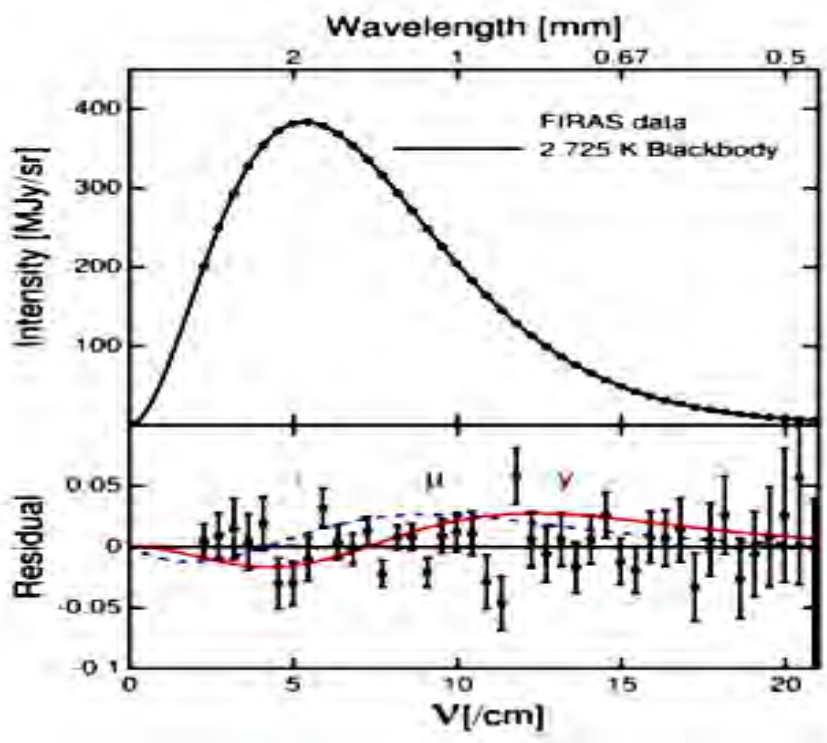


Figura 2
 Spettro del fondo cosmico nelle microonde, misurato dallo spettrografo differenziale FIRAS su COBE. Gli errori di misura sono piccolissimi, e inferiori alle dimensioni dei simboli dei datapoints nella figura sopra. Sotto sono riportate le deviazioni (molto piccole) rispetto allo spettro di miglior-fit. Lo spettro e' di perfetto corpo-nero con una temperatura $T=2.728$ K.

11.5 L' Epoca della Ricombinazione.

Sulla base dei dati precedentemente discussi, proviamo ora ad operare una estrapolazione indietro nel tempo, partendo dall'ampia descrizione che abbiamo dato dell'Universo attuale nelle Sez. precedenti. Effettuiamo cosi' un immaginario *rewind* del film dell'evoluzione cosmica verso le epoche passate.

Una prima considerazione importante riguarda l'osservabilita' stessa dell'Universo remoto: in considerazione delle enormi distanze in gioco, questa non e' di per se assolutamente garantita. Potremmo in linea di principio calcolare la probabilita' che

² I *Principal Investigators* dei due strumenti FIRAS e DMR, rispettivamente John Mather e George Smoot, sono stati insigniti nel 2003 del premio Nobel per la Fisica per le loro scoperte sulla radiazione di fondo.

un fotone generato da un evento qualsiasi nello spazio-tempo ha di essere assorbito da qualcuna delle componenti diffuse che sappiamo permeare l'Universo. Tale probabilita' e' una funzione dell'energia dei fotoni che si considerino: ad esempio fotoni di altissima energia vengono rapidamente distrutti da collisioni con fotoni di energia piu' bassa che appartengono alle radiazioni di fondo cosmico (un fenomeno di fisica quantistica). Tuttavia, se consideriamo fotoni nella regione spettrale che va dal radio ai raggi X, possiamo dire che la probabilita' di assorbimento all'epoca attuale e' quasi nulla, ossia l'Universo e' oggi trasparente (tecnicamente, questa bassa probabilita' di interazione si esprime attraverso un basso valore della sezione d'urto della materia nei confronti dei fotoni che la attraversano). Una chiara dimostrazione di cio' sta nel fatto che sono state identificate sorgenti (galassie) fino a redshift $z \sim 8-10$, e numerosi quasars fino a $z \sim 6.4$, sulla base di osservazioni in bande ottiche. Occorre a questo aggiungere che non sono state per ora osservate sorgenti a redshift superiori a questo, con l'eccezione, molto particolare, di quanto vedremo nel seguito. E' abbastanza evidente pero' che questa **trasparenza dell'Universo** non puo' essersi mantenuta indefinitamente nel passato. Ad esempio, nella nostra operazione di *rewind* temporale, ci aspettiamo che le galassie si avvicinino sempre di piu' tra loro, andando verso epoche in cui il fattore di scala $R(t)$ era minore. Fino a quando possiamo immaginare che questa contrazione non abbia conseguenze? Possiamo teorizzare ad esempio che le galassie divengano cosi' vicine tra loro da toccarsi: siccome da Sez. 3.3 sappiamo che la densita' media di galassie massive e' di 10^{-2} Mpc^{-3} , la loro distanza caratteristica oggi e' l'inverso della radice cubica della loro densita' volumetrica, $\left(\sqrt[3]{10^{-2}}\right)^{-1} \approx 5 \text{ Mpc}$ (eq. [3.11]). Assumendo per le loro dimensioni 30 Kpc, potremmo aspettarci che a $(1+z) \sim 100$ l'Universo divenga completamente opaco a causa dell'addensarsi delle galassie tra loro, tanto che un qualunque fotone verrebbe a questo punto immediatamente assorbito e l'Universo remoto diverrebbe cosi' inosservabile. Sarebbe ovviamente un dramma per i cosmologi osservativi. Fortunatamente l'argomento non tiene conto del fatto che stelle e galassie si sono formate solo in epoche piu' recenti di $z=100$, cosicche' la trasparenza e' garantita anche in epoche piu' antiche. Infatti si ritiene che, andando indietro nel tempo, le condizioni del fluido cosmico abbiano teso verso una sempre maggiore omogeneita' e uniformita'.

Dopo aver ragionato delle componenti materiali, che cosa invece e' successo delle componenti radiative? Come visto in Sez. 9.5, molte di queste componenti sono originate da attivita' di produzione di energia in sorgenti cosmiche (galassie, radiogalassie, nuclei attivi e quasars - vedi Sez. 12) in epoche relativamente recenti, problematica che e' stata accennata nella Sez. 9.5-9.7. Andando quindi nel passato, queste radiazioni tendono a scomparire. Invece, il fondo cosmico nelle microonde, CMB, ha una origine piu' antica.

Una prima questione riguardante il fondo nelle microonde concerne la sua forma spettrale: come si concilia il suo spettro perfetto di corpo-nero con il fatto precedentemente discusso della trasparenza dell'Universo in epoche che coprono oltre

il 90% dell'età dell'Universo (gli ultimi >13 miliardi di anni che ci separano da $z=100$)? A prima vista è un fatto paradossale: i fotoni che meno hanno interagito con la materia durante un lunghissimo periodo di tempo sono quelli che mostrano lo spettro di corpo nero più perfetto³. Ragioniamo con calma su questo punto.

La ricombinazione. Torniamo alla nostra regressione temporale. Da una parte la densità di energia di questi fotoni è aumentata, come sappiamo da [11.8], molto rapidamente con il redshift. Dall'altra, sempre per effetto del redshift, anche la loro energia fotonica $h\nu$ è aumentata in proporzione lineare con $1+z$. Quindi regredendo sufficientemente nel tempo, ci troveremo in condizioni fisiche nel nostro fluido cosmico sempre più peculiari, nelle quali ogni singolo atomo di gas (essenzialmente idrogeno primordiale, come vedremo) si viene a trovare immerso in un bagno di fotoni sempre più denso e caldo, fotoni con i quali l'atomo viene sempre più spesso ad interagire. Si arriverà ad una situazione, quando la temperatura dei fotoni superi $T=3000$ °K, nella quale l'interazione inizia a produrre la ionizzazione degli atomi di idrogeno. A questo punto si verifica un rapido cambiamento di fase nel fluido cosmico, causato dal passaggio dalla fase neutra del gas primordiale in epoche recenti ad una ionizzata precedente. In questa fase, la sezione d'urto del processo di interazione fotoni-materia cambia drasticamente: da bassa o nulla sezione d'urto a redshift più bassi, si passa all'alto valore della stessa che si ha in presenza di un gran numero di elettroni liberi, la cui sezione d'urto è quella di Thompson σ_T (si veda anche la discussione nella Sez. 2.2). L'Universo diviene così molto rapidamente da completamente trasparente a completamente opaco. Questa drastica trasformazione di fase che ha subito l'Universo va sotto il nome di *Ricombinazione* (chiamata anche *Disaccoppiamento*, intendendo dei fotoni dalla materia, considerando che non c'era stata nessuna precedente "combinazione" di elettroni e protoni). L'epoca della ricombinazione si colloca, come vedremo nel seguito, in corrispondenza al redshift $z \sim 1100$.

Il riferimento alla Sez. 2.2, ove abbiamo discusso alcune caratteristiche fondamentali delle stelle, non è casuale: in effetti l'epoca della ricombinazione può essere considerata come la *superficie di ultimo scattering* della radiazione di fondo, così come la fotosfera stellare lo è per i fotoni dalla stella emessi. Così a questa situazione fisica possiamo applicare le considerazioni fatte per le stelle. Un aspetto fondamentale di quest'analisi è che a redshift superiori a quello della ricombinazione l'Universo è completamente opaco, cosa che implica il fatto che nessuna sorgente cosmica è visibile a distanze cosmiche superiori a questo redshift. Questa superficie costituisce così una sorta di *orizzonte* oltre il quale la visione diretta dell'Universo è impossibile⁴, in modo tale che a questa distanza possiamo affermare sia limitato il

³ Sappiamo che uno spettro di *corpo nero* testimonia il verificarsi di due condizioni fondamentali: un sostanziale equilibrio tra fotoni e materia, e una condizione di perfetto equilibrio instauratosi tra le particelle di materia stesse. Radiazione prodotta da particelle termiche (in equilibrio termodinamico tra loro) al di fuori dell'equilibrio materia-radiazione è detta radiazione semplicemente *termica*.

⁴ Il concetto di orizzonte cosmologico è in realtà più complesso di quanto qui esposto riguardo alla superficie di ultimo scattering. Esistono vari tipi di orizzonti cosmologici, che saranno analizzati nei corsi della Magistrale.

nostro cono-luce. Interessante infine notare che la posizione spaziale di questa superficie non e' definita in assoluto, ma e' relativa ad ogni determinato osservatore fondamentale.

Evoluzione dello spettro della CMB. Il fenomeno della ricombinazione, e la fase antecedente in cui tutto il fluido cosmico barionico (essenzialmente protoni, elettroni e nuclei di elio) era ionizzato, a differenza dello stato di idrogeno neutro prevalente in epoche successive, spiega uno dei misteri della cosmologia riguardo alla perfetta forma spettrale di corpo-nero della CMB: nel plasma primordiale prima della ricombinazione gli urti tra particelle e tra le particelle e i fotoni (a causa dell'elevata sezione d'urto d'interazione) erano talmente frequenti da realizzare essenzialmente a qualunque epoca uno stato di completo equilibrio tra materia e radiazione, cui e' corrisposto uno spettro fotonico di corpo-nero, uno spettro di Planck. La relativa densita' di energia del campo di radiazione $\varepsilon_\gamma = \rho_\gamma c^2$ e' data da:

$$\varepsilon_\gamma = \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty I(\nu) \cdot d\nu, \text{ con } I(\nu) = B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} [\exp(h\nu / kT[R(t)]) - 1]^{-1} \quad [11.14]$$

con $I(\nu)$ l'intensita' del campo di radiazione, $B_\nu(T)$ funzione di Planck e $T[R(t)]$ che ingloba l'unica dipendenza dal tempo nell'equazione tramite quella dal fattore di scala. Avremo cosi'

$$\varepsilon_\gamma = \frac{8\pi}{c^3} \int_0^\infty \left(\frac{h\nu^3 d\nu}{[\exp(h\nu / kT_\gamma) - 1]} \right) \propto T_\gamma^4$$

dove T_γ e' la temperatura del campo fotonico. Ma da [11.8] abbiamo

$$\rho_\gamma = \varepsilon_\gamma / c^2 \propto R(t)^{-4} \propto T_\gamma^4$$

che implica una evoluzione per il campo di radiazione tale da mantenere lo spettro di corpo-nero con una temperatura che evolve con il fattore di scala

$$T_\gamma \propto 1 / R(t) \quad [11.15]$$

sino ad arrivare al tempo attuale con una temperatura (osservata da COBE) di $T=2.728$ °K indicata in Fig. 2 ed una densita' di energia data da eq. [1.2]

$$\varepsilon_\gamma \simeq 5.3 \cdot 10^{-13} \text{ erg cm}^{-3} \simeq 0.3 \text{ eV / cm}^3. \quad [11.16]$$

Prima dell'epoca della ricombinazione, dato il fortissimo accoppiamento che abbiamo detto, la materia barionica era vincolata a mantenere la stessa temperatura termodinamica della radiazione, $T_m = T_\gamma$. Ma in seguito, l'accoppiamento di materia e radiazione e' improvvisamente rotto e le due componenti non hanno piu' la possibilita' di interagire tra loro ed evolvono in modo indipendente. Per quanto riguarda la radiazione, si puo' dimostrare che lo spettro si mantiene rigorosamente di corpo-nero e la temperatura continua ad evolvere secondo

$$T_\gamma = T_0 R_0 / R(t) = 2.728 \cdot (1+z) \quad [11.17]$$

nonostante dalla ricombinazione in poi, per l'intero tempo di Hubble, non vi sia stato piu' nessuno scambio di informazione tra le due componenti (paradossale che lo spettro di corpo-nero naturale piu' perfetto mai osservato sia quello che ha interagito meno in assoluto con la materia durante quasi l'intera storia dell'Universo). Il ragionamento ⁵ considera l'evoluzione temporale della densita' fotonica per uno spettro di corpo-nero, che al tempo t_1 e' assunto scriversi

$$\frac{dN}{d\nu} = \frac{4\pi B_\nu}{c h\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3 \exp[(h\nu/kT) - 1]}$$

Osservato ad un tempo successivo $t_0 > t_1$, tutti i fotoni saranno depressi in energia per lo stesso fattore: $\nu_0 = \nu R(t_1)/R(t_0) = \nu / (1+z)$. Anche l'intervallo di frequenza cambia (si restringe) in frequenza per lo stesso fattore $1+z$, mentre la densita' fotonica diminuisce con $(1+z)^3$. Combinando tutto questo, avremo al tempo t_0 :

$$\frac{dN_0}{d\nu_0} = \frac{dN / (1+z)^3}{d\nu / (1+z)} = \frac{1}{(1+z)^2} \frac{8\pi(1+z)^2 \nu_0^2}{c^3 \exp[(h\nu_0(1+z)/kT) - 1]} = \frac{8\pi\nu_0^2}{c^3 \exp[(h\nu_0/kT_0) - 1]}$$

ove abbiamo posto $T_0 = T / (1+z)$. In conclusione, lo spettro mantiene interamente la sua forma di corpo-nero, con solo la temperatura che cambia secondo la [11.15] e [11.17]. Questo risultato ha implicazioni non banali che saranno discusse in Sez. 11.6 e 11.7.

Evoluzione del gas. Per quanto riguarda invece la componente materiale, la sua regola evolutiva fondamentale e' quella espressa da [11.7]. Utilizzando la corrispondente equazione di stato

$$P_m = \frac{\rho_m k T_m}{\mu m_H} = \text{cost } \rho_m^\gamma; \quad T_m = \frac{\text{cost}}{k} \rho_m^{\gamma-1} \mu m_H$$

μ essendo il peso (molecolare) medio del fluido cosmico, ovvero essenzialmente il peso di un atomo di idrogeno, la componente che domina il fluido. Cosi':

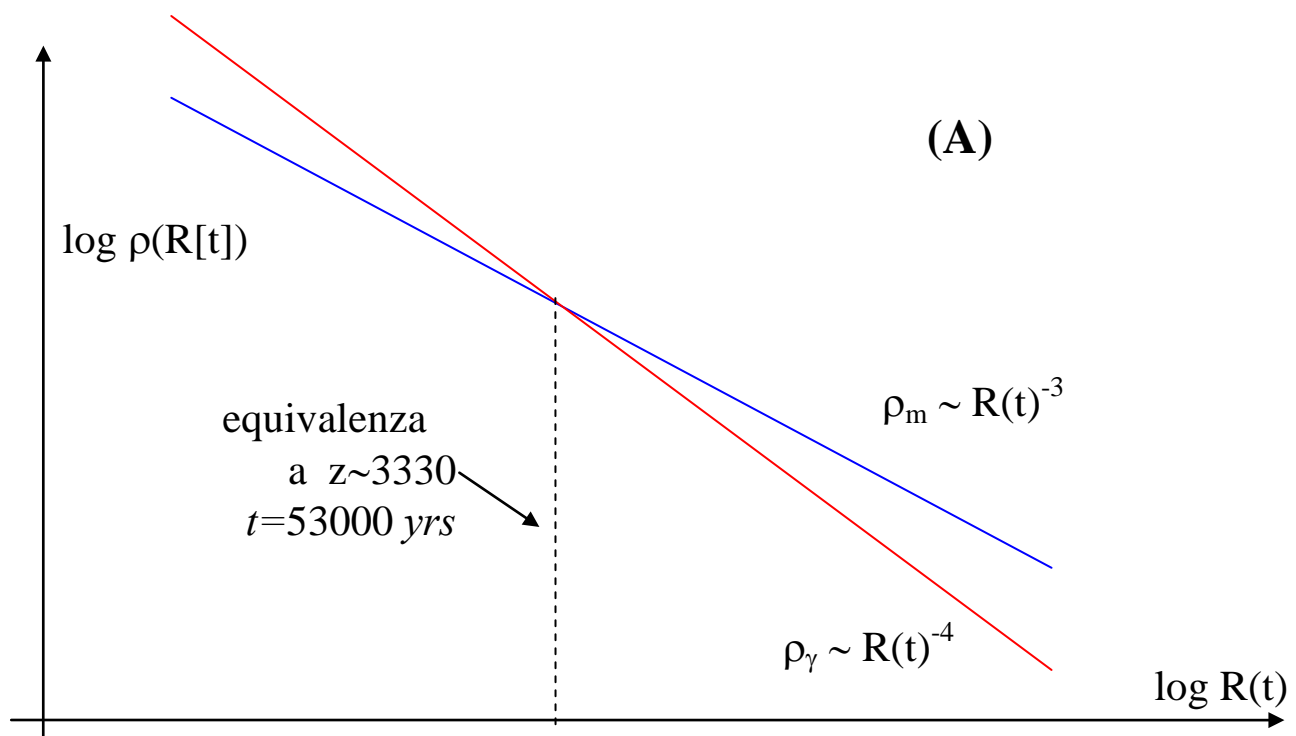
$$T_m = 3000^\circ K \left(\frac{\rho}{\rho_{rec}} \right)^{\gamma-1} = 3000^\circ K \left(\frac{R(t)}{R_{rec}} \right)^{-3(\gamma-1)} = 3000^\circ K \left(\frac{1+z}{1000} \right)^2 \quad [11.18]$$

avendo assunto una espansione adiabatica con indice politropico $\gamma=5/3$. La materia quindi si raffredda molto piu' rapidamente della radiazione, $T_m \propto z^2$ mentre $T_\gamma \propto z$.

Gia' al tempo cosmico corrispondente a $z=30$ la materia si era portata praticamente allo zero di temperatura assoluta. L'Universo e' risultato sinora inosservabile anche

⁵ Si veda ad es. P. Schneider, *Extragalactic Astronomy & Cosmology*, 2006.

alle piu' profonde surveys durante tutta l'era cosmica che va dalla ricombinazione fino a circa $z=10$ (redshift corrispondente a 500 milioni di anni dal Big Bang). Durante questo periodo si ritiene che il gas primordiale, partendo da uno stato di grande omogeneita' testimoniato dalle minime fluttuazioni di brillanza superficiale mostrate dalla CMB su tutte le scale angolari (Sez. 11.3) e raffreddandosi secondo la [11.18], abbia iniziato a strutturarsi, amplificando progressivamente fluttuazioni nel campo di densita' per effetto dell'auto-gravita'. Attorno al redshift $z\sim 10$ vi sono chiare evidenze (pur indirette) che le prime condensazioni di gas abbiano portato alla formazione delle prime sorgenti, verosimilmente una popolazione di stelle molto massive ed estremamente luminose (vedi un cenno ad una possibile traccia osservativa di questa fase nella Sez. 9.7) che, evolvendo su tempi scala brevissimi (meno di 1 milione di anni, vedi Sez. 2.2), hanno rilasciato nel mezzo diffuso primordiale una significativa quantita' di elementi pesanti (Carbonio, Azoto, Silicio, ecc.). Rapidamente, attorno a $z\sim 10$, queste prime luci hanno nuovamente riscaldato la materia nell'Universo e di nuovo ionizzato l'idrogeno diffuso. Questa epoca va sotto il nome di epoca della *re-ionizzazione*. La storia termica dell'Universo, con le varie fasi di raffreddamento e riscaldamento delle componenti il fluido cosmico, sono illustrate in Figura 3.



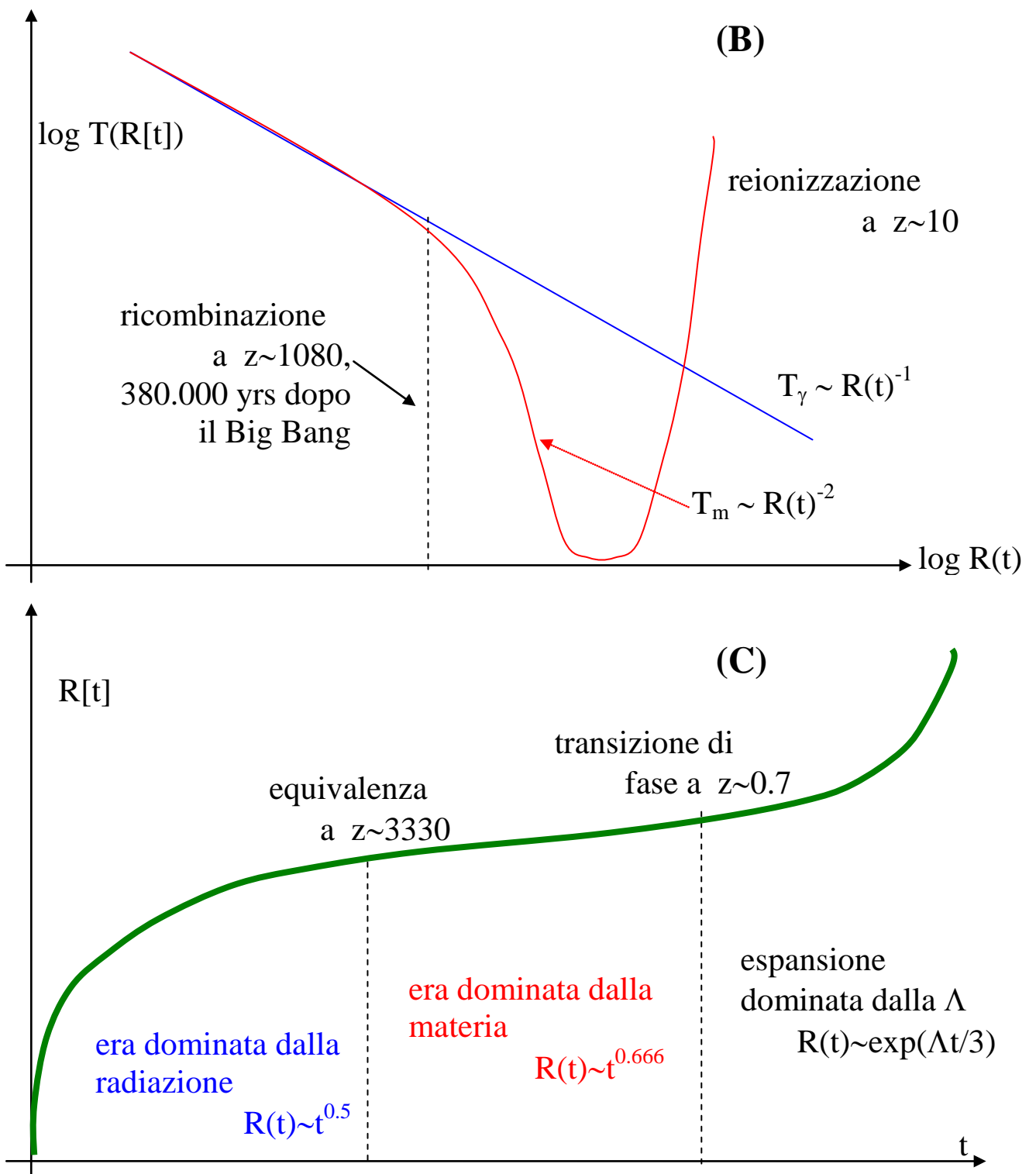


Figura 3

Schemi riassuntivi l'evoluzione dinamica e termodinamica dell'Universo.

(A) Evoluzione della densità di massa-energia (in blu la radiazione; in rosso la materia);

(B) Evoluzione della temperatura della radiazione e della materia;

(C) Evoluzione del fattore di scala R(t) nelle principali fasi cosmologiche.

Rapporto fotoni/barioni. Per comprendere con maggiore dettaglio quanto avviene all'equivalenza e alla ricombinazione, occorre considerare che per ogni atomo di idrogeno vi è un enorme numero di fotoni. Infatti dividendo la densità di energia nella CMB in [1.2] o [11.13] per l'energia del fotone medio $h\nu$, con $\nu=2 \cdot 10^{11}$ Hz, si ottengono circa $n_\gamma \sim 400$ fotoni/cm³, come già precedentemente menzionato. Per ottenere l'analogo numero medio di barioni per unità di volume occorre partire innanzitutto dalla [3.17]: $\rho_{matter, stars} \approx 5 \cdot 10^{-32} \text{ g/cm}^3$. Questi rappresentano però solo i barioni condensati in stelle e galassie. Abbiamo già visto nella [10.6] che vi sono seri motivi per ritenere che la densità media di barioni sia circa 10 volte superiore a quelli condensati in stelle (si veda Sez. 11.5 nel seguito). Così avremo $\rho_{barion} \approx 5 \cdot 10^{-31} \text{ g/cm}^3$, e come densità numerica (dividendo per la massa dell'idrogeno):

$$n_B \approx 5 \cdot 10^{-31} [\text{g/cm}^3] / 1.6 \cdot 10^{-24} [\text{g}] \approx 3 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^{-3}$$

da cui si ottiene che per ogni atomo vi sono circa un miliardo di fotoni, rapporto che viene indicato con l'importante parametro:

$$\eta \equiv \frac{n_B}{n_\gamma} \approx 10^{-9} . \quad [11.19]$$

Così nonostante vi sia oggi una densità di materia 1000 volte superiore a quella in radiazione, in termini numerici i fotoni dominano largamente (10^9 fotoni per ogni barione). Il rapporto barioni/fotoni, o parametro η , è una invariante cosmica, ossia in assenza di creazione o distruzione di fotoni via processi radiativi questo numero non si modifica a causa dell'espansione dell'Universo, ed è oggi quello che era nelle prime fasi espansive dell'Universo. È immediato vedere questo se si considera che la densità numerica di fotoni scala con R^{-3} come la densità di particelle. Il reciproco del parametro η è anche detto *entropia per barione*.

L'epoca della ricombinazione. Il grandissimo numero di fotoni a disposizione per ogni barione nell'Universo comporta una interessante conseguenza per quanto riguarda quando esattamente sia avvenuta la ricombinazione del plasma primordiale in gas neutro. La ionizzazione di un atomo di idrogeno si verifica quando un fotone di energia di 13.6 eV o superiore interagisce con l'atomo e viene assorbito, liberando l'elettrone (assunto trovarsi originariamente nel suo orbitale fondamentale). Viceversa, partendo dal Big Bang, questa è l'energia che in linea di principio ci si aspetterebbe caratterizzare il fluido cosmico al momento della ricombinazione. In termini di temperatura del fluido, ciò dovrebbe corrispondere ad una temperatura

$$T \approx h\bar{\nu} / k \approx 13.6 \text{ eV}/k \approx 13.6 \cdot 1.610^{-12} / 1.3810^{-16} \approx 157.000 \text{ }^\circ K.$$

Così essendo, dal confronto con la temperatura della CMB oggi verrebbe un redshift della ricombinazione di $z \sim 58.000$.

Il ragionamento sopra non tiene però conto del fatto che ci sono un enorme numero di fotoni per ogni atomo di idrogeno, e tra questi ne basta solo uno con l'energia sufficiente per la ionizzazione dell'atomo. Quindi anche a redshift molto inferiori a $z=58000$ vi sarà un numero sufficiente di fotoni nella coda di Wien dello spettro per mantenere la ionizzazione del plasma, e la ricombinazione si verificherà solo a redshift molto più bassi.

Per calcolare quindi il corretto redshift della ricombinazione procediamo come segue. Consideriamo innanzitutto la frazione dei fotoni della Planckiana con energia maggiore di una certa data, $>h\nu$. Questa è calcolabile dall'integrazione della funzione di Planck $B_\nu(T)$ in [11.14] diviso per l'energia del fotone $h\nu$. L'integrale diventa analitico nel limite di Wien, quindi per energie fotoniche sufficientemente superiori al picco, regime al quale siamo interessati :

$$n(\varepsilon_\gamma > E) = \int_E^\infty \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \exp(-h\nu/kT) \cdot d\nu = 8\pi \left[\frac{kT}{hc} \right]^3 (2 + 2x + x^2)$$

con $E \equiv h\nu$, $x \equiv h\nu/kT$. Questo può essere confrontato con il numero totale di fotoni nella Planckiana, dato ancora dall'integrale (ancora un integrale analitico):

$$n(\varepsilon_\gamma > 0) = \int_0^\infty \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{d\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1} = 16\pi \left[\frac{kT}{hc} \right]^3, \quad \text{per cui}$$

$$\text{frazione fotoni} = \frac{n(\varepsilon_\gamma \geq E)}{n(\varepsilon_\gamma \geq 0)} = \exp(-x) \left(1 + x + x^2/2 \right) \quad [11.20]$$

Poniamo ora che questa frazione sia pari al numero medio di atomi di idrogeno per ogni fotone, ossia 10^{-9} , e per $E = 13.6$ eV, avremo così'

$$\exp(-x) \left(1 + x + x^2/2 \right) = 10^{-9}, \quad \text{ovvero } x \approx 26.67$$

Questo significa che alla temperatura $T \approx 13.6 \times 1.6 \cdot 10^{-12} / 1.36 \cdot 10^{-16} / 26.67 \approx$

≈ 5900 K l'Universo era ancora completamente ionizzato. Ovvero vi è un fattore pari a circa 27 in temperatura tra il picco della Planckiana corrispondente a 13.6 eV e quello della Planckiana avente un numero di fotoni nella coda di Wien sufficiente per una completa ionizzazione del plasma cosmico. Questo stesso ragionamento verrà riutilizzato per il calcolo della nucleo-sintesi primordiale più avanti. Un calcolo più dettagliato del processo di ricombinazione (vedere eventualmente la Sez. 6 del Corso della Magistrale) mostra che la temperatura alla quale si ha il massimo della produzione di idrogeno neutro è un po' inferiore, ossia $T \approx 3000$ K, che considereremo nel seguito come riferimento per la stima dell'epoca della ricombinazione. A questa temperatura corrisponde un redshift

$$z_{rec} \approx 3000 / 2.728 \approx 1100, \quad [11.21]$$

Nella realtà poi il processo non è istantaneo a questo redshift; piuttosto la diminuzione del grado di ionizzazione avviene entro un intervallo di circa $\Delta z \sim 200$ attorno al redshift $z \sim 1100$ (sempre dettagli nel Corso Magistrale).

Densità di energia della componente radiativa. Breve storia termica dell'Universo.

Abbiamo ora tutti gli elementi per tracciare una breve storia termica dell'Universo. Ricalcoliamo innanzitutto l'esatta epoca dell'equivalenza, aggiornando le stime accennate in Sez. 11.2, considerando tutte le componenti di particelle relativistiche e confrontandole con tutte le componenti materiali presenti. Per quanto riguarda le prime, oltre ai fotoni già discussi dobbiamo aggiungere i neutrini cosmici, che la teoria del Big Bang prevede siano stati prodotti nel fluido cosmico primordiale. Vi sono al proposito tre specie di neutrini, una per ogni leptone (elettrone, muone, tau, si veda nota 1.3). In questo modo possiamo esprimere la densità di massa-energia in neutrini ρ_ν come

$$\rho_\nu \approx 3 \cdot \left(\frac{4}{11}\right)^{4/3} \rho_\gamma \approx 0.78 \rho_\gamma, \quad [11.22]$$

dove il fattore 3 è per i tre tipi di neutrini e il secondo fattore dipende dai dettagli di come i neutrini vengono prodotti nel fluido primordiale. Cioché, tenendo conto delle stime di ρ_γ in [1.3], il totale per la componente relativistica diviene

$$\rho_{rel} \approx 1.78 \rho_\gamma \approx 1.78 \cdot 5.3 \cdot 10^{-34} \approx 9.4 \cdot 10^{-34} \text{ g / cm}^3. \quad [11.23]$$

Dividendo questa quantità per la densità critica ρ_c , otteniamo il parametro di densità Ω_γ al tempo attuale necessario da inserire nella equazione dinamica [11.12]:

$$\Omega_\gamma \equiv \frac{\rho_\gamma}{\rho_c} \approx 0.9 \cdot 10^{-4} \quad [11.24]$$

$$\text{con } \rho_c \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} \approx 10^{-29} \text{ [gr / cm}^3\text{]} \quad (H_0 = 70)$$

Dobbiamo ora porre questo a confronto con la densità di massa totale della materia gravitante. Riguardo a questo, abbiamo già accennato in Sez. 3.5 alla difficoltà di effettuare una stima del contributo della materia oscura alla densità di massa globale dell'Universo. Con riferimento a quanto visto in Sez. 10.6, possiamo assumere come stima attualmente (molto) attendibile per il parametro di densità globale al tempo attuale il valore

$$\Omega_m \approx 0.3$$

del quale la quantità 0.04 sarebbe dovuta ai barioni (come discusso nel Cap. 11.7 successivo) e 0.26 alla materia oscura. Così, per questa componente avremo:

$$\rho_m \approx \Omega_m \cdot \rho_c \approx 0.3 \cdot \rho_c \approx 3 \cdot 10^{-30} \text{ [gr / cm}^3\text{]} \quad [11.25]$$

Potremo così precisare la [11.10] come

$$(1 + z_{equiv}) = \frac{R_0}{R(t_{equiv})} = \frac{\rho_{m0}}{\rho_{rel}} \approx \frac{3 \cdot 10^{-30}}{9 \cdot 10^{-34}} \approx 3330 \quad [11.26]$$

che definisce il redshift a cui avviene la transizione tra la fase cosmica dominata dalla radiazione e quella dominata dalla materia. Come si vede, questo redshift è molto vicino a quello della ricombinazione ($z \sim 1100$). A quest'epoca il fluido cosmico aveva una temperatura

$$T \approx T_{equiv} \approx T_0 \cdot z_{equiv} \approx 9000 \text{ } ^\circ K \quad [11.27]$$

Da [11.26] possiamo rapidamente calcolare il tempo cosmico corrispondente all'equivalenza, utilizzando la [11.13]⁶: con un calcolo esatto troviamo

$$t_{equiv} \approx 53000 \text{ yrs} . \quad [11.28]$$

Assumendo di rappresentare l'evoluzione del fattore di scala con un modello Einstein-de Sitter, che fornisce una discreta rappresentazione sopra un'ampia parte dell'era dominata dalla materia, possiamo rappresentarla con la legge

$$R(t) = R_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3} \Rightarrow (1 + z) \approx \left(\frac{9}{t[\text{Gyr}]} \right)^{2/3} \quad [11.29]$$

con $t_0 \approx 9.6 \text{ Gyr}$. Questa relazione fornisce una discreta rappresentazione dell'evoluzione del fattore di scala tra l'equivalenza e $z \sim 1$. Poiché $T_{equiv} > T_{rec}$, possiamo utilizzare la relazione per l'era dominata dalla materia [10.21] per calcolare l'età corrispondente alla ricombinazione. Un risultato più preciso richiede l'uso della relazione completa [11.13] con i valori appropriati dei parametri cosmologici. Da [11.21] abbiamo così

$$t_{rec} \approx 380000 \text{ yrs} . \quad [11.30]$$

La ricombinazione si è così verificata meno di mezzo milione d'anni dopo il Big Bang.

In epoche antecedenti l'equivalenza, ossia nell'ambito di un modello dominato dalla radiazione, possiamo calibrare ora la relazione [11.11] del fattore di scala, ottenendo

$$R(t) = R_{equiv} \left(\frac{t}{t_{equiv}} \right)^{1/2} \Rightarrow (1 + z) \approx 3330 \left(\frac{53000}{t[\text{yrs}]} \right)^{1/2} \quad [11.31]$$

ovvero in termini della temperatura del fluido cosmico

⁶ Occorre fare attenzione nel risolvere l'integrale nel redshift della [11.13] poiché avremo a che fare con molto elevati valori di z , e fare anche attenzione al limite superiore dell'integrale, formalmente infinito. Utilizziamo il valore di $H_0 = 70 \text{ Km/sec/Mpc}$. ($1 \text{ Mpc} = 3.8568 \cdot 10^{24} \text{ cm}$, $1 \text{ yr} = 3.1536 \cdot 10^7 \text{ sec}$).

$$\frac{T}{9000 \text{ } ^\circ K} \approx \left(\frac{53000}{t [\text{yrs}]} \right)^{1/2} \quad [11.32]$$

ovvero $\Rightarrow t[\text{sec}] \approx \left(\frac{1.16 \cdot 10^{10}}{T [^\circ K]} \right)^2 \approx \left(\frac{1 \text{ MeV}}{kT} \right)^2$

Sono queste le equazioni che regolano la storia termica dell'Universo durante le prime fasi dell'espansione.

Riportiamo in Figura 3 schemi riassuntivi dell'evoluzione dei principali parametri termodinamici, densità e temperatura delle varie componenti il fluido cosmico, e l'evoluzione del fattore di scala durante i vari regimi dinamici.

Esercitemoci ora a provare a ricostruire i valori di alcuni di questi parametri fisici in alcune fasi tipiche dell'Universo primordiale.

- Alla ricombinazione, alla temperatura di $T=3330 \text{ } ^\circ K$ e redshift $z \sim 1080$ si associa una densità di gas data da [11.7] e [3.16]

$$\rho_{\text{rec}} \approx (10^9 M_\odot / \text{Mpc}^3) * 1080^3 \approx 100 \text{ atomi/cm}^3$$
 (tenendo conto anche dei barioni non condensati in stelle), a fronte degli attuali

$$\rho_0 \approx 2.5 \cdot 10^{-7} \text{ atomi/cm}^3$$
 e di una temperatura fotonica di $T_\gamma = 2.728 \text{ K}$.
- All'equivalenza, $T=9000 \text{ } ^\circ K$ e redshift $z \sim 3330$, troviamo

$$\rho_{\text{equiv}} \approx \rho_0 * 3330^3 \approx 9000 \text{ atomi/cm}^3.$$
- Ad 1 sec dopo il Big Bang, eq. [11.32] ci dice che la temperatura del plasma primordiale era di $T \sim 10^{10} \text{ } ^\circ K$, corrispondente ad un redshift di $z_{1 \text{ sec}} \sim 10^{10} / 2.7 \sim 4 \cdot 10^9$. Vedremo nella Sez. 11.6 che questa è un'epoca particolarmente interessante nella storia dell'Universo. A questa corrisponde una densità

$$\rho_{1 \text{ sec}} \approx \rho_0 * (4 \cdot 10^9)^3 \approx 10 \text{ Kg/m}^3.$$
 Questo dato ci dà un'idea della rapidità con cui l'Universo si è espanso durante le prime fasi, portandosi, da uno stato iniziale praticamente a densità infinita, a raggiungere in 1 solo secondo una densità 100 volte più bassa di quella dell'acqua.

11.6 Universo primordiale. Evoluzione termodinamica. Nucleo-sintesi primordiale.

Con la trattazione della Sezione precedente siamo in particolare in grado di descrivere con sufficiente dettaglio l'evoluzione delle componenti l'Universo durante le prime fasi espansive. Tuttavia non vogliamo addentrarci in troppo dettaglio ora in questa complicata analisi, demandandola ai corsi successivi. Vogliamo solo menzionare un risultato fondamentale emerso molto semplicemente e direttamente dalla teoria del

Big Bang, che ha fornito dati essenziali riguardo alle origini dell'Universo, ed una conferma decisiva della teoria del Big Bang caldo (ovvero ricco di fotoni energetici).

Ricordiamo che sorgenti cosmiche non sono visibili direttamente a redshift superiori a $z_{\text{rec}}=1100$. Tuttavia, come vedremo, esiste una varieta' di osservazioni indirette con le quali possiamo ricavare informazioni su quanto avvenuto prima. La piu' importante di queste riguarda il processo della *nucleosintesi primordiale*.

Tra circa 1 sec e alcuni minuti dopo il Big Bang si sono create infatti nel fluido cosmico condizioni di densita' e temperatura del gas barionico favorevoli al bruciamento termonucleare di una parte dell'idrogeno primordiale presente in elementi piu' pesanti, particolarmente ^4He (Elio), ^2D (deuterio), ^7Li (Litio).

E' utile premettere che un'importante e a lungo irrisolto problema dell'astrofisica e della cosmologia consisteva nell'elevata abbondanza osservata di atomi di ^4He nei plasmi stellari, pari mediamente al 28% in massa di tutti gli atomi presenti nelle stelle, che sono, com'e' noto, dominati dalla presenza dell'idrogeno (H). Il problema nasceva dal fatto che l'elio e' si' prodotto abbondantemente nelle stelle di ogni massa (abbiamo visto nella Sez. 2 che la trasformazione nucleare da H a ^4He e' la principale fonte di energia nelle stelle e nell'intero Universo), ma cosi' come e' prodotto e' altresì in gran parte distrutto (ad esempio tramite ad es. la famosa reazione $3\alpha \rightarrow ^{12}\text{C}$). Così' l'elevata ed universalmente costante abbondanza di ^4He risulterà a lungo inspiegata, sinche' negli anni '60 e '70 fu elaborata la teoria della nucleosintesi primordiale degli elementi leggeri, immediatamente confermata dalla scoperta della radiazione primordiale.

La condizione di equilibrio termodinamico quasi perfetto testimoniata dalle osservazioni spettrali e dalla distribuzione angolare della radiazione CMB si e' mantenuta durante l'intera era cosmica precedente la ricombinazione, vi sono tutti i motivi per ritenere che questa condizione fosse verificata anche in epoche antecedenti il primo secondo dopo il Big Bang. Questo puo' essere facilmente dimostrato considerando l'evoluzione del tempo-scala di collisione τ_{coll} rispetto al tempo di vita dell'Universo τ_H , che a sua volta e' all'incirca il tempo dinamico caratteristico dell'espansione τ_{dyn} . Abbiamo infatti:

$$\tau_{\text{dyn}} \sim \frac{1}{(G\rho)^{1/2}} \propto R(t)^2 \propto t, \text{ poiche' } \rho(t) \propto R(t)^{-4} \text{ e } R(t) \propto t^{1/2},$$

che appunto coincide con l'andamento del tempo di espansione di Hubble:

$$\tau_H \sim H(t)^{-1} = \frac{R(t)}{\dot{R}(t)} = \frac{t^{1/2}}{(2t^{1/2})^{-1}} \propto t.$$

Il tempo-scala di interazione tra le varie componenti del fluido cosmico sara' invece

$$\tau_{\text{coll}} \sim \frac{1}{n\sigma c} \propto \rho(t)^{-1} \propto R(t)^3 \propto t^{1.5}$$

poiche' la sezione d'urto d'interazione σ (ben approssimabile ad esempio con la sezione di Thomson σ_T) e' dominata dalla micro-fisica e non risente dell'espansione. Avremo dunque complessivamente

$$\frac{\tau_{coll}}{\tau_H} = \frac{\tau_{coll}}{\tau_{dyn}} \propto R(t) \propto t^{0.5}.$$

Siccome sappiamo che $\tau_{coll} < \tau_H$ alla ricombinazione, testimoniato dalla forma spettrale di corpo-nero della CMB, avremo $\tau_{coll} \ll \tau_H$ a qualunque istante di tempo antecedente, $t < t_{rec}$.

Questo risultato e' in perfetto accordo con l'evidenza discussa nella nota ⁽⁵⁾ che una radiazione di corpo nero mantiene questa caratteristica indipendentemente dal tempo cosmico.

In questo modo ogni particella elementare di massa m presente si e' trovata immersa in un bagno di fotoni in una condizione di perfetto equilibrio termodinamico: se la temperatura del fluido e' superiore a

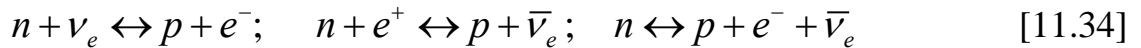
$$kT \approx mc^2, \quad [11.33]$$

una collisione tra fotoni e particelle (o tra i fotoni stessi! che a elevate energie e' significativa) e' in grado di creare una coppia formata dalla particella e dalla sua anti-particella. Allo stesso modo una coppia particella anti-particella si puo' annichilire dando origine ad un fotone energetico ⁷. In media i processi di creazione e distruzione si compensano e mantengono cosi' l'equilibrio termodinamico. Ad un certo punto, al diminuire della temperatura per espansione adiabatica, vengono a mancare i fotoni energetici che creano le particelle, mentre quelle esistenti a quell'epoca si annichilano reciprocamente, se sono sufficientemente numerose per unita' di volume da potersi incontrare con sufficiente frequenza. La temperatura alla quale questo avviene e' chiamata *temperatura critica*. Sulla base di queste considerazioni, elenchiamo dunque nel seguito le principali fasi che portano alla nucleo sintesi.

- Con riferimento allo schema attuale semplificato delle particelle elementari menzionato in Sez. 1 (nota 3), dalla [11.33] la temperatura critica alla quale gli adroni si disaccoppiano dal fluido cosmico e' $T \sim 10^{13}$ °K: i tempi cosmici precedenti questa fase, ossia $t < 10^{-6}$ sec da eq. [11.32], vanno sotto il nome di *era adronica* (era delle particelle pesanti). In epoche successive a $t < 10^{-6}$ sec rimane un piccolo residuo di neutroni e protoni.
- Quella che segue e' chiamata *era leptonica* (era delle particelle leggere). L'equilibrio tra le due componenti adroniche rimanenti a quest'epoca, quella dei neutroni e quella dei protoni, e' mantenuto tramite le reazioni (regolate dalle cosiddette interazioni *deboli*, che fanno parte dei 4 tipi di interazioni

⁷ Non entriamo nel dettaglio a discutere del processo di creazione/distruzione di coppie di particelle e fotoni. Registriamo solo che questo processo e' perfettamente consistente con i concetti di conservazione di momento, massa/energia, carica elettrica, ecc.

fondamentali, tra cui le interazioni *forti* nei nuclei atomici, le *elettromagnetiche*, e le *gravitazionali*):



- A causa tuttavia della differenza di massa tra neutroni e protoni ($\Delta m = 1.3$ MeV di differenza di massa a riposo), al diminuire della temperatura l'equilibrio si sposta progressivamente a favore dei protoni, secondo la legge (ottenibile facilmente dalla legge di Boltzmann che regola l'equilibrio della reazioni [11.34]):

$$N_n / N_p = \exp(-\Delta m \cdot c^2 / kT) = \exp(-1.5 \cdot 10^{10} / T). \quad [11.35]$$

- Tra $T = 10^{10}$ e $T = 5 \cdot 10^9$ K, corrispondente ad un intervallo di tempo compreso tra 1 sec e 4 sec dal Big Bang, si annichilano prima i neutrini e gli anti-neutrini, e poi gli elettroni con gli anti-elettroni. Al termine dell'era leptonica, ovvero quando la maggior parte dei leptoni si sono annichiliti, vengono meno le particelle che concorrono alla [11.34], cosicche' il rapporto tra neutroni e protoni si congela al valore dato da [11.35]. In seguito, un solo processo si verifica in grado di modificare ulteriormente il rapporto N_n/N_p , ovvero il decadimento β dei neutroni: $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$, che avviene con un ritmo temporale ben definito $N_n \propto \exp(-t / 886 \text{ sec})$.
- Al momento del disaccoppiamento dei neutrini a $T = 10^{10}$ K, avremo da [11.35]: $N_n / N_p \simeq \exp(-1.5 \cdot 10^{10} / 10^{10}) \simeq 0.2$ cosicche' da quel momento in poi la frazione di neutroni evolvera' secondo la legge

$$\frac{N_n}{N_n + N_p} = \frac{0.2}{1.2} \exp(-t / 886 \text{ sec}) \simeq 0.16 \exp(-t / 886 \text{ sec}) \quad [11.36]$$

- Come si vede, i neutroni sono a questo punto a rischio di sparire completamente in tempi di una quindicina di minuti. Tuttavia, alla temperatura di un miliardo di gradi, $T = 10^9$ K, iniziano a verificarsi le condizioni di densita' e temperatura adatte al verificarsi del bruciamento nucleare che porta alla fusione di 2 protoni con 2 dei neutroni residui in un nucleo di elio ed altri nuclei leggeri. Da [11.32] questa temperatura si verifica circa 3 minuti dopo il Big Bang. In questo modo tutti i neutroni presenti vengono inglobati nei nuclei di elio e pochi altri, nuclei nei quali essi rimangono stabili nel tempo per una durata illimitata.
- Il processo di fusione termonucleare primordiale si verifica con modalita' in realta' un po' piu' complesse che non il semplice scontro e fusione di $2p + 2n$, dal momento che il plasma e' gia' alquanto rarefatto e la densita' di particelle e' molto bassa [$\rho_{3 \text{ min}} \simeq \rho_0 \cdot (4 \cdot 10^8)^3 \simeq 10 \text{ g/m}^3$], troppo bassa perche' si verifichi con sufficiente frequenza uno scontro di 3-4 particelle

simultaneamente. La nucleo-sintesi in realta' procede attraverso una sequenza di urti e fusioni a 2-corpi (che sono molto piu' probabili), del tipo:



(2D simboleggia il Deuterio, un nucleo con 1 p^+ e 1 n).

- La reazione che limita la produzione di elio e' quella che produce il deuterio D (la prima in [11.37]), in quanto questo nucleo ha un debole legame che viene facilmente spezzato da fotoni di 2.2 MeV ($T \sim 2.5 \cdot 10^{10} \text{ }^\circ\text{K}$): solo a temperature del plasma sufficientemente piu' basse il deuterio comincia a rimanere stabile. Per la precisione, reazioni di sintesi del D avvengono anche a temperature molto maggiori, ma in presenza di un elevatissimo numero di fotoni energetici il deuterio viene piu' efficacemente distrutto che creato. La temperatura del fluido cosmico a cui il D comincia a sopravvivere in quantita' notevoli ed accumularsi e' calcolabile con la stessa procedura con la quale abbiamo stimato l'epoca della ricombinazione, eq. [11.20]. Nel caso attuale, la catena nucleo-sintetica [11.37] potra' dunque cominciare a procedere - e lo fara' molto rapidamente - a $T \sim 2.5 \cdot 10^{10}/26 \text{ }^\circ\text{K} \sim 10^9 \text{ }^\circ\text{K}$ (vedi eq. [11.20]).
- Importante sottolineare il fatto che non esistono nuclei stabili con numero atomico 5 e 8 . Cosi', una volta prodotto l'elio (un nucleo molto stabile, gas nobile, con energia di legame nucleare di ben 28 MeV), praticamente la nucleo-sintesi si arresta, poiche' in pochi casi ulteriori reazioni nucleari sono in grado di trasformare l'elio in elementi piu' pesanti: tra questi, solo il litio ${}^7\text{Li}$ e il ${}^7\text{Be}$ vengono prodotti in tracce significative (vedi Figura 6 piu' avanti).
- Praticamente si puo' considerare che la nucleo-sintesi primordiale termini quando la temperatura del plasma e' diminuita al punto da non permettere ulteriori reazioni importanti. Nel seguito, plasma di idrogeno ed elio, con modeste tracce di altri elementi, si raffredda assieme ai fotoni. Per effetto del forte accoppiamento dovuto all'elevata sezione d'urto σ_T , le temperature delle due componenti rimangono identiche fino alla ricombinazione, quando si verifica il loro disaccoppiamento.

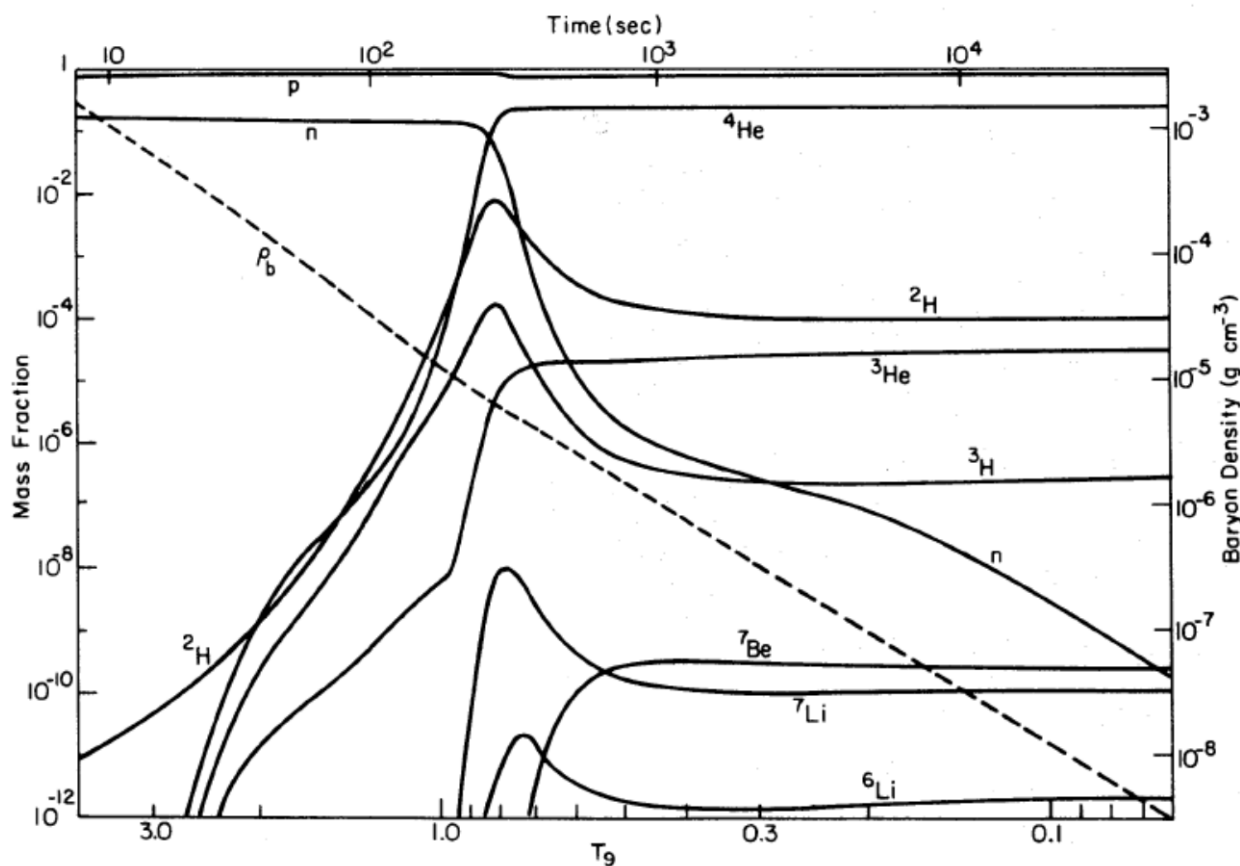


Figura 4

Schema riassuntivo del processo di sintesi degli elementi leggeri nell'Universo primordiale. Il tempo cosmico procede da sinistra a destra.

Asse a SX: frazione di massa; asse a DX: densita'; asse in alto: tempo cosmico in sec; asse in basso: temperatura del fluido cosmico in miliardi di gradi.

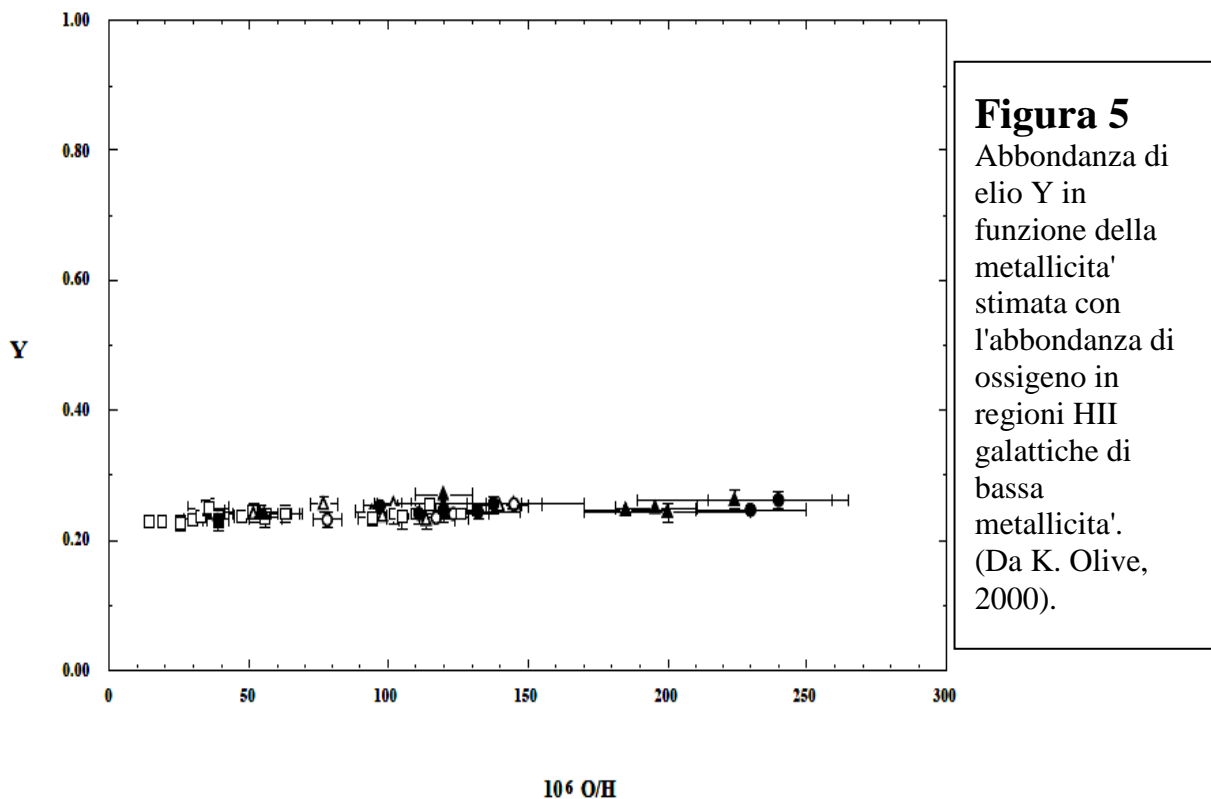
Vengono seguite varie specie di nuclei (da notare che il deuterio ^2D e' qui indicato con ^2H). Figura tratta dal lavoro di Wagoner (1973 ApJ 179), sulla base di una teoria elaborata da Wagoner, Fowler e Hoyle nel 1967, poco dopo la scoperta della radiazione fossile nelle microonde.

11.7 Predizioni della nucleosintesi primordiale. Confronto con i dati.

L'abbondanza di elio primoriale. La teoria della nucleo-sintesi primordiale, elaborata per la prima volta in modo esauriente da Wagoner, Fowler e Hoyle nel 1967, e' stata studiata da vari autori in tutti i possibili dettagli, anche utilizzando elaborati codici numerici. Il processo di nucleo-sintesi e' riassunto efficacemente nella Figura 4, secondo il calcolo numerico di Wagoner et al. Da questa emerge che la nucleo-sintesi puo' essere considerata conclusa una quindicina di minuti dopo il Big Bang.

Una volta assunto il modello standard del Big Bang caldo, la teoria e' in grado di predire in modo inequivocabile l'abbondanza di elio ${}^4\text{He}$ prodotta, che puo' essere confrontata con i dati osservativi. La predizione sull'abbondanza finale di elio e' molto facilmente calcolabile utilizzando la [11.36]: a circa 200 sec, tempo cosmico corrispondente ad una temperatura di poco meno di 10^9 °K, ovvero quando il Deuterio comincia a sopravvivere, e che, secondo la Fig. 4, e' il momento in cui e' massima l'attivita' di nucleo-sintesi, la frazione in massa di neutroni X_n e' pari a

$$X_n \equiv \frac{N_n}{N_n + N_p} \simeq 0.16 \exp(-200 / 886 \text{ sec}) \simeq 0.125 ,$$



mentre l'abbondanza in massa di elio ${}^4\text{He}$ sara' semplicemente il doppio di questa, poiche' nel nucleo sono presenti anche due protoni di massa circa eguale a quella dei due neutroni. La predizione e' quindi che dal Big Bang emerge un'abbondanza in massa di ${}^4\text{He}$, che si indica con il simbolo X_{He} oppure con il parametro Y , pari a ⁸

$$Y = X_{\text{He}} \equiv \frac{N_{\text{He}}}{N_{\text{He}} + N_{\text{H}}} = 2X_n \simeq 0.25 \quad [11.38]$$

⁸ Ove questo non risultasse chiaro, si consideri il seguente semplice calcolo. Dato X_n da [11.36], poiche' il num. di protoni e' $X_{\text{H}} + 2X_{\text{He}}$ mentre il num. neutroni e' $2X_{\text{He}}$, con $X_{\text{H}} + 4X_{\text{He}} = 1$, avremo $X_n = 2X_{\text{He}} / (2X_{\text{He}} + X_{\text{H}} + 2X_{\text{He}})$. Cosi' per l'abbondanza in numero di n si avra' $X_n = 2X_{\text{He}} / (1 - 4X_{\text{He}} + 4X_{\text{He}}) = 2X_{\text{He}}$, ovvero $X_{\text{He}}(\text{num}) = X_n / 2$ in numero, mentre in massa $X_{\text{He}}(\text{massa}) = 4 X_n / 2 = 2X_n$.

e corrispondentemente un'abbondanza in numero di atomi di ${}^4\text{He}$ pari a

$$n_{\text{He}} \equiv \frac{n_{\text{He}}}{n_{\text{He}} + n_{\text{H}}} \simeq 0.125 / 2 \simeq 0.06 .$$

Da un punto di vista osservativo, l'elio puo' essere osservato in stelle di alta temperatura (righe dell'elio sono osservabili nell'UV) e nelle regioni HII. Siccome l'elio e' parzialmente prodotto anche dalle stelle nel corso della loro evoluzione (vedi sopra), e' importante valutare quanto dell'elio osservato e' dovuto alle stelle. L'analisi prevede quindi di studiare regioni HII dove il plasma risenta minimamente dell'attivita' stellare, cosa che si puo' inferire dalla quantita' di elementi pesanti (metalli) presenti e facilmente osservabile nelle righe d'emissione. La Fig. 5 mostra la dipendenza dell'abbondanza in massa dell'elio Y in funzione della metallicita' del plasma espressa come abbondanza di ossigeno: si vede che l'estrapolazione a zero metallicita' produce un valore

$$Y \simeq 0.238 \pm 0.005, \quad [11.39]$$

che dunque corrisponde all'abbondanza in massa dell'elio indipendente dalla (e precedente la) attivita' stellare. La [11.39] esprime un risultato spettacolarmente consistente con le predizioni della nucleo-sintesi primordiale [11.38].

Un primo risultato cruciale della teoria della nucleo-sintesi primordiale ha riguardato quindi un test fondamentale della teoria del Big Bang caldo. Si tratta di un test che non ha nessun parametro libero, si basa esclusivamente sul numero di fotoni oggi osservati nella radiazione CMB e sulla sua temperatura, nonche' sulle sezioni d'urto che stabiliscono le probabilita' delle interazioni di sintesi termo-nucleare in [11.37] e quelle relative alle interazioni deboli in [11.34], che sono ricavabili nei laboratori di fisica. In questo modo eventi occorsi nell'Universo ben prima della ricombinazione divengono verificabili.

Le abbondanze degli altri elementi leggeri. Il Deuterio. La densita' di barioni. Il grande interesse per la teoria della nucleo-sintesi primordiale non si limita ad un test del Big Bang. Essa fornisce in realta' altre informazioni sulla struttura dell'Universo. In particolare si e' verificato che l'abbondanza di Deuterio e Litio dipendono fortemente dalla densita' di plasma all'atto della nucleo-sintesi. In particolare, una elevata densita' di plasma fa si' che le reazioni nucleari in [11.37] procedano con la massima efficienza nel convertire dapprima tutti i neutroni presenti in deuterio, poi tutto il deuterio formato in elio. Viceversa, una bassa densita' di plasma comporta una bassa probabilita' di interazione tra nuclei, che essenzialmente lascia una certa quantita' di ioni di deuterio e ${}^3\text{He}$ che non hanno potuto interagire e che quindi sono rimasti incombusti da quelle epoche. Una misura delle abbondanze di questi elementi in siti astrofisici incontaminati produce quindi una misura della densita' di barioni presenti a quell'epoca e, siccome la densita' comovente si e' conservata, la densita' totale media nell'Universo oggi. Analogamente e' il destino del ${}^3\text{He}$, anch'esso in diminuzione al crescere della densita' barionica.

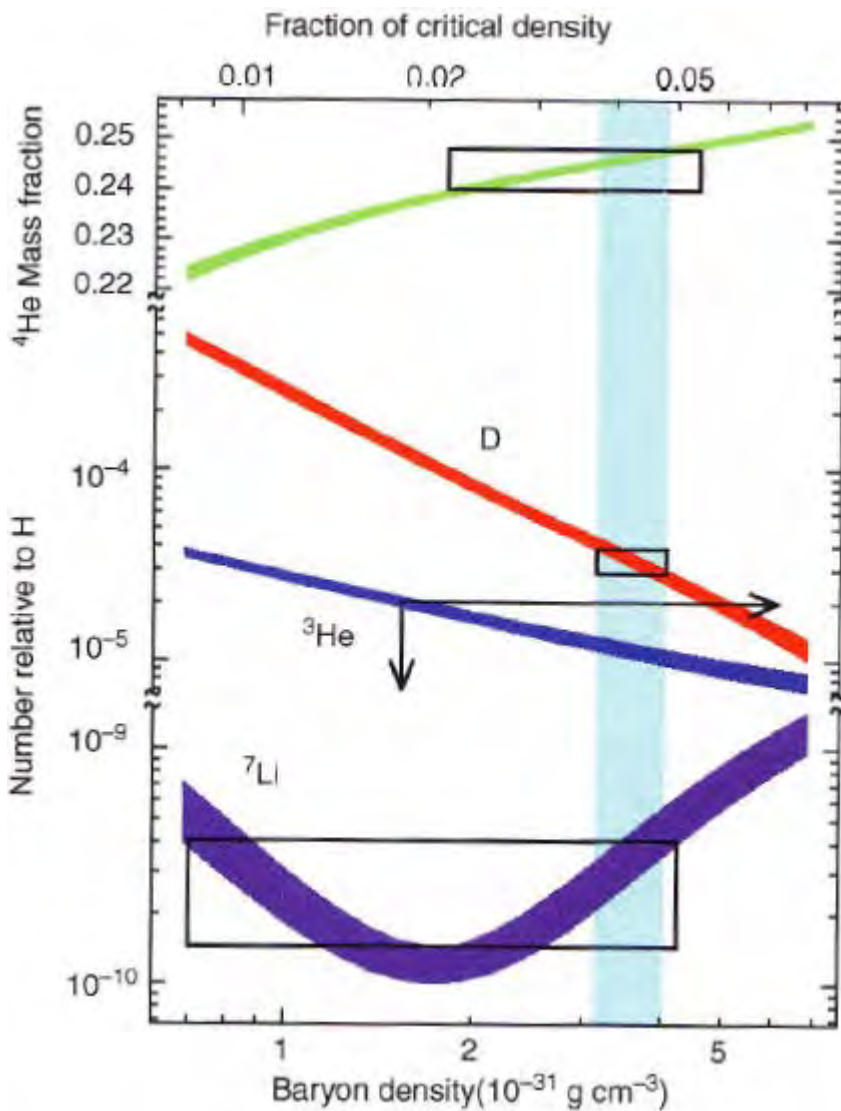


Figura 6

Dipendenza delle abbondanze di elio ^4He , deuterio D, ^3He e Litio ^7Li dalla densita' di plasma durante la nucleosintesi primordiale.

(Da Schneider, *Extragalactic Astrophysics & Cosmology*)

Una misura dell'abbondanza di Deuterio e' particolarmente vincolante da questo punto di vista, e fornisce come risultato una densita' di barioni pari a

$$\Omega_b \approx (0.041 \pm 0.002) \left(\frac{H_0}{71 \text{ Km} / \text{s} / \text{Mpc}} \right)^{-2}. \quad [11.40]$$

La cosmologia fornisce cosi' la piu' potente misura della quantita' totale di *materia normale*, o materia barionica, che risulta quasi un fattore 10 superiore alla quantita' totale di gas condensato in stelle che abbiamo precedentemente stimato (Sez. 3). Una delle problematiche fondamentali della cosmologia osservativa e' provare questa previsione e identificare ove questo gas, o plasma, risieda. Si ritiene oggi si tratti di plasma a bassa densita' e temperatura attorno a 100.000 gradi, molto difficilmente osservabile con gli strumenti X attuali.

11.8 Breve sguardo d'insieme sui primi istanti dell'Universo.

Figura 7 riporta un sintetico riassunto delle principali fasi evolutive dell'Universo. Come si vede, da un punto di vista dei processi fisici coinvolti, vi e' grande quantita' di eventi occorsi durante il primo secondo dal Big Bang. E' l'era cosmica piu' ricca di avvenimenti fisici di tutta la storia evolutiva dell'Universo.

L'andamento illustrato in Fig. 7 e' chiaramente logaritmico anziche' lineare con il tempo, nel senso che sempre meno succede per unita' di tempo procedendo con t , e sempre piu' invece avviene andando verso il Big Bang.

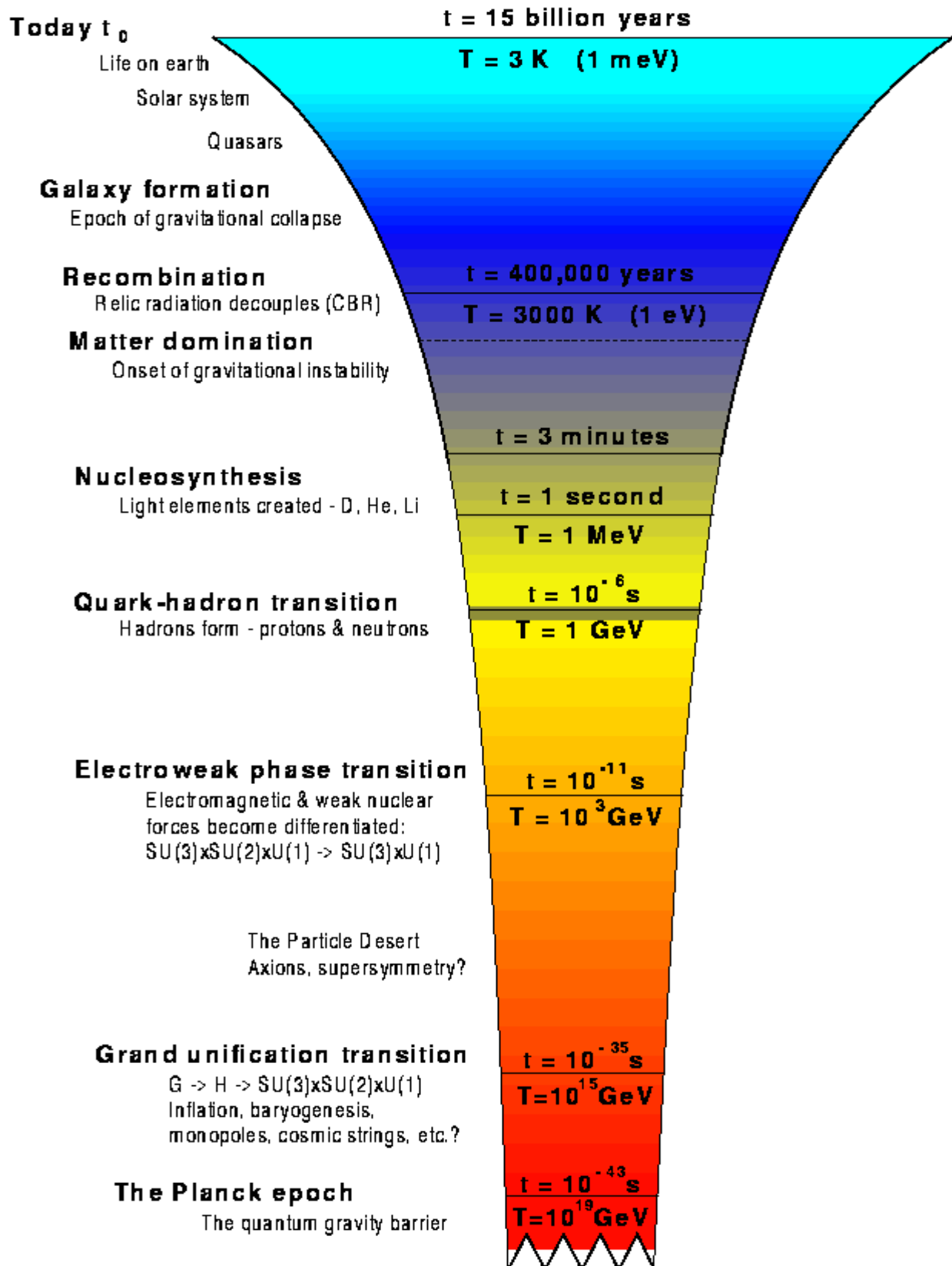


Figura 7

Principali fasi evolutive dell'Universo dopo il Big Bang. Il colore indica la temperatura del fluido cosmico, che diverge assieme agli altri parametri termodinamici alla base del grafico.

12. NUCLEI GALATTICI ATTIVI.

12.1 Principali categorie di Galassie Attive e Nuclei Galattici Attivi

Le popolazioni di sorgenti cosmiche principalmente considerate sinora riguardano le cosiddette galassie normali, essenzialmente oggetti la cui fenomenologia è interpretabile fundamentalmente come dovuta alla presenza di popolazioni stellari di diversa età e composizione chimica. Sappiamo che le galassie normali costituiscono la popolazione di gran lunga maggioritaria tra le sorgenti cosmiche nell'universo locale (al tempo cosmico attuale t_0). Pur trattandosi di oggetti che possono essere alquanto massivi (sino a $10^{12} M_{\odot}$), tipicamente non sono molto luminosi (in media non più luminosi di $10^{11} L_{\odot} \sim 10^{44}$ erg/sec). Per questo motivo le galassie normali sono risultate rivelabili solo sino a moderate distanze cosmiche, salvo negli ultimi anni grazie al potenziamento degli strumenti e delle tecniche osservative.

Per vari decenni, a partire dagli anni '60, gli unici oggetti rivelabili fino alle più grandi distanze spazio-temporali appartenevano ad una diversa categoria di sorgenti cosmiche, che non traggono la loro energia dal bruciamento term nucleare in stelle. Questi sono i ***Nuclei Galattici Attivi***, per i quali usiamo l'acronimo AGN. Le galassie che li ospitano sono dette ***galassie attive***. Per questo motivo le Galassie Attive hanno giocato un ruolo decisivo nello sviluppo della cosmologia osservativa, oltre che costituire uno dei temi più importanti dell'astrofisica extragalattica e dell'Astrofisica delle Alte Energie.

Noi ci soffermeremo su aspetti di particolare interesse cosmologico degli AGN, rimandando ai corsi della Laurea Magistrale per vari ulteriori approfondimenti e aspetti riguardanti i processi fisici che si verificano nei nuclei.

A prima vista l'interesse cosmologico delle Galassie Attive come popolazione sembrerebbe modesto. Nell'universo vicino infatti esse costituiscono una piccola frazione delle galassie normali, come di seguito riassunto.

Esistono tre principali categorie di Galassie Attive e AGN:

1. galassie con eccesso d'emissione infrarossa selezionate in particolare nel lontano IR, le galassie luminose (LIRG), ultra-luminose (ULIRG) e iper-luminose (HYLIRG): le 3 classi hanno luminosità bolometriche $>10^{11} L_{\odot}$ (LIRG), $>10^{12} L_{\odot}$ (ULIRG), $>10^{13} L_{\odot}$ (HYLIRG);
2. nuclei attivi radio-quieti (tipo quasar ottici e galassie di Seyfert);
3. nuclei attivi radio-brillanti (tipo le radiogalassie e i quasar radio).

Le caratteristiche di queste diverse categorie e cenni ai processi fisici che ne spiegano le fenomenologie sono oggetto di questa sezione.

Lo studio delle funzioni di luminosità locali mostrano che nell'universo locale:

- a. galassie LIRG, ULIRG e galassie con violenta attivita' di formazione stellare (*starburst*) costituiscono circa il 10% delle galassie normali;
- b. gli AGN radio-quieti costituiscono il 10% delle galassie starburst (e ~1% delle normali);
- c. gli AGN radio-brillanti sono il 10% dei radio-quieti (e 1% delle normali).

Cio' vale nell'universo locale. Ma come abbiamo gia' in parte visto, uno dei risultati della cosmologia osservativa e' stato mostrare che le Galassie Attive hanno costituito una ben piu' importante componente cosmologica nel lontano passato dell'universo, laddove la densita' di energia radiante da loro prodotta era ordini di grandezza superiore a quanto prodotto oggi.

12.2 Nuclei Galattici Attivi Radio-emittenti: le Radiogalassie

Le radiogalassie, scoperte dall'applicazione delle tecniche di indagine radar sviluppate durante la II guerra mondiale all'astronomia, hanno costituito la prima evidenza di rilevanti emissioni non-termiche da parte di sorgenti astrofisiche e dell'esistenza di fenomeni di alta energia nel cosmo.

Le prime osservazioni alla fine degli anni '40 sono state seguite dalle prime identificazioni ai primi anni '50. Baade & Minkowski (1954) identificano per primi Cigno A¹ con una galassia lontana a 250 Mpc. In seguito, la radiosorgente Centauro A e' stata associata alla galassia ellittica peculiare NGC 5128, Virgo A con la galassia super-gigante M87, Perseus A con NGC 1275. Le posizioni nel cielo di queste radiosorgenti brillanti sono indicate in Fig.1, mentre l'immagine radio di una famosa radiosorgente e' mostrata in Fig.2.

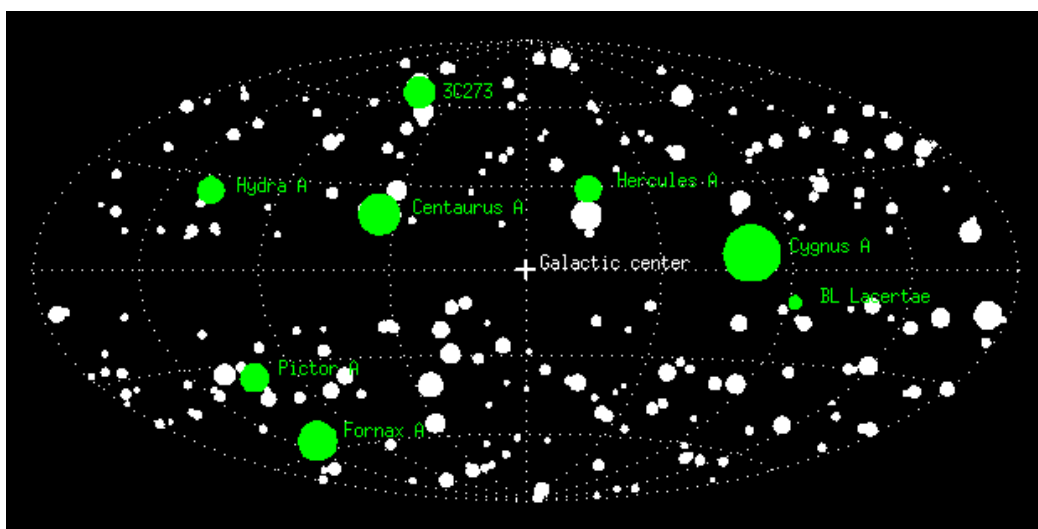


Figura 1. Posizione nel cielo delle prime e piu' brillanti radiosorgenti scoperte.

¹ Le denominazioni delle prime radiosorgenti scoperte utilizzavano il nome della costellazione nella quale erano identificate, seguite da una sequenza di simboli alfabetici in funzione decrescente del flusso.

Che queste emissioni siano da interpretare come dovute a fenomeni coinvolgenti particelle non-termiche e' indicato dagli enormi valori della temperatura di brillantezza T_B ottenuti da queste osservazioni. T_B e' la temperatura che dovrebbe avere un corpo nero per emettere con quella brillantezza superficiale:

$$T_B = \frac{c^2 I_\nu}{2k\nu^2} \quad [12.1]$$

Ginzburg (1952) e Schlofskij (1952) per primi hanno fornito l'interpretazione di queste emissioni radio come dovute a radiazione di sincrotrone da elettroni ultra-relativistici in un campo magnetico debole.

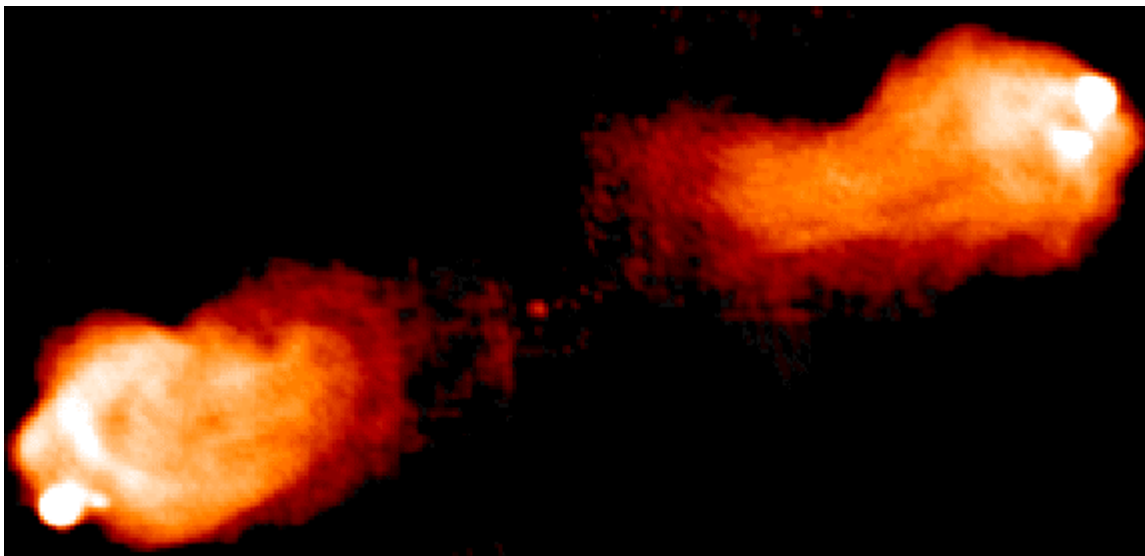


Figura 2. This image is a radio map (at a wavelength of 22cm) of the powerful radio galaxy Cygnus A, produced from observations at the [Very Large Array](#) by John Conway and [Philip Blanco](#) in March 1994. The 2 x 1 arcminute image shows Cygnus A's famous double radio lobes, spanning over 500,000 light years.

12.3 Emissione non-termica di sincrotrone

E' il caso limite di una emissione di ciclotrone per elettroni relativistici. La ciclotrone e' dovuta al moto spiraleggiante di una particella non-relativistica entro un campo magnetico B , che ruota con frequenza qB/mc , ove q e m sono la carica elettrica e la massa della particella. Questa emissione e' a righe, con frequenza $\nu=2\pi qB/mc$. Tale emissione cambia radicalmente natura se la particella che emette diventa relativistica, a causa delle trasformazioni di Lorentz che operano rispetto ad un osservatore a riposo ².

Potenza totale. L'energia totale della particella per un osservatore diviene cosi' $E=\gamma mc^2$, con γ fattore di Lorentz della particella rispetto all'osservatore. Per la

² Rimandiamo al corso di Astrofisica II per tutti i dettagli.

trasformazione indotta dal moto, la potenza totale emessa dalla particella nel sistema di riferimento dell'osservatore diventa

$$P = \frac{4}{3} \sigma_T c \beta^2 \gamma^2 U_B \quad [12.2]$$

con $U_B = B^2/8\pi$ densita' di energia del campo magnetostatico.

Frequenza caratteristica dell'emissione. Essa dipende molto fortemente dall'energia della particella emittente nel caso del sincrotrone (mentre dipende solo dall'intensita' del campo B nel caso del ciclotrone). Questa forte dipendenza e' dovuta alla distribuzione angolare della radiazione emessa da una particella relativistica in un sistema K' osservata da un osservatore nel sistema K , come illustrato nel grafico di Fig. 3 qui sotto. L'asse x in figura definisce la direzione del vettore velocita' della particella rispetto all'osservatore: nel sistema dell'osservatore la radiazione e' vista essere emessa con angolo α piccolo e circa eguale a $\alpha \sim 1/\gamma$: maggiore e' l'energia della particella, piu' piccolo e' l'angolo d'emissione.

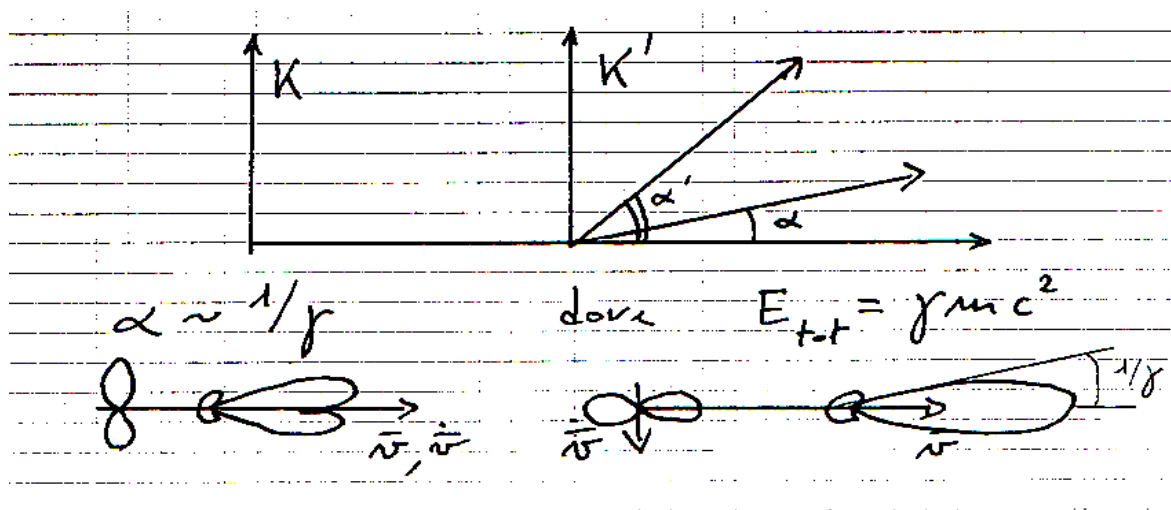


Figura 3. Andamento angolare dell'emissione per effetto della trasformazione di Lorenz: l'emissione isotropa nel sistema di riferimento K della particella viene "beamata" nel sistema dell'osservatore K' .

Cio' ha una immediata conseguenza per quanto riguarda la frequenza della radiazione emessa: piu' piccolo e' α , piu' breve il tempo di illuminamento dell'osservatore da parte della particella durante la sua obita circolare, piu' breve quindi il periodo d'emissione, e piu' elevata infine la frequenza caratteristica:

$$\nu_c = \frac{3}{2} \gamma^2 \nu_{ciclotrone}, \quad \nu_{ciclotrone} = 2\pi \frac{qB}{mc} \quad [12.3]$$

Lo spettro del singolo impulso della singola particella, illustrato nella Figura 4, risulta fortemente piccato attorno alla frequenza critica ν_c .

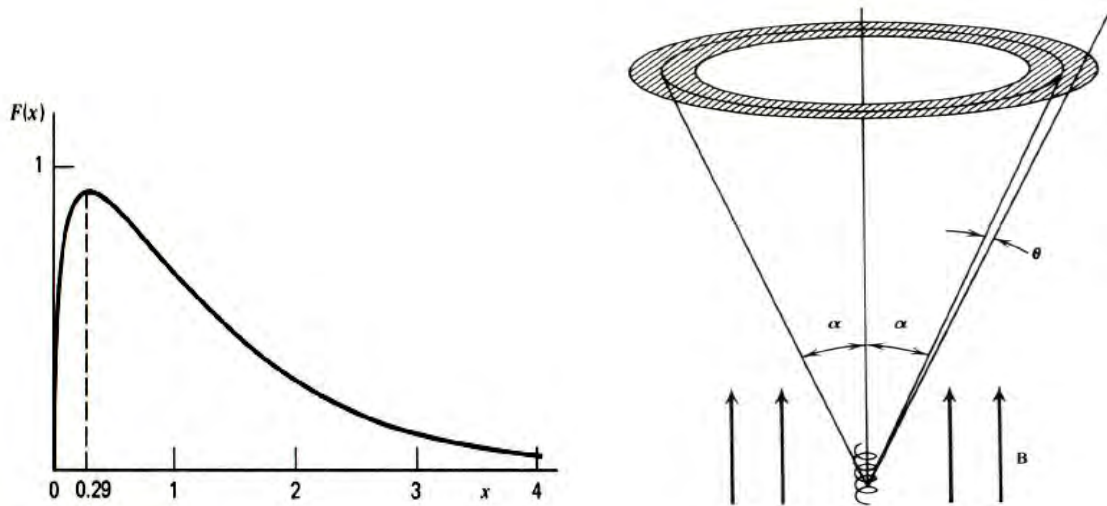


Figura 4. SX: spettro d'emissione del singolo impulso della singola particella, in funzione del rapporto x tra frequenza ν e frequenza critica ν_c . DX: cono d'emissione della singola particella, ove e' indicata la visuale e la direzione del campo magnetico. In conseguenza della geometria dell'emissione, la luce di sincrotrone risulta polarizzata in modo lineare lungo la direzione del vettore velocita' (ossia lungo il cono indicato a DX).

Spettro d'emissione da parte di un insieme di particelle. Se la distribuzione di energia ϵ delle particelle e' a legge di potenza:

$$N(\epsilon)d\epsilon = Cost \cdot \epsilon^{-p} d\epsilon \quad [12.4]$$

$$N(\gamma)d\gamma = Cost \cdot \gamma^{-p} d\gamma$$

allora l'emissione di sincrotrone e' pure a legge di potenza con indice spettrale

$\alpha_r = \frac{p-1}{2}$, $S(\nu) \propto \nu^{-(p-1)/2}$. Valori tipici dell'indice in energia p sono compresi tra 2 e 3. L'indice spettrale radio e' atteso quindi assumere valori attorno a 0.7.

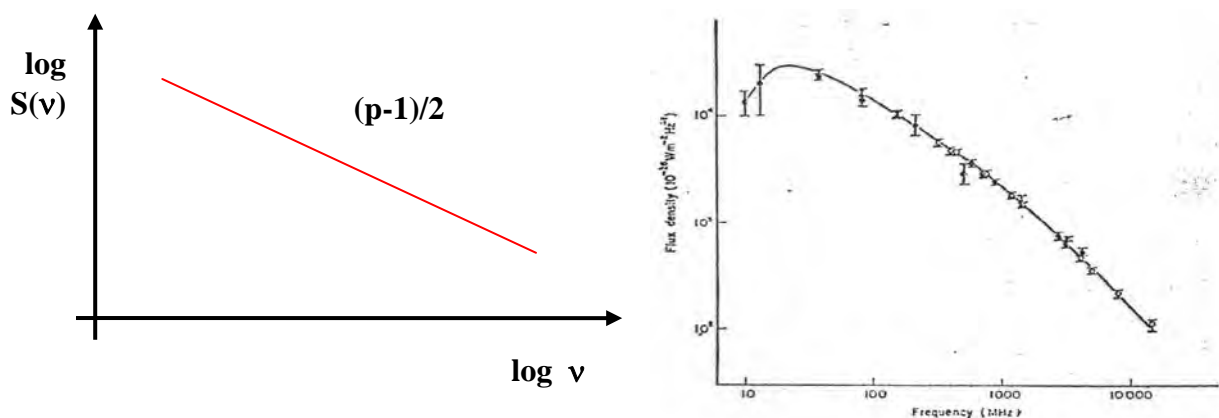


Figura 5. a) Spettro d'emissione per una distribuzione a legge di potenza di particelle emittenti. b) Spettro osservato per una radiosorgente, che mostra l'andamento a legge di potenza e la convergenza alle basse frequenze dovuta all'auto-assorbimento.

Auto-assorbimento di sincrotrone. Se non vi sono tagli nella distribuzione in energia degli elettroni che influenzino lo spettro, potrà succedere che in determinate circostanze - ad es per alte densità di particelle - i fotoni emessi per sincrotrone vengano anche ri-assorbiti prima di uscire dalla sorgente. Ciò implica che la profondità ottica sia $\tau > 1$.

Se $\tau \gg 1$, possiamo estremizzare l'argomento, affermando che l'intensità del campo fotonico prodotto sia $I(\nu) = \text{flusso di energia radiante} \sim (\text{numero di stati indipendenti del campo fotonico}) \times (\text{energia media di ogni stato } \varepsilon)$. Dalla teoria dell'emissione di corpo nero, il primo fattore è dato da $n_s = 2\nu^2 / c^3$, mentre per calcolare ε possiamo considerare di essere in una situazione di equilibrio tra campo di radiazione e particelle emittenti. Il valore appropriato per ε è quello degli elettroni che sono in grado di emettere fotoni alla frequenza ν :

$$\varepsilon^2 \propto \gamma^2 \propto v_c \propto \nu$$

In totale quindi, in regime di auto-assorbimento, $\tau \gg 1$, lo spettro sarà:

$$S(\nu) \propto I(\nu) \propto \nu^2 \cdot \nu^{0.5} \propto \nu^{5/2}.$$

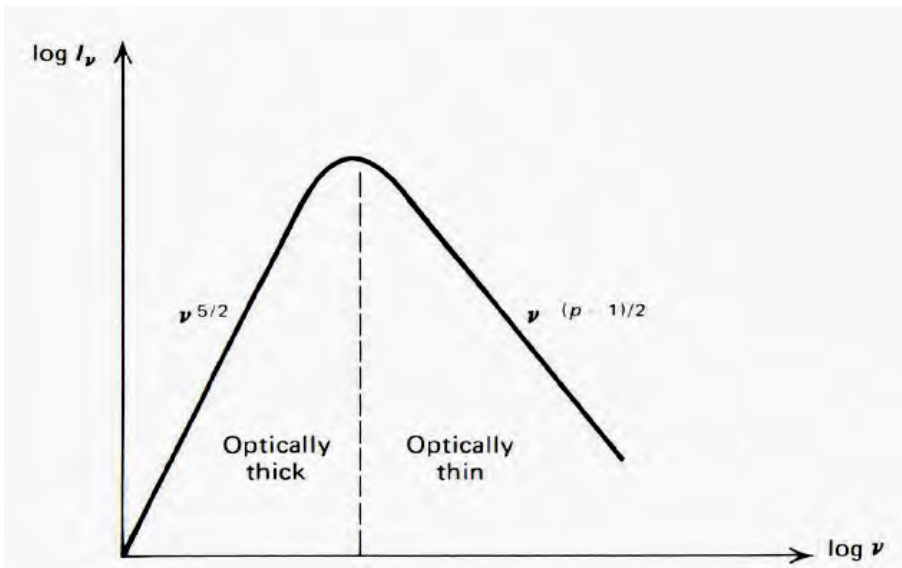


Figura 6. Spettro complessivo di sincrotrone, incluso l'autoassorbimento di sincrotrone alle basse frequenze.

Si verifica subito che il coefficiente di assorbimento α_ν per sincrotrone [definito dalla equazione del trasporto $dI(\nu) = \alpha_\nu I(\nu) ds$], è ottenibile dalla relazione della funzione sorgente $S(\nu) = j_\nu \alpha_\nu$ con $S(\nu) \sim \nu^{2.5}$, $j_\nu \sim \nu^{-(p-1)/2}$ da cui

$$\alpha_\nu \propto \nu^{-(p+4)/2} \quad [12.5]$$

che, considerando i valori tipici di p , mostra una forte dipendenza inversa dalla frequenza $\alpha_\nu \sim \nu^{3.5}$. Il significato di questo è che alti valori della profondità ottica, ovvero l'autoassorbimento, si verificano alle basse frequenze (Fig. 5 e 6).

Polarizzazione di sincrotrone. La componente di polarizzazione dominante e' lineare, come illustrato in Fig. 3 DX. Il grado di polarizzazione dipende dal grado di organizzazione del campo B. In condizioni ideali si arriva a valori del grado di polarizzazione lineare del 70%. Valori di qualche decina di % sono spesso osservati. Il piano di polarizzazione risulta, come intuitivo, ortogonale alla direzione della proiezione del campo B sulla sfera celeste. Studi della polarizzazione lineare permettono quindi di stabilire l'orientazione sulla sfera celeste del campo magnetico.

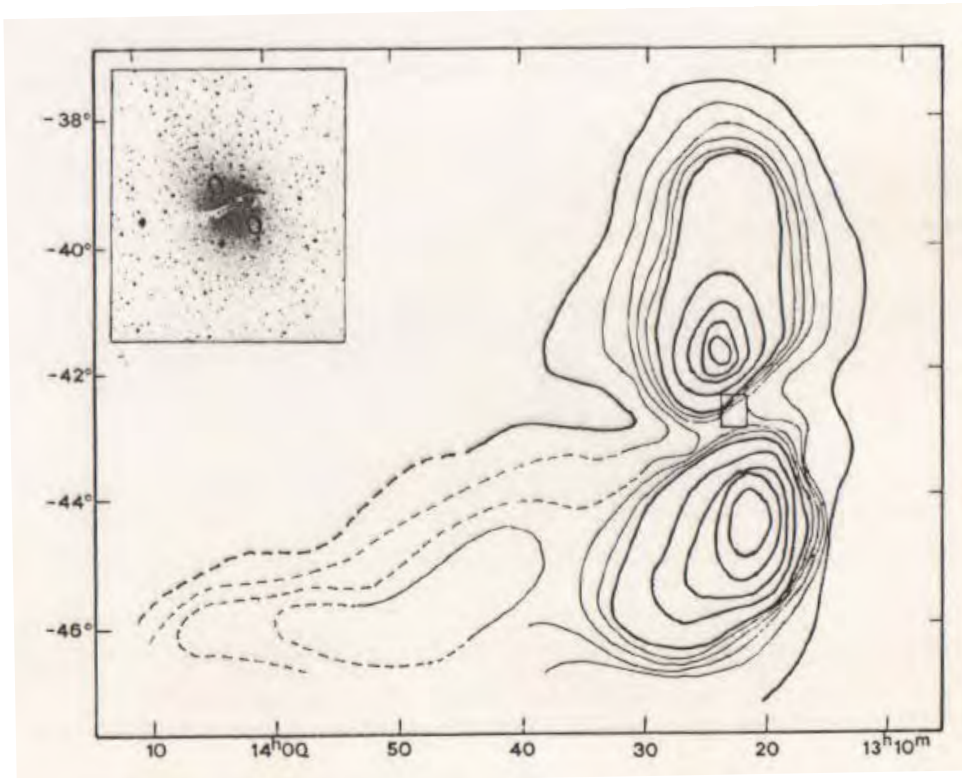


Figura 7. Contorni isofotali radio della radiogalassia Centauro A. L'immagine in quadrato e' un ingrandimento ottico della controparte ottica che si trova nel centro del sistema, e corrisponde alla galassie NGC5128.

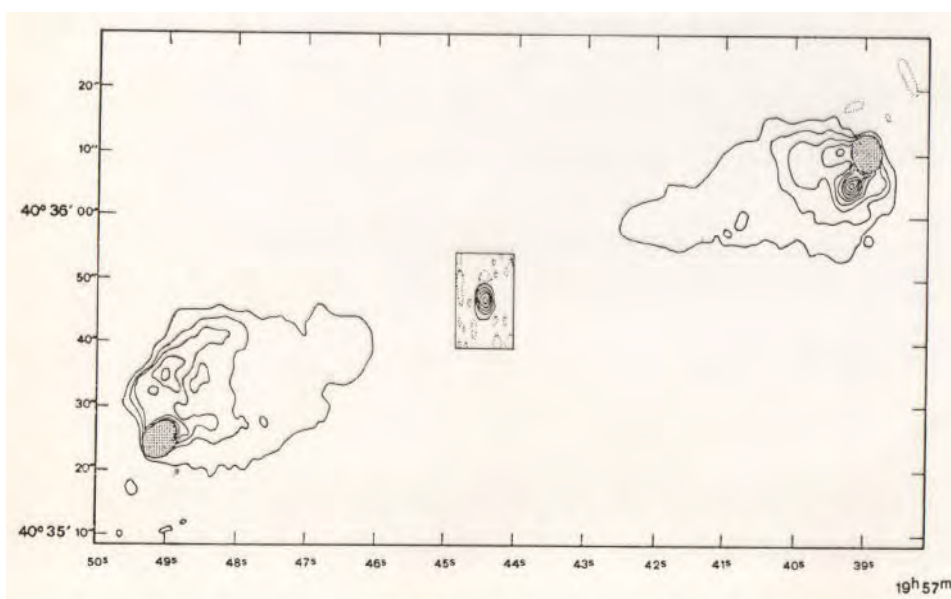


Figura 8. Contorni isofotali radio della radiogalassia Cigno A (vedi immagine radio in Fig.2).

12.4 Proprieta' morfologiche e spettrali delle radiogalassie

Alle basse frequenze radio ($\nu < 1$ GHz) dominano strutture di dimensioni enormi, a 2-lobi ben separate, con spettri radio a legge di potenza $S_\nu \propto \nu^{-\alpha_r}$, con $\alpha_r \sim 0.75 \pm 0.2$, α_r essendo l'indice spettrale radio (vedi un esempio reale in Fig. 5b), consistente quindi con quanto previsto dalla teoria del sincrotrone (Sez. 12.3).

Le morfologie radio delle radiosorgenti estese sono state classificate da Fanaroff-Riley:

1) Il *Fanaroff-Riley di tipo-I* corrisponde a radiosorgenti doppie con distribuzioni di brillantezza superficiale relativamente smussate e decrescenti verso i bordi (Fig. 7), dette "relaxed doubles".

2) Il *Fanaroff-Riley di tipo-II* sono radiosorgenti doppie con distribuzioni di brillantezza superficiale con margini esterni ad alta brillantezza superficiale ("hot spots"), e appaiono come sorgenti ben collimate (Fig. 8).

3) Radiosorgenti *peculiari*, tipo sorgenti a chioma ("head-tail", vedi Fig. 9), e in generale complesse. Queste peculiarita' sono ad esempio dovute al fatto che tali radiogalassie si trovino in ammassi di galassie: la presenza di un plasma caldo che permea l'ammasso induce un effetto di chioma all'emissione radio dovuta al moto della galassia ospite all'interno dell'ammasso.

La galassia ottica che costituisce la controparte della sorgente radio si colloca tipicamente al centro lungo una linea che collega i due radio-volumi. Pure spesso i due radio-volumi sono collegati alla sorgente compatta centrale da sottili ponti radio, detti *jets*. Alcuni di questi sono mostrati in Figure 9 e 10. Quasi sempre in prossimita' del centro di queste galassie si manifestano emissioni radio compatte. Tali componenti compatte mostrano spettri radio relativamente piatti, con indice spettrale radio $\alpha_r < 0.5$, e talvolta spettri invertiti ($\alpha_r < 0$).

Da notare che, nel caso delle radiogalassie e a differenza di quanto accade per quasar e galassie di Seyfert discusse in seguito, la galassia ospite risulta essere una galassia dei primi tipi morfologici, ossia una galassia ellittica o una S0.

Gli spettri piatti a loro volta sono di due tipi: *a*) spettri realmente piatti e a legge di potenza (corrispondenti a valori bassi dell'indice spettrale in energia $p \sim 1$) sono in particolare associati ad alcune categorie di radiosorgenti, i BL-Lac, o BLAZARs; *b*) spettri multi-componenti, con evidenze di auto-assorbimento in sistemi di nubi emittenti sincrotrone a diversa densita' di particelle (e quindi diversa profondita' ottica radio). In questo caso si hanno spettri complessivamente piatti, ma a molte componenti.

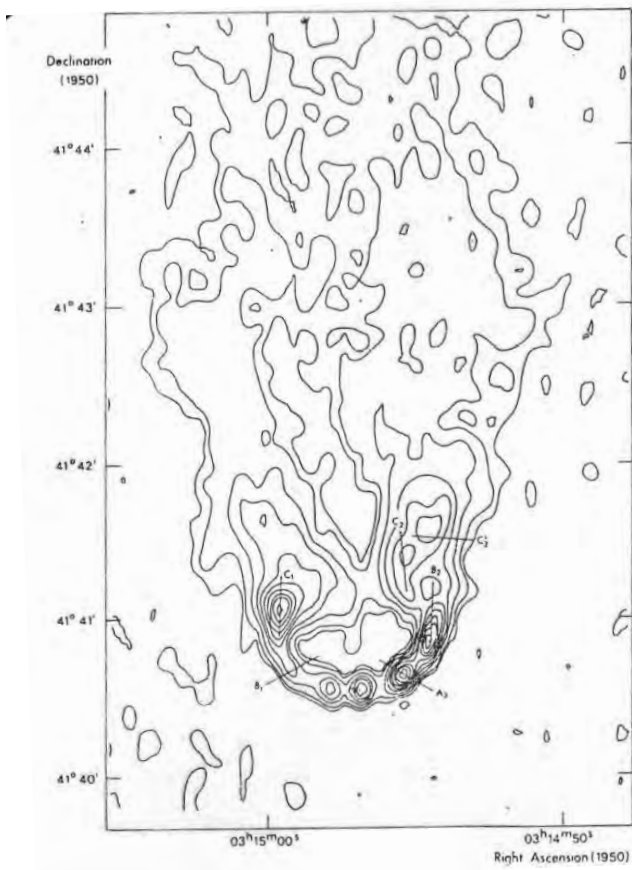


Figura 9. Mappa a 5 GHz del radiotelescopio di Westerbork della radiosorgente head-tail 3C83.1B (associata alla galassia NGC 1265), situata nell'ammasso del Perseo. DX: ingrandimento della zona includente la sorgente compatta centrale.

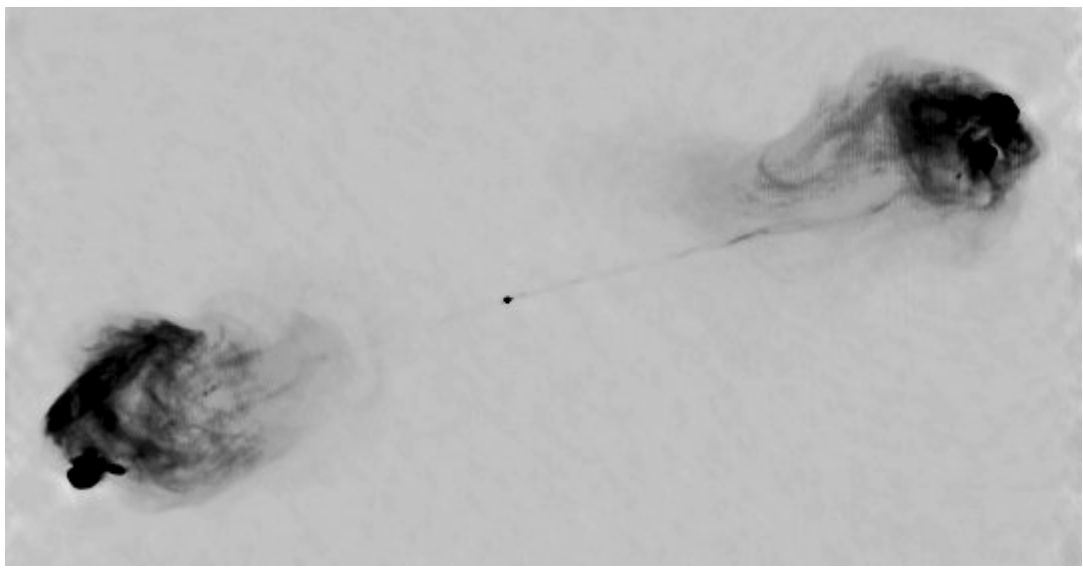
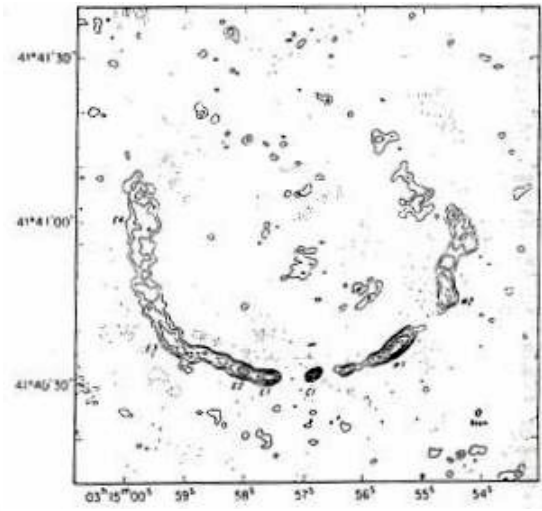


Figura 10. Immagine radio di Cigno A con VLA, che evidenzia un jet radio che collega radiovolumi estesi e sorgente centrale.

Osservazioni che utilizzano una tecnologia di osservazione radio detta Very Large Baseline Interferometry (VLBI) delle componenti compatte nucleari sono state condotte con risoluzioni angolari limite sino a un milionesimo di arcsec, possibili grazie appunto all'elevata brillantezza superficiale di questi oggetti. Si e' cosi' verificato che sulle scale angolari piu' piccole si trovano le stesse struttura a forma di getto osservate sulle scale maggiori (Fig. 11). L'interpretazione e' che esistano una sorta di

"cannoni" entro il nucleo di questi oggetti in grado di produrre getti di plasma, particelle e radiazione estremamente ben collimati, in grado di trasferire energia dalla sorgente centrale ai radiovolumi estesi.

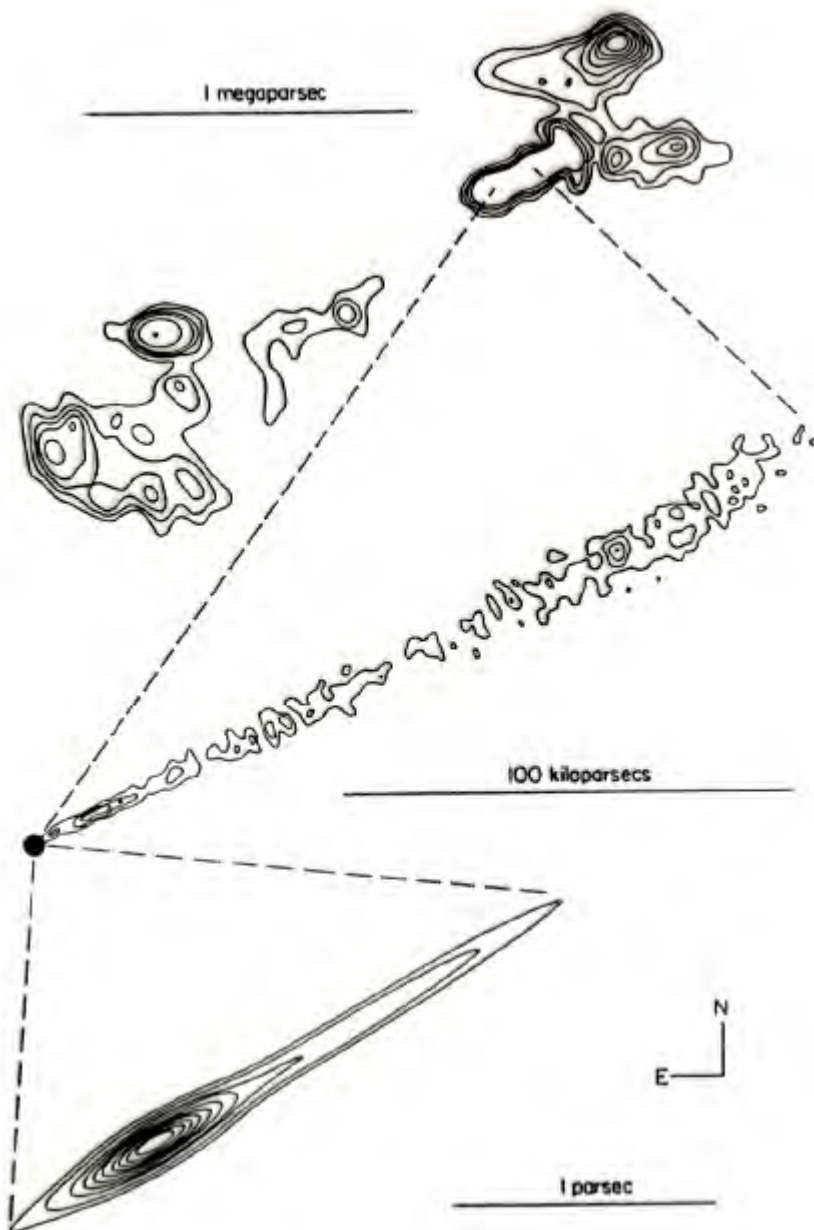


Figura 11. La radiosorgente associata con NGC 6251, osservata con diversi radiotelescopi a diverse risoluzioni angolari.

E' evidenziata la straordinaria qualita' del jet di permanere estremamente collimato su scale da meno di 1 pc a oltre 1 Mpc!

12.5 Energetica dell'emissione delle radiogalassie

I processi fisici che regolano il fenomeno delle radio-galassie sono piuttosto complessi, soprattutto in relazione a quanto avviene nel nucleo, ovvero nella radiosorgente compatta coincidente con il nucleo della galassia ospite, e in relazione ai jets che lo collegano con i radio-volumi estesi. In particolare ci aspettiamo complesse inter-relazioni tra i plasmi relativistici coinvolti, i campi magnetici, e il

campo gravitazionale forte nel nucleo (che richiede un trattamento general-relativistico).

Noi tuttavia nel seguito cercheremo di ricavare informazioni importanti sul fenomeno limitandoci a considerare i radio-volumi estesi delle radio galassie: data la fisica relativamente semplice che ne regola l'emissione, e' interessante investigare dunque la quantita' di energia contenuta e possibili origini di questa energia. Assumiamo che la sorgente consista in un volume V che contiene campo magnetico caotico di intensita' media B , e in cui vi siano elettroni relativistici con densita' $N(E)=K E^{-\sigma}$ tra E_1 ed E_2 . L'energia totale contenuta sara' data dalla somma di quelle delle varie componenti:

$$E_{tot} = E_e + E_p + E_{mag}$$

Cominciamo ad analizzare il primo addendo, il contributo elettronico, il piu' facile da stimare:

$$E_{el} = V \int K \varepsilon^{-\sigma} \varepsilon d\varepsilon = \frac{VK}{2-\sigma} [\varepsilon_2^{2-\sigma} - \varepsilon_1^{2-\sigma}]$$

Esprimiamo il prodotto VK , che non conosciamo a priori, in termini della potenza di sincrotrone emessa, una quantita' misurabile. Dalla [12.2], considerando che per ogni elettrone $\varepsilon = \gamma mc^2$, potremo scrivere per la potenza emessa:

$$P = \frac{4}{3} \sigma_T c \beta^2 \gamma^2 U_B = AB^2 \varepsilon^2 \quad [12.2]$$

con A una costante irrilevante. Possiamo ora esprimere la luminosita' totale L come una integrazione della distribuzione di energia delle particelle [12.4] pesata da [12.2]:

$$L = V \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} K \varepsilon^{-\sigma} P_{el} d\varepsilon = \frac{A VK B^2}{3-\sigma} [\varepsilon_2^{3-\sigma} - \varepsilon_1^{3-\sigma}]$$

e dunque ricavando VK da questa, si ottiene

$$E_{el} = \frac{1}{A} \frac{L}{B^2} \frac{3-\sigma}{2-\sigma} \frac{[\varepsilon_2^{2-\sigma} - \varepsilon_1^{2-\sigma}]}{[\varepsilon_2^{3-\sigma} - \varepsilon_1^{3-\sigma}]}$$

In realta' noi non conosciamo le energie di taglio degli elettroni ε_1 ed ε_2 , quanto piuttosto le frequenze di taglio ν_1 e ν_2 dello spettro. Dalla [12.3] potremo scrivere che

$$\nu = \gamma^2 qB / mc \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = D \frac{\nu^{1/2}}{B^{1/2}} \quad [12.5]$$

$$E_{el} = \frac{1}{AD} \frac{L}{B^{3/2}} \frac{2\alpha+2}{2\alpha+1} \frac{[\nu_2^{-\alpha+1/2} - \nu_1^{-\alpha+1/2}]}{[\nu_2^{-\alpha+1} - \nu_1^{-\alpha+1}]}$$

ove D rappresenta una seconda costante di semplice normalizzazione. Occorre ora valutare l'energia in protoni E_p . Per mantenere la neutralita' della carica, per ogni elettrone dovra' essere accelerato anche un protone, altrimenti si creerebbero campi

elettrici intensi che attrarrebbero particelle di segno opposto, fino ad annullare la distribuzione di carica. Ma anche se il numero di particelle e' mantenuto, la loro energia potrebbe essere molto diversa (per tutte le particelle ultra-relativistiche la velocita' e' comunque circa c). Accelerazioni elettrostatiche (puri campi E) darebbero energie indipendenti dalla massa: $d(\gamma mc^2)/dt=eE \times v$. Altri meccanismi tendono invece a favorire le grandi masse (i protoni): tra questi il meccanismo di accelerazione di Fermi ³. Pertanto ci aspettiamo che $E_{el}/E_p < 1$. Nei raggi cosmici effettivamente si misura $E_{el}/E_p \sim 1/100$. Definiamo

$$a \equiv \left(\frac{E_{el}}{E_p} \right)^{-1} \approx 100$$

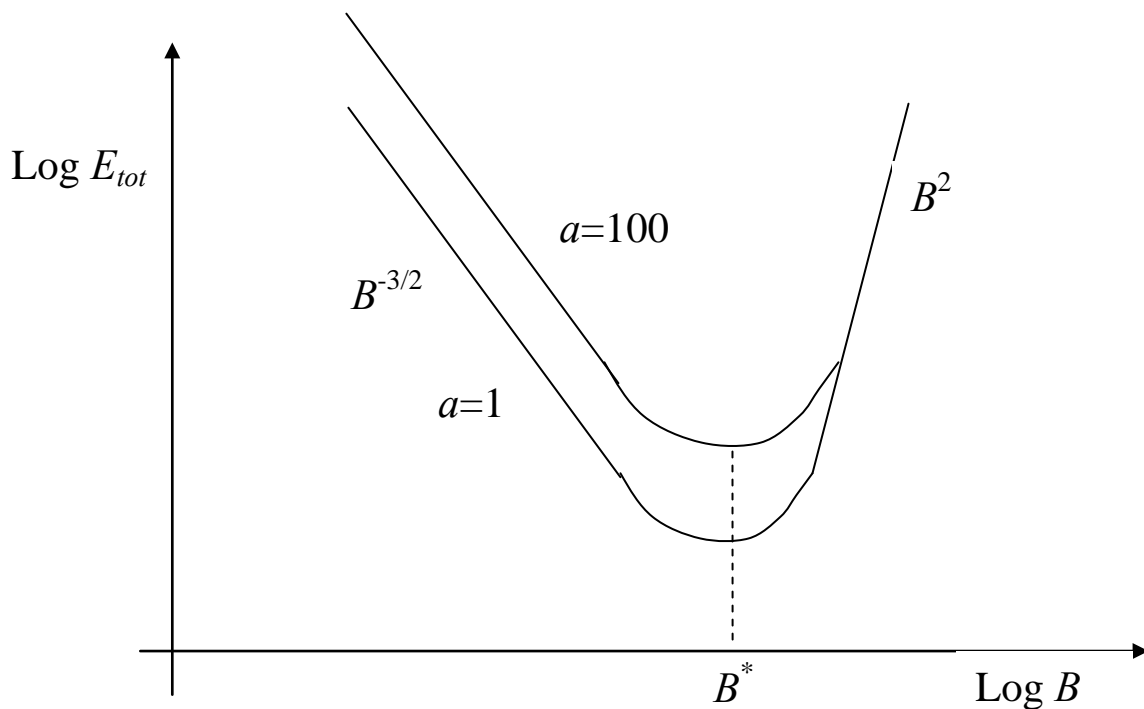


Figura 12. Andamento dell'energetica totale in funzione dell'intensita' del campo magnetico B .

Allora, includendo nella costante Q i vari fattori che moltiplicano $L/B^{3/2}$, avremo:

$$E_{tot} = (1+a)E_{el} + E_{mag} = Q(1+a) \frac{L}{B^{3/2}} + \frac{VB^2}{8\pi}, \quad [12.6]$$

andamento illustrato in funzione dell'intensita' del campo B nella Fig. 12.

E' chiaro che esistera' un valore di B per cui E_{tot} e' minima, ottenibile derivando in funzione di B la [12.6]:

³ Accenniamo solo che il meccanismo di accelerazione di Fermi prevede l'esistenza all'interno della sorgente di un gran numero di nubi con forti moti, ad es. dovuti al generarsi di onde d'urto. Le particelle cariche rimbalzano alla superficie di queste nubi a causa dei campi magnetici ancorati al plasma delle nubi, venendo cosi' accelerate per l'effetto sommato di questi rimbalzi. Si tenga conto del fatto che una particella vede venire verso di se' molte piu' nubi di quante ne incontri nel senso del suo moto (effetto "auto in senso opposto in autostrada"), ricevendo cosi' un forte aumento della sua energia per ogni rimbalzo.

$$B^* = \left[\frac{6\pi Q(1+a)L}{V} \right]^{2/7} = \left(\frac{9}{2} \right)^{2/7} \frac{[Q(1+a)L]^{2/7}}{l^{6/7}} \quad [12.7]$$

con l dimensioni lineari della radiosorgente (assunta sferica). Sostituendo la [12.7] in [12.6], si trova così l'energia minima corrispondente a B^* :

$$E_{\min} = \frac{Q^{4/7}}{8\pi} l^{9/7} (1+a)^{4/7} L^{4/7} \approx 10^{42} \nu_{\min}^{2/7} l^{9/7} (1+a)^{4/7} L_{42}^{4/7} \quad [erg / s]$$

ove ν_{\min} è la frequenza di taglio dello spettro osservato in Hz, l in Mpc, L_{42} in 10^{42} erg/s. È chiaro dalla Figura 12 che la quantità B^* è molto vicina al valore del campo B per cui c'è equipartizione delle energie in campo magnetico e in particelle: un semplice calcolo mostra che, al valore di B^* , si ha $E_{\text{mag}} = 3/4 E_{\text{part}}$.

Abbiamo così ottenuto un doppio risultato: (a) abbiamo valutato un valore di riferimento del campo B che ha un significato particolare, ossia di essere molto vicino a quello a cui si ha l'equipartizione energetica; (b) abbiamo valutato la minima energia possibile per la radiosorgente. B^* non ha ovviamente il significato di una misura precisa, poiché non sappiamo dimostrare che la radio-sorgente si trovi realmente in una condizione di equipartizione energetica delle sue varie componenti. In particolare vi sono evidenze che nelle radiosorgenti compatte, in prossimità del motore primario d'energia, questa condizione non sia verificata. Tuttavia almeno nelle componenti estese delle radiosorgenti (nelle quali è verosimile che i processi avvengano su tempi scala relativamente più lunghi che nelle sorgenti compatte) B^* costituisce un valore di riferimento estremamente utile. Riguardo al punto (b), notiamo che E_{\min} è minima sia in senso matematico, sia perché, se il taglio inferiore allo spettro radio non è osservato (se è al di sotto della frequenza di taglio della ionosfera, 30 MHz), una parte dello spettro non è osservabile.

Oggetto	redshift	M_{pg}	Dimensioni (diam. x sep.) in kpc	log L (erg/s)	Log E_{\min} (erg)	Log B (Gauss)
Centauro A	0.003	-21.3	120 x 240	41.8	59.3	-5.3
Cigno A	0.057	-21.2	17 x 100	44.8	60.0	-3.5
3C 33	0.05	-20.9	10 x 200	42.8	58.6	-4.0
3C 219	0.175	-19.6	60 x 260	43.3	59.9	-4.3
3C 295	0.461	-20.1	5 x 15	45.0	59.5	-3.3

È interessante che per un certo numero di radiosorgenti a bassi redshifts, per cui l'analisi è stata condotta in grande dettaglio, la E_{\min} assuma valori già assai elevati. La tabella qui sopra mostra valori del campo di equipartizione e dell'energia minima

calcolati assumendo $a=100$. Da notare che si tratta di radiogalassie tra quelle a noi piu' vicine, che sono tipicamente oggetti di relativamente moderate luminosita' e dimensioni. Considerando oggetti a piu' alti redshift, si trovano luminosita' e dimensioni ancora ben piu' grandi. Le luminosita' possono arrivare a 10^{46} erg/s e le dimensioni ben oltre il Mpc. Le radiogalassie J1420_0545 e 3C236 arrivano a misurare circa 4.5 Mpc da un lobo all'altro.

Dal confronto tra E_{min} e L possiamo inferire **tempi di vita** delle sorgenti da 10^6 anni (per le piu' potenti come Cigno A, $L=10^{45}$ erg/s), fino a 10^8 anni (per le piu' deboli, con $L<10^{42}$ erg/s). Una stima del tempo di vita si ottiene semplicemente confrontando la luminosita' bolometrica radio L con l'energia totale delle componenti:

$$t \simeq E_{min} / L.$$

Per capire il significato di questa stima dell'energetica, trasformiamola in massa dalla relazione $E=mc^2$, per la quale 10^{60} erg di energia contenuta corrispondono alla conversione di $10^6 M_{\odot}$ in energia di particelle relativistiche di almeno 1000 MeV in tempi scala di 10^6 anni. 1000 MeV per particella sono richiesti dal fatto che si vogliono fotoni di $\nu \sim 10^{10}$ Hz entro campi di $B \sim 10^{-4}$ Gauss: da $\nu = \gamma^2 eB/mc$ si ha che $\gamma \sim 1000$ (mentre l'energia a riposo del e^- e' 0.511 MeV).

E' del tutto implausibile che processi di tipo stellare ne siano responsabili. Sappiamo dal Cap. 2 (vedasi eq. [2.12]) che al piu' una frazione pari a qualche per-mille della massa a riposo ($10^{-2}-10^{-3} M_{\odot}$) viene trasformata in energia nelle reazioni termonucleari, e questa energia, oltretutto, viene emessa sotto forma di particelle di qualche MeV. Ottenere particelle di 1000 MeV implicherebbe una efficienza termodinamica molto bassa. Tutto cio' richiederebbe intere masse galattiche ($>10^{10} M_{\odot}$) che dovrebbero annichilirsi nei nuclei delle galassie su tempi scala cortissimi (10^6 anni). Non vi e' nessuna evidenza che cio' accada, anzi studi dinamici dei moti delle stelle nei nuclei con HST (e lo spettrografo STIS) hanno mostrato non esservi piu' di qualche $10^9 M_{\odot}$ nei nuclei sotto forma di ammassi stellari o oggetti collassati (verosimilmente un buco nero super-massivo).

Altri tipi di processi sono evidentemente richiesti per spiegare questo fenomeno, il piu' accreditato dei quali riguarda la conversione di energia gravitazionale ($E \sim GM^2/R$) in energia rotazionale ($E \sim J^2/R^2 = I\omega^2/2$, dove $\omega = v/r$ e $I = \sum_i m_i r_i^2$ e' il momento d'inerzia del sistema in rotazione e J e' il momento angolare) e dall'energia di rotazione in energia di particelle accelerate e campi elettromagnetici.

La prima conversione, da energia gravitazionale a rotazione, puo' avvenire con una efficienza assai elevata, dell'ordine del 10%. Infatti, nella contrazione sino ad alcuni raggi di Schwarzschild ($R_S = 2GM/c^2$, raggio al quale la velocita' di fuga dall'oggetto corrisponde alla velocita' limite della luce) si avrebbe:

$$E_{tot} = \frac{GM^2}{5R_s} = \frac{GM^2 c^2}{5 \cdot 2 \cdot GM} = \frac{Mc^2}{10}.$$

In buchi neri massimamente rotanti (buchi neri di Kerr) la massima energia estraibile arriva a circa il 40% dell'energia a riposo. Per quanto riguarda la seconda conversione, e' interessante utilizzare, per valutarne l'efficienza, una possibile analogia con una sorgente galattica di grande interesse fisico e astrofisico: la stella a neutroni pulsante (*pulsar*) presente nel centro della nebulosa del Granchio (Crab Nebula), che e' l'esito dell'esplosione di supernova avvenuta nel 1054 d.C. e registrata negli annali cinesi dell'epoca). Vi sono evidenze che la generazione di energia tramite accelerazione di particelle avvenga in questa sorgente con una efficienza vicina al 100%. Infatti, detto $I\omega^2/2$ l'energia di rotazione della pulsar, possiamo determinare la sua variazione temporale

$$\frac{d}{dt} \frac{I\omega^2}{2} = I\omega\dot{\omega}$$

Da misure della velocita' di rotazione ω da osservazioni della luce pulsata in ottico, si ottiene $\omega=33$ millisecondi. Osservazioni su base pluri-decennale della pulsar sono altresì in grado di determinare $\dot{\omega} = d\omega / dt$. Possiamo altresì dire di conoscere un valore affidabile del momento d'inerzia I , basato su modelli della struttura della stella a neutroni, che risulta $I=10^{45}$ g cm². Si trova infine così

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} I\omega^2 \approx 2 \cdot 10^{38} \text{ erg / s.} \quad [12.7]$$

Questa stima si puo' confrontare con la luminosita' bolometrica totale della nebulosa, facilmente ottenibile sulla base di spettri a larga banda dell'oggetto (che risulta avere uno spettro a legge di potenza dal radio ai raggi gamma, con un irripidimento a circa 10¹² Hz. La luminosita' bolometrica risulta così $L_{bol} \sim 10^{38}$ erg/s, circa la meta' della stima del ritmo di perdita di energia della pulsar in [12.7], corrispondente dunque ad una efficienza di trasformazione dell'energia rotazionale in flussi di particelle e radiazione pari a circa il 50%.

E' interessante notare che vi sono evidenze della presenza, nei nuclei di galassie attive e quasars, di oggetti collassati di grande massa (verosimilmente buchi neri supermassivi, con masse stimate da 10⁶ a qualche 10⁹ M_⊙)⁴. Questi oggetti collassati supermassivi sono interpretati come l'analogo su grande scala della stella a neutroni nella Crab.

Si tende a spiegare con la presenza di tali oggetti collassati supermassivi tutta la fenomenologia dei Nuclei Galattici Attivi (AGN). Un aspetto assai attraente di questa idea e' che oggetti di questo tipo, se appunto dotati di forte momento angolare, potrebbero naturalmente spiegare nelle radio-galassie:

1. le energetiche estreme osservate;

⁴ Nota che i buchi neri sono l'unica configurazione fisica stabile per masse compatte di questo entita'.

2. la forte variabilita' osservata in molti AGN, consistente con dimensioni molto ridotte della sorgente di energia;
3. l'estrema direzionalita' mostrata dai jets radio, legata al momento angolare dell'oggetto, eventualmente anche in associazione con un campo magnetico.

12.6 Nuclei Galattici Attivi Radio-Quieti: Quasars e galassie di Seyfert

Le radiogalassie costituiscono, da un punto di vista fisico e anche energetico, una piccola minoranza del fenomeno dei Nuclei Galattici Attivi. La popolazione piu' rilevante di AGN e' quella degli oggetti radio-quieti, che include essenzialmente i quasar ottici e le galassie di Seyfert, le cui caratteristiche principali sono nel seguito riassunte.

Si tratta di sorgenti che presentano le seguenti proprieta' in comune:

- una intensa emissione non-risolta spazialmente (puntiforme) in banda ottica;
- l'emissione presenta un eccesso nell'infrarosso termico e talvolta nell'UV e in bande X e un continuo in ottico-UV a legge di potenza;
- l'emissione ottica, e soprattutto in X, evidenziano elevata variabilita' del flusso in funzione del tempo;
- negli spettri ottici si evidenziano intense righe d'emissione, che spesso appaiono fortemente allargate (da ~1000 a varie migliaia di Km/sec);
- l'emissione radio di questi oggetti e' tipicamente molto debole, pertanto possiamo considerare che l'emissioni in ottico e in radio siano piuttosto anti-correlate nei Nuclei Galattici Attivi, nel senso che oggetti radio-brillanti sono deboli in ottico, viceversa quasar brillanti in ottico sono deboli in radio.

Una immagine ottica della piu' famosa delle galassie di Seyfert vicine e' mostrata nella Figura 13. Le galassie di Seyfert sono state tra le prime galassie con nucleo attivo ad essere identificate (da Karl Seyfert nel 1942). In Figura 14 mostriamo invece l'immagine di un quasar ottico, la cui brillantezza, come si puo' vedere, domina di gran lunga quella della galassia ospite.

La principale differenza tra quasar ottici e galassie di Seyfert consta dunque nella luminosita' nucleare: nei quasar essa e' cosi' grande che la galassia ospite risulta praticamente invisibile (Fig. 14), mentre nelle galassie di Seyfert la luminosita' del nucleo attivo e' sufficientemente bassa che la galassia ospite (tipicamente una galassia spirale) risulta ben visibile. Salvo questa caratteristica della luminosita', tutte le altre caratteristiche sono in comune tra quasar e galassie di Seyfert, ivi inclusa la funzione di luminosita' che risulta contigua tra le due categorie.

Gli spettri ottici degli AGN presentano notevoli caratteristiche che certificano la diversa natura di questi oggetti rispetto alle galassie normali. Figura 15, che rappresenta lo spettro medio di un certo numero di quasar ad alti redshift, mostra infatti intensissime righe d'emissione, in particolare righe permesse della serie di Balmer dell'idrogeno⁵. Queste righe poi non sono solo intense, ma risultano pure assai allargate, con valori della larghezza alla base di varie migliaia di Km/sec. Per confronto, le righe d'emissione osservate nelle galassie non mostrano mai allargamenti superiori a 200-300 Km/sec, corrispondenti ai moti tipici di stelle e mezzo interstellare nelle galassie e consistenti con il campo gravitazionale medio in esse. Evidentemente le righe large emesse dagli AGN provengono da regioni galattiche caratterizzate da campi gravitazionali estremamente più intensi. Questo fatto è consistente con l'idea già espressa per le radiogalassie – ma evidentemente valida per gli AGN in generale – che l'attività nucleare sia dovuta ad accrescimento di gas su un buco nero supermassivo. Questo oggetto genererebbe così un intensissimo campo di gravità, e spiegherebbe l'allargamento delle righe permesse, assumendo che esse originino da gas denso in moto in prossimità del buco nero.



Figura 13.
Immagine ottica composta del prototipo di galassia di Seyfert (del tipo-I), NGC 4151. La galassia si trova ad una distanza di circa 13 Mpc e mostra chiaramente un eccesso di luminosità molto marcato nel nucleo, quasi puntiforme.

Si evidenziano inoltre varie righe permesse di elementi pesanti, carbonio, magnesio, ossigeno, ecc. Si verifica infine anche la presenza di righe relativamente più strette (<1000 Km/sec) di transizioni proibite (vedasi ad esempio quella dell'ossigeno III, [OIII] e dell'azoto III, NIII)).

⁵ Ricordiamo che si distinguono in spettroscopia righe proibite dalle righe strette. Si intendono come righe proibite quelle prodotte in gas a bassissima densità (rispetto alle densità atomiche ottenibili in laboratorio), e sono indicate in parentesi quadra. Le righe permesse invece sono quelle prodotte da gas a densità medio-alta.

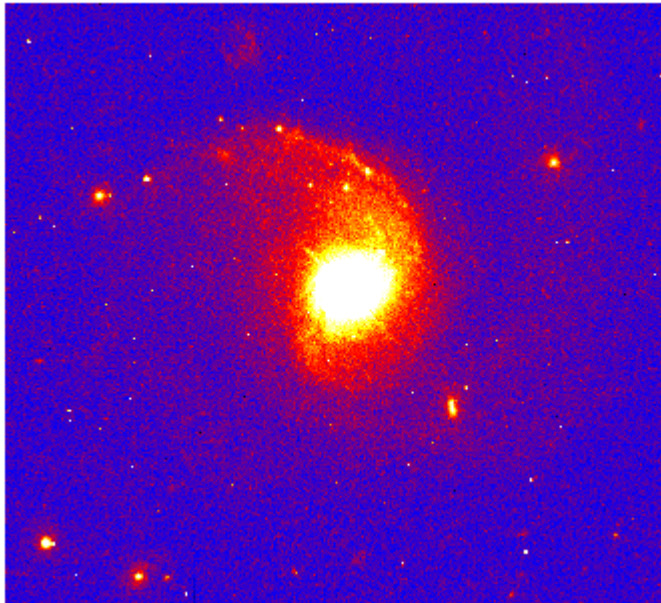


Figura 14. Immagine ottica in falsi colori del quasar vicino 0157-001 a $z=0.164$, entro la galassia ellittica che lo ospita, e che e' appena visibile data l'enorme brillantezza del quasar. La galassia ospite mostra chiari segni di interazione dinamica con un compagno.

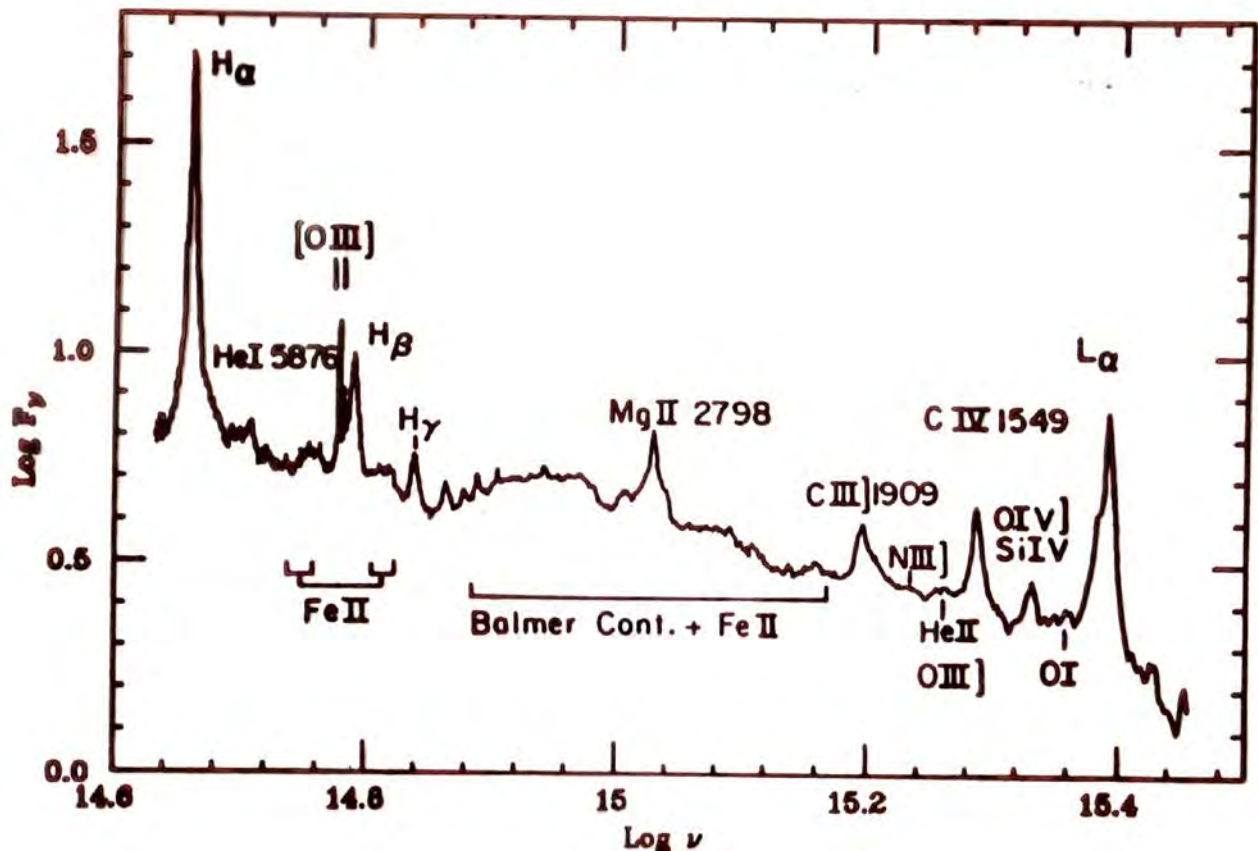


Figura 15. Spettro medio ottico di un campione rappresentativo di quasars su un ampio intervallo di redshifts.

Sono anche stati identificati AGNs, sia quasars che galassie di Seyfert, privi di righe large e dell'intenso flusso UV, con invece righe piu' strette molto intense nei loro spettri ottici, con larghezze ≤ 2000 Km/sec ma comunque dell'ordine di varie centinaia di Km/sec almeno. Si tratta dei cosiddetti AGN di tipo-II, per differenziarli

dagli AGN di tipo-I che sono quelli, precedentemente discussi, che includono righe large. Spettri caratteristici di AGN di tipo-II sono mostrati in Figura 16. Nonostante si tratti di oggetti piu' difficili da identificare (mancando delle righe large), risulta da studi approfonditi che in realta questi oggetti di tipo-II includano la larga maggioranza di tutti gli AGN.

Nel nostro quadro interpretativo del fenomeno AGN, come possiamo comprendere gli oggetti di tipo-II, che sembrerebbero essere nuclei attivi privi di evidenza spettroscopica di un oggetto collassato nucleare? La risposta viene dal cosiddetto **modello unificato** dell'attivita' nucleare: il modello prevede che nella zone circum-nucleare il gas e polvere in accrescimento sul buco nero siano organizzati in una struttura a forma di toro che circonda il nucleo, che presenta una apertura in due zone polari corrispondenti all'asse di rotazione. Tale struttura, denominata *toro d'accrescimento*, sarebbe determinata infatti dalla presenza di momento angolare nel gas che accresce, momento che schiaccia la struttura nel piano equatoriale (si veda schema in Figura 17).

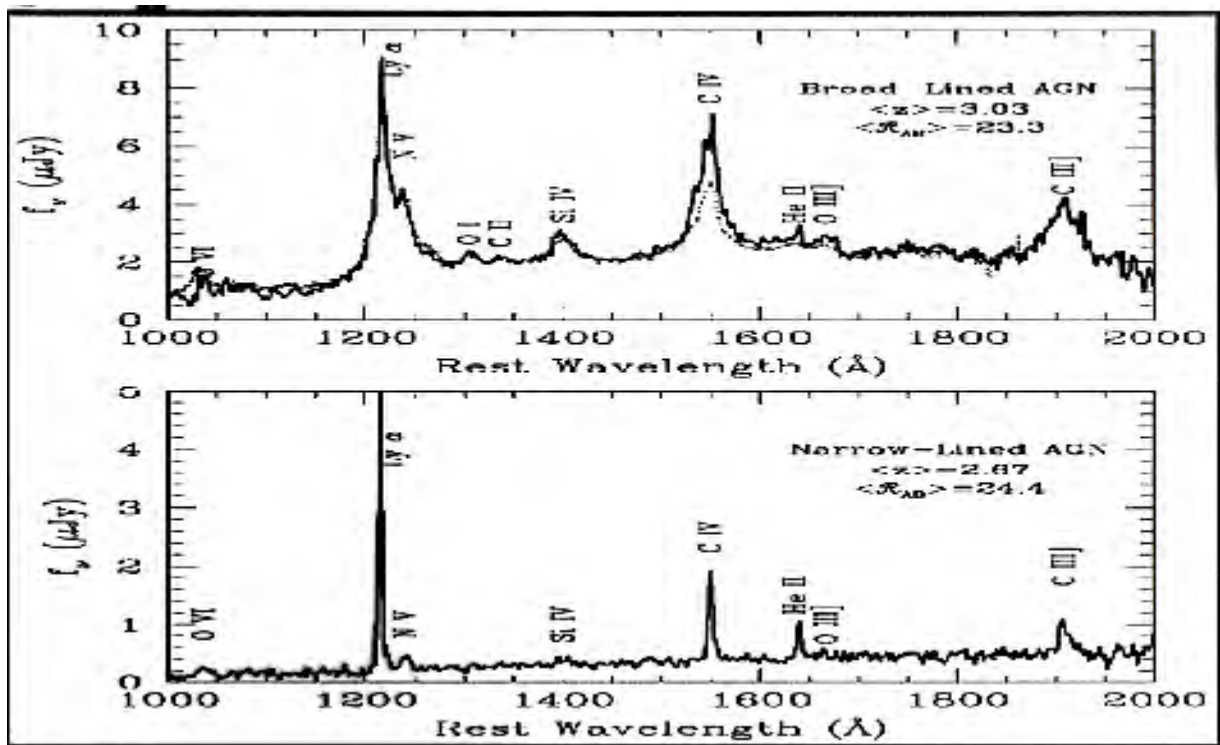


Figura 16. Confronto degli spettri medi di un campione rappresentativo di AGN di tipo-I a righe proibite larghe con quello medio di AGN del tipo-II, che mostrano strette sia le righe permesse che le proibite.

Il modello prevede che AGN di tipo-I corrispondano a strutture toroidali viste dall'osservatore in direzione polare, mentre i tipo-II alla presenza di strutture toroidali

che possono coprire la visuale (vedi Figure 17). In questo secondo caso la polvere presente nel toro oscura sia l'emissione del continuo UV, sia delle righe larghe emesse da nubi circum-nucleari contenute entro il toro.

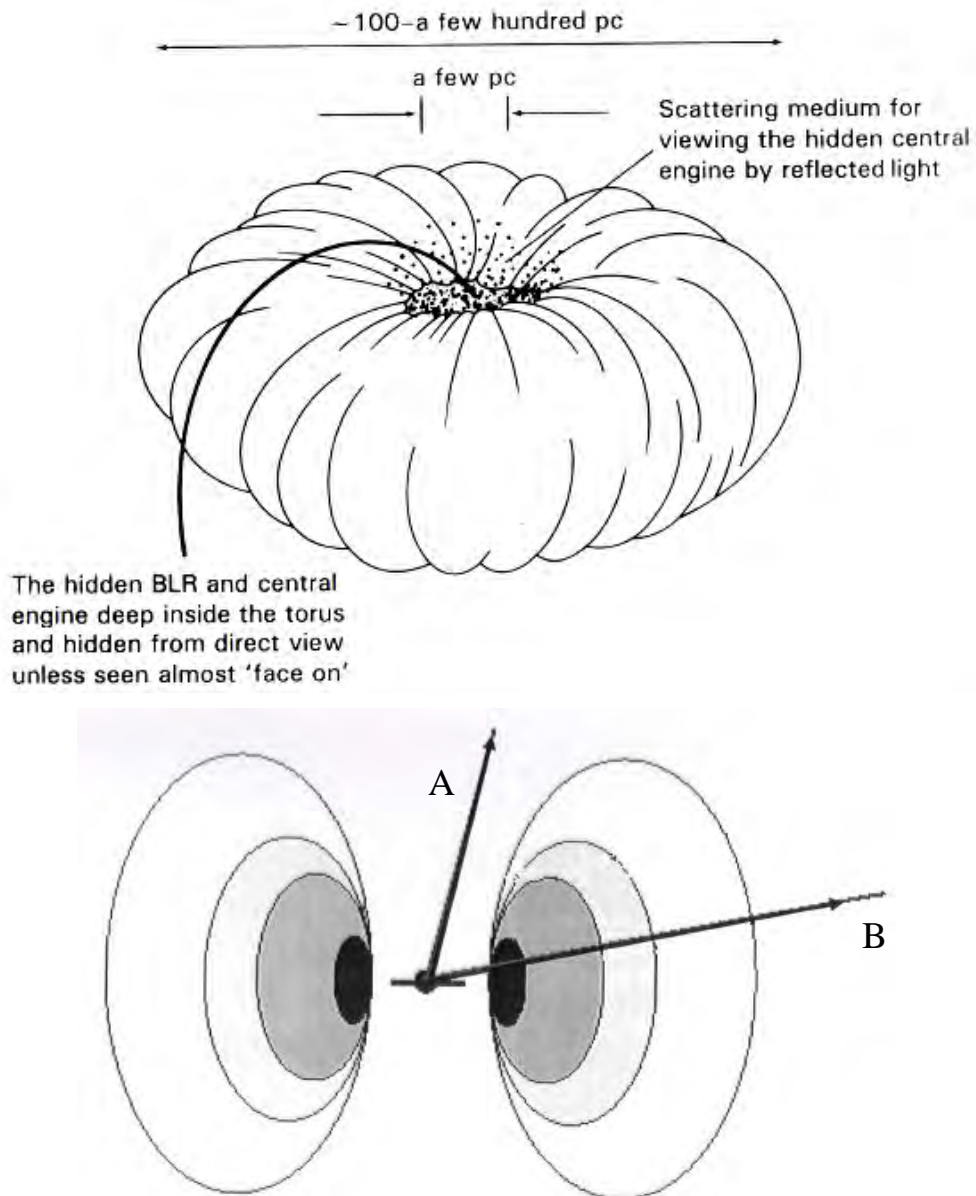


Figura 17. Schemi rappresentativi del modello unificato degli AGN. La fig. sopra mostra il toro di gas e polveri visto dall'alto con l'apertura polare, che e' occupata da un mezzo di bassa densita'; la figura mostra anche le dimensioni caratteristiche del toro. La figura in basso schematizza le due visuali del nucleo, la A e' quella che corrisponde a un AGN di tipo-I, la B un AGN di tipo-II.