

Valter Moretti
Dipartimento di Matematica
Università di Trento

**Fondamenti di FISICA MATEMATICA II:
Introduzione alla Teoria delle Equazioni alle Derivate
Parziali del Secondo Ordine**

Corso di *Fondamenti di Fisica Matematica* per la Laurea Triennale in Matematica
Università di Trento

Dispense scritte da Valter Moretti, liberamente scaricabili dal sito
<https://moretti.maths.unitn.it/dispense.html> protette dal Creative Commons
Attribuzione-Non commerciale-Non opere derivate 2.5 Italia License.
Nessuno è autorizzato a vendere queste dispense

Indice

1	Introduzione alle equazioni differenziali a derivate parziali del secondo ordine quasi lineari.	7
1.1	Notazioni, definizioni, convenzioni e qualche risultato tecnico elementare.	7
1.1.1	Funzioni differenziabili ed operatori differenziali.	7
1.1.2	Alcune proprietà della connessione.	10
1.1.3	Norme e seminorme.	12
1.1.4	Risultati elementari sulle serie di funzioni.	13
1.2	Motivazioni fisico matematiche per lo studio delle equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine: le equazioni di Maxwell.	18
1.2.1	Equazioni di Maxwell in forma integrale.	19
1.2.2	Teoremi di Gauss, Stokes ed equazioni di Maxwell in forma differenziale locale.	20
1.3	Equazioni differenziali del secondo ordine quasilineari	26
1.3.1	Trasformazioni di coordinate e struttura delle equazioni quasilineari del secondo ordine	27
1.3.2	Classificazione delle equazioni differenziali quasilineari del secondo ordine	28
1.4	Il problema di Cauchy ed il Teorema di Cauchy-Kovalevskaia.	33
1.4.1	Superfici regolari in \mathbb{R}^n	33
1.4.2	Il problema di Cauchy e la “ben posizione” del problema nel senso di Hadamard.	35
1.4.3	Il Teorema di Cauchy-Kovalevskaia.	37
1.4.4	Il caso di una superficie regolare generica in \mathbb{R}^n descritta in <i>coordinate normali</i>	41
1.4.5	Nozione di superficie caratteristica	43
2	Equazioni Ellittiche e funzioni armoniche in \mathbb{R}^n: risultati elementari.	49
2.1	Il problema fisico dell’elettrostatica e le equazioni di Poisson e Laplace.	49
2.2	Principio del massimo per funzioni armoniche e principio del massimo generalizzato.	51
2.2.1	Funzione armoniche e sub armoniche in \mathbb{R}^n	51
2.2.2	Principio del massimo (in forma debole).	55
2.2.3	Principio del massimo (in forma debole) generalizzato.	56

2.2.4	Due teoremi di unicità per il problema di Dirichlet dal principio del massimo.	58
2.3	Le identità di Green le loro conseguenze elementari.	61
2.3.1	Identità di Green.	61
2.3.2	Conseguenze del teorema di Gauss e delle identità di Green: teorema di unicità per il problema di Neumann.	62
3	Soluzioni fondamentali per l'equazione di Poisson in \mathbb{R}^n e risultati ad esse legati.	69
3.1	Soluzioni fondamentali.	69
3.1.1	Proprietà elementari delle soluzioni fondamentali.	71
3.2	Ulteriori proprietà delle funzioni armoniche in \mathbb{R}^n .	79
3.2.1	Non esistenza di funzioni armoniche con supporto compatto e non nulle.	80
3.2.2	Le funzioni armoniche definite in aperti di \mathbb{R}^n sono C^∞ ed analitiche.	81
3.2.3	Teorema della media e principio del massimo in forma forte.	85
3.2.4	Teorema di Liouville per le funzioni armoniche in \mathbb{R}^n e non esistenza di funzioni armoniche non nulle a quadrato sommabile in \mathbb{R}^n .	90
4	Soluzioni dell'equazione di Poisson su particolari domini tramite Funzioni di Green.	94
4.1	Soluzione dell'equazione di Poisson in tutto \mathbb{R}^n tramite G_n .	94
4.2	Ancora sul problema di Dirichlet per regioni limitate.	97
4.2.1	Funzioni di Green e nuclei di Poisson.	98
4.3	Funzioni di Green per domini particolari.	105
4.3.1	Il metodo delle cosiddette <i>cariche immagine</i> .	106
4.3.2	La funzione di Green nella palla in \mathbb{R}^3 .	107
4.3.3	La funzione di Green nel cerchio in \mathbb{R}^2 .	110
4.3.4	La funzione di Green in un semispazio di \mathbb{R}^3 .	112
4.4	Soluzione per il problema di Dirichlet nel cerchio in \mathbb{R}^2 tramite l'analisi di Fourier.	113
5	Equazioni iperboliche: alcuni risultati generali elementari per le equazioni di D'Alembert e di Klein-Gordon in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.	121
5.1	L'equazione di D'Alembert come equazione della corda vibrante e della membrana vibrante.	122
5.1.1	L'equazione per la corda oscillante per piccole deformazioni.	122
5.1.2	L'equazione per la membrana oscillante per piccole deformazioni.	123
5.1.3	*L'equazione per la vibrazione di un tamburo ideale di topologia arbitraria.	125
5.2	Condizioni iniziali ed al contorno.	128
5.3	Bilancio energetico e teoremi di unicità.	129
5.3.1	Densità di energia ed equazione di continuità.	129
5.3.2	Teoremi di unicità.	132
5.4	Esistenza delle soluzioni	135

6	Equazione di D'Alembert e di Klein-Gordon in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \times [a, b]$.	136
6.1	Equazione di D'Alembert sulla retta reale senza condizioni al contorno.	136
6.1.1	Assenza di sorgenti, formula di D'Alembert, domini di dipendenza.	137
6.1.2	Equazione di D'Alembert su tutta la retta con sorgente.	143
6.2	Dalla separazione delle variabili alla serie di Fourier.	148
6.3	Alcuni risultati elementari sulla serie di Fourier.	151
6.3.1	La serie di Fourier nello spazio di Hilbert $L^2([-L/2, L/2], dx)$	151
6.3.2	Convergenza uniforme della serie di Fourier e derivazione sotto il simbolo di serie.	156
6.3.3	Serie di Fourier in seni e coseni	162
6.4	Il problema su $\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]$ con condizioni al bordo periodiche.	163
6.4.1	Teorema di unicità.	164
6.4.2	Esistenza delle soluzioni per dati iniziali sufficientemente regolari.	165
6.4.3	Velocità di fase, frequenza, lunghezza d'onda.	171
6.5	Il problema su $\mathbb{R} \times [0, L]$ con condizioni al bordo di annullamento (e di Dirichlet)	172
6.5.1	Teorema di unicità.	172
6.5.2	Esistenza delle soluzioni per dati iniziali sufficientemente regolari.	173
6.5.3	Il caso di condizioni al bordo di Dirichlet	179
7	Introduzione ai metodi dell'analisi spettrale e qualche applicazione all'acustica musicale.	181
7.1	Generalizzazione della procedura di soluzione con la serie di Fourier su domini più generali.	181
7.1.1	Autofunzioni del laplaciano con condizioni di Dirichlet e serie di Fourier generalizzata.	182
7.1.2	*Autofunzioni dell'operatore di Laplace-Beltrami su una varietà riemanniana.	186
7.1.3	Soluzione dell'equazione di D'Alembert con condizioni di Dirichlet tramite l'analisi spettrale: un caso semplificato.	188
7.1.4	Membrana rettangolare e membrana circolare.	193
7.1.5	Fenomeni di smorzamento e risonanza in risuonatori forzati.	198
7.1.6	*Il caso del risuonatore o tamburo ideale forzato di topologia arbitraria.	205
7.2	Onde di pressione.	208
7.2.1	L'equazione di D'Alembert per le onde di pressione.	208
7.2.2	Esistenza del potenziale delle velocità.	212
7.2.3	Suono prodotto da risuonatori forzati.	213
7.2.4	Risuonatore ad aria di Helmholtz.	215
7.3	Un po' di fisica matematica del suono e della musica.	217
7.3.1	Strumenti musicali a corda.	217
7.3.2	Il suono prodotto dagli strumenti musicali a corde.	221
7.3.3	Le note musicali pure e note con timbro.	223
7.3.4	Scale e temperamenti	225

7.3.5	Possiamo udire la forma di un tamburo?	227
8	Equazioni paraboliche: l'equazione del calore e le sue proprietà elementari.	229
8.1	L'equazione del calore dalla termodinamica dei continui.	229
8.2	Condizioni iniziali ed al contorno, frontiera parabolica.	231
8.3	Un problema atipico, ma storicamente importante: il problema della cantina di Fourier	233
8.4	Principio del massimo parabolico e teoremi di unicità.	241
8.4.1	Principio del massimo parabolico in regioni limitate.	241
8.4.2	Teorema di unicità per condizioni al bordo di Dirichlet.	244
8.4.3	Principio del massimo parabolico in regioni spaziali illimitate.	245
8.4.4	Teorema di unicità per condizioni al bordo di Dirichlet con domini spaziali illimitati.	247
8.5	Equazione del calore su \mathbb{R}^{n+1} e trasformata di Fourier	248
8.5.1	La trasformata di Fourier	249
8.5.2	Il nucleo del calore su \mathbb{R}^n	252
8.5.3	Soluzioni dell'equazione del calore costruite con il nucleo del calore su \mathbb{R}^n	257
8.5.4	Il semigruppato ad un parametro generato da Δ in $L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$	263
A	Un accenno all'approccio moderno per il problema ellittico: soluzioni in senso debole e teoremi di regolarità ellittica.	265
B	Limite e derivazione sotto il segno integrale e di serie dalla teoria della misura.	271
B.1	Teoremi della convergenza monotona e dominata.	271
B.2	Derivazione sotto il segno di integrale e di serie.	276
C	Relazioni di ortogonalità tra funzioni trigonometriche utili nella teoria della serie di Fourier.	280
C.1	Esponenziali immaginari periodici su $J = [a, a + L]$	280
C.2	Funzioni seni e coseni periodiche su $J = [a, a + L]$	281
C.3	Seni e coseni su $[0, L]$ con condizioni di annullamento, o di annullamento della derivata, ai bordi.	283
D	Teoremi del Dini e applicazioni	286
D.1	Teoremi della funzione inversa e della funzione implicita	286
D.2	Coordinate normali Riemanniane attorno ad un punto su una superficie regolare di dimensione $n - 1$ in \mathbb{R}^n	287

Introduzione

Queste dispense sono relative alla seconda parte del corso di Fondamenti di Fisica Matematica, tenuto dall'autore per il corso di Laurea Triennale in Matematica (ma aperto anche al corso di Laurea Triennale in Fisica) presso l'Università di Trento. Lo scopo del corso è di introdurre gli studenti ai primi rudimenti della teoria delle equazioni differenziali a derivate parziali rilevanti in Fisica. Quindi, eccetto che per qualche accenno in appendice, non sono introdotti gli spazi funzionali di funzioni differenziabili (gli spazi di Sobolev) che si adoperano nelle trattazioni più avanzate discutendo l'esistenza delle soluzioni in “senso debole”. Lo sforzo dell'autore è stato quello di dare una trattazione rigorosa, senza però perdere il contatto con alcune motivazioni che portano a scegliere un particolare tipo di equazioni differenziali piuttosto che un altro per formalizzare un certo contesto fisico.

I prerequisiti riguardano l'analisi matematica delle funzioni di più variabili, i risultati elementari della teoria delle equazioni differenziali ordinarie e alcune nozioni elementari di teoria delle funzioni di variabile complessa e di teoria della misura. Altre nozioni, come quella di spazio di Hilbert L^2 , necessario per sviluppare la teoria della serie di Fourier, sono rapidamente introdotte di volta senza alcuna pretesa di esaustività. Tali nozioni verranno approfondite in altri corsi.

Nota. *Alcuni argomenti, quelli le cui sezioni hanno titolo preceduto da un asterisco, riguardano argomenti complementari avanzati rispetto al contenuto standard del corso, che richiedono conoscenze di nozioni matematiche superiori. Tali sezioni possono quindi essere omesse in un corso standard del secondo anno della laurea triennale in matematica. Questi argomenti sono indipendenti dal resto delle dispense anche se possono essere collegati tra di loro.*

Capitolo 1

Introduzione alle equazioni differenziali a derivate parziali del secondo ordine quasi lineari.

In questo capitolo introdurremo le idee generali della teoria delle equazioni differenziali del secondo ordine alle derivate parziali partendo da motivazione provenienti dalla fisica. Cominciamo con il fissare le notazioni e le convenzioni che useremo in tutte le dispense e con il richiamare qualche utile risultato generale.

1.1 Notazioni, definizioni, convenzioni e qualche risultato tecnico elementare.

In questa sezione riportiamo notazioni, definizioni e qualche risultato tecnico elementare che useremo in tutte le dispense.

1.1.1 Funzioni differenziabili ed operatori differenziali.

Se f è una funzione definita sullo spazio topologico X , per esempio \mathbb{R}^n oppure un sottoinsieme di \mathbb{R}^n dotato della topologia indotta da \mathbb{R}^n , ed i valori di f sono assunti in \mathbb{R}^n , allora il **supporto di f** è, come ben noto, l'insieme:

$$\text{supp } f := \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}},$$

dove, 0 indica il vettore nullo (o semplicemente lo zero se $n = 1$) e la chiusura è riferita alla topologia di X .

Ricordiamo ancora che una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto, è detta essere **differenziabile** in $x_0 \in \Omega$ se, in un intorno \mathcal{O} di x_0 , vale:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L_{x_0}(h) + R_{x_0}(h) \quad \text{se } x_0 + h \in \mathcal{O} \quad (1.1)$$

dove $L_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una funzione *lineare* mentre R_{x_0} soddisfa:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_{x_0}(h)}{\|h\|} = 0.$$

In tal caso L_{x_0} è univocamente determinata. Inoltre è ovvio che:

una funzione differenziabile in x_0 è continua in x_0 .

Un elementare ma importante risultato di analisi che useremo ricorrentemente è il seguente.

Proposizione. *Una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto, è differenziabile in $x_0 \in \Omega$ se in un intorno \mathcal{O} di x_0 esistono le derivate parziali prime di f rispetto a tutte le coordinate e tali derivate definiscono funzioni continue in \mathcal{O} . \diamond*

Passiamo ad estendere la nozione di differenziabilità ad ordini superiori, includendo la continuità.

Definizione 1.1. Siano $n, m = 1, 2, \dots$ e $k = 0, 1, \dots$ fissati e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e non vuoto.

(a) Una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ o \mathbb{C}^m è detta essere **di classe C^k** (equivalentemente **differenziabile di classe C^k** se $k \geq 1$) e si scrive in tal caso $f \in C^k(\Omega; \mathbb{R}^m)$ o $C^k(\Omega; \mathbb{C}^m)$, rispettivamente, se tutte le derivate parziali (incluse quelle miste) delle componenti di f esistono e sono continue fino all'ordine k incluso. Si pone $C^k(\Omega) := C^k(\Omega; \mathbb{R})$.

(b) $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ o \mathbb{C}^m è detta di **classe C^∞** se è di classe C^k per ogni $k = 0, 1, \dots$ e si definisce:

$$C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m) := \bigcap_{k=0,1,\dots} C^k(\Omega; \mathbb{R}^m), \quad C^\infty(\Omega; \mathbb{C}^m) := \bigcap_{k=0,1,\dots} C^k(\Omega; \mathbb{C}^m).$$

Useremo la convenzione che $C^\infty(\Omega) := C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ a meno che non sia esplicitamente precisato diversamente.

(c) In riferimento alle definizioni già date $C_0^k(\Omega; \mathbb{C}^n)$ (rispettivamente $C_0^k(\Omega)$), con $k = 0, 1, \dots, \infty$, indica l'insieme delle funzioni in $C^k(\Omega; \mathbb{C}^n)$ (rispettivamente $C^k(\Omega)$) il cui *supporto*, riferito a Ω , è compatto. \diamond

Diamo separatamente un'altra importante definizione che riguarda le funzioni differenziabili su un insieme ottenuto dalla chiusura di un aperto $\bar{\Omega}$.

Definizione 1.2. Siano $n, m = 1, 2, \dots$ e $k = 0, 1, \dots$ fissati e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto (non vuoto). $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^m$ o \mathbb{C}^m è detta essere **di classe C^k** , con $k = 0, 1, \dots, \infty$ e si scrive in tal caso $f \in C^k(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^m)$ ($f \in C^k(\bar{\Omega})$ se $m = 1$) o, rispettivamente $f \in C^k(\bar{\Omega}; \mathbb{C}^m)$, quando $f|_{\Omega} \in C^k(\Omega; \mathbb{R}^m)$, rispettivamente $f|_{\Omega} \in C^k(\Omega; \mathbb{C}^m)$ e tutte le derivate di f fino all'ordine k si estendono con continuità a funzioni su $\bar{\Omega}$. \diamond

Osservazioni 1.1.

(1) In base alla proposizione enunciata subito prima della definizione 1.2 (tenendo conto che

una funzione differenziabile risulta sempre essere continua) per verificare se una funzione sia di classe $C^k(\Omega)$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, è sufficiente provare che esistono e siano funzioni continue le derivate (incluso quelle miste) di ordine k . La continuità delle derivate di ordine inferiore è automaticamente valida.

(2) Nel caso in cui, per $a, b \in \mathbb{R}$, $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$, può provare che $f \in C^k([a, b]; \mathbb{R}^n)$ (o $f \in C^k([a, b]; \mathbb{C}^n)$ se la funzione è a valori complessi), se e solo se f è la restrizione ad $[a, b]$ di una funzione di classe C^k definita su un aperto che include il chiuso $[a, b]$. Questa proprietà in generale non vale passando a funzioni definite su sottinsiemi di \mathbb{R}^n con $n > 1$, invece che su $[a, b]$. Tuttavia esistono importanti risultati a riguardo, sotto opportune ipotesi, in particolare due famosi teoremi dovuti rispettivamente a Whitney e Seeley¹.

(3) È importante osservare che nella definizione 1.2, la condizione $f \in C^1([a, b])$ non richiede automaticamente che esistano la derivata destra in a e la derivata sinistra in b :

$$D^+f|_a := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad D^-f|_b := \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}. \quad (1.2)$$

Richiede invece che, tra le altre cose, esistano finiti i *limiti* delle derivate, calcolate in (a, b) , verso a da destra e verso b da sinistra:

$$\exists \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{df}{dx} \Big|_x \in \mathbb{R}, \quad \exists \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{df}{dx} \Big|_x \in \mathbb{R}.$$

In generale questa seconda condizione è più debole della richiesta di esistenza di $D^+f|_a$ e $D^-f|_b$. Si deve tuttavia osservare che l'ulteriore richiesta che f sia continua in a e b (richiesta inclusa in $f \in C^1([a, b])$), implica che esistano finite le derivate destre e sinistre e coincidano con i rispettivi limiti delle derivate come banale conseguenza del teorema di Lagrange:

$$\exists D^+f|_a = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{df}{dx} \Big|_x \in \mathbb{R}, \quad \exists D^-f|_b = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{df}{dx} \Big|_x \in \mathbb{R}.$$

Definizione 1.3. Un'applicazione continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ (o \mathbb{C}^n) è detta essere C^k **a tratti**, con $k = 1, 2, \dots, \infty$, se esistono un numero finito di punti $a = t_1 < t_2 < \dots < t_N = b$ tali che $f|_{[t_r, t_{r+1}]} \in C^k([t_r, t_{r+1}]; \mathbb{R}^n)$ (rispettivamente $C^k([t_r, t_{r+1}]; \mathbb{C}^n)$) se $r = 1, \dots, N-1$.

Nel caso $n > 1$, la funzione f di sopra si dice **curva** (o **cammino** o **arco**) C^k **a tratti**. \diamond

Il simbolo ∇ – detto *nabla* – indica il vettore colonna di derivate $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})^t$, dove x^1, \dots, x^n sono le coordinate standard di \mathbb{R}^n . Tale simbolo viene usato come precisiamo di seguito.

Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ o \mathbb{C} , ∇f indica il **gradiente** di f , cioè il vettore colonna le cui componenti sono le derivate parziali di f . Il gradiente ∇f viene anche indicato con *grad* f .

¹Dal teorema di Seeley segue che, se $\bar{\Omega}$ è una cosiddetta *varietà con bordo infinitamente differenziabile* sottovarietà di \mathbb{R}^n , dove $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è aperto, allora $f \in C^k(\bar{\Omega})$, con $k \geq 1$, se e solo se f è la restrizione a $\bar{\Omega}$ di una funzione $g \in C^k(\mathbb{R}^n)$.

Nel caso in cui $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto, sia differenziabile in un punto $x_0 \in \Omega$, il gradiente in tale punto individua l'operatore lineare nel secondo membro della (1.1)²:

$$L_{x_0}(h) = \nabla f|_{x_0} \cdot h,$$

dove \cdot è il prodotto scalare standard in \mathbb{R}^n .

Se $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un campo vettoriale, $\nabla \cdot V$ indica la **divergenza** di V , cioè il campo scalare:

$$\nabla \cdot V := \sum_{k=1}^n \frac{\partial V^k}{\partial x^k},$$

dove V^k indica la k -esima componente di V . La divergenza $\nabla \cdot V$ viene anche indicata con $div V$.

Se $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è un campo vettoriale, $\nabla \wedge V$ indica il **rotore** di V , cioè il campo vettoriale:

$$\nabla \wedge V := \left(\frac{\partial V^2}{\partial x^3} - \frac{\partial V^3}{\partial x^2} \right) e_1 + \left(\frac{\partial V^3}{\partial x^1} - \frac{\partial V^1}{\partial x^3} \right) e_2 + \left(\frac{\partial V^1}{\partial x^2} - \frac{\partial V^2}{\partial x^1} \right) e_3,$$

e_1, e_2, e_3 sono i vettori della base canonica di \mathbb{R}^3 . Il rotore $\nabla \wedge V$ viene anche indicato con $rot V$ e anche con $\nabla \times V$.

Infine, se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$, $\Delta f := \nabla \cdot \nabla f = div grad f$ indica il **laplaciano** di f , cioè il campo scalare:

$$\Delta f := \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial (x^k)^2}.$$

L'operatore $\Delta := \nabla \cdot \nabla$ è detto **operatore di Laplace** o **laplaciano**.

1.1.2 Alcune proprietà della connessione.

Ricordiamo che uno spazio topologico Ω si dice **connesso** se non si può scrivere come l'unione di due aperti non vuoti disgiunti. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si dice che Ω è **connesso** se è tale rispetto alla topologia relativa indotta da quella di \mathbb{R}^n su di esso. Un risultato elementare della topologia di \mathbb{R}^n , che useremo varie volte nel seguito, è il seguente.

Proposizione 1.1. *Se $A \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme aperto non vuoto e connesso, allora è connesso per archi continui e, più fortemente, per archi C^∞ a tratti \diamond .*

Dimostrazione. Osserviamo preventivamente che le curve C^k a tratti sono, per definizione, anche continue; per cui è sufficiente provare la tesi nel caso di curve C^∞ a tratti. Se $p \in A$ (aperto di \mathbb{R}^n non vuoto connesso) sia C_p il sottoinsieme dei punti q di A per cui esiste una

²Si osservi che, con la nostra definizione, potrebbe esistere il gradiente di una funzione in un punto ma la funzione potrebbe non essere differenziabile nel punto considerato. Tuttavia tale eventualità non si presenterà.

curva C^∞ a tratti $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ con $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$ e N_p il sottoinsieme dei punti q di A per cui *non* esiste alcuna curva C^∞ a tratti $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ con $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$. C_p è aperto come proviamo ora. Se $q \in C_p$, dato che $q \in A$ aperto, esiste una palla aperta B centrata in q tutta contenuta in A . I punti q' di B sono connettabili a p dal cammino continuo, tutto contenuto in A , che si ottiene prolungando una curva C^∞ a tratti γ da p a q tutta inclusa in A in un segmento da q a q' , che giace su un raggio di B . La curva ottenuta in questo modo è, evidentemente, ancora C^∞ a tratti e quindi $B \subset C_p$. N_p è anch'esso aperto: sia $B' \subset A$ una palla aperta centrata in $q' \in N_p$. Se un punto $q'' \in B'$ fosse connettabile a p da un arco C^∞ a tratti incluso in A , lo sarebbe anche q' , prolungando tale cammino in un raggio da q'' al centro della palla q' . Quindi $B' \subset N_p$ e, conseguentemente, N_p è aperto. Dato che l'aperto $A = C_p \cup N_p$ è connesso e gli aperti C_p e N_p (che sono tali anche nella topologia di A) sono disgiunti con $C_p \neq \emptyset$, deve essere $N_p = \emptyset$, cioè A è connesso per archi C^∞ a tratti. \square

Osservazioni 1.2. Lo stesso ragionamento di sopra si può ripetere usando curve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^∞ che escono da $p \in A$ e raggiungono $q \in A$. L'unica ostruzione per arrivare alla conclusione che C_p e N_p sono aperti è che quando si prolunga la curva detta in una curva γ' prolungando γ in un segmento dato da un raggio della palla B sopra introdotta, si produce una curva C^∞ a tratti: un possibile punto non C^∞ , l'unico, è proprio il raccordo tra la curva iniziale ed il raggio della palla B . È abbastanza evidente, ma ciò richiederebbe qualche dettaglio tecnico che non discutiamo, che sia sempre possibile modificare la curva γ' in prossimità di tale punto ottenendo una curva ovunque C^∞ , tutta contenuta in A , che congiunge p a q . Pertanto l'enunciato della proposizione precedente può essere rinforzato rimuovendo la locuzione "a tratti" dalla tesi.

Una proprietà elementare degli spazi topologici connessi che useremo alcune volte è la seguente.

Proposizione 1.2. *Uno spazio topologico Ω è connesso se e solo se gli unici suoi sottoinsiemi simultaneamente aperti e chiusi sono \emptyset e Ω stesso. \diamond*

Dimostrazione. Dimostriamo che Ω contiene un sottoinsieme aperto e chiuso diverso da \emptyset e Ω stesso se e solo se Ω non è connesso. Questo è sufficiente a provare la proposizione.

Se Ω non è connesso allora è unione di due aperti non vuoti disgiunti $\Omega = A \cup B$. L'aperto A è chiuso perché il suo complemento B è aperto e $A \neq \Omega$, $A \neq \emptyset$ per ipotesi. Viceversa, se Ω contiene un aperto A che è anche chiuso e che è diverso da Ω e \emptyset , allora $B := \Omega \setminus A$ è aperto, non vuoto, disgiunto da A e $\Omega = A \cup B$ e pertanto Ω non è connesso. \square

La proposizione precedente si applica in particolare ai sottoinsiemi connessi di $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, facendo riferimento alla loro topologia relativa.

1.1.3 Norme e seminorme.

Ricordiamo qualche utile nozione, che dovrebbe già essere nota, riguardante gli spazi normati.

Definizione 1.4. Se X è uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{K} che può essere indifferentemente \mathbb{R} o \mathbb{C} , una **norma**, $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ è un'applicazione che gode delle seguenti proprietà.

stretta positività: $p(v) \geq 0$ e $p(v) = 0$ implica $v = 0$, per ogni $v \in X$,

omogeneità: $p(av) = |a|p(v)$ per ogni $v \in X$ e ogni $a \in \mathbb{K}$,

disuguaglianza triangolare: $p(u + v) \leq p(u) + p(v)$ per ogni $u, v \in X$.

Ogni spazio vettoriale dotato di norma (X, p) si dice **spazio normato**.

Nel caso che, a parità delle rimanenti richieste, la stretta positività venga indebolita in:

positività: $p(v) \geq 0$ per ogni $v \in X$,

allora p è detta **seminorma**. \diamond

Nel seguito useremo la notazione standard $\| \cdot \|$ per le norme e, qualche volta, anche per le seminorme.

Ogni spazio normato è uno spazio topologico metrico, quando la distanza è definita come:

$$d(u, v) := \|u - v\| \quad \text{per ogni } u, v \in X.$$

Si osservi che tale distanza è invariante per traslazioni: $d(u + w, v + w) = d(u, v)$ se $u, v, w \in X$. Una base per la detta topologia è quella data dalle solite **palle (metriche) aperte** di centro $x \in X$ e raggio $r > 0$ arbitrari:

$$B_r(x) := \{u \in X \mid \|u - x\| < r\}.$$

La topologia costruita in questo modo soddisfa la *proprietà di Hausdorff*: per ogni coppia di punti esistono due insiemi aperti disgiunti che contengono rispettivamente i due punti.

Nel caso lo spazio vettoriale X sia dotato di una seminorma p , le palle aperte:

$$B_r(x) := \{u \in X \mid p(u - x) < r\},$$

sono ancora la base di una topologia naturale su X . Tuttavia la proprietà di Hausdorff non è garantita in generale.

Lo spazio vettoriale complesso $C^0(K; \mathbb{C})$ delle funzioni continue a valori complessi sul compatto non vuoto $K \subset \mathbb{R}^n$ è uno spazio normato rispetto alla norma:

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

Sullo spazio vettoriale complesso $C^1([a, b]; \mathbb{C})$ delle funzioni derivabili con derivata continua a valori complessi, definite sull'intervallo compatto $[a, b] \subset \mathbb{R}$, la funzione $p : C^1([a, b]; \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$p(f) := \sup_{x \in [a, b]} \left| \frac{df(x)}{dx} \right|$$

non è una norma, ma solo una seminorma. Per cui lo spazio non è normato. È invece una norma su $C^1([a, b]; \mathbb{C})$:

$$\|f\| := \|f\|_\infty + p(f).$$

La funzione p sopra definita diventa una norma se, per esempio, la si restringe al sottospazio delle funzioni di $C^1([a, b]; \mathbb{C})$ che si annullano in a .

Ricordiamo infine che in uno spazio metrico (X, d) , e quindi in particolare in uno spazio normato, una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ è detta essere **di Cauchy**, se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N > 0$ per cui $d(x_n, x_m) < \epsilon$ se $n, m > N$. Evidentemente ogni successione convergente a qualche punto di X è automaticamente di Cauchy, ma non vale il viceversa in generale. Uno spazio metrico (ed in particolare uno spazio normato) in cui ogni successione di Cauchy converge a qualche punto dello spazio è detto essere **completo**.

1.1.4 Risultati elementari sulle serie di funzioni.

Per concludere, riportiamo i teoremi classici di scambio del simbolo limite e derivata con quelli di serie ed integrale, preceduti dall'utile teorema di Weierstrass detto *della convergenza totale* e dal teorema sulla continuità del limite della serie di funzioni continue quando la convergenza è uniforme.

Teorema 1.1. (**Convergenza totale di Weierstrass.**) *Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni definite sull'insieme S a valori in \mathbb{C} (o \mathbb{R}). Se esiste una successione di costanti $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $0 \leq |f_n(x)| \leq c_n$ per ogni $x \in S$ e tale che:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n < +\infty,$$

allora la serie di funzioni su S :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

soddisfa:

- (a) $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| < +\infty$ per ogni $x \in S$;
- (b) esiste (ed è unica) una funzione f definita su S tale che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{per ogni } x \in S;$$

- (c) la convergenza della serie in (b) è uniforme su S , cioè:

$$\sup_{x \in S} \left| f(x) - \sum_{n=0}^N f_n(x) \right| \rightarrow 0 \quad \text{per } N \rightarrow +\infty.$$

◇

Osservazioni 1.3. Si noti che, nelle ipotesi del teorema, anche la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)|$ converge uniformemente: se le ipotesi del teorema sono soddisfatte, anche la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$ con $g_n(x) := |f_n(x)|$ le soddisfa, per cui (c) è valido anche per tale serie.

Dimostrazione del teorema della convergenza totale di Weierstrass. Valendo $|f_n(x)| \leq c_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n < +\infty$, il criterio del confronto assicura che $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| < +\infty$ per ogni $x \in S$ e quindi la successione $\{S_N(x)\}_{N \in \mathbb{N}}$ delle ridotte $S_N(x) := \sum_{n=0}^N |f_n(x)|$ è una successione di Cauchy. Fissato $x \in S$,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^M f_n(x) - \sum_{n=0}^N f_n(x) \right| &= \left| \sum_{n=N+1}^M f_n(x) \right| \leq \sum_{n=N+1}^M |f_n(x)| \\ &= |S_M(x) - S_N(x)| \quad \text{per ogni } N, M \in \mathbb{N} \text{ con } M \geq N. \end{aligned}$$

Concludiamo che la successione $\{s_N(x)\}_{N \in \mathbb{N}}$ delle ridotte $s_N(x) := \sum_{n=0}^N f_n(x)$ è anch'essa una successione di Cauchy, e quindi la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge per ogni fissato $x \in S$ per la completezza di \mathbb{C} . Viene a definirsi in tal modo una funzione, unicamente determinata da: $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

Non resta che mostrare che la convergenza della serie ad f è uniforme in x . Dato che la serie delle costanti non negative c_n converge, il resto di tale serie deve tendere a zero: per ogni $\epsilon > 0$ possiamo trovare $N \in \mathbb{N}$ tale che:

$$0 \leq \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} c_n < \epsilon \quad \text{se } n_0 > N.$$

Di conseguenza, se $n_0 > N$:

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) - \sum_{n=0}^{n_0} f_n(x) \right| = \left| \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} f_n(x) \right| \leq \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} c_n < \epsilon \quad \forall x \in S.$$

Abbiamo provato che, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che, se $n > N$:

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) - \sum_{n=0}^n f_n(x) \right| < \epsilon \quad \forall x \in S.$$

In altre parole la convergenza della serie è uniforme. Si osservi che, dato che la stima di sopra non dipende da $x \in S$, varrà anche prendendo l'estremo superiore su $x \in S$, al più rimpiazzando $<$ con \leq : per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che, se $n_0 > N$:

$$\sup_{x \in S} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) - \sum_{n=0}^{n_0} f_n(x) \right| \leq \epsilon,$$

che è lo stesso che dire:

$$\sup_{x \in S} \left| f(x) - \sum_{n=0}^{n_0} f_n(x) \right| \rightarrow 0 \quad \text{per } n_0 \rightarrow +\infty.$$

□

Osservazioni 1.4. Le serie reali assolutamente convergenti possono essere riordinate a piacimento senza alterarne la somma per il teorema del riordinamento di Riemann [Gi03], il risultato può essere esteso, in forma modificata, al caso di serie di numeri complessi con una versione elementare del *teorema di Steinitz*.

Teorema 1.2. (Riordinamento delle serie complesse.) *Si consideri una serie di numeri complessi $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$. Vale quanto segue.*

(a) *Se la serie converge assolutamente allora esiste un unico $s \in \mathbb{C}$ tale che, per ogni funzione biettiva $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, vale $\sum_{n=0}^{+\infty} c_{f(n)} = s$ dove la convergenza è assoluta.*

(b) *Se la serie converge, ma non converge assolutamente, allora esiste (non vuoto) un insieme $S \subset \mathbb{C}$ di punti c per cui è possibile trovare una funzione biettiva $f_c : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $\sum_{n=0}^{+\infty} c_{f_c(n)} = c$. Tale insieme può essere solo di uno dei due seguenti tipi:*

(i) $S = \mathbb{R}$,

(ii) $S = \{at + b \mid t \in \mathbb{R}\}$ per $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq 0$ costanti individuati dalla serie data.

◇

Si noti che, di conseguenza, una serie di numeri complessi $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ è assolutamente convergente se e solo se comunque la si riordini converge sempre allo stesso valore $s \in \mathbb{C}$, cioè esiste $s \in \mathbb{C}$ tale che, per ogni $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_{f(n)} = s$.

Procediamo con gli altri teoremi classici sulle serie di funzioni.

Teorema 1.3. *Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni continue definite su $S \subset \mathbb{R}^m$ a valori in \mathbb{C} (o \mathbb{R}). Valgono i fatti seguenti.*

(a) *Se esiste $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ tale che:*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{per ogni } x \in S,$$

dove la convergenza è uniforme, allora f è continua su S .

In tal caso, per ogni compatto $K \subset S$, vale:

$$\int_K f(x) d^m x = \int_K \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) d^m x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_K f_n(x) d^m x.$$

(b) *Se esiste $F : S \rightarrow \mathbb{C}$ tale che:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = F(x) \quad \text{per ogni } x \in S,$$

dove la convergenza della serie è uniforme, allora F è continua su S .
 In tal caso, per ogni compatto $K \subset S$, vale:

$$\int_K F(x) d^m x = \int_K \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) d^m x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_K f_n(x) d^m x.$$

◇

L'integrale è indifferentemente interpretabile nel senso di Riemann o Lebesgue se K è misurabile secondo Peano-Jordan, altrimenti si deve intendere nel senso di Lebesgue.

Dimostrazione. È evidente che è sufficiente provare la tesi nel caso di f . Il caso della serie si riduce al precedente considerando la successione delle ridotte $\{F_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, con $F_m(x) := \sum_{n=0}^m f_n(x)$, che è costituita da funzioni continue perchè somme finite di funzioni continue.

Proviamo dunque che, nelle ipotesi del teorema, f è continua nel punto generico $x \in S$.

Per costruzione possiamo sempre scrivere, se $y \in S$ e $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|. \end{aligned}$$

Fissato $\epsilon > 0$, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che, se $n > N$ allora $|f(z) - f_n(z)| < \epsilon/3$ per qualsiasi $z \in S$, a causa della convergenza uniforme della successione. Pertanto, per $\epsilon > 0$ fissato, considero $n = N + 1$ trovando, per ogni scelta di $x, y \in S$:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \leq \epsilon/3 + |f_{N+1}(x) - f_{N+1}(y)| + \epsilon/3.$$

Dato che la funzione f_{N+1} è continua, posso anche trovare $\delta > 0$ tale che, se $\|x - y\| < \delta$, allora:

$$|f_{N+1}(x) - f_{N+1}(y)| < \epsilon/3.$$

Mettendo tutto insieme, abbiamo provato quanto segue per ogni fissato $x \in S$. Se $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, se $\|x - y\| < \delta$, allora:

$$|f(x) - f(y)| < 3\epsilon/3 = \epsilon.$$

In altre parole f è continua in x . La seconda affermazione in (a) segue dalle proprietà elementari dell'integrale, tenendo conto del fatto che la misura dei compatti è finita, che le funzioni continue sono limitate sui compatti e che la convergenza della serie delle f_n è uniforme:

$$0 \leq \left| \int_K f d^m x - \int_K f_n d^m x \right| \leq \int_K |f(x) - f_n(x)| d^m x \leq \sup_{x \in K} |f(x) - f_n(x)| \int_K 1 d^m x \rightarrow 0 \quad \text{se } n \rightarrow +\infty.$$

□

Osservazioni 1.5. La prima parte dei punti (a) e (b) funziona anche considerando funzioni continue definite su uno spazio topologico arbitrario S ed a valori in \mathbb{R}^k o \mathbb{C}^k , usando sul codominio la norma naturale di, rispettivamente, \mathbb{R}^k o \mathbb{C}^k anziché il modulo, con un'ovvia estensione

della nozione di convergenza uniforme. La dimostrazione è immediata.

Per quanto riguarda la seconda parte, che coinvolge la nozione di integrale, essa è valida se S ha misura finita ed usando una misura in cui la funzioni continue su S siano misurabili (tipicamente una misura di Borel). In realtà nel caso valgono i più utili e generali teoremi della *convergenza monotona* e della *convergenza dominata* che richiamiamo in appendice.

Teorema 1.4. *Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni $f_n : S \rightarrow \mathbb{C}$ (o \mathbb{R}) con $S \subset \mathbb{R}^m$ aperto tale che, rispetto ad una fissata coordinata x^k , esistano le derivate $\frac{\partial f_n}{\partial x^k}$ e definiscano funzioni continue su S . Vale quanto segue.*

(a) *Se la successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente su S e la successione $\left\{\frac{\partial f_n}{\partial x^k}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente su S , allora si può derivare nella variabile x^k la prima successione sotto il segno di limite:*

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\partial}{\partial x^k} f_n(x) \quad \forall x \in S.$$

(b) *Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge puntualmente su S e la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial f_n}{\partial x^k}$ converge uniformemente su S , allora si può derivare nella variabile x^k la prima serie sotto il segno di serie:*

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x^k} f_n(x) \quad \forall x \in S.$$

◇

Dimostrazione. Come per il teorema precedente è sufficiente provare (a), dato che (b) è un immediato corollario lavorando con le successioni di ridotte delle serie.

Senza perdere generalità supporremo $k = 1$. Indicheremo con x la variabile x^1 e con y le rimanenti $m - 1$ variabili. Per ipotesi abbiamo che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\partial f_n(x, y)}{\partial x} = g(x, y),$$

dove la funzione $g : S \rightarrow \mathbb{C}$ è continua, per il teorema 1.3, dato che è limite uniforme di funzioni continue. Fissiamo $(x_0, y) \in S$ e lavoriamo in un m -quadrato aperto, Q , sufficientemente piccolo che include (x_0, y) e tale che $Q \subset S$: tale Q esiste perché gli m -quadrati aperti sono una base della topologia di \mathbb{R}^m e S è aperto. Dato che la successione converge uniformemente possiamo scrivere, applicando il teorema 1.3,

$$\int_{x_0}^x g(x', y) dx' = \int_{x_0}^x \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\partial f_n(x', y)}{\partial x} dx' = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^x \frac{\partial f_n(x', y)}{\partial x} dx',$$

per ogni x tale che $(x, y) \in Q$. Applicando il secondo teorema fondamentale del calcolo (essendo le derivate che appaiono nell'ultimo integrale delle funzioni continue) e tenendo conto che la successione delle f_n converge ovunque su S :

$$\int_{x_0}^x g(x', y) dx' = \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n(x, y) - f_n(x_0, y)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x, y) - \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0, y).$$

Dato che la funzione g è continua, possiamo applicare il teorema fondamentale del calcolo, derivando in x , per $x = x_0$, i due membri (notando che $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0, y)$ non dipende da x), ottenendo:

$$g(x_0, y) = \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{x=x_0} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x, y).$$

Dato che $(x_0, y) \in S$ è arbitrario, possiamo riscrivere l'identità di sopra:

$$g(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x, y) \quad \forall (x, y) \in S.$$

Per definizione di g , abbiamo ottenuto che su S :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\partial f_n(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x, y).$$

Questo è quanto volevamo provare. \square

Osservazioni 1.6. Come si evince dalla dimostrazione, la validità della tesi è garantita sotto le ipotesi più deboli che le derivate parziali $\frac{\partial f_n}{\partial x^k}$ esistano, siano continue nella sola variabile x^k per x^j fissate con $j \neq k$ e che la successione/serie di tali derivate parziali converga uniformemente in x^k quando le rimanenti variabili sono fissate in un intorno “rettangolare” di ogni $x \in S$. In appendice riportiamo alcuni teoremi più generali di quello appena visto, riguardanti lo scambio del simbolo di derivata e quello di serie (e anche quello di integrale) basati sulla teoria della misura generale.

1.2 Motivazioni fisico matematiche per lo studio delle equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine: le equazioni di Maxwell.

In fisica molto spesso le leggi che descrivono la dinamica di un certo sistema fisico, ed in particolare certe grandezze differenziabili dipendenti dal tempo e dal posto, sono date in termini di *equazioni differenziali alle derivate parziali* tra queste grandezze. Una tale equazione è una (o più) relazione tra le derivate (in generale di ordine arbitrario) nello spazio e nel tempo delle grandezze considerate. Ci si aspetta che, assegnando qualche ulteriore informazione (dati iniziali e/o al contorno), le equazioni considerate ammettano una ed una sola soluzione.

L'importanza in fisica delle equazioni differenziali alle derivate parziali è evidente studiando la storia della fisica. Tale teoria permette di dare una formalizzazione adeguata delle equazioni fondamentali che riguardano i sistemi fisici che hanno un'estensione non puntiforme e sono dunque descritti da funzioni del posto e del tempo (densità, campi di velocità, campi di forze,...). Tali sistemi non puntiformi sono presenti in vari rami della fisica come la meccanica dei mezzi continui, la fluidodinamica, la teoria dei campi classica, relativistica e quantistica-relativistica. Un capitolo importante sia dal punto di vista fisico che da quello matematico è quello che riguarda la teoria classica dell'*elettromagnetismo*.

Nel diciannovesimo secolo la formalizzazione teorica completa della teoria Elettromagnetica fu data da J. C. Maxwell. Le sue quattro equazioni differenziali lineari alle derivate parziali per il campo elettrico $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t, \mathbf{x})$ ed il campo magnetico $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = 4\pi\rho(t, \mathbf{x}) \\ \nabla \wedge \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(t, \mathbf{x}) \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(t, \mathbf{x}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(t, \mathbf{x}) \end{cases} \quad (1.3)$$

assieme alle legge di conservazione della carica e alla forza di Lorentz che vedremo più avanti, descrivono completamente (nell'ambito della fisica classica) il sistema fisico dato dal campo elettromagnetico ed dalle sue sorgenti ρ, \mathbf{J} (vedi oltre) considerati come funzioni assegnate. Dal punto di vista della teoria delle equazioni alle derivate parziali, il problema matematico è quello di determinare le funzioni a valori vettoriali $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t, \mathbf{x})$ e $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ quando sono assegnate le funzioni ρ e \mathbf{J} ed ulteriori dati detti *dati iniziali* e *condizioni al contorno*.

L'esempio delle equazioni di Maxwell è però interessante in questa parte del corso dal punto di vista didattico perché permette di introdurre diversi operatori differenziali ed alcuni teoremi generali che vengono adoperati in tutta la teoria classica delle equazioni differenziali alle derivate parziali. Nel seguito riassumeremo alcuni aspetti matematici delle equazioni di Maxwell.

Osservazioni 1.7. Il simbolo c che appare nelle equazioni scritte sopra è una costante con il valore della velocità della luce, circa 300.000 km/s. Deve essere precisato che l'espressione delle equazioni scritte può variare a seconda del sistema di unità di misura che si sceglie. In pratica con scelte diverse del sistema di unità di misura possono apparire costanti differenti da c davanti ai campi elettrici e magnetici ed anche i fattori che includono π possono essere differenti. Il sistema di unità di misura che stiamo usando per scrivere le equazioni di Maxwell è noto come *sistema CGS di Gauss*.

1.2.1 Equazioni di Maxwell in forma integrale.

In presenza di campi elettromagnetici $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t, \mathbf{x})$ e $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ assegnati in un sistema di riferimento \mathcal{S} con coordinate cartesiane solidali $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e coordinata temporale $t \in \mathbb{R}$, una carica puntiforme q è sottoposta ad una forza detta di **forza Lorentz** descritta da, se $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ sono la posizione e la velocità della carica nel riferimento \mathcal{S} al tempo t :

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)) = q \mathbf{E}(t, \mathbf{x}(t)) + \frac{q}{c} \mathbf{v}(t) \wedge \mathbf{B}(t, \mathbf{x}(t)). \quad (1.4)$$

In riferimento alle coordinate di \mathcal{S} suddette, in ogni regione spaziotemporale aperta nella quale sono definiti i campi \mathbf{E} e \mathbf{B} , valgono le celeberrime **equazioni di Maxwell con sorgenti** (nel

vuoto):

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_{+\partial V} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = 4\pi \int_V \rho \, d^3x, \\ \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Sigma_C} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS, \\ \oint_{+\partial V} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0, \\ \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{x} = \frac{4\pi}{c} \int_{\Sigma_C} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, dS + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Sigma_C} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS, \end{array} \right. \quad (1.5)$$

dove, V è un volume in quiete in \mathcal{S} il cui bordo ∂V è una superficie chiusa regolare orientabile (cioè il vettore normale è definibile con continuità su tutta la superficie senza che si annulli in alcun punto di essa) ed il versore normale è indicato con \mathbf{n} . L'orientazione di \mathbf{n} è uscente, come indicato dal segno $+$ davanti a ∂V . C è una curva, con vettore tangente non nullo, chiusa, in quiete in \mathcal{S} , che è il bordo della superficie regolare Σ . Il versore normale a Σ è orientato con la legge della mano destra rispetto al vettore tangente a C . $\rho = \rho(t, \mathbf{x})$ e $\mathbf{J}(t, \mathbf{x})$ sono rispettivamente la densità (volumetrica) di carica elettrica (pertanto la carica complessiva presente, all'istante t , in un fissato volume si ottiene integrando la funzione $\rho(t, \mathbf{x})$ nella variabile \mathbf{x} nel volume detto) ed il vettore densità di corrente elettrica. Quest'ultimo può essere pensato come della forma $\mathbf{J}(t, \mathbf{x}) = \rho(t, \mathbf{x})\mathbf{V}(t, \mathbf{x})$, dove \mathbf{V} è il campo di velocità delle cariche elettriche con densità di carica ρ . Se sono presenti più tipi di portatori di carica (per esempio elettroni e ioni), questa forma elementare della densità corrente deve essere modificata. La regolarità dei campi e delle densità è supposta tale da dare senso alle equazioni scritte.

Le equazioni di Maxwell scritte sopra sono in forma integrale. Mostreremo tra poco come trascriverle in forma di equazioni differenziali alle derivate parziali. Per fare ciò dobbiamo ricordare qualche teorema di analisi elementare.

1.2.2 Teoremi di Gauss, Stokes ed equazioni di Maxwell in forma differenziale locale.

Ricordiamo che una funzione misurabile $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ (o \mathbb{R}), con $A \subset \mathbb{R}^n$ misurabile, è detta **integrabile secondo Lebesgue**, oppure equivalentemente **assolutamente integrabile secondo Lebesgue** oppure equivalentemente **Lebesgue-integrabile**, se

$$\int_A |f| \, d^n x < +\infty,$$

dove $d^n x$ denota la misura di Lebesgue su \mathbb{R}^n . L'insieme delle funzioni Lebesgue integrabili si denota con $\mathcal{L}^1(A)$. Supporremo nota la teoria elementare della misura di Lebesgue in \mathbb{R}^n e le sue relazioni con la teoria dell'integrazione secondo Riemann.

Ricordiamo ora i teoremi di Gauss (noto anche come “teorema della divergenza”) e di Stokes.

Teorema 1.5. (di Gauss). *Sia Ω un aperto non vuoto di \mathbb{R}^n , la cui chiusura $\overline{\Omega}$ è compatta³ e tale che il suo bordo $\partial\Omega$ sia una superficie regolare orientabile con versore normale \mathbf{n} orientato in maniera uscente. Se $\mathbf{F} : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ è di classe $C^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \cap C^0(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$, allora vale la **formula di Gauss**:*

$$\oint_{+\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} \, d^n x, \quad (1.6)$$

dove il secondo integrale è un integrale di Lebesgue se $\nabla \cdot \mathbf{F}$ è Lebesgue-integrabile su Ω (e ciò accade in particolare se $\mathbf{F} \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$), altrimenti è da intendersi come un integrale improprio nel senso di Riemann. \diamond

Teorema 1.6. (di Stokes). *Sia $C \subset \mathbb{R}^3$ una curva chiusa, C^1 a tratti, con vettore tangente mai nullo, orientata, bordo della superficie regolare Σ_C con \mathbf{n} versore normale a Σ_C orientato con la legge della mano destra rispetto al senso di percorrenza di C . Sia $\Omega \supset \Sigma_C \cup C$ un insieme aperto e limitato. Se $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ è un campo vettoriale di classe $C^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$, allora vale la **formula di Stokes**:*

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\Sigma_C} \nabla \wedge \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (1.7)$$

\diamond

Osservazioni 1.8.

(1) La procedura per provare il teorema di Gauss nelle ipotesi indebolite data sopra è la seguente [V184]. Il teorema di Gauss viene inizialmente provato nel caso in cui entrambi gli integrali esistono e sono ben definiti, cioè quando $\mathbf{F} \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. L'insieme Ω è misurabile secondo Lebesgue, con misura finita essendo aperto e limitato. La chiusura è anch'essa Lebesgue-misurabile ed ha la stessa misura di Ω , in quanto il bordo di Ω ha misura nulla (essendo una superficie $n - 1$ dimensionale regolare). La misura di Peano-Jordan-Riemann di $\overline{\Omega}$ coincide con la misura di Lebesgue di Ω . In questo caso l'identità (1.6) è verificata interpretando il secondo membro come integrale di Riemann su $\overline{\Omega}$ oppure, equivalentemente, come integrale di Lebesgue su Ω : essendo $\nabla \cdot \mathbf{F}$ continuo su $\overline{\Omega}$, i due tipi di integrali sono ben definiti e coincidono.

Quindi si passa ad indebolire l'ipotesi di regolarità di \mathbf{F} sul bordo di Ω . In questa ipotesi più debole si considera una successione di aperti $\{\Omega_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, a chiusura compatta e bordo regolare orientabile, che soddisfino: $\overline{\Omega_m} \subset \Omega_{m+1} \subset \Omega$ e con $\partial\Omega_m$ incluso in un intorno aperto⁴ di $\partial\Omega$ di raggio ϵ_m con $\epsilon_m \rightarrow 0$ se $m \rightarrow +\infty$. Evidentemente $\cup_{m \in \mathbb{N}} \Omega_m = \Omega$.

Per ogni Ω_m , l'identità (1.6) è verificata interpretando il secondo membro come integrale di Riemann su $\overline{\Omega_m}$ oppure, equivalentemente, come integrale di Lebesgue su Ω_m dato che $\mathbf{F} \in$

³Questo equivale a richiedere che l'insieme aperto non vuoto Ω sia limitato.

⁴Se $A \subset \mathbb{R}^n$, un intorno aperto di raggio $\epsilon > 0$ di A è l'insieme dato dall'unione di tutte le palle aperte di raggio ϵ , $B_\epsilon(x)$ centrate in $x \in A$.

$C^1(\overline{\Omega_m}, \mathbb{R}^n)$. Quindi si considerano i limiti:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \oint_{+\partial\Omega_m} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_m} \nabla \cdot \mathbf{F} \, d^n x .$$

Dato che \mathbf{F} è continua su $\overline{\Omega}$, si prova che il limite di sinistra esiste e coincide con

$$\oint_{+\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS .$$

In questo l'interpretazione di (1.6) è :

$$\oint_{+\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_m} \nabla \cdot \mathbf{F} \, d^n x . \quad (1.8)$$

Notare che il limite del secondo membro non dipende dalla classe degli Ω_m scelti, purché soddisfino le ipotesi dette sopra. In questo caso il secondo membro dell'identità di Gauss è interpretato come integrale di Riemann improprio.

Nel caso in cui $\nabla \cdot \mathbf{F}$ sia anche (assolutamente) integrabile nel senso di Lebesgue su Ω , possiamo dire di più . Definiamo $\chi_{\Omega_m} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ come: $\chi_{\Omega_m}(x) = 1$ per $x \in \Omega_m$ e $\chi_{\Omega_m}(x) = 0$ altrimenti. Dato che su Ω vale:

$$|\chi_{\Omega_m}(x) \nabla \cdot \mathbf{F}(x)| \leq |\nabla \cdot \mathbf{F}(x)| ,$$

il *teorema della convergenza dominata* (vedi la sezione B.2 in Appendice) permette di concludere che:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \chi_{\Omega_m} \nabla \cdot \mathbf{F} \, d^n x = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_m} \nabla \cdot \mathbf{F} \, d^n x = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} \, d^n x .$$

In riferimento a (1.8), possiamo ora dire che vale la (1.6) dove il secondo membro dell'identità di Gauss è interpretato come integrale di Lebesgue.

(2) Il teorema di Stokes si potrebbe enunciare con ipotesi molto più deboli, ma non ce ne occupiamo in questa sede.

Usando questi teoremi nelle equazioni di Maxwell in forma integrale, si arriva facilmente a provare che, assumendo i campi di classe C^1 nelle 4 variabili congiuntamente, essi soddisfano le *equazioni di Maxwell in forma differenziale locale*, per ogni punto ed istante:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = 4\pi\rho(t, \mathbf{x}) \\ \nabla \wedge \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(t, \mathbf{x}) \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(t, \mathbf{x}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(t, \mathbf{x}) \end{cases} \quad (1.9)$$

A titolo di esempio, usando il teorema di Gauss, la prima equazione di Maxwell in forma integrale può essere riscritta:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} \, d^3 x = 4\pi \int_V \rho \, d^3 x ,$$

da cui

$$\int_{V_r} (\nabla \cdot \mathbf{E} - 4\pi\rho) d^3x = 0, \quad (1.10)$$

per ogni palla aperta V_r di raggio finito $r > 0$ centrata in \mathbf{x}_0 . Se valesse

$$(\nabla \cdot \mathbf{E}(t, \mathbf{x}_0) - 4\pi\rho(t, \mathbf{x}_0)) = I > 0,$$

troveremmo una contraddizione. Infatti, per continuità, scegliendo r sufficientemente piccolo, l'integrando assumerebbe in V_r valori in $(I - \epsilon, I + \epsilon)$ con $I - \epsilon > 0$, e pertanto

$$\int_{V_r} (\nabla \cdot \mathbf{E} - 4\pi\rho) d^3x > (I - \epsilon) \frac{4\pi r^3}{3} > 0,$$

che contraddirebbe l'ipotesi (1.10). Si ottiene la stessa contraddizione assumendo $I < 0$. Concludiamo che, per ogni punto $(t, \mathbf{x}) \in I \times \Omega$ in cui vale la prima equazione di Maxwell in forma integrale, deve valere anche la prima equazione di Maxwell in forma differenziale. Viceversa, se vale la prima equazione in forma differenziale, integrandola su un qualunque insieme V con frontiera ∂V sufficientemente regolare contenuto nel dominio spaziale di validità delle equazioni, ed usando il teorema di Gauss, si ottiene subito la prima equazione di Maxwell in forma integrale su tale volume V . La terza equazione di Maxwell in forma differenziale si ottiene dalla terza equazione in forma integrale con la stessa procedura. Le rimanenti due si ricavano dalle corrispondenti equazioni integrali, con una analoga procedura, ma usando il teorema di Stokes in luogo del teorema della divergenza. A titolo di esempio consideriamo la seconda equazione in forma integrale:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Sigma_C} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS.$$

se il campo \mathbf{B} è C^1 (congiuntamente in tutte le variabili), tale equazione si riscrive, passando sotto il segno di integrale la derivata nel tempo:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} + \int_{\Sigma_C} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

Usando il teorema di Stokes, dopo aver assunto anche il campo \mathbf{E} di classe C^1 , si arriva quindi all'identità:

$$\int_{\Sigma_C} \left(\nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

Ammettiamo per assurdo che, al fissato tempo t_0 e nel punto \mathbf{x}_0 , valga:

$$\nabla \wedge \mathbf{E}|_{(t_0, \mathbf{x}_0)} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Big|_{(t_0, \mathbf{x}_0)} = \mathbf{c} \neq 0.$$

Scegliamo C come una circonferenza centrata in \mathbf{x}_0 nel piano normale a \mathbf{c} , e come Σ_C il cerchio associato a tale circonferenza, in modo tale che $\mathbf{c} \cdot \mathbf{n} = I > 0$. Con queste ipotesi deve essere

$$\int_{\Sigma_C} \left(\nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad (1.11)$$

malgrado, esattamente al centro del cerchio, l'integrando valga $I > 0$ per ipotesi. Lo stesso ragionamento che abbiamo usato per il teorema della divergenza, produce una contraddizione. Infatti, dato che l'integrando in (1.11) è continuo, possiamo scegliere il raggio $R > 0$ del cerchio Σ_C sufficientemente piccolo in modo che su ogni punto del cerchio l'integrando sia maggiore di $I - \epsilon > 0$ si trova:

$$\int_{\Sigma_C} \left(\nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} \, dS > \pi R^2 (I - \epsilon) > 0,$$

in contraddizione con la seconda equazione di Maxwell in forma integrale. Pertanto per ogni (t_0, \mathbf{x}_0) deve valere la seconda equazione di Maxwell in forma differenziale:

$$\nabla \wedge \mathbf{E}|_{(t_0, \mathbf{x}_0)} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Big|_{(t_0, \mathbf{x}_0)} = 0.$$

Per ottenere la quarta ed ultima equazione di Maxwell in forma differenziale dalla corrispondente in forma integrale si procede nello stesso modo. È evidente che procedendo in senso inverso nei ragionamenti, lavorando in tutto lo spazio \mathbb{R}^3 , le equazioni in forma differenziale implicano quelle in forma integrale. Tuttavia le equazioni in forma differenziale richiedono ipotesi più forti sulla regolarità dei campi.

Osservazioni 1.9.

(1) Se $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo aperto e $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un aperto, per campi \mathbf{E} e \mathbf{B} di classe $C^1(I \times \Omega; \mathbb{R}^3)$ e sorgenti $\rho \in C^0(I \times \Omega)$, $\mathbf{J} \in C^0(I \times \Omega; \mathbb{R}^3)$, le equazioni di Maxwell in forma differenziale sono *conseguenza* di quelle integrali assunte valide nello stesso insieme $I \times \Omega$. Nel caso $\Omega = \mathbb{R}^3$ i due set di equazioni sono *equivalenti*. Nel caso generale, l'equivalenza dei due set di equazioni si ha solo se Ω ha una struttura topologica opportuna (vedi osservazione 2.1 più avanti).

(2) Le equazioni di Maxwell in forma differenziale, se si assumono i campi elettrico e magnetico di classe C^2 e le sorgenti ρ e \mathbf{J} di classe C^1 , implicano facilmente la validità dell'equazione che vincola le sorgenti dei campi:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (1.12)$$

(Per ottenere tale equazione è sufficiente calcolare la divergenza dei due membri dell'ultima equazione di Maxwell in forma differenziale, tenere conto del fatto che $\nabla \cdot \nabla \wedge = 0$ ed infine usare nel risultato ottenuto l'identità data dalla prima equazione di Maxwell differenziale.) Questa equazione è detta **equazione di continuità della carica elettrica** ed esprime matematicamente la legge di conservazione locale della carica elettrica. Essa ha un'equivalente forma integrale che si ottiene integrando i due membri dell'equazione su un volume $V \subset \mathbb{R}^3$ dato da un aperto a chiusura compatta il cui bordo è una superficie chiusa regolare ed orientabile ∂V , applicando il teorema della divergenza ed, infine, portando la derivata nel tempo fuori dal segno di integrazione spaziale (ciò è possibile dato che siamo nelle ipotesi del teorema B.3 osservando che l'integrale su V coincide con quello su $K = \overline{V}$ dato che ∂V ha misura nulla):

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(t, \mathbf{x}) d^3x = - \oint_{+\partial V} \mathbf{J}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (1.13)$$

Questa equazione dice che la variazione per unità di tempo della carica totale nel volume V è pari al flusso uscente della densità di corrente attraverso la frontiera di V all'istante considerato. Procedendo in senso contrario nelle implicazioni e tenendo conto dell'arbitrarietà del volume V , si verifica che l'identità (1.13), supposta valida per ogni istante t volume V abbastanza regolare, implica ed è quindi equivalente alla (1.12), se i campi ρ e \mathbf{J} sono di classe C^1 . Infatti la (1.13) si può riscrivere, passando la derivata nel tempo sotto il segno di integrale ed usando il teorema della divergenza:

$$\int_V \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, \mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{J}(t, \mathbf{x}) \right) d^3x = 0. \quad (1.14)$$

Dato che questa identità vale per ogni volume V abbastanza regolare (tale per cui possiamo applicare il teorema della divergenza), ad un istante t , scegliamo come V una palla aperta $V = B_r(\mathbf{x}_0)$ di raggio $r > 0$ centrata in \mathbf{x}_0 . L'integrando $f(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial t} \rho(t, \mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{J}(t, \mathbf{x})$ è continuo. Assumiamo per assurdo che $f(t, \mathbf{x}_0) = I > 0$. Per continuità, fissato $\epsilon > 0$ per cui $I - \epsilon > 0$, possiamo sempre trovare $r > 0$ tale che $f(t, \mathbf{x}) > I - \epsilon > 0$ se $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{x}_0)$. In tal caso abbiamo l'assurdo

$$\int_{B_r(\mathbf{x}_0)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, \mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{J}(t, \mathbf{x}) \right) d^3x \geq \int_{B_r(\mathbf{x}_0)} (I - \epsilon) d^3x = \frac{4\pi r^3}{3} (I - \epsilon) > 0$$

che contraddice la (1.14) valida per ipotesi. Il caso $I < 0$ si tratta nello stesso modo. Si conclude che la validità di (1.14) per ogni scelta di V sufficientemente regolare e per ogni tempo t è equivalente alla (1.12) per ogni tempo t e posizione \mathbf{x} quando le funzioni ρ e \mathbf{J} siano assunte essere di classe C^1 .

(3) Nelle ipotesi di campi elettrico e magnetico di classe C^2 , le quattro equazioni di Maxwell in forma differenziale, nelle regioni spaziotemporali in cui le sorgenti sono nulle, implicano la validità dell'*equazione delle onde di D'Alembert* per ogni componente del campo elettromagnetico:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E^i}{\partial t^2} + \Delta E^i = 0, \quad \text{per } i = 1, 2, 3$$

e

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B^i}{\partial t^2} + \Delta B^i = 0, \quad \text{per } i = 1, 2, 3.$$

Per ottenere tali equazioni, in assenza delle sorgenti ρ e \mathbf{J} , è sufficiente partire, rispettivamente dalla quarta e dalla seconda equazione di Maxwell differenziale, derivarne i due membri rispetto a t e quindi usare nel primo membro le identità date, rispettivamente dalla seconda e dalla terza equazione. Si deve quindi usare l'identità operatoriale:

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = -\Delta \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}),$$

usando infine il fatto, dato dalla prima e terza equazione di Maxwell, che $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ e $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Queste equazioni implicano che, in assenza di sorgenti e nel vuoto, i campi descrivano propagazioni ondose che si propagano alla velocità della luce c (la luce è un'onda elettromagnetica!).

(4) Nel ventesimo secolo la teoria di Maxwell ha avuto ulteriori sorprendenti sviluppi, infatti

nel 1905 l'articolo di Einstein sulla relatività ristretta ha sottolineato la covarianza relativistica delle equazioni di Maxwell, ovvero il fatto che queste sono valide in un qualsiasi sistema di riferimento inerziale pur di cambiare profondamente la struttura geometrica dello spaziotempo ed entrando nella teoria della relatività speciale. Lo sviluppo della teoria da un punto di vista quantistico inizia negli anni venti con l'equazione di Dirac e culmina qualche decennio più tardi con quella parte della teoria dei campi quantizzati nota come elettrodinamica quantistica. Non bisogna assolutamente pensare però che tutto ciò che c'era da scoprire è stato ormai compreso: l'elettrodinamica quantistica è una teoria che, pur avendo ottenuto dei successi sperimentali sorprendenti, manca ancora di una formalizzazione matematica rigorosa che vada oltre la teoria perturbativa.

1.3 Equazioni differenziali del secondo ordine quasilineari

In questo corso ci concentreremo essenzialmente su una classe di equazioni differenziali che andiamo a descrivere. Un'equazione differenziale su $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto e connesso, a derivate parziali (PDE) del secondo ordine ed in forma **quasi lineare**, è un'equazione della forma:

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \Phi(x, u(x), \nabla_x u) = 0, \quad (1.15)$$

dove $u = u(x)$, con $x := (x^1, \dots, x^n)$, è la funzione reale incognita da determinarsi. Si suppone $u \in C^2(\Omega)$ mentre le funzioni reali *assegnate* a^{ij} e Φ sono (almeno) di classe C^0 rispettivamente su Ω e su $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Infine $\nabla_x u$ denota in gradiente della funzione u .

Ovviamente è supposto che le funzioni a^{ij} non siano tutte identicamente nulle su Ω (in tal caso non avrebbe senso chiamare l'equazione di sopra "del secondo ordine"). La matrice $A(x)$ i cui coefficienti sono i numeri $a^{ij}(x)$ si dice **matrice caratteristica**, nel punto x , dell'equazione (1.15). Tale matrice è assunta essere *simmetrica* punto per punto: $a^{ij}(x) = a^{ji}(x)$ se siamo nelle ipotesi di regolarità C^2 di u : una eventuale parte antisimmetrica sarebbe automaticamente cancellata nella (1.15) a causa del teorema di Schwarz (lo si provi per esercizio). L'equazione (1.15) è detta **lineare** quando ha la forma specifica:

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{k=1}^n b^k(x) \frac{\partial u}{\partial x^k} + c(x)u(x) = f(x), \quad (1.16)$$

dove, a parità delle altre condizioni, le funzioni *assegnate* b^k , c e f sono (almeno) di classe C^0 su Ω . Nel caso in cui la funzione f è identicamente nulla su Ω , l'equazione lineare si dice **omogenea**. La funzione f , quando presente, ha spesso il significato fisico di *sorgente* (per esempio di carica, di corrente elettrica, di calore, di oscillazioni, ecc.)

Di particolare interesse è il caso bidimensionale in cui $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, useremo in questo caso le coordinate (x, y) in luogo di (x^1, x^2) . In questa situazione l'equazione (1.15) si riscrive:

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + \Phi(x, y, u(x, y), u_x, u_y) = 0,$$

dove con u_x e u_y sono rispettivamente $\partial u/\partial x$ e $\partial u/\partial y$ mentre con u_{xx} abbiamo indicato la derivata seconda in x di u , con u_{xy} ($= u_{yx}$ se $u \in C^2(\Omega)$ come assunto) abbiamo indicato la derivata seconda mista (in x e y) di u e con u_{yy} abbiamo indicato la derivata seconda in y di u . Le funzioni a^{ij} che determinano la matrice caratteristica dell'equazione, si possono ora scrivere come:

$$a^{xx} = a, \quad a^{xy} = a^{yx} = b, \quad a^{yy} = c.$$

Osservazioni 1.10. Le equazioni di Maxwell prima descritte, non sono equazioni differenziali del secondo ordine, ma possono essere riscritte in modo che lo diventino, introducendo delle grandezze ausiliarie dette *potenziali elettromagnetici*, dei quali non ci occuperemo in questa sede se non in una versione ridotta, discutendo le equazioni del secondo ordine di tipo ellittico. Tratteremo invece altre equazioni che discendono dalle equazioni di Maxwell, come quella di D'Alembert precedentemente introdotta.

Vogliamo arrivare a discutere un'importante classificazione delle PDE del secondo ordine quasi lineari [V184]. La classificazione è dovuta alle proprietà della forma quadratica indotta dalla matrice di coefficienti $a^{ij}(x)$ e dipende dal punto considerato. Per arrivare ad enunciare tale classificazione, ma anche per motivi più generali, studiamo come l'equazione (1.15) cambia al variare delle coordinate utilizzate, cosa che discuteremo nel prossimo paragrafo.

1.3.1 Trasformazioni di coordinate e struttura delle equazioni quasilineari del secondo ordine

Consideriamo una trasformazione di coordinate $y = y(x)$ dove $x \in \Omega$. Assumiamo che la trasformazione sia (almeno) di classe $C^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$, che sia invertibile e che la sua inversa sia una funzione di classe $C^2(\Omega'; \mathbb{R}^n)$, dove $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ è, per ipotesi, un insieme aperto connesso su cui variano le coordinate y . Di conseguenza avremo che la matrice Jacobiana della trasformazione è non nulla in ogni punto $x \in \Omega$. Infatti, nelle ipotesi fatte possiamo scrivere:

$$y^i = y^i(x(y)),$$

ed, applicando la regola di derivazione di funzioni di funzioni abbiamo che

$$\delta_j^i = \frac{\partial y^i}{\partial y^j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial y^j}.$$

Equivalentemente, se J è la matrice jacobiana della trasformazione $y = y(x)$ e J' quella della trasformazione inversa $x = x(y)$, l'identità di sopra si scrive

$$I = JJ'.$$

In particolare quindi: $1 = \det J \det J'$ e pertanto $\det J \neq 0$. Faremo uso tra poco di questo risultato.

Osservazioni 1.11. Prima di procedere oltre, è interessante notare come invece di richiedere dall'inizio che l'inversa $x = x(y)$ di $y = y(x)$ esista e sia di classe C^2 su un dominio dato

da un aperto $\Omega' \ni y$, avremmo potuto chiedere, con lo stesso risultato finale, che la funzione $y = y(x) \in \mathbb{R}^n$ fosse in $C^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$, iniettiva e con matrice jacobiana J ovunque non singolare. Infatti, sotto tali ipotesi, per il teorema della funzione inversa D.1 : (1) la funzione $y = y(x)$ è funzione aperta e pertanto l'immagine Ω' di Ω secondo $y = y(x)$ è aperto (e connesso visto che la funzione considerata è continua e Ω è connesso); (2) la funzione inversa $x = x(y)$ è in $C^2(\Omega'; \mathbb{R}^n)$.

Nelle ipotesi fatte la funzione u potrà essere espressa in funzione delle nuove coordinate y^1, \dots, y^n sull'insieme Ω' :

$$u'(y) := u(x(y)).$$

L'equazione differenziale (1.15) può essere trascritta per la funzione u' preservando la sua forma, ma cambiando le funzioni che in essa appaiono. Vediamo come procedere. Intanto osserviamo che, nelle ipotesi fatte:

$$\frac{\partial u}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial u'}{\partial y^k},$$

e quindi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^h \partial x^i} = \sum_{k,r=1}^n \frac{\partial y^r}{\partial x^h} \frac{\partial^2 u'}{\partial y^r \partial y^k} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 y^k}{\partial x^h \partial x^i} \frac{\partial u'}{\partial y^k}.$$

Inserendo queste identità nella (1.15), otteniamo che la stessa equazione differenziale può essere riscritta per la funzione u' , come:

$$\sum_{p,q=1}^n a^{pq}(y) \frac{\partial^2 u'}{\partial y^p \partial y^q} + \Phi'(y, u'(y), \nabla_y u') = 0, \quad (1.17)$$

dove, per $k, r = 1, \dots, n$:

$$a^{kr}(y(x)) := \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial y^k}{\partial x^i} a^{ij}(x) \frac{\partial y^r}{\partial x^j}, \quad (1.18)$$

mentre:

$$\Phi'(y, u'(y), \nabla_y u') := \Phi(x(y), u(x(y)), J^{-1}(y)(\nabla_x u(x))_{x=x(y)}) + \sum_{i,j,p=1}^n a^{ij}(x(y)) \left. \frac{\partial^2 y^p}{\partial x^i \partial x^j} \right|_{x=x(y)} \frac{\partial u'}{\partial y^p}.$$

Per costruzione, l'equazione (1.15) è completamente equivalente all'equazione (1.17): $u = u(x)$ soddisfa la prima su Ω se e solo se $u'(y) := u(x(y))$ soddisfa la seconda su Ω' .

1.3.2 Classificazione delle equazioni differenziali quasilineari del secondo ordine

Fissando un punto $x_0 \in \Omega$, consideriamo una trasformazione lineare di coordinate

$$y^i = \sum_{k=1}^n J_k^i x^k,$$

dove, se J è la matrice di coefficienti dati dalle *costanti* J_k^i , vale $\det J \neq 0$. In tal caso J è proprio la matrice Jacobiana della trasformazione considerata e sono soddisfatte le ipotesi sopra richieste dalle trasformazioni $y = y(x)$. La (1.18) valutata nel punto x_0 si può ora trascrivere come:

$$A'(y_0) = JA(x_0)J^t, \quad (1.19)$$

dove $A'(y_0)$ è la matrice di coefficienti $a'^{pq}(y_0)$ mentre $A(x_0)$ è la matrice di coefficienti $a^{ij}(x_0)$ ed infine $y_0 = y(x_0)$. Per il teorema di Sylvester, possiamo sempre scegliere la matrice non singolare J in modo tale che $A'(y_0)$ abbia *forma canonica di Sylvester*, cioè sia una matrice diagonale del tipo:

$$A'(y_0) = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0),$$

in cui i numeri 1 compaiono r volte, i numeri -1 compaiono s volte ed i numeri 0 compaiono t volte. È noto, dalla teoria delle forme quadratiche, che la terna (r, s, t) , detta *segnatura*, è una proprietà della forma quadratica associata alla matrice $A(x_0)$, e quindi una proprietà dell'equazione differenziale in riferimento al punto x_0 . In altre parole, se esiste un'altra scelta della matrice non singolare J che riduce la matrice $A(x_0)$ tramite la (1.19) a forma canonica di Sylvester, il numero di volte in cui appariranno i numeri 1, -1 , 0 sulla diagonale principale saranno sempre, rispettivamente, i numeri r, s, t trovati sopra. Ovviamente $r + s + t = n$.

In modo del tutto analogo alla classificazione delle coniche tramite lo studio della forma quadratica associata si ha la seguente classificazione.

Definizione 1.5. Se $\Omega \in \mathbb{R}^n$ è un insieme aperto non vuoto e connesso, si consideri l'equazione quasi lineare del secondo ordine nella funzione a valori reali u :

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \Phi(x, u(x), \nabla_x u) = 0, \quad (1.20)$$

dove $u \in C^2(\Omega)$ e $a^{ij} \in C^0(\Omega)$ e $\Phi \in C^0(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ sono funzioni a valori reali assegnate. In riferimento alla matrice caratteristica $A(x_0)$ di coefficienti $a^{ij}(x_0)$, valutata nel punto $x_0 \in \Omega$, si dice che:

(a) l'equazione differenziale è di **tipo ellittico** in x_0 se la segnatura di $A(x_0)$ è $(n, 0, 0)$ oppure $(0, n, 0)$;

(b) l'equazione differenziale è di **tipo iperbolico** in x_0 se la segnatura di $A(x_0)$ è $(r, s, 0)$ con $r \neq 0$ e $s \neq 0$, in particolare si dice che l'equazione differenziale è di **tipo iperbolico normale** in x_0 se la segnatura di $A(x_0)$ è $(1, n-1, 0)$ con $n > 1$ oppure $(n-1, 1, 0)$ con $n > 1$;

(c) l'equazione differenziale è di **tipo parabolico** in x_0 se la segnatura di $A(x_0)$ è (r, s, t) con $t \neq 0$, in particolare si dice che l'equazione differenziale è di **tipo parabolico normale** in x_0 se la segnatura di $A(x_0)$ è $(n-1, 0, 1)$ con $n > 1$ oppure $(0, n-1, 1)$ con $n > 1$. \diamond

Osservazioni 1.12. Ai fini della classificazione di una PDE quasilineare del secondo ordine, la matrice caratteristica può essere ridefinita moltiplicandola per una costante (più in generale una funzione del punto in cui si valuta la matrice) diversa da zero (in ogni punto). Tale

trasformazione non altera la classe di appartenenza dell'equazione differenziale come segue immediatamente dalle definizioni date sopra.

Le proprietà delle equazioni differenziali (e delle loro soluzioni) nella classe delle equazioni del secondo ordine quasilineari e lineari dipendono strettamente dal loro tipo come vedremo in tutto il resto del corso, in cui studieremo separatamente equazioni ellittiche, iperboliche e paraboliche. Una questione interessante è allora se il tipo di un'equazione differenziale sia necessariamente *costante* al variare del punto. Il primo degli esempi elencati sotto mostra che non lo è e si può passare da un tipo all'altro variando il punto, anche se i coefficienti dell'equazione sono funzioni estremamente regolari e l'equazione è del tutto elementare.

Esempi 1.1.

(1) L'equazione di **Tricomi** in \mathbb{R}^2 si scrive:

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0.$$

La forma quadratica associata è data dalla matrice non costante:

$$A(x, y) = \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Notiamo subito che, sull'asse delle ascisse, cioè $y = 0$, l'equazione differenziale è di *tipo parabolico normale*.

Consideriamo ora un punto (x_0, y_0) con $y_0 > 0$. Definiamo il nuovo sistema di coordinate cartesiane (x', y') su \mathbb{R}^2 dove $y' := y$ mentre $x' = x/\sqrt{y_0}$. In queste coordinate l'equazione per la funzione $u'(x', y') := u(x(x', y'), y(x', y'))$ prende forma:

$$\frac{y'}{y_0} u'_{x'x'} + u'_{y'y'} = 0.$$

Pertanto, *esattamente in* $(x, y) = (x_0, y_0)$, la matrice associata all'equazione, nelle nuove coordinate diventa:

$$A'(x', y') = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Concludiamo che, nel semipiano $y > 0$, l'equazione di Tricomi è di *tipo ellittico*.

Consideriamo infine un punto (x_0, y_0) con $y_0 < 0$. Definiamo il nuovo sistema di coordinate cartesiane (x', y') su \mathbb{R}^2 dove $y' := y$ mentre $x' = x/\sqrt{-y_0}$. In queste coordinate l'equazione per la funzione $u'(x', y') := u(x(x', y'), y(x', y'))$ prende forma:

$$-\frac{y'}{y_0} u'_{x'x'} + u'_{y'y'} = 0.$$

Pertanto, *esattamente in* $(x, y) = (x_0, y_0)$, la matrice associata all'equazione, nelle nuove coordinate diventa:

$$A'(x', y') = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Concludiamo che, nel semipiano $y < 0$, l'equazione di Tricomi è di *tipo iperbolico normale*.

(2) L'**equazione di Poisson** su $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si scrive:

$$\Delta u = \rho,$$

dove $\rho = \rho(x)$ è una funzione almeno C^0 assegnata e l'*operatore di Laplace*, detto anche **laplaciano**, Δ è definito in coordinate cartesiane ortonormali come:

$$\Delta := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Nel caso la funzione ρ sia identicamente nulla su Ω , l'equazione suddetta si riduce all'**equazione di Laplace** su Ω :

$$\Delta u = 0,$$

le cui soluzioni sono dette **funzioni armoniche** su Ω .

In entrambi i casi, la matrice $A(x_0)$, per ogni $x_0 \in \Omega$ è individuata dalla matrice identità. In base alla classificazione suddetta, le equazioni di Poisson e di Laplace sono equazioni differenziali alle derivate parziali lineari del secondo ordine di *tipo ellittico* in ogni punto. Dal punto di vista fisico, se $n = 3$, $-u$ può essere pensato come il *potenziale elettrostatico* e, nel caso dell'equazione di Poisson, ρ corrisponde alla densità di carica elettrica presente nel volume Ω .

(3) Se $\Omega := \mathbb{R}^n$, l'**equazione delle onde** o **equazione di D'Alembert** si scrive:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta u = 0.$$

Sopra le coordinate su \mathbb{R}^n sono state decomposte come: $x = (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. La costante $c > 0$ si interpreta fisicamente come la velocità di propagazione della perturbazione ondosa descritta dalla funzione $u = u(t, \mathbf{x})$, dove t è il tempo e \mathbf{x} lo spazio (almeno nel caso di $n = 3$) di un riferimento. L'equazione di D'Alembert descrive tutti i fenomeni di propagazione ondosa (armonica) conosciuti: dalla propagazione della luce a quella del suono, ma anche la propagazione di una piccola deformazione in un mezzo continuo elastico, fino ad arrivare alla propagazione delle onde gravitazionali nella teoria della relatività generale. La matrice $A(x_0)$, per ogni $x_0 \in \Omega$, ha la forma $\text{diag}(-1/c^2, 1, \dots, 1)$. Passando a coordinate $y^1 := ct$, $\mathbf{y} := \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$, si ottiene che la matrice $A'(y_0)$ ha forma canonica di Sylvester in ogni punto y_0 , con segnatura $(n-1, 1, 0)$. Pertanto l'equazione di D'Alembert è, ovunque, di *tipo iperbolico normale*.

Un caso particolare dell'equazione di D'Alembert è dato, per $n = 4$, quando si lavora con il *campo elettrico* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t, \mathbf{x})$ e con il *campo magnetico* $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ che descrivono i fenomeni elettromagnetici. L'equazione di D'Alembert per questi due campi (nel vuoto) descrive la propagazione delle onde elettromagnetiche (e quindi della luce in particolare)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \mathbf{E} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \mathbf{B} = 0,$$

c è la velocità della luce nel vuoto. Le due equazioni di sopra, che seguono dalle più generali *equazioni di Maxwell*, si devono interpretare componente per componente e significano che *ogni*

componente del campo \mathbf{E} e del campo \mathbf{B} soddisfa separatamente l'equazione di D'Alembert.

(4) Se $\Omega := \mathbb{R}^4$, l'**equazione di Klein-Gordon** si scrive:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \Delta \phi - \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \phi = 0.$$

Come prima, le coordinate su \mathbb{R}^4 sono state decomposte come: $x = (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. La costante $c > 0$ si interpreta fisicamente come la velocità della luce nel vuoto, $\hbar = h/2\pi$ dove h è la *costante di Planck* t è il tempo e \mathbf{x} lo spazio di un sistema di riferimento (Minkowskiano della teoria della Relatività Speciale). L'equazione di Klein-Gordon descrive una campo scalare ϕ a valori in \mathbb{R} associato a particelle quantistiche di massa $m > 0$ senza spin ed elettricamente neutre (in realtà ϕ descrive sia la particella che l'anti particella). La matrice $A(x_0)$, per ogni $x_0 \in \Omega$, ha la forma $\text{diag}(-1/c^2, 1, 1, 1)$. Passando a coordinate $y^1 := ct$, $\mathbf{y} := \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, si ottiene che la matrice $A'(y_0)$ ha forma canonica di Sylvester in ogni punto y_0 , con segnatura $(3, 1, 0)$. Pertanto l'equazione di Klein-Gordon è, ovunque, di *tipo iperbolico normale*.

(5) Se $\Omega := \mathbb{R}^n$, l'**equazione del calore** si scrive:

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + a^2 \Delta u = q.$$

dove $a > 0$ è una costante e $q = q(t, \mathbf{x})$ una funzione assegnata. Sopra le coordinate su \mathbb{R}^n sono ancora state decomposte come: $x = (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Almeno per $n = 3$, u si interpreta fisicamente come la temperatura in un mezzo continuo le cui caratteristiche termodinamiche sono riassunte dai parametri a e dalla funzione q che corrisponde ad una sorgente di calore.

La matrice $A(x_0)$, per ogni $x_0 \in \Omega$, ha la forma $\text{diag}(0, a^2, \dots, a^2)$. Passando a definire coordinate $y^1 := t$, $\mathbf{y} := a^{-1} \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$, si ottiene in tali coordinate che la matrice $A'(y_0)$ ha forma canonica di Sylvester in ogni punto y_0 , con segnatura $(n-1, 0, 1)$: si osservi infatti che nell'equazione del calore *non* compare la derivata seconda nella prima variabile, questo spiega l'ultimo 1 e l' $n-1$ nella segnatura. Pertanto l'equazione del calore è, ovunque, di *tipo parabolico normale*.

(6) L'**equazione di Schrödinger** per la *funzione d'onda* $\psi = \psi(t, \mathbf{x})$, con $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V(\mathbf{x})\psi,$$

non ricade nella classificazione suddetta in quanto: (1) $\psi = \psi(t, \mathbf{x})$ è una funzione a valori complessi e (2) il coefficiente della derivata temporale è immaginario puro. Tuttavia tale equazione ha caratteristiche simili all'equazione del calore.

(7) L'**equazione di Dirac** per il *il campo fermionico* $\Psi = \Psi(x) \in \mathbb{C}^4$, con $x \equiv (x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)$:

$$i\hbar \sum_{\mu=0}^3 \gamma^\mu \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} - mc\Psi = 0$$

che descrive il campo quantistico associato agli elettroni ed i positroni, non ricade nella classificazione suddetta in quanto: (1) $\Psi = \Psi(t, \mathbf{x})$ è una funzione a valori in \mathbb{C}^4 e (2) i coefficienti delle

derivate sono matrici complesse. Tuttavia tale equazione, per taluni aspetti, ha caratteristiche simili all'equazione di Klein-Gordon. Le 4 matrici complesse γ^μ , per $\mu = 0, 1, 2, 3$ sono dette *matrici di Dirac* e soddisfano le relazioni di Dirac (o Clifford)

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = -2g^{\mu\nu} I ,$$

dove la matrice dei coefficienti $g^{\mu\nu}$ è quella della metrica di Lorentz $\text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

(8) L'equazione di Navier-Stokes per un fluido incompressibile con densità ρ_0 :

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \mathbf{f} - \frac{\nabla p}{\rho_0} + \nu \Delta \mathbf{V} , \quad (1.21)$$

dove le funzioni incognite $\mathbf{V}(t, \mathbf{x})$ e $p = p(t, \mathbf{x})$ sono, rispettivamente il campo di velocità e la pressione del fluido viscoso. La costante ν è il *coefficiente di viscosità cinematica* del fluido e \mathbf{f} è una densità volumetrica di forza assegnata (per esempio quella gravitazionale). Questa equazione, non lineare nelle derivate prime, non ricade nella classificazione dato che lavora con un campo vettoriale \mathbf{V} invece che con un campo scalare e le componenti del campo non soddisfano equazioni disaccoppiate come accadeva, per esempio, per l'equazione di D'Alembert per il campo elettrico o magnetico. Si tratta di una delle equazioni più difficili da studiare che esistano. Si conoscono pochi risultati rigorosi riguardanti esistenza ed unicità delle soluzioni dell'equazione di Navier-Stokes quando sono assegnati dati iniziali ed al contorno (insieme ad un'ulteriore equazione costitutiva che legghi p e ρ_0).

1.4 Il problema di Cauchy ed il Teorema di Cauchy-Kovalevskaja.

1.4.1 Superfici regolari in \mathbb{R}^n .

Una $(n-1)$ -**superficie** Σ in \mathbb{R}^n **di classe** C^k (equivalentemente detta *sottovarietà embedded* di \mathbb{R}^n di dimensione $n-1$ e classe di differenziabilità C^k con $k \geq 2$) è un sottoinsieme di \mathbb{R}^n tale che in un intorno (in \mathbb{R}^n) aperto O_p di ogni suo punto $p \in \Sigma$ può essere espressa come luogo dei punti che annullano una funzione S di classe C^k , con $k \geq 2$, con $dS \neq 0$ su Σ . In altre parole, per ogni $p \in \Sigma$, esiste un suo intorno aperto $O_p \subset \mathbb{R}^n$ ed una funzione $S : O_p \rightarrow \mathbb{R}$, $S \in C^k(O_p)$, tale che:

$$\Sigma \cap O_p = \{x \in O_p \mid S(x) = 0\} ,$$

unitamente a:

$$dS(x) \neq 0 , \quad \text{per } S(x) = 0$$

dove il **differenziale** $dS(x)$ indica il vettore colonna delle derivate parziali $(\frac{\partial S}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial x^n})^t$, spesso indicato in maniera formale (ma il significato è preciso in geometria differenziale)

$$dS(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial S}{\partial x^k} \Big|_x dx^k .$$

Nel seguito **superficie regolare**, senza altre specificazioni, indicherà una $(n - 1)$ -superficie di \mathbb{R}^n di classe C^k con $k \geq 2$.

Con le definizioni poste, in differenziale dS si identifica con il gradiente ∇S della funzione S dato che ne ha le stesse componenti lavorando in basi ortonormali⁵: se \mathbf{e}_i è il versore i -esimo della base canonica di \mathbb{R}^n , il vettore mai nullo per $x \in \Sigma \cap O_p$:

$$\nabla S(x) := \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial S}{\partial x^i} \right|_x \mathbf{e}_i .$$

∇S definisce un vettore (non nullo) **normale** a $\Sigma \cap O_p$ in ogni punto.

Osservazioni 1.13.

(1) Una spiegazione euristica di questa interpretazione di $\nabla S(p)$ come vettore normale in p a Σ è la seguente (e può essere resa rigorosa introducendo alcune nozioni base di geometria differenziale). Si consideri una curva $x = x(t)$, con $t \in [a, b]$, che appartenga a Σ per ogni valore di $t \in [a, b]$. Assumiamo che la curva sia di classe $C^1([a, b])$. Per definizione $S(x(t)) = 0$ per ogni $t \in [a, b]$. Conseguentemente $\frac{dS(x(t))}{dt} = 0$, ovvero

$$\frac{dx}{dt} \cdot \nabla S(x(t)) = 0 \quad \forall t \in [a, b] .$$

Il vettore $\frac{dx}{dt}$ sarà tangente a Σ in ogni punto $x(t)$, dato che la curva $x = x(t)$ è contenuta in Σ . La genericità della curva scelta implica che $\nabla S(x(t))$ sia normale ad ogni vettore tangente a Σ passante per $x(t)$. In questo senso $\nabla S(x(t))$ è un vettore (non nullo) *normale* a Σ in $x(t)$. Si può provare per esercizio che la scelta di un'altra funzione S_1 per descrivere Σ nell'intorno di $p \in \Sigma$ produce $\nabla S_1(p)$ parallelo a $\nabla S(p)$ come ci si aspetta dall'interpretazione del gradiente come vettore normale a Σ se quest'ultima ha dimensione $n - 1$.

(2) La condizione $dS \neq 0$ *non* dipende dal sistema di coordinate scelto in \mathbb{R}^n nel senso che segue. Cambiando coordinate e passando alle coordinate $y^r = y^r(x)$ tramite una funzione C^k con inversa C^k ($k \geq 2$ nelle nostre ipotesi) e definendo $S'(y) := S(x(y))$, abbiamo subito che $\left. \frac{\partial S'(y)}{\partial y^r} \right|_{y(x)} = \sum_{h=1}^n \frac{\partial x^h}{\partial y^r} \frac{\partial S(x)}{\partial x^h}$. Dato che la matrice jacobiana di elementi $\frac{\partial x^h}{\partial y^r}$ è ovunque non singolare, come provato precedentemente, concludiamo che $dS'(y) \neq 0$ se e solo se $dS(x) \neq 0$.

Esistono diverse definizioni equivalenti di superfici regolari in \mathbb{R}^n . Si osservi che ogni funzione di classe $C^k(A)$ ($k \geq 2$), con $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ aperto non vuoto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ individua una superficie regolare in \mathbb{R}^n in cui, per esempio x^1 è pensata come funzione delle rimanenti variabili naturali di \mathbb{R}^n . In tal caso la funzione S è scelta come:

$$S(x^1, x^2, \dots, x^n) := x^1 - f(x^2, \dots, x^n) \quad \text{dove} \quad (x^2, \dots, x^n) \in A .$$

⁵Questa identificazione ha senso in \mathbb{R}^n dotato della struttura differenziabile Riemanniana naturale. Lavorando in varietà differenziabili generali la questione è ben più delicata e necessita di alcuni elementi di geometria differenziale Riemanniana che non tratteremo in questo corso.

La definizione di superficie regolare Σ , tenendo conto del *teorema del Dini* D.2, nella versione meglio nota come *teorema della funzione implicita*, implica immediatamente che in realtà il caso appena considerato è del tutto generale. Se $p \in \Sigma$, in un opportuno intorno aperto $O_p \subset \mathbb{R}^n$ di p , possiamo sempre *risolvere* l'equazione che determina Σ : $S(x^1, \dots, x^n) = 0$, in funzione di $n - 1$ variabili tra le n variabili x^1, \dots, x^n che indicheremo con ξ^2, \dots, ξ^n e penseremo come variabili indipendenti, ottenendo una funzione di classe C^k $\xi^1 = \xi^1(\xi^2, \dots, \xi^n)$, dove ξ^1 è la variabile tra le x^1, \dots, x^n differente da ξ^2, \dots, ξ^n . Più precisamente ξ^1 può sempre essere scelta come una qualsiasi variabile cartesiana x^k per la quale $\frac{\partial S}{\partial x^k}|_p \neq 0$ (e almeno una di tali derivate deve non essere nulla per ipotesi essendo $dS|_p \neq 0$). In questo caso (ξ^2, \dots, ξ^n) varia in un aperto di $A_p \subset \mathbb{R}^{n-1}$ e la porzione $\Sigma \cap O_p$ della superficie regolare risulta essere descritta biunivocamente dalle coordinate locali $(\xi^2, \dots, \xi^n) \in A_p$. Nel senso appena visto le $(n - 1)$ -ple di numeri reali $(\xi^2, \dots, \xi^n) \in A_p$ definiscono un **sistema di coordinate locali su Σ** che “ricopre” l'intorno $\Sigma \cap O_p$ di $p \in \Sigma$.

Esempi 1.2. Un esempio classico è la superficie sferica $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ descritta dagli zeri della funzione $S(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ (notare che dS non si annulla mai su Σ come si verifica subito). Se $p \in \Sigma$, possiamo sempre risolvere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ *localmente*, ottenendo una variabile in funzione delle rimanenti due. Per esempio, se p ha coordinata $z > 0$ (e dunque la componente z di dS è non nulla), possiamo sempre descrivere Σ nell'intorno di p (in realtà in questo modo descriviamo tutto l'emisfero con $z > 0$) tramite l'equazione $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. In questo caso $\xi^1 = z$ e $\xi^2 = x$, $\xi^3 = y$, con (ξ^2, ξ^3) che variano nel disco aperto A_p di \mathbb{R}^2 di raggio 1 centrato nell'origine e definiscono un sistema di coordinate locali su Σ .

1.4.2 Il problema di Cauchy e la “ben posizione” del problema nel senso di Hadamard.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso non vuoto e $\Sigma \subset \Omega$ una superficie regolare (con qualche ordine di differenziabilità $k \geq 1$) di dimensione $n - 1$ che divide Ω in due parti connesse (quest'ultima richiesta è in realtà inessenziale a questo punto della teoria). Il **problema di Cauchy** del secondo ordine riferito a Σ consiste nel sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} F\left(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x^n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^1 \partial x^1}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^1 \partial x^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^n \partial x^n}\right) = 0, \\ u|_{\Sigma} = u_0, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\Sigma} = u_1, \end{array} \right. \quad (1.22)$$

in cui u_0 e u_1 sono funzioni assegnate su Σ di qualche ordine di differenziabilità da definirsi, $u \in C^2(\Omega)$ è la funzione incognita da determinare,

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2} \rightarrow \mathbb{R}$$

è una funzione nota che determina l'equazione differenziale ed abbiamo usato la notazione standard:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} := \sum_{i=1}^n n^i \frac{\partial u}{\partial x^i}$$

dove $\mathbf{n} = (n^1, \dots, n^n)$ è il *versore* normale a Σ . I tre fattori di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ competono rispettivamente all'insieme \mathbb{R} su cui prende valori $u(x)$, all'insieme \mathbb{R}^n su cui prende valori il vettore delle n derivate prime di u e all'insieme $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ su cui prende valori il set delle $n(n+1)/2$ derivate seconde di u . Per quanto riguarda le derivate seconde, dato che u è assunta essere C^2 , si deve tenere conto del teorema di Schwarz che implica che le derivate parziali seconde sono uguali scambiando il ruolo delle due coordinate per cui solo $n(n+1)/2$ di esse sono indipendenti e solo queste appaiono come argomenti nella funzione F .

Secondo l'impostazione data da Hadamard, un problema di Cauchy (1.22) è **ben posto** (rispetto a d una classe di funzioni a a corrispondenti topologie) se sono verificate i seguenti tre tipi di richieste.

- (a) Una soluzione del problema, in una certa classe di funzioni (precisata a priori), esiste.
- (b) La soluzione in (a) è l'unica soluzione nella classe di funzioni suddetta.
- (c) La soluzione dipende *con continuità* dai dati di Cauchy in qualche topologia (precisata a priori) di spazi di funzioni definita negli spazi di funzioni considerate (o semplicemente usando la convergenza puntuale).

Le richieste (a), (b) e (c) diventano precise specificando le classi di funzioni considerate e le topologie coinvolte. In ultima analisi la scelta di queste cose dipende dal tipo di problema anche applicativo considerato per esempio cosa possiamo realmente controllare del sistema fisico di cui l'equazione differenziale è un modello matematico. La condizione (c) deriva dal fatto che, nella pratica, i dati di Cauchy sono sempre noti con una certa approssimazione e si richiede che, pertanto, le soluzioni varino di poco se le condizioni di Cauchy variano di poco: (c) è la traduzione matematica di questa idea e "di poco" significa rispetto agli intorno di una opportuna topologia.

Nel caso una delle tre condizioni di sopra sia violata, si dice che il problema di Cauchy è *mal posto nel senso di Hadamard*. Mostriamo che il problema di Cauchy ellittico può essere mal posto perché viola la condizione (c), mettendo nello spazio dei dati di Cauchy limitati la topologia naturale dell'estremo superiore indotta dalla norma $\|\cdot\|_\infty$ (vedi la sezione 1.1.3).

Cosideriamo in \mathbb{R}^2 , con coordinate (x, y) , il problema di Laplace:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x, 0) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{1}{k} \sin(kx), \end{array} \right. ,$$

dove $k > 0$ è fissata e si cercano soluzioni $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Si dimostra che l'unica soluzione del problema posto (se si precisano alcuni ulteriori dettagli sulla classe delle funzioni ammissibili) è:

$$u^{(k)}(x, y) := \frac{1}{k^2} \sin(kx) \sinh(ky) .$$

Si noti che, nel limite $k \rightarrow +\infty$ il dato di Cauchy:

$$u_1^{(k)}(x) = \frac{1}{k} \sin(kx)$$

soddisfa $\|u_1^{(k)}\|_\infty \rightarrow 0$ per $k \rightarrow +\infty$, mentre l'altro dato è nullo per ipotesi e pertanto $\|u_0^{(k)}\|_\infty = 0$. Tuttavia la soluzione $u^{(k)}(x, y)$ non tende, puntualmente, ad alcun limite se $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Si può mostrare che, le patologie del problema di Cauchy per equazioni ellittiche riguardano anche l'esistenza e l'unicità della soluzione, in particolare quando il problema di Cauchy è imposto in regioni limitate. Vedremo ciò nel prossimo capitolo. In realtà per problemi di Cauchy di carattere ellittico, si ha anche la perdita di validità della richiesta (a) quando la superficie Σ è una superficie chiusa che contorna Ω . In tal caso, lavorando per esempio con l'equazione di Laplace ed assegnando dati di Cauchy analitici su Σ , per ogni punto di Σ c'è un intorno in cui esiste una soluzione⁶ del problema. La parte dell'intorno che interseca Ω produce localmente una soluzione del problema di Cauchy. Quello che però accade è che le diverse soluzioni ottenute localmente in questo modo non si "saldano" tra di loro per determinare un'unica soluzione su Ω : su un punto p interno a Ω coperto da due intorni suddetti si trovano generalmente valori distinti per $u(p)$ a seconda dell'intorno scelto, in modo tale che risulta essere impossibile definire la funzione u sull'unione dei due intorni.

Osservazioni 1.14. L'idea della *ben posizione* del problema in accordo con (reinterpretazioni del) le richieste (a),(b),(c) in realtà si può estendere ad altre classi di problemi in cui si cercano soluzioni di un'equazione alle derivate parziali tenendo conto dei dati iniziali o al contorno, anche se il problema non è propriamente di Cauchy.

1.4.3 Il Teorema di Cauchy-Kovalevskaja.

Ci occuperemo ora di studiare il problema della risolubilità del problema di Cauchy sopra scritto nel caso in cui l'equazione differenziale che compare in esso sia del tipo (1.15), introducendo il *teorema di Cauchy-Kovalevskaja*. A tal fine consideriamo il caso più semplice nel quale $\Omega = \mathbb{R}^n$ e Σ è il piano $x^1 = 0$.

Un'equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine, nella funzione incognita $u = u(x)$, si dice che è scritta **in forma normale rispetto alla variabile t** , se $x = (t, \mathbf{x}) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ (con $\mathbf{x} = (x^2, \dots, x^n)$) se è rappresentata come:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F \left(t, \mathbf{x}, u(t, \mathbf{x}), \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x^n}, \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^n \partial x^n} \right), \quad (1.23)$$

dove $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2-1} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione assegnata.

F è dunque funzione di (t, \mathbf{x}) di $u(x)$ e delle sue derivate prime e seconde, escludendo la derivata seconda in t . Si può dare un'analoga definizione di equazione in forma normale rispetto

⁶Questa è l'unica soluzione in tale intorno per il teorema di Cauchy-Kovalevskaja che stiamo per discutere, visto che le funzioni che soddisfano l'equazione di Laplace sono analitiche come proveremo più avanti.

ad una coordinata, anche per equazioni di ordine superiore al secondo.

Consideriamo il **Problema di Cauchy** per la funzione $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ con dati di Cauchy sulla superficie Σ individuata da $t = 0$ e con equazione in forma normale nella variabile t :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F\left(t, \mathbf{x}, u(t, \mathbf{x}), \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x^n}, \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^n \partial x^n}\right), \\ u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, \mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x}), \end{cases}$$

in cui $u_0 \in C^2(\mathbb{R}^{n-1})$ e $u_1 \in C^1(\mathbb{R}^{n-1})$ sono funzioni assegnate su Σ .

Esistono vari teoremi che assicurano l'esistenza e l'unicità della soluzione. In ordine storico, il primo di tutti questi teoremi è quello dovuto a Cauchy e Kovalevskaja. Tale teorema non ha grande utilità nelle applicazioni moderne, in quanto richiede ipotesi estremamente forti per funzionare, ma è comunque di grande utilità teorica, in quanto serve come lemma intermedio per provare teoremi di esistenza più moderni basati su ipotesi molto deboli. Enunciamo il teorema per equazioni del secondo ordine, anche se l'ordine dell'equazione non è essenziale.

Ricordiamo che una funzione a valori reali $f = f(x)$ è detta **analitica (reale) nell'insieme aperto** $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, se $f \in C^\infty(\Omega)$ e per ogni $x_0 \in \Omega$, in un intorno aperto di x_0 incluso in Ω , la funzione f si può scrivere come serie di Taylor centrata in x_0 :

$$f(x) = \sum_{N=0}^{+\infty} \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = N} \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} f}{\partial x^1 \alpha_1 \dots \partial x^n \alpha_n} \Big|_{x_0} (x^1 - x_0^1)^{\alpha_1} \dots (x^n - x_0^n)^{\alpha_n}.$$

Teorema 1.7. (Cauchy-Kovalevskaja). *Si consideri il problema di Cauchy del secondo ordine nella funzione incognita $u = u(t, \mathbf{x})$ con $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$, con dati di Cauchy assegnati sulla superficie determinata da $t = 0$ e con equazione differenziale scritta in forma normale nella variabile t :*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F\left(t, \mathbf{x}, u(t, \mathbf{x}), \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x^n}, \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^n \partial x^n}\right), \\ u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, \mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (1.24)$$

dove $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2-1} \rightarrow \mathbb{R}$ è assegnata.

Se, per un punto $(0, \mathbf{x}_0)$, le funzioni u_0 e u_1 sono analitiche nell'intorno di \mathbf{x}_0 e la funzione F è analitica nell'intorno del punto di $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2-1}$

$$\left(0, \mathbf{x}_0, u_0(\mathbf{x}_0), u_1(\mathbf{x}_0), \frac{\partial u_0}{\partial x^2}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial u_0}{\partial x^n}(\mathbf{x}_0), \frac{\partial u_1}{\partial x^2}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial u_1}{\partial x^n}(\mathbf{x}_0), \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2 \partial x^2}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^n \partial x^n}(\mathbf{x}_0)\right),$$

allora in un intorno di $(0, \mathbf{x}_0)$ esiste una soluzione del sistema (1.24). Tale soluzione è l'unica soluzione analitica nell'intorno considerato. \diamond

Idea della dimostrazione. Nel seguito, per pura comodità di linguaggio, diremo x^k *variabile spaziale* in contrapposizione con t che sarà pensata come *variabile temporale*. Se esiste una soluzione u deve valere:

$$u(0, \mathbf{x}_0) = u_0(\mathbf{x}_0),$$

inoltre, se $i = 2, \dots, n$:

$$\frac{\partial u}{\partial x^i}(0, \mathbf{x}_0) = \frac{\partial u_0}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, \mathbf{x}_0) = u_1(\mathbf{x}_0).$$

Consideriamo poi l'equazione differenziale con entrambi i membri valutati in $(0, \mathbf{x}_0)$. In tale situazione, il secondo membro dell'equazione differenziale è funzione dei dati di Cauchy unicamente:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{(0, \mathbf{x}_0)} = \\ & F \left(0, \mathbf{x}_0, u_0(\mathbf{x}_0), u_1(\mathbf{x}_0), \frac{\partial u_0}{\partial x^2}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial u_0}{\partial x^n}(\mathbf{x}_0), \frac{\partial u_1}{\partial x^2}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial u_1}{\partial x^n}(\mathbf{x}_0), \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2 \partial x^2}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^n \partial x^n}(\mathbf{x}_0) \right). \end{aligned} \quad (1.25)$$

In questo modo abbiamo ottenuto la derivata seconda nel tempo della soluzione, ammesso che esista, nel punto $(0, \mathbf{x}_0)$, in funzione dei dati di Cauchy. Le rimanenti derivate seconde della soluzione sono invece note direttamente dai dati di Cauchy ($i, k = 2, \dots, n$):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x^i} \Big|_{(0, \mathbf{x}_0)} = \frac{\partial u_1}{\partial x^i} \Big|_{\mathbf{x}_0}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^k \partial x^i} \Big|_{(0, \mathbf{x}_0)} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^k \partial x^i} \Big|_{\mathbf{x}_0}.$$

In definitiva abbiamo ottenuto tutte le derivate fino all'ordine 2 incluso, della eventuale soluzione, valutate in $(0, \mathbf{x}_0)$, in funzione dei dati di Cauchy. Si osservi che dall'identità (1.25) abbiamo in realtà anche le derivate miste di ogni ordine

$$\frac{\partial^{\alpha+2} u}{\partial t^2 \partial x^{1\alpha_1} \dots \partial x^{n\alpha_n}} \Big|_{(0, \mathbf{x}_0)}$$

semplicemente derivando quante volte serve i due membri in x^k . Il secondo membro sarà ancora una funzione nota di u_0 , u_1 e delle loro derivate spaziali.

Quanto ottenuto è in realtà generale: nell'ipotesi di F analitica, e quindi infinitamente differenziabile, possiamo ottenere *tutte* le derivate di ogni ordine della eventuale soluzione u , valutate in $(0, \mathbf{x}_0)$, in funzione dei dati di Cauchy e delle loro derivate spaziali. Per fare ciò è sufficiente derivare entrambi i membri dell'equazione differenziale e iterare la procedura seguita sopra per l'identità che si è ottenuta. Per esempio

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(t, \mathbf{x}) &= \frac{d}{dt} F \left(t, \mathbf{x}, u(t, \mathbf{x}), \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x^n}, \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^n \partial x^n} \right) \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} \left(t, \mathbf{x}, u(t, \mathbf{x}), \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x^n}, \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^n \partial x^n} \right) \end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial u} \left(t, \mathbf{x}, u(t, \mathbf{x}), \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x^n}, \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^n \partial x^n} \right) + \dots$$

che, valutato in $(0, \mathbf{x}_0)$ diventa

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \Big|_{(0, \mathbf{x}_0)} \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} \left(0, \mathbf{x}_0, u_0(\mathbf{x}_0), u_1(\mathbf{x}_0), \frac{\partial u_0}{\partial x^2}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial u_0}{\partial x^n}(\mathbf{x}_0), \frac{\partial u_1}{\partial x^2}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^n \partial x^n}(\mathbf{x}_0) \right) \\ &+ u_1(\mathbf{x}_0) \frac{\partial F}{\partial u} \left(0, \mathbf{x}_0, u_0(\mathbf{x}_0), u_1(\mathbf{x}_0), \frac{\partial u_0}{\partial x^2}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial u_0}{\partial x^n}(\mathbf{x}_0), \frac{\partial u_1}{\partial x^2}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^n \partial x^n}(\mathbf{x}_0) \right) + \dots \end{aligned}$$

A secondo membro abbiamo quantità note in funzione delle condizioni iniziali $u_0(\mathbf{x}_0), u_1(\mathbf{x}_0)$ delle loro derivate spaziali, della derivata seconda temporali $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{(0, \mathbf{x}_0)}$ (che è già stata ottenuta allo step precedente (1.25) in funzione di $u_0(\mathbf{x}_0), u_1(\mathbf{x}_0)$) e delle derivate spaziali di tale derivata temporale. Riassumendo:

- (1) le derivate di ogni ordine $\frac{\partial^n u}{\partial t^n} \Big|_{(0, \mathbf{x}_0)}$ si calcolano in questo modo e risultano essere scrivibili come funzioni note di $u_0(\mathbf{x}_0), u_1(\mathbf{x}_0)$ e delle loro derivate spaziali;
- (2) possiamo infine derivare in x^k le funzioni ottenute ed alla fine abbiamo tutte le derivate di u di ogni ordine e tipo calcolate in $(0, \mathbf{x}_0)$ in funzione di $u_0(\mathbf{x}_0), u_1(\mathbf{x}_0)$ e delle loro derivate spaziali.

Se indichiamo le coordinate (t, x^2, \dots, x^n) con (y^1, \dots, y^n) , stiamo dicendo che conosciamo tutte le derivate

$$C_{\alpha_1 \dots \alpha_n} := \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} u}{\partial y^{1\alpha_1} \dots \partial y^{n\alpha_n}} \Big|_{(0, \mathbf{x}_0)}$$

di una eventuale soluzione analitica definita nell'intorno di $(0, \mathbf{x}_0)$. Posto $y_0 := (0, \mathbf{x}_0)$, si può allora studiare la convergenza della serie

$$u(y) = \sum_{N=0}^{+\infty} \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = N} \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} C_{\alpha_1 \dots \alpha_n} (y^1 - y_0^1)^{\alpha_1} \dots (y^n - y_0^n)^{\alpha_n}.$$

Si può facilmente dimostrare che se questa serie converge in un intorno di y_0 allora la somma della serie è una soluzione dell'equazione differenziale che rispetta anche le condizioni iniziali in tale intorno⁷. Se la funzione F e le condizioni iniziali u_0 e u_1 sono analitiche come richiesto nella tesi allora si può provare che la serie di sopra effettivamente converge in un intorno di $y_0 = (0, \mathbf{x}_0)$. Ogni soluzione analitica ottenuta in tale intorno deve necessariamente avere le stesse derivate parziali in $(0, \mathbf{x}_0)$ e quindi la stessa serie di Taylor e quindi deve coincidere con la soluzione trovata.

Si osservi che in tutta la procedura, il fatto che l'equazione sia scritta in forma normale è di centrale importanza. In questo modo si può scrivere una serie di Taylor formale della eventuale soluzione, sviluppata nel punto $(0, \mathbf{x}_0)$. \square

⁷Se la serie converge allora converge uniformemente essendo una serie di potenze e si possono usare i teoremi di scambio del simbolo di derivata con il simbolo di serie.

1.4.4 Il caso di una superficie regolare generica in \mathbb{R}^n descritta in *coordinate normali*

Torniamo ora al problema di Cauchy (1.22) specializzato al caso di un'equazione del secondo ordine in forma quasi lineare (1.15) e riferito ad una superficie regolare $\Sigma \subset \Omega$ di dimensione $n - 1$ e classe C^k , con $k \geq 2$, che divide $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ in due parti connesse:

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \Phi(x, u(x), \nabla u) = 0, \\ u|_{\Sigma} = u_0, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\Sigma} = u_1, \end{cases} \quad (1.26)$$

\mathbf{n} come già detto, è il versore normale a Σ . Le funzioni a^{ij} saranno supposte almeno di classe C^0 .

Vogliamo ridurci alla situazione in cui Σ appare come il piano $t = 0$, per poter cercare di applicare il teorema di Cauchy-Kovalevskaia, almeno nell'intorno di $p \in \Sigma$. Per far ciò usiamo un opportuno sistema di coordinate dette *coordinate normali Riemanniane*. Sia ξ^2, \dots, ξ^n un qualsiasi sistema di coordinate su Σ (di classe C^k con $k \geq 2$ come S) definito nell'intorno di $p \in \Sigma$ come abbiamo visto precedentemente: le ξ^2, \dots, ξ^n sono $n - 1$ tra le coordinate cartesiane x^1, \dots, x^n attraverso le quali si può esprimere la rimanente, ξ^1 , nell'intorno di p quando ci si muove su Σ . Tutte le trasformazioni di coordinate sono di classe C^k . Per ogni punto $q \in \Sigma$ nell'intorno considerato, tracciamo la retta normale a Σ e passante per q che punta sempre verso la stessa parte di Ω tra le due in cui è diviso da Σ . Sia $t \in \mathbb{R}$ la lunghezza d'arco su tale retta ponendo come origine di essa il punto q in cui la retta interseca Σ . Si dimostra facilmente facendo uso del teorema del Dini nella versione del cosiddetto *teorema della funzione inversa*, che viene a definirsi in questo modo un sistema di coordinate t, ξ^2, \dots, ξ^n su \mathbb{R}^n , di classe C^k , in un intorno aperto $B_p \subset \Omega$ di p . Un punto $r \in B_p$ è individuato in questo modo: si considera l'unica retta γ_r perpendicolare a Σ che passa per r , la lunghezza del segmento tra r e l'intersezione $q_r = \gamma_r \cap \Sigma$ è la coordinata t_r di r , le rimanenti coordinate ξ_r^2, \dots, ξ_r^n non sono altro che le coordinate di q_r su Σ . Nell'intorno B_p di $p \in \Sigma$ abbiamo dunque due sistemi di coordinate: le coordinate naturali di \mathbb{R}^n (x^1, \dots, x^n) che variano nell'aperto B_p e le coordinate (t, ξ^1, \dots, ξ^n) che variano in un corrispondente aperto B'_p , e due mappe bidifferenziabili, una l'inversa dell'altra:

$$x^k = x^k(t, \xi^2, \dots, \xi^n) \quad \text{dove } k = 1, \dots, n \text{ e } (t, \xi^2, \dots, \xi^n) \in B'_p$$

$$t = t(x^1, \dots, x^n), \quad \xi^j = \xi^j(x^1, \dots, x^n) \quad \text{dove } j = 2, \dots, n \text{ e } (x^1, \dots, x^n) \in B_p$$

(Il fatto che B'_p sia aperto di \mathbb{R}^n e che la funzione sulla seconda riga esista e abbia lo stesso grado di differenziabilità della prima segue, per il teorema del Dini, dal fatto che la matrice jacobiana di tale trasformazione ha determinante non nullo in p come il lettore può dimostrare facendo il calcolo diretto. Una dimostrazione esplicita si trova in Appendice D.) Il sistema di coordinate normali riemanniane t, ξ^2, \dots, ξ^n ha la particolarità che, data la natura di t , vale:

$$\Sigma \cap B_p \equiv \{(t, \xi^2, \dots, \xi^n) \mid t = 0\}.$$

Ulteriormente, se (ξ^2, \dots, ξ^n) sono fissate e individuano il punto $q \in \Sigma$, la curva

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto (x^1(t, \xi^2, \dots, \xi^n), \dots, x^n(t, \xi^2, \dots, \xi^n)) \in \mathbb{R}^n$$

risulta essere la retta *normale* a Σ in q per costruzione, dove t è la *lunghezza* del segmento di tale retta tra $q \in \Sigma$ e il punto di \mathbb{R}^n

$$p(t) \equiv (x^1(t, \xi^2, \dots, \xi^n), \dots, x^n(t, \xi^2, \dots, \xi^n)).$$

Il vettore tangente iniziale a tale retta:

$$\mathbf{n} := \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial t} \Big|_{t=0} \mathbf{e}_i$$

non è altro che il *versore* normale a Σ nel punto q di coordinate normali riemanniane $(0, \xi^2, \dots, \xi^n)$. Di conseguenza, se $u = u(x)$ è una funzione arbitraria definita nell'intorno di p e definiamo $u'(t, \xi^2, \dots, \xi^n) = u(x(t, \xi^2, \dots, \xi^2))$ quando esprimiamo tale funzione in coordinate normali riemanniane, vale:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} := \sum_{i=1}^n n^i \frac{\partial u}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial t} \Big|_{t=0} \frac{\partial u}{\partial x^i} = \frac{\partial u'}{\partial t} \Big|_{t=0}, \quad (1.27)$$

Lavorando nell'intorno di p in coordinate normali riemanniane, il problema di Cauchy (1.26) diventa della forma, dove $\boldsymbol{\xi} = (\xi^2, \dots, \xi^n)$,

$$\left\{ \begin{array}{l} a^{ttt}(t, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = - \sum_{i=2}^n 2a^{tit}(t, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial^2 u'}{\partial t \partial \xi^i} - \sum_{i,j=2}^n a^{ij}(t, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial^2 u'}{\partial \xi^i \partial \xi^j} + \\ \quad - \Phi' \left(t, \boldsymbol{\xi}, u'(t, \boldsymbol{\xi}), \frac{\partial u'}{\partial t}, \frac{\partial u'}{\partial \xi^2}, \dots, \frac{\partial u'}{\partial \xi^n} \right), \\ \quad u'(0, \boldsymbol{\xi}) = u'_0(\boldsymbol{\xi}), \\ \quad \frac{\partial u'}{\partial t}(0, \boldsymbol{\xi}) = u'_1(\boldsymbol{\xi}), \end{array} \right. \quad (1.28)$$

Notiamo che se vale $a^{ttt}(0, \boldsymbol{\xi}) \neq 0$, per continuità della funzione a^{ttt} , tale condizione continuerà ad essere vera in un intorno di $p \equiv (0, \boldsymbol{\xi})$, allora possiamo dividere entrambi i membri dell'equazione differenziale per $a^{ttt}(t, \boldsymbol{\xi})$ ottenendo un'equazione differenziale in forma normale nella variabile t nell'intorno detto. Il problema di Cauchy risultante in questa situazione è un caso particolare del problema che appare nelle ipotesi del teorema di Cauchy-Kovalevskaja. Per poter applicare il teorema detto sono comunque ancora necessarie ipotesi di analiticità della quali non ci occuperemo. Tornando in coordinate cartesiane e facendo uso della (1.18), la condizione $a^{ttt}(0, \boldsymbol{\xi}) \neq 0$, tenendo conto che è:

$$a^{ttt}(t, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \frac{\partial t}{\partial x^i} \frac{\partial t}{\partial x^j},$$

può essere riscritta, per $x \in \Sigma$:

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \frac{\partial t}{\partial x^i} \frac{\partial t}{\partial x^j} \neq 0, \quad (1.29)$$

Concludiamo che, se in un punto $x \in \Sigma$ vale la (1.29), allora possiamo applicare il teorema di Cauchy-Kovalevskaja nell'intorno di quel punto riducendoci a lavorare in coordinate normali riemanniane purché siano soddisfatte le necessarie ipotesi di analiticità.

1.4.5 Nozione di superficie caratteristica

Ci interessa ora approfondire la situazione opposta in cui, in riferimento al problema di Cauchy (1.26), valga:

$$a^{tt}(x) = 0, \quad (1.30)$$

ovunque sulla superficie Σ .

In tal caso il teorema di Cauchy-Kovalevskaja non può essere applicato e non ci sono garanzie, per tale via, sull'esistenza e l'unicità di una soluzione nell'intorno del punto singolare detto.

Si ricordi che la funzione $t = t(x)$ individua la superficie regolare Σ su cui diamo le condizioni di Cauchy, tramite la richiesta $t(x) = 0$, di cui $\nabla t = \sum_i \frac{\partial t}{\partial x^i} \mathbf{e}_i$ è vettore normale mai nullo. Nel caso in cui valga (1.30), non possiamo applicare il teorema di Cauchy-Kovalevskaja per dati di Cauchy assegnati la superficie individuata da $t = 0$. Ora focalizzeremo l'attenzione su questa classe di superfici.

L'uso delle coordinate Riemanniane e della coordinata t , si è rivelato comodo per ricondurre il problema di Cauchy al caso semplificato in cui si può cercare di applicare il teorema di C.-K., ma non è molto comodo nel caso generale. Per *definire* la suddetta classe di superfici, per le quali *non* si applica il teorema di C.-K. faremo quindi uso della sola nozione di superficie regolare, senza usare sistemi di coordinate particolari come quelli normali.

Definizione 1.6. Se $\Omega \in \mathbb{R}^n$ è un insieme aperto non vuoto e connesso, si consideri l'equazione quasi lineare del secondo ordine nella funzione a valori reali u :

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \Phi(x, u(x), \nabla_x u) = 0, \quad (1.31)$$

dove $u \in C^2(\Omega)$ e $a^{ij} \in C^0(\Omega)$ e $\Phi \in C^0(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ sono funzioni a valori reali assegnate. Una superficie regolare $\Sigma \subset \Omega$ di dimensione $n - 1$ è detta **superficie caratteristica** per l'equazione differenziale (1.31), se nell'intorno di ogni $p \in \Sigma$ può essere espressa come il luogo dei punti x in cui:

- (a) $S(x) = 0$ dove S è una funzione almeno C^2 definita nell'intorno di p ,
- (b) $dS \neq 0$ su Σ ,

(c) vale la cosiddetta **equazione delle caratteristiche**:

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^j} = 0, \quad \text{per } x \in \Sigma. \quad (1.32)$$

◇

Evidentemente, nel caso di coordinate normali, la funzione S non è altro che la coordinata t , tuttavia, come precisato noi non facciamo ipotesi particolari sulla natura di S e ci limitiamo ad usare la definizione di sopra nel caso generale. Mostriamo ora che, effettivamente, le superfici caratteristiche, date dalla definizione generale di sopra, non permettono di applicare il teorema di Cauchy-Kovalevskaja quando i dati di Cauchy sono assegnati su di esse. Successivamente, nelle osservazioni, mostreremo che il problema di Cauchy con dati iniziali su una superficie caratteristica è, in generale, affetto anche da altre patologie.

Se Σ è una superficie caratteristica individuata dal luogo degli zeri della funzione S , possiamo usare su Σ le coordinate normali Riemanniane t, ξ^2, \dots, ξ^n . In questo caso possiamo esprimere la funzione S nelle coordinate normali definendo

$$S'(t, \xi^2, \dots, \xi^n) := S(x^1(t, \xi^2, \dots, \xi^n), \dots, x^n(t, \xi^2, \dots, \xi^n)).$$

Con questa definizione abbiamo che $S'(0, \xi^2, \dots, \xi^n) = 0$ per ogni scelta delle ξ^k , dato che il luogo dei punti a $S = 0$ coincide con il luogo dei punti a $t = 0$ e coincide con Σ per costruzione. Di conseguenza devono valere le seguenti condizioni:

$$\left. \frac{\partial S'}{\partial \xi^k} \right|_{t=0} = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial S'}{\partial t} \right|_{t=0} \neq 0.$$

La prima condizione si ottiene derivando l'identità $S'(0, \xi^2, \dots, \xi^n) = 0$, la seconda condizione deriva dal fatto che, se non fosse vera, avremmo che tutte le derivate di S sarebbero nulle su Σ (si tenga conto di (2) in Osservazioni 1.13) e questo è impossibile per la richiesta $dS \neq 0$ su Σ . Di conseguenza abbiamo in particolare che, esattamente su Σ ,

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^j} \Big|_{\Sigma} = \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \left(\frac{\partial S'}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x^i} + \sum_{k=2}^n \frac{\partial S'}{\partial \xi^k} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} \right) \left(\frac{\partial S'}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x^j} + \sum_{h=2}^n \frac{\partial S'}{\partial \xi^h} \frac{\partial \xi^h}{\partial x^j} \right) \\ & = \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \left(\frac{\partial S'}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x^i} + 0 \right) \left(\frac{\partial S'}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x^j} + 0 \right) = \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \frac{\partial t}{\partial x^i} \frac{\partial t}{\partial x^j} \Big|_{\Sigma} \left(\frac{\partial S'}{\partial t} \right)^2 = \left(\frac{\partial S'}{\partial t} \right)^2 a^{tt}, \end{aligned}$$

dove $\frac{\partial S'}{\partial t} \neq 0$ nelle nostre ipotesi, e quindi:

$$a^{tt}(0, \boldsymbol{\xi}) = \left(\frac{\partial S'}{\partial t} \right)^{-2} \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^j}$$

dove il coefficiente davanti alla somma a secondo membro è ben definito. Concludiamo che, come preannunciato, la richiesta che Σ sia una superficie caratteristica (ed in particolare la (1.32)) è *equivalente* al fatto che, lavorando in coordinate riemanniane normali attorno a Σ , il coefficiente a^{tt} in (1.28) si annulli su Σ e quindi non si possa applicare il teorema di Cauchy-Kovalevskaia nemmeno quando sono aggiunte le solite ipotesi di analiticità delle funzioni coinvolte.

Si deve notare che noi abbiamo assunto che $a^{tt}(0, \boldsymbol{\xi}) = 0$ su tutta Σ . In realtà, perché si annulli $a^{tt}(0, \boldsymbol{\xi})$ in un punto $p = (0, \boldsymbol{\xi}) \in \Sigma$, è sufficiente che Σ che compare in (1.26) sia *tangente* in p ad una superficie caratteristica.

Osservazioni 1.15.

(1) Lavorando su superfici caratteristiche il teorema di Cauchy-Kovalevskaia non può essere applicato. Questo però non significa automaticamente che il problema di Cauchy sia mal posto. In realtà qualcosa si riesce comunque a dire nel caso generale sfruttando i soli risultati ottenuti: *indipendentemente dall'applicabilità o meno del teorema detto*, possiamo concludere dai risultati appena ottenuti che il problema di Cauchy (1.26) *non ha alcuna soluzione* quando i dati di Cauchy sono assegnati su una superficie caratteristica Σ , se essi non soddisfano una certa equazione suppletiva. Infatti, passando a coordinate Riemanniane in modo che l'equazione differenziale si possa scrivere come in (1.28), il fatto che Σ sia caratteristica e che quindi $a^{tt}(0, \boldsymbol{\xi}) = 0$, implica che l'equazione in (1.28) si riduca, per $t = 0$, a:

$$\sum_{i=2}^n 2a^{it}(0, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial u'_1}{\partial \xi^i} + \sum_{i,j=2}^n a^{ij}(0, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial^2 u'_0}{\partial \xi^i \partial \xi^j} + \Phi' \left(0, \boldsymbol{\xi}, u'_0(\boldsymbol{\xi}), u'_1(\boldsymbol{\xi}), \frac{\partial u'_0}{\partial \xi^2}, \dots, \frac{\partial u'_0}{\partial \xi^n} \right) = 0.$$

Si osservi che questa condizione coinvolge unicamente i dati di Cauchy noti e non la soluzione, incognita, dell'equazione. Se questa condizione non è soddisfatta dalle condizioni di Cauchy non può, evidentemente, esserci alcuna soluzione del problema di Cauchy.

(2) Mostriamo ora, con un esempio elementare, che viceversa vi sono casi in cui assegnare dati di Cauchy su superfici caratteristiche per un'equazione iperbolica comporta che esistano *infinite soluzioni* al problema posto. Consideriamo il problema di Cauchy per $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ dove \mathbb{R}^2 ha coordinate standard (x, y) :

$$\begin{cases} u_{xy} = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ u_y(x, 0) = u_1(x), \end{cases} \quad (1.33)$$

dove $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ e $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ sono assegnate.

La matrice caratteristica A dell'equazione considerata è simmetrica, costante e vale a meno di un fattore moltiplicativo inessenziale:

$$A(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di A sono ± 1 . Questo significa che esiste una matrice ortogonale R , 2×2 , reale tale che:

$$RAR^t = \text{diag}(1, -1).$$

Di conseguenza l'equazione è ovunque di tipo iperbolico normale. Le superfici caratteristiche sono ora *curve caratteristiche*. Determiniamone alcune. Consideriamo la solita funzione $S = S(x, y)$ i cui zeri determinano le curve caratteristiche. L'equazione (1.32) si riduce ora a:

$$\frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial y} = 0.$$

La soluzione $S = \text{costante}$ non determina alcuna caratteristica in quanto l'insieme $S(x, y) = 0$ è vuoto se la costante è non nulla, oppure è tutto \mathbb{R}^2 se la costante è nulla, ma in tale caso $dS = 0$ ovunque. Pertanto deve essere $S = S_1(x)$ con $dS_1/dx \neq 0$ (per avere $dS \neq 0$) sull'insieme:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid S_1(x) = 0\},$$

oppure $S = S_2(y)$ con $dS_2/dy \neq 0$ sull'insieme:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid S_2(y) = 0\}.$$

In particolare, per ogni coppia di costanti $c, d \in \mathbb{R}$, le funzioni $S_1(x) = x - c$ e $S_2(y) = y - d$ soddisfano le condizioni poste. In definitiva le rette $x = \text{costante}$ e $y = \text{costante}$ sono curve caratteristiche.

In particolare la retta $y = 0$ è una curva caratteristica e pertanto le condizioni di Cauchy del problema (1.33) sono assegnate su una superficie caratteristica.

La soluzione generale dell'equazione $u_{xy} = 0$ in \mathbb{R}^2 con $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ è (provarlo per esercizio):

$$u(x, y) = f(x) + g(y),$$

dove $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ sono funzioni arbitrarie. Pertanto ogni eventuale soluzione di (1.33) si deve ricondurre a questa forma. In particolare dovrà essere:

$$u(x, 0) = f(x) + g(0) = u_0(x), \quad (1.34)$$

$$u_y(x, 0) = g'(0) = u_1(x). \quad (1.35)$$

Concludiamo immediatamente da (1.35) che: *se u_1 non è una funzione costante, allora il problema di Cauchy (1.33) non ha soluzioni.*

Tuttavia, nel caso in cui u_1 sia una funzione costante, il problema (1.33) ha *infinite* soluzioni. Infatti ogni funzione della forma:

$$u(x, y) = u_1 y + h(y) + u_0(x),$$

per $h \in C^2(\mathbb{R})$ arbitrariamente scelta purché $h(0) = 0$ e $h'(0) = 0$, risolve il problema di Cauchy (1.33).

Esempi 1.3.

(1) Consideriamo l'equazione delle onde su \mathbb{R}^n , con velocità di propagazione delle onde data

dalla costante $c > 0$:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta u = 0.$$

Le coordinate su \mathbb{R}^n sono state decomposte come: $x = (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. L'equazione è scritta in forma normale rispetto alla variabile t nel modo seguente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u.$$

Ci si aspetta pertanto, che assegnando come dati di Cauchy $u(0, \mathbf{x})$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(0, \mathbf{x})$ esista una soluzione (ed una sola) del problema. Questo accade effettivamente, quando i dati di Cauchy sono in una determinata classe di funzioni. Passiamo a studiare le superfici caratteristiche sulle quali il problema di Cauchy è, in generale, mal posto. Per $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^n$ fissato, si consideri la superficie conica di vertice (t_0, \mathbf{x}_0) :

$$\Gamma_{(t_0, \mathbf{x}_0)} := \{(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n \mid c^2(t - t_0)^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2\}.$$

Posto $S(t, \mathbf{x}) = c^2(t - t_0)^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2$, abbiamo che il luogo dei punti (t, \mathbf{x}) per cui $S(t, \mathbf{x}) = 0$ coincide con $\Gamma_{(t_0, \mathbf{x}_0)}$, inoltre

$$dS = 2c^2(t - t_0)dt - 2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot d\mathbf{x}$$

non si annulla su $\Gamma_{(t_0, \mathbf{x}_0)} \setminus \{(t_0, \mathbf{x}_0)\}$. Infine, se a^{ij} definiscono la matrice caratteristica dell'equazione delle onde, si ha che:

$$\sum_{ij=1}^n a^{ij} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^j} = -\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 + \sum_{i=2}^n \left(\frac{\partial S}{\partial x^i} \right)^2 = -4c^2(t - t_0)^2 + 4(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2,$$

si annulla esattamente su $\Gamma_{(t_0, \mathbf{x}_0)}$. Concludiamo che $\Gamma_{(t_0, \mathbf{x}_0)} \setminus \{(t_0, \mathbf{x}_0)\}$ è una superficie caratteristica dell'equazione delle onde. Tale superficie è detta *cono di luce* di vertice (t_0, \mathbf{x}_0) .

È importante precisare che i coni di luce non sono le sole superfici caratteristiche dell'equazione delle onde. Altre semplici superfici caratteristiche sono date dai piani di equazione

$$ct + \mathbf{x} \cdot \mathbf{b} = d,$$

dove il vettore costante $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n-1}$ soddisfa $\|\mathbf{b}\| = 1$ e $d \in \mathbb{R}$ è arbitrario. La funzione S in questo caso è banalmente:

$$S(t, \mathbf{x}) := ct + \mathbf{x} \cdot \mathbf{b} - d.$$

(2) L'equazione di tipo Klein-Gordon (con $\kappa \in \mathbb{R}$):

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \Delta \phi - \kappa \phi = 0,$$

malgrado abbia un termine aggiunto rispetto all'equazione di D'Alembert, ha esattamente le stesse superfici caratteristiche, dato che ciò che conta è solo la forma quadratica associata alle

derivate seconde.

(3) Le equazioni ovunque di tipo ellittico in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ed in particolare l'equazione di Poisson e quella di Laplace *non ammettono superfici caratteristiche*. Infatti, essendo la matrice dei coefficienti a^{ij} definita positiva, l'equazione (1.32) ammette come unica soluzione:

$$\frac{\partial S}{\partial x^i} = 0, \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, n,$$

per cui, di conseguenza $dS = 0$ ovunque sul dominio di S . La non esistenza di superfici caratteristiche non significa, come già sottolineato, che i problemi di Cauchy siano sempre ben posti.

(4) Se $\Omega := \mathbb{R}^n$, consideriamo infine l'equazione del calore:

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + a^2 \Delta u = q.$$

dove $a > 0$ è una costante e $q = q(t, \mathbf{x})$ una funzione assegnata. Sopra le coordinate su \mathbb{R}^n sono ancora state decomposte come: $x = (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. In questo caso, la (1.32) si riduce a:

$$\sum_{i=2}^n \left(\frac{\partial S}{\partial x^i} \right)^2 = 0,$$

che ammette come soluzione ogni funzione regolare $S = S(t)$. In particolare, per ogni fissata costante $c \in \mathbb{R}$, la funzione $S(t, \mathbf{x}) = t - c$ soddisfa tutti i requisiti per definire superfici caratteristiche. Concludiamo che i piani $t = \text{costante}$ sono superfici caratteristiche dell'equazione del calore.

Considerando equazioni di tipo iperbolico normale (del secondo ordine ovviamente), si può formulare il problema analogo a quello di Cauchy, ma con una sola condizione iniziale (tipicamente la restrizione della funzione incognita ad una superficie) ed assegnata su una superficie caratteristica. Questo problema viene detto *problema di Cauchy caratteristico* oppure *problema di Goursat*. Si tratta di un problema il cui studio è piuttosto difficile e sul quale esistono pochi risultati generali.

Nel caso parabolico normale, il problema di Cauchy può essere formulato assegnando dati di Cauchy su una superficie caratteristica, pur di assegnare un dato in meno, cioè la sola funzione e non la sua derivata normale sulla superficie caratteristica. In tal caso esistono teoremi di esistenza ed unicità.

Capitolo 2

Equazioni Ellittiche e funzioni armoniche in \mathbb{R}^n : risultati elementari.

In questo capitolo affronteremo il problema della ricerca delle soluzioni di una certa classe di equazioni differenziali alle derivate parziali ellittiche e dello studio di alcune delle loro proprietà.

2.1 Il problema fisico dell'elettrostatica e le equazioni di Poisson e Laplace.

Noi ci occuperemo dell'analisi matematica del problema fondamentale dell'elettrostatica. Il *regime elettrostatico* si ottiene studiando il campo \mathbf{E} unicamente tramite le prime due equazioni di Maxwell. In tale ambito si assume che \mathbf{E} unitamente a ρ , pensata come funzione assegnata, ed al campo \mathbf{B} (che in tal modo sparisce dalle equazioni suddette) siano funzioni *indipendenti dal tempo*.

Consideriamo un insieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ non vuoto e connesso (anche se alcuni teoremi che dimostreremo in seguito sono validi anche se Ω non è connesso). La seconda equazione di Maxwell in forma integrale, se si assume $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{x})$ di classe $C^0(\Omega)$, assicura che \mathbf{E} sia conservativo. Pertanto, in queste ipotesi esisterà una funzione $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $C^1(\Omega)$, determinata a meno di costanti additive, tale che:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla_{\mathbf{x}}\varphi . \quad (2.1)$$

Osservazioni 2.1. La seconda equazione in forma differenziale porta allo stesso risultato se si assume che \mathbf{E} sia $C^1(\Omega)$ e che Ω sia *semplicemente connesso* (per esempio $\Omega = \mathbb{R}$). Questo fatto mostra che le equazioni di Maxwell differenziali implicano la validità di quelle integrali solo sotto opportune ipotesi topologiche sul dominio spaziale Ω .

La funzione φ è detta **potenziale elettrostatico**. Determinare φ significa determinare \mathbf{E} , pertanto passiamo a studiare φ che, essendo un campo scalare, è più facile da maneggiare di un campo vettoriale quale è \mathbf{E} . Supponiamo di conoscere la densità di carica elettrica in Ω , descritta da una funzione $\rho \in C^0(\Omega)$. Se assumiamo che φ sia di classe $C^2(\Omega)$ (cioè \mathbf{E} di classe $C^1(\Omega)$), la prima equazione di Maxwell in forma differenziale, tenuto conto della (2.1) ed del fatto che

$$\nabla \cdot \nabla = \Delta,$$

implica immediatamente che φ soddisfi su Ω l'**equazione di Poisson**

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho \quad \text{ossia} \quad \sum_{i,j=1}^3 \delta^{ij} \frac{\partial\varphi}{\partial x^i \partial x^j} = -4\pi\rho. \quad (2.2)$$

Tale equazione è un tipico esempio di equazione ellittica, infatti la forma quadratica associata al termine del secondo ordine è costantemente definita positiva.

In particolare se la densità di carica è nulla in tutti i punti della regione Ω , cioè $\rho = 0$, allora l'equazione (2.2) diviene l'**equazione di Laplace**:

$$\Delta\varphi = 0. \quad (2.3)$$

Come già detto, la conoscenza del potenziale φ comporta anche la conoscenza del campo elettrico e quindi la soluzione del nostro problema. Le tre domande fondamentali alle quali un fisico vorrebbe avere risposta (dai matematici) sono: data una generica densità di carica $\rho \in C^0(\Omega)$, esiste la soluzione dell'equazione (2.2)? È unica? Come possiamo calcolarla?

Per dare una risposta positiva alle prime due domande (esistenza e unicità) è necessario fare delle ipotesi sulla struttura della regione Ω e imporre delle condizioni aggiuntive che il potenziale φ dovrà soddisfare: le *condizioni al contorno*. Abbiamo già detto (e lo proveremo esplicitamente tra poco) che non possiamo dare condizioni di Cauchy complete perché il problema risulta, in generale essere malposto. Dobbiamo pertanto "indebolire" le condizioni assegnate nel problema di Cauchy. Ci sono diversi modi di far ciò. Vediamo i due esempi più importanti.

Problema di Dirichlet. Risolvere il problema di Dirichlet significa risolvere l'equazione di Poisson su una regione Ω , insieme aperto a chiusura compatta imponendo i valori che il potenziale φ deve assumere sul bordo $\partial\Omega$ di Ω :

$$\begin{cases} \Delta\varphi = f & \text{su } \Omega, \\ \varphi|_{\partial\Omega} = \varphi_0 & \text{(assegnato)}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Osservazioni 2.2.

(1) Una tipica situazione fisica il cui è necessario risolvere un problema di Dirichlet è quella in cui $\partial\Omega$ è una superficie conduttrice, sulla quale il potenziale elettrico ha un valore costante che può essere assegnato arbitrariamente dall'esterno collegando la superficie ad una batteria e in Ω è anche presente una densità di carica $\rho = f/4\pi$ assegnata. Vedremo che in questo caso la soluzione φ del problema è unica, e quindi il campo $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ è unicamente determinato.

(2) C'è anche un altro caso fisicamente importante in cui rientra l'equazione di Laplace. Si tratta del caso in cui si vuole determinare la temperatura T in un mezzo omogeneo di volume Ω limitato (pensato come un aperto a chiusura compatta di \mathbb{R}^3), quando è tenuta fissa tramite termostati, ed è nota, la temperatura al contorno del mezzo $\partial\Omega$ e il sistema fisico si trova in situazione di regime (non ci sono più variazioni di temperatura nel tempo). In tal caso, all'interno di Ω , la temperatura T soddisfa l'equazione di Laplace e pertanto il problema fisico si riduce ad un problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta T = 0 & \text{su } \Omega, \\ T|_{\partial\Omega} = T_0 & \text{(funzione assegnata)}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Questa situazione si ha, nella pratica, quando si deve progettare un forno scaldato tramite le pareti, oppure nei problemi in cui si vuole ottimizzare la cottura di qualche cibo o materiale scaldandolo attraverso la superficie esterna.

Problema di Neumann. Risolvere il problema di Neumann significa risolvere l'equazione di Poisson su una regione Ω , con Ω aperto a chiusura compatta e bordo $\partial\Omega$ regolare, imponendo i valori che la derivata normale alla superficie potenziale $\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} = \nabla\varphi \cdot \mathbf{n}$ deve assumere sul bordo $\partial\Omega$ di Ω :

$$\begin{cases} \Delta\varphi = f & \text{su } \Omega, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = \varphi_1 & \text{(assegnato)}. \end{cases} \quad (2.6)$$

Osservazioni 2.3.

(1) Notiamo che nei problemi di elettrostatica $-\nabla\varphi \cdot \mathbf{n}$ è la componente del campo elettrico ortogonale alla superficie $\partial\Omega$.

(2) Una tipica situazione fisica il cui è necessario risolvere un problema di Neumann è quella in cui $\partial\Omega$ è una superficie conduttrice ed è anche presente in Ω una densità di carica $\rho = -f/4\pi$ assegnata. (In tal caso si dimostra che il campo elettrico è sempre ortogonale a $\partial\Omega$ ed è proporzionale alla densità di carica superficiale su $\partial\Omega$).

Vedremo che per il problema di Neumann, se esiste la soluzione φ , essa è unica *a meno di una costante additiva*. Nel caso in cui φ rappresenti il campo elettrico $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, ne consegue che esso è *comunque* unicamente determinato perché non risente della costante additiva con cui è indeterminato φ .

2.2 Principio del massimo per funzioni armoniche e principio del massimo generalizzato.

2.2.1 Funzione armoniche e sub armoniche in \mathbb{R}^n .

Le funzioni reali di classe C^2 che soddisfano l'equazione di Laplace, anche in dimensione maggiore di 3, sono di grandissima rilevanza in matematica, per le loro molteplici proprietà analoghe a quelle delle funzioni analitiche (*olomorfe*) complesse di variabile complessa [ST84, Ru82]. Queste

funzioni sono dette *funzioni armoniche*.

Definizione 2.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto e $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. φ è detta **armonica** se $\varphi \in C^2(\Omega)$ e soddisfa $\Delta\varphi = 0$ in Ω . \diamond

Le funzioni *subarmoniche* hanno minor rilevanza ma sono un utile strumento tecnico in alcune dimostrazioni.

Definizione 2.2. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto e $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. φ è detta **subarmonica** se $\varphi \in C^2(\Omega)$ e soddisfa $\Delta\varphi \geq 0$ in Ω . \diamond

Osservazioni 2.4.

(1) A volte si richiede che l'insieme aperto non vuoto Ω sul quale sono definite le funzioni armoniche e sub armoniche sia anche connesso. Noi non faremo questa assunzione dato che non è strettamente necessaria. Quando essa risulterà necessaria ci ridurremo a lavorare in una componente connessa di Ω .

(2) Le funzioni armoniche appaiono, ovviamente, in maniera naturale quando si studano le soluzioni dell'*equazione di Laplace*:

$$\Delta\varphi = 0.$$

Le funzioni subarmoniche appaiono in maniera naturale quando si risolve invece l'*equazione di Poisson*, se il termine di sorgente f è opportuna. Se infatti $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, di classe C^2 , soddisfa l'equazione di Poisson:

$$\Delta\varphi = f$$

dove $f \in C^0(\Omega)$ è una funzione non negativa: $f(x) \geq 0$. In tal caso, banalmente φ è subarmonica.

Esempi 2.1.

1. In dimensione $n = 1$ le funzioni armoniche sono tutte e sole le funzioni che si restringono a funzioni lineari (non necessariamente omogenee) su ogni componente connessa del dominio. Infatti gli aperti sono unioni di aperti connessi e gli aperti connessi di \mathbb{R} sono gli intervalli aperti (a, b) , inoltre, se su (a, b) vale, per $\varphi \in C^2((a, b))$:

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) = 0$$

allora, integrando,

$$\frac{d}{dx}\varphi(x) = m \quad \text{costante,}$$

per cui, per qualche costante $q \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(x) = mx + q, \quad \text{per ogni } x \in (a, b).$$

Viceversa ogni funzione lineare su (a, b) è sicuramente di classe $C^2((a, b))$ ed ha derivata seconda nulla. Su ogni componente connessa di un aperto non vuoto $\Omega \subset \mathbb{R}$, ogni funzione armonica

su Ω è una funzione lineare e in generale non omogenea. Si osservi che le costanti m, q possono essere diverse a seconda della componente connessa di Ω considerata.

Per $n = 1$, le funzioni subarmoniche sono invece le funzioni di classe C^2 definite in aperti non vuoti e ivi *convesse*.

2. Sia $n = 2$. Esiste un legame interessante tra funzioni analitiche complesse e funzioni reali armoniche. Si consideri $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ con $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, f è detta **analitica** oppure, indifferentemente, **olomorfa**¹ su Ω , se per ogni $z_0 \in \Omega$ la funzione f ammette sviluppo di Taylor centrato in z_0 e convergente a f in un intorno aperto di z_0 . L'esistenza della serie di Taylor necessita in particolare dell'esistenza della derivata:

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}, \quad (2.7)$$

per ogni $z_0 \in \Omega$. Il limite è definito nella topologia di \mathbb{R}^2 : per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ t.c. se $|z - z_0| < \delta$ allora:

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \epsilon,$$

e quindi è uniforme in tutte le direzioni. In particolare quindi, se $f'(z_0)$ esiste nel senso scritto sopra, può essere calcolata derivando lungo una fissata direzione. Decomponendo (2.7) in parte reale ed immaginaria, si può scrivere:

$$z = x + iy \in \Omega, \quad f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

dove $u, v : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sono la parte reale e immaginaria della funzione f che risultano essere funzioni (infinitamente) differenziabili, come si prova subito tenendo conto che se f è (infinitamente) differenziabile lo è anche la funzione complessa coniugata \bar{f} e valgono le relazioni $u(x, y) = (f(x + iy) + \overline{f(x + iy)})/2$ e $v(x, y) = (f(x + iy) - \overline{f(x + iy)})/(2i)$. Tenendo conto dell'indipendenza direzionale del limite per calcolare $f'(z_0)$, abbiamo:

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + iy_0 + h) - f(x_0 + iy_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + iy_0 + ih) - f(x_0 + iy_0)}{ih},$$

Sostituendo la decomposizione di f in parte reale ed immaginaria, abbiamo dunque l'identità :

$$\frac{\partial}{\partial x} (u(x, y) + iv(x, y)) = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} (u(x, y) + iv(x, y)),$$

dove le derivate sono calcolate nel generico punto $(x_0, y_0) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$. Tenendo conto che u e v sono reali, raccogliendo separatamente parte reale ed immaginaria nell'identità trovata, abbiamo immediatamente che devono valere le **condizioni di Cauchy-Riemann**:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \text{per ogni } (x, y) \in \Omega. \quad (2.8)$$

¹Il fatto che esistano due nomi per la stessa classe di funzioni è dovuto al particolare percorso storico che la teoria delle funzioni di variabile complessa ha seguito. Inizialmente si davano due differenti definizioni per le funzioni olomorfe e per quelle analitiche, più tardi è stato dimostrato che si tratta della stessa classe di funzioni.

Abbiamo infine direttamente dalle condizioni di Cauchy-Riemann:

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0.$$

Concludiamo che la parte reale ed immaginaria di ogni funzione olomorfa è una funzione armonica.

3. In dimensione $n > 1$ le funzioni armoniche sono moltissime. Alcuni polinomi di grado n sono armonici in dimensione $n > 1$: $P(x^1, \dots, x^n) = x^1 \cdots x^n$. Vi sono anche funzioni non polinomiali, come per esempio, se $n > 1$:

$$\varphi(x^1, \dots, x^n) = \sin(\sqrt{n-1}x^1) \sinh(x^2 + \cdots + x^n).$$

Osservazioni 2.5.

(1) Si può dimostrare che condizione necessaria e sufficiente – e la sufficienza è uno dei risultati più notevoli della teoria delle funzioni analitiche complesse – affinché $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, con $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto non vuoto, sia olomorfa su Ω è che, per ogni $z_0 \in \Omega$, esista la derivata $f'(z_0)$, definita in (2.7).

(2) Si può provare [ST84], in riferimento a $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, con $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto non vuoto, che f è olomorfa in Ω se e solo se la sua parte reale ed immaginaria u e v soddisfano: (i) $u, v \in C^1(\Omega)$ (pensando Ω come sottoinsieme di \mathbb{R}^2) unitamente a (ii) le condizioni di Cauchy-Riemann (2.8) su Ω .

(3) Le funzioni olomorfe sono molto comuni: tutti i polinomi della variabile $z \in \mathbb{C}$ sono funzioni olomorfe su \mathbb{C} , i rapporti tra polinomi sono funzioni olomorfe su tutto \mathbb{C} escludendo gli zeri del polinomio a denominatore. Vi sono poi funzioni olomorfe definite sommando serie che estendono nel piano complesso funzioni reali di variabile reale. Per esempio:

$$e^z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

estende a valori complessi la funzione esponenziale $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^x$ definendo una funzione olomorfa su tutto il piano complesso. Nello stesso modo, cioè usando la stessa serie di Taylor che le definisce nei reali, ma valutandola per valori complessi della variabile, si definiscono le funzioni olomorfe $\sin z$ e $\cos z$ su tutto il piano complesso e si verifica la relazione di Eulero valida per tutti i complessi $z = x + iy \in \mathbb{C}$:

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Sono infine olomorfe le composizioni di funzioni olomorfe. Quindi, per esempio:

$$\mathbb{C} \setminus \{1\} \ni z \mapsto \sin\left(e^{\frac{z^2}{z-1}}\right),$$

è una funzione olomorfa sul dominio indicato.

2.2.2 Principio del massimo (in forma debole).

Nel caso $n = 1$, le funzioni armoniche sono, come visto sopra, della forma $\varphi : (a, b) \ni x \mapsto mx + q$. Notiamo che, nel caso considerato, se estendiamo φ all'intervallo chiuso $[a, b]$, supposto a, b finiti, accade che il massimo ed il minimo di φ sono assunti sul bordo di tale intervallo. Questa è una notevole proprietà delle funzioni armoniche che vale nel caso generale e cade sotto il nome di *principio del massimo* (anche se è un teorema). Si osservi che, sempre nel caso $n = 1$, ogni funzione subarmonica $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (che è convessa come prima precisato), se è estendibile per continuità ai valori estremi dell'intervallo (a, b) supposto finito, assume valore massimo in uno dei due estremi. Anche questa è una proprietà generale delle funzioni subarmoniche che useremo per provare il principio del massimo per funzioni armoniche e che enunciamo in un unico teorema.

Teorema 2.1. (Principio del massimo). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto con $\bar{\Omega}$ compatto. Sia $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $C^0(\bar{\Omega})$. Allora vale quanto segue.*

(a) *Se φ è subarmonica in Ω allora:*

$$\max_{\bar{\Omega}} \varphi = \max_{\partial\Omega} \varphi .$$

(b) *Se φ è armonica in Ω allora:*

$$\max_{\bar{\Omega}} \varphi = \max_{\partial\Omega} \varphi , \quad \min_{\bar{\Omega}} \varphi = \min_{\partial\Omega} \varphi \quad e \quad \max_{\bar{\Omega}} |\varphi| = \max_{\partial\Omega} |\varphi| .$$

◇

Dimostrazione. Prima di tutto notiamo che l'ipotesi di compattezza di $\bar{\Omega}$ e quindi del suo sottoinsieme chiuso² $\partial\Omega$ assicura l'esistenza dei massimi e minimi di cui si parla nella tesi essendo essi relativi a funzioni continue.

(a) Supponiamo inizialmente che $\Delta\varphi > 0$ su Ω . Sia $x_0 \in \bar{\Omega}$ un punto di massimo assoluto. Proviamo che $x_0 \in \partial\Omega$ e quindi la validità della tesi (a) nel caso $\Delta\varphi > 0$.

Se per assurdo fosse $x_0 \in \Omega$, allora la matrice hessiana di coefficienti $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} |_{x_0}$ sarebbe semidefinita negativa e quindi la sua traccia sarebbe non positiva: $\Delta\varphi|_{x_0} \leq 0$, che contraddice $\Delta\varphi|_{x_0} > 0$, quindi $x_0 \in \partial\Omega$.

Consideriamo ora il caso $\Delta\varphi \geq 0$ e definiamo la funzione $\tilde{\varphi}$ su $\bar{\Omega}$ come $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) + \epsilon|x|^2$, dove $\epsilon > 0$ è fissato. Allora su Ω vale $\Delta\tilde{\varphi} = \Delta\varphi + 2n\epsilon > 0$, quindi applicando il risultato appena dimostrato, si ha per ogni fissato $x \in \bar{\Omega}$:

$$\tilde{\varphi}(x) \leq \max_{\partial\Omega} \tilde{\varphi} \leq \max_{\partial\Omega} \varphi + \epsilon R^2 ,$$

dove $R^2 = \max_{x \in \partial\Omega} |x|^2$. Essendo $\varphi(x) \leq \varphi(x) + \epsilon|x|^2 = \tilde{\varphi}(x)$, concludiamo che:

$$\varphi(x) \leq \max_{\partial\Omega} \varphi + \epsilon R^2 \quad \text{per ogni } x \in \bar{\Omega} \text{ e ogni } \epsilon > 0 .$$

² $\partial\Omega = \mathbb{R}^n \setminus (\text{Int}(\Omega) \cup \text{Ext}(\Omega))$ è chiuso perchè complemento di un insieme aperto e in questo caso $\partial\Omega$ è anche compatto perchè sottoinsieme chiuso del compatto $\bar{\Omega}$.

Fissando $x \in \bar{\Omega}$ e prendendo l'estremo inferiore di entrambi i membri al variare di $\epsilon > 0$, dovrà anche essere (per il valore fissato di x):

$$\varphi(x) \leq \max_{\partial\Omega} \varphi.$$

L'arbitrarietà di $x \in \bar{\Omega}$ implica la tesi in (a).

(b) Se φ è armonica allora φ e $-\varphi$ sono subarmoniche, da cui:

$$\max_{\partial\Omega} \varphi = \max_{\bar{\Omega}} \varphi,$$

$$\min_{\partial\Omega} \varphi = -\max_{\partial\Omega}(-\varphi) = -\max_{\bar{\Omega}}(-\varphi) = \min_{\bar{\Omega}} \varphi.$$

Inoltre, dato che $\max_{\partial\Omega} |\varphi| = \max(|\max_{\partial\Omega} \varphi|, |\min_{\partial\Omega} \varphi|)$ vale anche:

$$\max_{\partial\Omega} |\varphi| = \max_{\bar{\Omega}} |\varphi|.$$

□

Osservazioni 2.6. Attenzione che il teorema *non* afferma che, per esempio, i punti di massimo delle funzioni continue sul compatto $\bar{\Omega}$ e subarmoniche sull'aperto Ω cadano necessariamente in $\partial\Omega$! Afferma che il massimo di tali funzioni viene sicuramente raggiunto sulla frontiera di Ω , ma non vieta possa essere *anche* raggiunto in punti di Ω . L'esempio più elementare è la funzione costante $\varphi(x) = 0$ ovunque su $\bar{\Omega}$. Osservazioni simili valgono per le funzioni armoniche.

2.2.3 Principio del massimo (in forma debole) generalizzato.

Mostriamo ora che il teorema precedente si generalizza a funzioni che non sono necessariamente armoniche, ma che sono soluzioni di una particolare classe di equazioni del secondo ordine lineari ed ellittiche.

Teorema 2.2. (Principio del massimo generalizzato). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto con $\bar{\Omega}$ compatto. Sia:*

$$L = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{j=1}^n b^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

un operatore differenziale del secondo ordine tale che:

- (i) la matrice simmetrica dei coefficienti $a^{ij}(x)$ sia definita positiva³ per ogni $x \in \Omega$,
- (ii) per qualche $C > 0$ e per qualche $k = 1, \dots, n$ valga $a^{kk}(x) \geq C$ per ogni $x \in \Omega$,
- (iii) per qualche $K \in \mathbb{R}$ e per lo stesso k di (ii) valga $b^k(x) \geq K$ per ogni $x \in \Omega$.

(Le ipotesi (ii) e (iii) sono soddisfatte se le funzioni $x \mapsto a^{ij}(x)$ e $x \mapsto b^j(x)$ si estendono a funzioni continue su tutto $\bar{\Omega}$ e (i) vale su $\bar{\Omega}$.)

³Cioè $\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) z_i z_j > 0$ se $(z_1, \dots, z_n) \neq 0$.

Si consideri una funzione $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Allora valgono i fatti seguenti.

(a) Se $L\varphi \geq 0$ su Ω allora:

$$\max_{\bar{\Omega}} \varphi = \max_{\partial\Omega} \varphi$$

(b) Se $L\varphi = 0$ su Ω allora vale, in aggiunta alla precedente, anche:

$$\min_{\bar{\Omega}} \varphi = \min_{\partial\Omega} \varphi \quad e \quad \max_{\bar{\Omega}} |\varphi| = \max_{\partial\Omega} |\varphi| .$$

◇

Dimostrazione. Si procede come nella dimostrazione del teorema precedente. Se vale $L\varphi > 0$ su Ω e $x_0 \in \Omega$ è un punto di massimo assoluto della funzione φ su $\bar{\Omega}$, allora $\nabla\varphi|_{x_0} = 0$ e la matrice di coefficienti $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^j}|_{x_0}$ è semidefinita negativa. Dato che la matrice $A(x_0)$ di coefficienti $a^{ij}(x_0)$ è definita positiva, per il teorema di Sylvester, si potrà scrivere come $A(x_0) = DID^t = DD^t$ dove D è una matrice quadrata non singolare. Inoltre, se $H(x_0)$ è la matrice quadrata simmetrica di coefficienti $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^j}|_{x_0}$, si ha (tenendo conto che la parte del prim'ordine di L non fornisce contributo in quanto tutte le derivate prime di φ si annullano in x_0):

$$L\varphi|_{x_0} = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x_0) \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^j}|_{x_0} = \text{tr}(A(x_0)H(x_0)) ,$$

per cui:

$$L\varphi|_{x_0} = \text{tr}(DD^tH(x_0)) = \text{tr}(D^tH(x_0)D) .$$

Dato che D è non singolare e $H(x_0)$ è semidefinita negativa, $D^tH(x_0)D$ sarà ancora semidefinita negativa⁴ e quindi avrà autovalori non positivi. La traccia di tale matrice sarà dunque non positiva. In definitiva:

$$L\varphi|_{x_0} = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x_0) \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^j}|_{x_0} \leq 0,$$

che è assurdo perché per ipotesi $L\varphi|_{x_0} > 0$.

Assumeremo ora che $k = 1$ verifichi le richieste in (i) e (ii). Ci si può sempre mettere in tale situazione riordinando le coordinate x^1, \dots, x^n . Supponiamo ora che $L\varphi \geq 0$ su Ω e definiamo $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) + \epsilon e^{\gamma x^1}$ con $\gamma > 0$ e $\epsilon > 0$ fissati.

$$L\tilde{\varphi}(x) = L\varphi(x) + \epsilon(\gamma^2 a^{11}(x) + \gamma b^1(x))e^{\gamma x^1} .$$

Se $\gamma > 0$ è abbastanza grande, dato che $a^{11}(x) \geq C > 0$ e $b^1(x) \geq K > -\infty$, allora deve essere $\epsilon(\gamma^2 a^{11}(x) + \gamma b^1(x))e^{\gamma x^1} \geq \epsilon\gamma(\gamma C + K)e^{\gamma x^1} > 0$ su Ω per ogni $\epsilon > 0$.

(Si osservi che se le funzioni $x \mapsto a^{ij}(x)$ si estendono a funzioni continue su tutto $\bar{\Omega}$ e (i) vale su tale insieme, allora la definitività positiva di $a^{ij}(x)$ implica, in particolare, che $a^{kk}(x) > 0$ su

⁴Per ipotesi $u^t H(x_0) u \leq 0$ per ogni $u \in \mathbb{R}^n$, ma dato che $D : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è biettiva, dovrà anche valere: $v^t D^t H(x_0) D v = (Dv)^t H(x_0) Dv \leq 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$.

$\bar{\Omega}$ per ogni k e dunque, data la continuità di a^{kk} , il suo minimo è minorato da qualche $C > 0$ e quindi vale (ii). Se $x \mapsto b^k(x)$ si estende ad una funzione continua su $\bar{\Omega}$ allora è sicuramente limitata su Ω e quindi vale (iii).

Abbiamo ottenuto che:

$$L\tilde{\varphi} > 0 \quad \text{su } \Omega.$$

Per la prima parte di questa dimostrazione, abbiamo quindi che:

$$\max_{\bar{\Omega}} \tilde{\varphi} = \max_{\partial\Omega} \tilde{\varphi},$$

e allora, per ogni fissato $x \in \bar{\Omega}$:

$$\varphi(x) \leq \tilde{\varphi}(x) \leq \max_{\bar{\Omega}} \tilde{\varphi} = \max_{\partial\Omega} \tilde{\varphi} \leq \max_{\partial\Omega} \varphi + \epsilon E$$

con $E = \max_{\partial\Omega} e^{\gamma x^1}$. La dimostrazione si conclude come quella del teorema precedente. \square

Osservazioni 2.7. Si noti che non è stata fatta alcuna ipotesi di regolarità sulle funzioni $\Omega \ni x \mapsto a^{ij}(x)$ e $\Omega \ni x \mapsto b^k(x)$ usate nella definizione di L , se non la richiesta che alcune di esse siano limitate dal basso.

2.2.4 Due teoremi di unicità per il problema di Dirichlet dal principio del massimo.

In questa sezione applichiamo il principio del massimo per dimostrare l'unicità delle soluzioni dell'equazione di Poisson (2.2) nel caso del problema di Dirichlet.

Teorema 2.3. (Unicità per il problema di Dirichlet 1). *Si consideri il seguente problema di Dirichlet per la funzione $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, riferita all'aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ non vuoto a chiusura compatta:*

$$\begin{cases} \Delta\varphi = f & \text{su } \Omega, \\ \varphi|_{\partial\Omega} = \psi, \end{cases} \quad \varphi \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega), \quad (2.9)$$

con $f \in C^0(\Omega)$, $\psi \in C^0(\partial\Omega)$ assegnate. Se esiste una soluzione φ al problema posto, questa è unica. \diamond

Dimostrazione. Siano ϕ_1 e ϕ_2 due soluzioni del problema, dimostriamo che la funzione $\phi_1 - \phi_2$ è identicamente nulla: $\phi_1 - \phi_2 = 0$.

$\phi_1 - \phi_2$ è armonica su Ω , infatti $\phi_1 - \phi_2 \in C^2(\Omega)$ e $\Delta(\phi_1 - \phi_2) = 0$ su Ω ; inoltre $(\phi_1 - \phi_2)|_{\partial\Omega} = 0$. Per il principio del massimo

$$\max_{\bar{\Omega}} |\phi_1 - \phi_2| = \max_{\partial\Omega} |\phi_1 - \phi_2| = 0,$$

da cui $\phi_1 = \phi_2$ su $\bar{\Omega}$. \diamond

Osservazioni 2.8.

(1) Notare che nel teorema precedente non abbiamo fatto alcuna ipotesi sulla regolarità di $\partial\Omega$, in particolare non è necessario che $\partial\Omega$ sia una superficie regolare. Non è necessario inoltre supporre che Ω sia connesso, ma solo aperto a chiusura compatta.

(2) Se tuttavia assumiamo anche che $\partial\Omega$ sia regolare e quindi abbia senso calcolare la derivata normale $\mathbf{n} \cdot \nabla\varphi|_{\partial\Omega}$ possiamo studiare il problema di Cauchy in Ω , cercando funzioni $\varphi \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ che risolvano $\Delta\varphi = f$ in Ω , con i soliti *due* dati di Cauchy assegnati su $\partial\Omega$: $\psi_0 = \varphi|_{\partial\Omega}$ e $\psi_1 = \mathbf{n} \cdot \nabla\varphi|_{\partial\Omega}$ ed interpretati come *condizioni iniziali*.

Il teorema di unicità provato implica che tale problema di Cauchy (quindi con *due* dati iniziali) sia *malposto nel senso di Hadamard* perché viola la prima richiesta, quella di esistenza delle soluzioni nella classe $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. In altre parole esistono necessariamente coppie di condizioni iniziali ψ_0, ψ_1 alle quali *non* corrisponde alcuna soluzione $\varphi \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ di $\Delta\varphi = f$ in Ω che si raccordi al bordo con entrambi i dati detti.

Per provare ciò assumiamo per assurdo che esistano sempre soluzioni al problema di Cauchy detto comunque scegliamo i dati di Cauchy. Consideriamo allora due coppie di dati di Cauchy $\psi_0 \in C^1(\partial\Omega)$, $\psi_1 \in C^0(\partial\Omega)$ e $\psi'_0 \in C^1(\partial\Omega)$, $\psi'_1 \in C^0(\partial\Omega)$ con $\psi_0 = \psi'_0$ ma $\psi_1 \neq \psi'_1$. Indichiamo rispettivamente con φ e φ' in $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ le soluzioni dei problemi di Cauchy corrispondenti. La funzione $\phi := \varphi' - \varphi \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ soddisfa $\Delta\phi = 0$ e $\phi|_{\partial\Omega} = 0$ e per il teorema provato deve quindi coincidere con la funzione identicamente nulla su Ω , e quindi su $\bar{\Omega}$ per continuità, dato che tale funzione soddisfa la stessa condizioni di Dirichlet di annullamento al bordo. Ma allora dovrebbe anche essere $\mathbf{n} \cdot \nabla\phi|_{\partial\Omega} = 0$ e cioè $\psi_1 = \psi'_1$ fatto che è stato escluso per ipotesi.

(3) Si supponga di essere riusciti a provare, e questo è possibile sotto opportune ipotesi di regolarità di $\partial\Omega$, che Ω ed f del teorema precedente siano tali che, per ogni $\psi \in C^0(\partial\Omega)$ esista una soluzione (e dunque una *sola* soluzione) φ del problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson $\Delta\varphi = f$ con f assegnata. In questo caso si può concludere che il problema di Dirichlet sia ben posto nel senso di Hadamard, *considerando la sola condizione al bordo di Dirichlet*, quando si dota lo spazio delle condizioni iniziali e lo spazio delle soluzioni della topologia metrica indotta dalla norma $\|\cdot\|_\infty$ (vedi la sezione 1.1.3). Infatti, per ogni dato di Dirichlet sul bordo $\psi \in C^0(\partial\Omega)$ avremmo (a) una soluzione $\varphi[\psi] \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ (b) tale soluzione sarebbe unica e (c) essa soddisferebbe anche $\|\varphi[\psi] - \varphi[\psi']\|_\infty \leq \|\psi - \psi'\|_\infty$ come segue subito dal principio del massimo e dalla linearità dell'equazione differenziale. Da tale disuguaglianza segue la continuità della funzione $\psi \mapsto \varphi[\psi]$ nelle topologie considerate. Se si accetta come topologia nello spazio delle soluzioni quella indotta da $\|\cdot\|_\infty$ quanto detto è vero. In realtà si potrebbe anche sostenere che la topologia della norma $\|\cdot\|_\infty$ non sia molto appropriata nello spazio delle soluzioni, dato che non considera le derivate delle funzioni φ che sono considerate nell'equazione stessa (in linea di principio, si potrebbe avere una successione di dati al bordo che tende a zero nella topologia della norma $\|\cdot\|_\infty$ (cioè uniformemente), mentre le derivate delle soluzioni associate non tendono ad alcun limite). Non siamo nelle condizioni di affrontare questa questione per il momento dato che non abbiamo ancora alcun teorema di esistenza.

Con la stessa dimostrazione del teorema precedente, ma usando il principio del massimo generalizzato si dimostra facilmente il seguente teorema più generale.

Teorema 2.4. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto con $\overline{\Omega}$ compatto. Sia:*

$$L = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{j=1}^n b^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

un operatore differenziale del secondo ordine su Ω tale che:

- (i) la matrice simmetrica dei coefficienti $a^{ij}(x)$ sia ovunque definita positiva per ogni $x \in \Omega$,
- (ii) per qualche $C > 0$ e qualche $k = 1, \dots, n$ valga $a^{kk}(x) \geq C$ per ogni $x \in \Omega$,
- (iii) per qualche $K \in \mathbb{R}$ e lo stesso k di (ii), valga $b^k(x) \geq K$ per ogni $x \in \Omega$

(Le ipotesi (ii) e (iii) sono soddisfatte se le funzioni $x \mapsto a^{ij}(x)$ e $x \mapsto b^j(x)$ si estendono a funzioni continue su tutto $\overline{\Omega}$ e (i) vale su $\overline{\Omega}$.)

Si consideri il problema di Dirichlet per $\varphi : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} L\varphi = f & \text{su } \Omega, \\ \varphi|_{\partial\Omega} = \psi, \end{cases} \quad \varphi \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega), \quad (2.10)$$

con $\psi \in C^0(\partial\Omega)$ e f assegnate. Se esiste una soluzione al problema posto, questa è unica. \diamond

Passiamo a provare un teorema di unicità della soluzione del problema di Dirichlet su una regione non limitata (problema di Dirichlet *esterno*) nell'ipotesi che la soluzione φ tenda a 0 *uniformemente in tutte le direzioni* quando $\|x\| \rightarrow \infty$, in altre parole: per ogni $\epsilon > 0$ esiste $R_\epsilon > 0$ tale che $|\varphi(x)| < \epsilon$ se $\|x\| > R_\epsilon$. In realtà la tesi del teorema seguente continua a valere banalmente se si rimpiazza la richiesta che φ tenda a 0 con la richiesta più fisica che φ tenda ad una qualche costante c uniformemente in tutte le direzioni quando $\|x\| \rightarrow \infty$.

Teorema 2.5. (Unicità per il problema di Dirichlet 2). *Se Ω è un aperto di \mathbb{R}^n a chiusura compatta, eventualmente $\Omega = \emptyset$, si consideri il problema di Dirichlet per $\varphi : \overline{\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}} \rightarrow \mathbb{R}$, dove vale $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}) \cap C^0(\overline{\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}})$:*

$$\begin{cases} \Delta\varphi = f & \text{su } \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \\ \varphi|_{\partial\Omega} = \psi, \quad \varphi \rightarrow 0 & \text{uniformemente in tutte le direzioni quando } \|x\| \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (2.11)$$

dove $f \in C^0(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega})$ e $\psi \in C^0(\partial\Omega)$ sono funzioni assegnate.

Se esiste una soluzione essa è unica. \diamond

Dimostrazione. Sia B_R una palla aperta di raggio $R > 0$ centrata nell'origine di \mathbb{R}^n e contenente $\overline{\Omega}$, che esiste dato che $\overline{\Omega}$ è un compatto in \mathbb{R}^n ed è quindi limitato. Siano ϕ_1 e ϕ_2 due soluzioni del problema (2.11) quindi tendenti uniformemente a 0 quando $x \rightarrow \infty$. Allora $\phi_1 - \phi_2 = 0$ su

$\partial\Omega$ e $|\phi_1 - \phi_2| \upharpoonright_{\partial B_R} \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow \infty$ uniformemente. Dato che $\phi_1 - \phi_2$ è armonica in $B_R \setminus \overline{\Omega}$ e continua sulla chiusura (che è compatta) di tale insieme, fissato $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$,

$$|\phi_1(x) - \phi_2(x)| \leq \max_{\partial\Omega \cup \partial B_R} |\phi_1 - \phi_2| = \max_{\partial B_R} |\phi_1 - \phi_2| \rightarrow 0 \quad \text{se } R \rightarrow \infty.$$

Ciò prova che $\phi_1(x) = \phi_2(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Per continuità il risultato vale su tutto $\overline{\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}}$. \square

Osservazioni 2.9. Anche in questo caso, nello stesso modo, ma usando il principio del massimo generalizzato possiamo provare il seguente teorema più generale.

Teorema 2.6. Se $\Omega \neq \emptyset$ è un aperto di \mathbb{R}^n a chiusura compatta e si consideri il problema di Dirichlet per $\varphi : \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, dove vale $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}) \cap C^0(\overline{\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}})$:

$$\begin{cases} L\varphi = f & \text{su } \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}, \\ \varphi \upharpoonright_{\partial\Omega} = \psi, & \varphi \rightarrow 0 \text{ uniformemente in tutte le direzioni quando } \|x\| \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (2.12)$$

dove $\psi \in C^0(\partial\Omega)$ e f sono assegnate e

$$L = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{k=1}^n b^k(x) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

è un operatore differenziale del secondo ordine tale che:

(i) la matrice simmetrica dei coefficienti $a^{ij}(x)$ sia ovunque definita positiva per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$,

(ii) per qualche $C > 0$ e per qualche $k = 1, \dots, n$ valga $a^{kk}(x) \geq C$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ e $k = 1, 2, \dots, n$,

(iii) per qualche $K \in \mathbb{R}$ e lo stesso k di (ii) valga $b^k(x) \geq K$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$.

Se esiste una soluzione essa è unica. \diamond

2.3 Le identità di Green le loro conseguenze elementari.

In questa sezione introduciamo delle formule utili dette di *identità di Green*, che hanno alcune importanti conseguenze sulle funzioni armoniche e sulle soluzioni dell'equazione di Poisson.

2.3.1 Identità di Green.

Introduciamo le cosiddette *identità di Green*. Le ipotesi che useremo non sono il caso più generale possibile.

Teorema 2.7. Sia $V \subset \mathbb{R}^n$ aperto, la cui chiusura \overline{V} sia compatta e tale che il suo bordo ∂V sia una superficie regolare (di dimensione $n-1$) orientabile. Se $\phi, \psi : \overline{V} \rightarrow \mathbb{R}$ sono due funzioni

di classe $C^1(\overline{V})$, valgono le seguenti identità, dove \mathbf{n} è il versore normale a ∂V orientato in modo uscente⁵.

Prima identità di Green:

$$\int_V \phi \Delta \psi d^n x + \int_V \nabla \phi \cdot \nabla \psi d^n x = \oint_{+\partial V} \phi \nabla \psi \cdot \mathbf{n} dS, \quad \text{se } \psi \in C^2(\overline{V}). \quad (2.13)$$

Seconda identità di Green:

$$\int_V (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) d^n x = \oint_{+\partial V} (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot \mathbf{n} dS, \quad \text{se } \psi, \phi \in C^2(\overline{V}). \quad (2.14)$$

Sempre assumendo $\phi, \psi \in C^1(\overline{V})$, le due identità valgono ancora se, rispettivamente, $\psi \in C^2(V)$ e $\psi, \phi \in C^2(V)$. In tal caso gli integrali $\int_V \phi \Delta \psi d^n x$ e $\int_V (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) d^n x$ sono da intendersi come integrali impropri di Riemann, oppure come integrali nel senso di Lebesgue, qualora le funzioni integrande siano (assolutamente) integrabili nel senso di Lebesgue. \diamond

Dimostrazione. La prima identità di Green (2.13) si ottiene applicando la formula di Gauss alla funzione $\phi \nabla \psi : \overline{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ (che soddisfa le ipotesi per applicare il teorema di Gauss su Ω). La tesi segue subito dall'identità:

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \psi) = \nabla \phi \cdot \nabla \psi + \phi \Delta \psi.$$

La seconda identità di Green (2.14) si ottiene dalla (2.13), scritta due volte invertendo, la seconda volta, il ruolo di ψ e ϕ e sottraendo membro a membro i risultati. \square

2.3.2 Conseguenze del teorema di Gauss e delle identità di Green: teorema di unicità per il problema di Neumann.

Vediamo ora altre proprietà delle funzioni armoniche e delle soluzioni dell'equazione di Poisson che derivano dal teorema di Gauss e dalle identità di Green.

Teorema 2.8. *Sia φ armonica in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ non vuoto aperto.*

Allora, per ogni superficie regolare $S \subset \Omega$ che sia il bordo orientabile di un aperto $V \subset \Omega$ con $\overline{V} \subset \Omega$ compatto, vale:

$$\oint_S \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

dove \mathbf{n} è il versore normale uscente alla superficie S . Il risultato vale considerando anche il caso limite $S = \partial \Omega$ se $\overline{\Omega}$ è compatto, S regolare orientabile e $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$. \diamond

⁵Come indicato dal simbolo $+\partial V$ nell'integrale di superficie.

Dimostrazione. Dato che $\varphi \in C^2(\Omega)$, possiamo applicare la formula di Gauss al volume $V \subset \Omega$ con $\partial V = S \subset \Omega$:

$$\oint_S \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_V \nabla \cdot \nabla \varphi \, d^n x = \int_V \Delta \varphi \, d^n x = 0.$$

Il caso limite segue nello stesso modo sempre dal teorema di Gauss, dato che la funzione $\Delta \varphi = 0$ è assolutamente Lebesgue integrabile su Ω . \square

Conseguenza delle identità di Green è il seguente teorema di unicità della soluzione del problema di Neumann. Ricordiamo preventivamente un lemma.

Lemma 2.1. *Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile sull'aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e per ogni punto di Ω vale $\nabla f = 0$ su Ω allora f è costante su ogni componente connessa di Ω . \diamond*

Dimostrazione. Ogni componente connessa di un aperto in \mathbb{R}^n è un insieme aperto⁶ e (ovviamente) connesso. Ogni insieme aperto connesso di \mathbb{R}^n è connesso per archi continui C^1 a tratti. Sia Ω_0 una componente connessa di Ω e $p, q \in \Omega_0$. Sia infine $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega_0$ una curva differenziabile a tratti tale che $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$ e $\gamma([a, b]) \subset \Omega_0$. La funzione continua $g(t) := f(\gamma(t))$ per $t \in [a, b]$ è differenziabile a tratti e, nelle nostre ipotesi, su ogni sottointervallo di differenziabilità di γ vale anche: $g'(t) = \dot{\gamma}(t) \cdot \nabla f(\gamma(t)) = 0$. Ne consegue che $g'(t)$ esiste ed è nulla per ogni $t \in [a, b]$. Il teorema di Lagrange implica allora che g è costante ed in particolare $f(p) = g(a) = g(b) = f(q)$. L'arbitrarietà dei punti $p, q \in \Omega_0$ implica che f è costante su Ω_0 . \square

Teorema 2.9. (Unicità per il problema di Neumann 1). *Si consideri il seguente problema di Neumann per la funzione $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$:*

$$\begin{cases} \Delta \varphi = f & \text{su } \Omega, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \Omega} = \psi \end{cases} \quad \varphi \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega) \quad (2.15)$$

con $f \in C^0(\Omega)$, $\psi \in C^0(\partial \Omega)$ assegnate, per $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, connesso, con chiusura $\bar{\Omega}$ compatta e $\partial \Omega$ superficie $n - 1$ dimensionale regolare e orientabile e \mathbf{n} è il versore normale uscente. Allora, se esiste una soluzione φ al problema posto, questa è unica a meno di costanti additive. \square

Dimostrazione. Siano ϕ_1 e ϕ_2 due soluzioni del problema, dimostriamo che la funzione $u = \phi_1 - \phi_2$ è costante. Per dimostrare ciò, notiamo inizialmente che $\phi_1 - \phi_2$ è armonica su Ω , infatti $\phi_1 - \phi_2 \in C^2(\Omega)$ e $\Delta(\phi_1 - \phi_2) = 0$ su Ω . Applicando la prima identità di Green:

$$0 = \int_{\Omega} u \Delta u \, d^n x = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u \, d^n x + \oint_{\partial \Omega} u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS.$$

Dato che, nelle nostre ipotesi $\frac{\partial \phi_1 - \phi_2}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \Omega} = 0$ ossia $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \Omega} = 0$, l'identità di sopra implica:

$$\int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 \, d^n x = 0.$$

⁶Dato che \mathbb{R}^n è localmente connesso.

Si osservi che l'integrale è sicuramente valido nel senso di Lebesgue dato che l'integrando è limitato (perchè continuo sul compatto $\overline{\Omega}$) su Ω che ha misura finita. Dato che l'integrando è non negativo, $\|\nabla u\|$ è quindi nulla quasi ovunque. Essendo però $\|\nabla u\|$ continua, abbiamo più fortemente che $\|\nabla u\| = 0$ ovunque su Ω . Concludiamo che, su ogni componente connessa di Ω , u deve essere costante. Questo implica immediatamente la tesi. \square

Osservazioni 2.10. Si consideri il problema di Neumann (2.15). Notiamo che dalla formula di Gauss applicata al campo vettoriale $\nabla\varphi$ segue

$$\int_{\Omega} \Delta\varphi d^n x = \int_{\Omega} \nabla \cdot \nabla\varphi d^n x = \oint_{+\partial\Omega} \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} dS$$

dal fatto che φ deve essere soluzione del problema di Neumann abbiamo che

$$\int_{\Omega} \Delta\varphi d^n x = \int_{\Omega} f d^n x \quad \text{e} \quad \oint_{+\partial\Omega} \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} dS = \oint_{+\partial\Omega} \psi dS.$$

Combinando i due risultati otteniamo la proposizione seguente.

Proposizione 2.1. *Condizione necessaria affinché il problema di Neumann (2.15) ammetta soluzione è che:*

$$\int_{\Omega} f d^n x = \oint_{\partial\Omega} \psi dS.$$

◇

Questo esempio ci porta a concludere che non tutti i problemi contenenti l'equazione di Poisson con condizioni di Neumann ammettono soluzione. In dimensione $n = 3$ e dal punto di vista fisico, quando φ rappresenta il potenziale elettrico e $\rho := f/(4\pi)$ è una densità di carica, l'identità

$$\int_{\Omega} \rho d^3 x = \oint_{+\partial\Omega} \psi dS$$

esprime la cosiddetta **legge di Gauss** della teoria elettromagnetica che corrisponde alla prima equazione di Maxwell in (1.3).

Concludiamo con due teoremi di unicità per il problema di Neumann *esterno*.

Teorema 2.10. (Unicità per il problema di Neumann 2). *Se $\Omega \neq \emptyset$ è un aperto di \mathbb{R}^n a chiusura compatta con bordo $\partial\Omega$ dato da una superficie $n-1$ dimensionale regolare orientabile ed infine $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ è connesso, si consideri il problema di Neumann per $\varphi : \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\varphi = f \quad \text{su } \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = \psi \\ |\varphi(x)| \leq K, \quad \|\nabla\varphi(x)\| \leq \frac{K}{(1+\|x\|)^{n-1+\alpha}} \quad \text{su } \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \end{array} \right. \quad \varphi \in C^1(\overline{\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}}) \cap C^2(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}), \quad (2.16)$$

con $f \in C^0(\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega})$, $\psi \in C^0(\partial\Omega)$ assegnate e dove \mathbf{n} è il versore normale uscente e $K > 0$, $\alpha > 0$ sono costanti reali dipendenti da φ in generale. Allora, se esiste una soluzione φ al problema posto, questa è unica a meno di costanti additive. \square

Dimostrazione. Sia B_R una palla aperta di raggio $R > 0$ centrata nell'origine di \mathbb{R}^n e contenente $\bar{\Omega}$. Siano ϕ_1 e ϕ_2 due soluzioni del problema considerato dimostriamo che la funzione $u := \phi_1 - \phi_2$ è costante. Per dimostrare ciò, notiamo inizialmente che, per costruzione u è armonica su $\Omega_R := (\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}) \cap B_R$. Applicando la prima identità di Green:

$$0 = \int_{\Omega_R} u \Delta u d^n x = - \int_{\Omega_R} \nabla u \cdot \nabla u d^n x + \oint_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS + \oint_{\partial B_R} u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS.$$

Dato che, nelle nostre ipotesi $\frac{\partial \phi_1 - \phi_2}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0$ ossia $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0$, l'identità di sopra implica:

$$\int_{\Omega_R} \|\nabla u\|^2 d^n x = \oint_{\partial B_R} u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS. \quad (2.17)$$

D'altra parte

$$\left| \oint_{\partial B_R} u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS \right| \leq \oint_{\partial B_R} |u \mathbf{n}_{\partial B_R} \cdot \nabla u| dS \leq \frac{H}{(1+R)^{n-1+\beta}} \oint_{\partial B_R} dS,$$

per qualche $H, \beta > 0$. Nell'ultimo passaggio abbiamo usato:

$$|u \mathbf{n} \cdot \nabla u| = |u| |\mathbf{n} \cdot \nabla u| \leq |u| \|\nabla u\|$$

e ancora, usando la disuguaglianza triangolare e la definizione di u :

$$|u| \|\nabla u\| \leq |\phi_1| \|\nabla \phi_1\| + |\phi_2| \|\nabla \phi_2\| + |\phi_1| \|\nabla \phi_2\| + |\phi_2| \|\nabla \phi_1\|,$$

e, dato che tutte le funzioni sono valutate per $\|x\| = R$,

$$|\phi_1| \|\nabla \phi_1\| + |\phi_2| \|\nabla \phi_2\| + |\phi_1| \|\nabla \phi_2\| + |\phi_2| \|\nabla \phi_1\| \leq \frac{H}{(1+R)^{n-1+\beta}},$$

dove $H > 0$ e $\beta > 0$ esistono per ipotesi (per esempio β è la più piccola tra le costanti α di ϕ_1 e ϕ_2 e H è 4 volte il quadrato della più grande delle costanti K di ϕ_1 e ϕ_2). Troviamo alla fine la disuguaglianza:

$$\left| \oint_{\partial B_R} u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS \right| \leq \frac{H}{(1+R)^{n-1+\beta}} \oint_{\partial B_R} dS.$$

Il secondo membro tende a 0 per $R \rightarrow +\infty$ in quanto l'ultimo integrale ha come valore il volume del bordo di B_R (rispetto alla misura di Borel naturale su tale bordo invariante per rotazioni), che vale CR^{n-1} per qualche costante $C > 0$. Per cui, da (2.17):

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_R} \|\nabla u\|^2 d^n x = 0,$$

che possiamo anche riscrivere come:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}} \chi_{B_R} \|\nabla u\|^2 d^n x = 0,$$

dove $\chi_{B_R}(x) = 1$ se $x \in B_R$ oppure $\chi_{B_R}(x) = 0$. Tenendo conto del fatto che, se $R' \leq R$

$$0 \leq \chi_{B_{R'}} \|\nabla u\|^2 \leq \chi_{B_R} \|\nabla u\|^2 \rightarrow \|\nabla u\|^2 \quad \text{puntualmente se } R \rightarrow +\infty.$$

(La convergenza puntuale è ovvia: fissato un qualunque $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$, se $R > \|x\|$, allora $\chi_{B_R}(x) \|\nabla u(x)\|^2 = \|\nabla u(x)\|^2$.) Il teorema della convergenza monotona, assicura che la funzione $x \mapsto \|\nabla u\|^2$ sia integrabile su $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ con integrale nullo. Pertanto la funzione deve essere quasi ovunque nulla. Essendo $u \mapsto \|\nabla u\|$ continua, deve essere $\nabla u = 0$ su $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$. Concludiamo che, su ogni componente connessa di $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$, u deve essere costante. Questo implica immediatamente la tesi. \square

Ecco il secondo teorema che fornisce l'unicità senza l'ambiguità della costante additiva arbitraria.

Teorema 2.11. (Unicità per il problema di Neumann 3). *Se $\Omega \neq \emptyset$ è un aperto di \mathbb{R}^n a chiusura compatta con bordo $\partial\Omega$ dato da una superficie $n-1$ dimensionale regolare orientabile ed infine $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ è connesso, si consideri il problema di Neumann per $\varphi : \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$:*

$$\begin{cases} \Delta\varphi = f & \text{su } \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = \psi \\ |\varphi(x)| \leq \frac{K}{(1+\|x\|)^\alpha}, \quad \|\nabla\varphi(x)\| \leq \frac{K}{(1+\|x\|)^{n-1}} & \text{su } \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega} \end{cases} \quad \varphi \in C^1(\overline{\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}}) \cap C^2(\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}), \quad (2.18)$$

con $f \in C^0(\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega})$, $\psi \in C^0(\partial\Omega)$ assegnate e dove \mathbf{n} è il versore normale uscente e $K > 0$, $\alpha > 0$ sono costanti reali dipendenti da φ in generale. Allora, se esiste una soluzione φ al problema posto, questa è unica. \square

Dimostrazione. La dimostrazione procede analogamente a prima. Sia B_R una palla aperta di raggio $R > 0$ centrata nell'origine di \mathbb{R}^n e contenente $\bar{\Omega}$. Siano ϕ_1 e ϕ_2 due soluzioni del problema considerato dimostriamo che la funzione $u := \phi_1 - \phi_2$ è costante. Per dimostrare ciò, notiamo inizialmente che, per costruzione u è armonica su $\Omega_R := (\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}) \cap B_R$. Applicando la prima identità di Green:

$$0 = \int_{\Omega_R} u \Delta u d^n x = - \int_{\Omega_R} \nabla u \cdot \nabla u d^n x + \oint_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}} dS + \oint_{\partial B_R} u \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}} dS.$$

Dato che, nelle nostre ipotesi $\frac{\partial\phi_1 - \phi_2}{\partial\mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0$ ossia $\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0$, l'identità di sopra implica:

$$\int_{\Omega_R} \|\nabla u\|^2 d^n x = \oint_{\partial B_R} u \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}} dS. \quad (2.19)$$

D'altra parte

$$\left| \oint_{\partial B_R} u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS \right| \leq \oint_{\partial B_R} |u \mathbf{n}_{\partial B_R} \cdot \nabla u| dS \leq \frac{H}{(1+R)^{n-1+\beta}} \oint_{\partial B_R} dS,$$

per costanti $H, \beta > 0$. Nell'ultimo passaggio abbiamo usato:

$$|u \mathbf{n} \cdot \nabla u| = |u| |\mathbf{n} \cdot \nabla u| \leq |u| \|\nabla u\|$$

e ancora, usando la disuguaglianza triangolare e la definizione di u :

$$|u| \|\nabla u\| \leq |\phi_1| \|\nabla \phi_1\| + |\phi_2| \|\nabla \phi_2\| + |\phi_1| \|\nabla \phi_2\| + |\phi_2| \|\nabla \phi_1\|,$$

e, dato che tutte le funzioni sono valutate per $\|x\| = R$, le due ultime condizioni in (2.18) producono:

$$|\phi_1| \|\nabla \phi_1\| + |\phi_2| \|\nabla \phi_2\| + |\phi_1| \|\nabla \phi_2\| + |\phi_2| \|\nabla \phi_1\| \leq \frac{H}{(1+R)^\beta} \frac{1}{(1+R)^{n-1}},$$

dove $H > 0$ e $\beta > 0$ esistono per ipotesi ($\beta > 0$ è la più piccola tra le costanti α di ϕ_1 e ϕ_2 e H è 4 volte il quadrato della più grande delle costanti K di ϕ_1 e ϕ_2). Troviamo quindi la disuguaglianza:

$$\left| \oint_{\partial B_R} u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS \right| \leq \frac{H}{(1+R)^{n-1+\beta}} \oint_{\partial B_R} dS.$$

L'ultimo membro tende a 0 per $R \rightarrow +\infty$ in quanto l'ultimo integrale ha come valore il volume del bordo di B_R (rispetto alla misura di Borel naturale su tale bordo invariante per rotazioni), che vale CR^{n-1} per qualche costante $C > 0$. Per cui, da (2.19):

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_R} \|\nabla u\|^2 d^n x = 0,$$

che possiamo anche riscrivere come:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}} \chi_{B_R} \|\nabla u\|^2 d^n x = 0,$$

dove $\chi_{B_R}(x) = 1$ se $x \in B_R$ oppure $\chi_{B_R}(x) = 0$. Tenendo conto del fatto che, se $R' \leq R$

$$0 \leq \chi_{B_{R'}} \|\nabla u\|^2 \leq \chi_{B_R} \|\nabla u\|^2 \rightarrow \|\nabla u\|^2 \quad \text{puntualmente se } R \rightarrow +\infty.$$

(La convergenza puntuale è ovvia: fissato un qualunque $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$, se $R > \|x\|$, allora $\chi_{B_R}(x) \|\nabla u(x)\|^2 = \|\nabla u(x)\|^2$.) Il teorema della convergenza monotona, assicura che la funzione $x \mapsto \|\nabla u\|^2$ sia integrabile su $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ con integrale nullo. Pertanto la funzione deve essere quasi ovunque nulla. Essendo $u \mapsto \|\nabla u\|$ continua, deve essere $\nabla u = 0$ su $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$. Concludiamo

che, su ogni componente connessa di $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, u deve essere costante. Questo implica immediatamente la tesi dato che $u(x) \rightarrow 0$ per $\|x\| \rightarrow +\infty$ nelle nostre ipotesi, e quindi l'eventuale costante che differenzia ϕ_1 da ϕ_2 è nulla. \square

Osservazioni 2.11.

(1) La condizione di annullamento all'infinito nelle ipotesi del teorema

$$|\varphi(x)| \leq \frac{K}{(1 + \|x\|)^\alpha},$$

può essere sostituita dalla richiesta che la funzione tenda ad una costante c all'infinito, con velocità opportuna:

$$|\varphi(x) - c| \leq \frac{K}{(1 + \|x\|)^\alpha}.$$

In questo caso, ovviamente, la dimostrazione è la stessa di prima ridefinendo $\varphi(x)$ come $\varphi(x) - c$, dato che e altre ipotesi riguardano solo le derivate della funzione e non risentono della costante aggiunta.

Dal punto di vista fisico, nei problemi di elettromagnetismo, questa libertà è del tutto naturale dato che il potenziale elettrostatico φ è definito a meno di costanti additive.

(2) Si può provare [Sa10] che, con Ω come detto sopra e per $n \geq 3$, se $\phi : \mathbb{R}^n \setminus \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è armonica e tende uniformemente a zero all'infinito allora esistono due costanti $R, K > 0$ tali che, se $\|x\| > R$ allora $|\phi(x)| \leq K/(1 + \|x\|)^{n-2}$, $\|\nabla\phi(x)\| \leq K/(1 + \|x\|)^{n-1}$. Pertanto sono verificate le ipotesi del teorema 2.11 e ne vale la tesi. Di conseguenza le ipotesi all'infinito su ϕ nel teorema appena dimostrato possono indebolirsi richiedendo solo che ϕ tenda a zero (o a qualsiasi costante per l'osservazione precedente) uniformemente in tutte le direzioni se $\|x\| \rightarrow +\infty$.

Capitolo 3

Soluzioni fondamentali per l'equazione di Poisson in \mathbb{R}^n e risultati ad esse legati.

Ci occuperemo ora di definire, e studiarne le proprietà, delle cosiddette *soluzioni fondamentali*, dell'equazione di Poisson. Tali strumenti matematici sono utili per vari motivi come vedremo. Esse permettono di ottenere altre importanti proprietà delle funzioni armoniche, ma fondamentalmente sono usate in una delle procedure classiche per determinare le soluzioni del problema di Dirichlet e Neumann.

3.1 Soluzioni fondamentali.

In questa sezione, una volta definite le soluzioni fondamentali, mostreremo come da esse si ricavino nuovi risultati sulle funzioni armoniche: i teoremi della media, un rafforzamento dell'enunciato del principio del massimo, la prova del fatto che le funzioni armoniche sono C^∞ ed addirittura analitiche, ed il risultato che stabilisce che se due funzioni armoniche coincidono su un aperto non vuoto A allora coincidono in ogni aperto connesso che contiene A sul quale sono entrambe definite (in particolare ogni funzione armonica nulla su un aperto non vuoto è nulla sulla componente connessa del suo dominio che include tale aperto).

Definizione 3.1. Per $n = 2, 3, \dots$ fissato, si definiscono **soluzioni fondamentali** su \mathbb{R}^n dell'equazione di Poisson rispetto al punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ le funzioni:

$$\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\} \ni x \mapsto G_n(x, x_0) := \mathcal{G}_n(\|x - x_0\|),$$

dove, per $r > 0$,

$$\mathcal{G}_n(r) := \begin{cases} \frac{1}{(2-n)\omega_n} r^{2-n} & \text{se } n > 2, \\ \frac{1}{(2\pi)} \log r & \text{se } n = 2, \end{cases} \quad (3.1)$$

in cui ω_n è il valore **misura naturale della frontiera della palla B_1 centrata nell'origine e di raggio unitario in \mathbb{R}^n** e vale:

$$\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$

Tale valore si ottiene integrando la funzione che vale costantemente 1 tramite l'integrale di superficie standard sulla superficie regolare orientabile ∂B_1 . \diamond

Osservazioni 3.1.

(1) Il valore ω_n si ottiene anche in riferimento ad una teoria della misura vera e propria su ∂B_R , pensato come spazio con misura, in riferimento alla sua σ -algebra di Borel, quando la topologia su ∂B_R è quella naturale indotta da \mathbb{R}^n . La misura di cui stiamo parlando è la misura di Borel (regolare e completa) sulla superficie della sfera di raggio unitario in \mathbb{R}^n che sia anche *invariante sotto l'azione del gruppo delle rotazioni di \mathbb{R}^n , $O(n)$* . Si può dimostrare che esiste una misura di Borel (regolare e completa) con tali caratteristiche di invarianza rotazionale, esattamente come la misura di Lebesgue in \mathbb{R}^n è invariante rispetto al gruppo delle traslazioni. In entrambi i casi, la misura detta (pensata come misura di Borel regolare completa) è *determinata a meno di una sola costante moltiplicativa positiva*: se μ e μ' sono due misure di questo tipo, allora esiste $c > 0$ per cui $\mu(A) = c\mu'(A)$ per ogni insieme misurabile A . Tale costante, riguardo alla misura sulla sfera, è appunto fissata dalla richiesta che la misura della superficie sferica di raggio 1 sia proprio ω_n . Questo valore si ottiene dal valore del volume “solido” della palla di raggio 1 ottenuto direttamente dalla misura di Lebesgue imponendo che valga l'identità euristica descritta al punto (3) sotto.

(2) Γ è la nota *funzione gamma* di Eulero:

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \text{per } z > 0,$$

che si prolunga analiticamente univocamente in una funzione olomorfa su tutto \mathbb{C} con l'esclusione di singolarità (poli) nei punti $z = 0, -1, -2, \dots$. Γ soddisfa, in particolare:

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{e} \quad \Gamma(n+1/2) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi} \quad \text{per } n = 1, 2, \dots$$

(3) Se $B_R \subset \mathbb{R}^n$ è una palla aperta di raggio R , $Vol(\partial B_R)$ e $Vol(B_R)$ denotano rispettivamente la misura della superficie di ∂B_R e la *misura di Lebesgue* del volume di B_R . Tali valori sono rispettivamente:

$$Vol(\partial B_R) = \omega_n R^{n-1} \quad \text{e} \quad Vol(B_R) = \frac{\omega_n R^n}{n}.$$

La scelta della misura naturale su ∂B_R fissata dalla richiesta $Vol(\partial B_1) = \omega_n$, assicura dunque la validità dell'identità, che ci si aspetta a priori da considerazioni euristiche:

$$\frac{d}{dR} Vol(B_R) = Vol(\partial B_R).$$

3.1.1 Proprietà elementari delle soluzioni fondamentali.

Vediamo ora le proprietà principali delle soluzioni fondamentali appena definite. Abbiamo bisogno di richiamare due nozioni.

Per prima cosa ricordiamo che in \mathbb{R}^n (più precisamente su una sua porzione che lo ricopre a meno di un insieme di misura nulla rispetto alla misura di Lebesgue su \mathbb{R}^n) possono essere definite *coordinate polari* che si riducono a quelle ben note nel caso di $n = 2$ e $n = 3$. La costruzione procede come segue. Preso un punto $p \in \mathbb{R}^n$ si consideri il vettore $p - o$ che lo connette all'origine. Pensando le coordinate naturali di \mathbb{R}^n come coordinate cartesiane ortonormali, la componente lungo x^n del vettore detto è scrivibile come:

$$x^n(p) = r(p) \cos \theta_{n-1}(p), \quad (3.2)$$

dove abbiamo introdotto l'ultimo degli $n - 1$ angoli polari di p , $\theta_{n-1} \in (0, \pi)$ e la *coordinata radiale* di p :

$$r(p) := \sqrt{\sum_{k=1}^n (x^k(p))^2}. \quad (3.3)$$

La proiezione di $p - o$, che indichiamo con $p_{n-1} - o$, sul $(n - 1)$ -piano perpendicolare all'asse x^n , che identifichiamo con \mathbb{R}^{n-1} , avrà lunghezza $r(p) \sin \theta_n(p)$. Possiamo allora decomporre il vettore $p_{n-1} - o$ nello spazio \mathbb{R}^{n-1} esattamente come abbiamo fatto con $p - o$ in \mathbb{R}^n , usando l'asse x^{n-1} al posto di x^n . La componente di $p - o$ rispetto all'asse x^{n-1} si potrà allora scrivere come:

$$x^{n-1}(p) = r(p) \sin \theta_{n-1}(p) \cos \theta_{n-2}(p), \quad (3.4)$$

dove abbiamo introdotto il penultimo angolo polare di p , $\theta_{n-2} \in (0, \pi)$.

La proiezione di $p_{n-1} - o$, che indichiamo con $p_{n-2} - o$, sul $(n - 2)$ -piano perpendicolare agli assi x^n e x^{n-1} , che identifichiamo con \mathbb{R}^{n-2} , avrà lunghezza $r(p) \sin \theta_n(p) \sin \theta_{n-2}(p)$. Possiamo allora decomporre il vettore $p_{n-2} - o$ nello spazio \mathbb{R}^{n-2} esattamente come abbiamo fatto con $p_{n-1} - o$ in \mathbb{R}^{n-1} , usando l'asse x^{n-2} al posto di x^{n-1} . La componente di $p - o$ rispetto all'asse x^{n-2} si potrà allora scrivere come:

$$x^{n-2}(p) = r(p) \sin \theta_{n-1}(p) \sin \theta_{n-2}(p) \cos \theta_{n-3}(p), \quad (3.5)$$

dove abbiamo introdotto il terzultimo angolo polare di p , $\theta_{n-3} \in (0, \pi)$.

Possiamo andare avanti in questo modo fino a quando non arriviamo allo spazio \mathbb{R}^2 . In tale spazio avremo le due ultime componenti di $p - o$ che saranno (scambiando l'ordine rispetto alle convenzioni usate fino ad ora)

$$x^1(p) = r(p) \sin \theta_{n-1}(p) \sin \theta_{n-2}(p) \cdots \sin \theta_2(p) \cos \theta_1(p) \quad (3.6)$$

e

$$x^2(p) = r(p) \sin \theta_{n-1}(p) \sin \theta_{n-2}(p) \cdots \sin \theta_2(p) \sin \theta_1(p) \quad (3.7)$$

dove, questa volta il primo angolo polare θ_1 varia in $(-\pi, \pi)$.
 Al variare dei numeri

$$(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \theta_{n-1}) \in (0, +\infty) \times (0, \pi) \times \dots \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi) =: \Omega$$

i punti $p \in \mathbb{R}^n$ che hanno coordinate cartesiane $(x^1(p), \dots, x^n(p))$ individuate da $(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$ dalle relazioni (3.2)-(3.7) ricoprono l'insieme aperto di \mathbb{R}^n

$$\Omega' := \mathbb{R}^n \setminus \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^1 \leq 0, x^2 = 0, x^k \in \mathbb{R} \quad k = 3, 4, \dots, n\}.$$

Si può dimostrare che la funzione che si viene a costruire in questo modo da $\psi : \Omega \rightarrow \Omega'$ è biettiva di classe C^∞ con inversa di classe C^∞ . In altre parole $\psi^{-1} : \Omega' \rightarrow \Omega$ definisce un sistema di coordinate su Ω' che si dicono **coordinate polari** in \mathbb{R}^n .

Si osservi che vale la relazione:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \mathbf{n}_x \cdot \nabla_x \quad (3.8)$$

dove \mathbf{n}_x è il versore nel punto $x \in \mathbb{R}^n$ uscente da x in direzione radiale rispetto all'origine di \mathbb{R}^n e ∇_x è il solito operatore differenziale gradiente in coordinate cartesiane. La dimostrazione della (3.8) è ovvia dalla formula di derivazione di funzioni composte:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x^k},$$

tenendo conto delle (3.2)-(3.7) e del fatto che se in tali formule si pone $r(p) = 1$ si ottengono le componenti cartesiane di \mathbf{n}_x .

La seconda nozione che vogliamo ricordare è quella di funzione *localmente integrabile*. Una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ è detta **di classe** $\mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ ovvero, equivalentemente, **localmente integrabile**, se è misurabile e soddisfa:

$$\int_B |f| d^n x < +\infty, \quad \text{per ogni aperto limitato } B \text{ di } \mathbb{R}^n,$$

dove l'integrale è quello di Lebesgue. Nel seguito, riferendoci ad una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ (o \mathbb{R}) con $A \subset \mathbb{R}^n$, diremo che essa è **di classe** $\mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$, ovvero equivalentemente **localmente integrabile**, se, estendendo tale funzione alla funzione nulla fuori da A , la funzione \tilde{f} ottenuta in tal modo è localmente integrabile.

Teorema 3.1. *Per $n = 2, 3, \dots$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fissati, le soluzioni fondamentali $G_n(x, x_0)$ soddisfano le seguenti proprietà.*

(a) *Le funzioni $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\} \ni x \mapsto G_n(x, x_0)$ e $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\} \ni x \mapsto G_n(x_0, x)$ sono di classe $\mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\})$, anche se G_n diverge per $x \rightarrow x_0$. Se $f \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ è pertanto ben definito:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} G_n(x, y) f(y) d^n y.$$

(b) Se $x \neq x_0$ allora:

$$\Delta_x G_n(x, x_0) = 0.$$

(c) Se $\rho \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ allora:

$$\int_{\mathbb{R}^n} G_n(x, y) \Delta_y \rho(y) d^n y = \rho(x).$$

(d) Se $\rho \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ allora:

$$\Delta_x \int_{\mathbb{R}^n} G_n(x, y) \rho(y) d^n y = \rho(x).$$

◇

Dimostrazione. Cominciamo con il dimostrare (b). Dato che $G_n(x, x_0) := \mathcal{G}_n(\|x - x_0\|)$, è conveniente traslare l'origine delle coordinate in x_0 , che è tenuto fisso, introdurre un sistema di coordinate polari sferiche centrato in x_0 e sfruttare il fatto che \mathcal{G}_n dipende esplicitamente solo dalla coordinata radiale di x

$$r(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i)^2} = \|x - x_0\|. \quad (3.9)$$

Per computo diretto, calcolando il laplaciano in coordinate cartesiane ortonormali, si verifica subito che se $f = f(r)$ allora:

$$\begin{aligned} \Delta f(r) &= \sum_{i,j=1}^n \delta^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} f(r) = \sum_{i,j=1}^n \delta^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial r}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial r} f(r) \right) = \sum_{i,j=1}^n \delta^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{x^j}{r} \frac{\partial}{\partial r} f(r) \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \delta^{ij} \frac{x^j}{r} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial r} f(r) + \sum_{i,j=1}^n \delta^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{x^j}{r} \right) \frac{\partial f(r)}{\partial r} \\ &= \sum_{i,j=1}^n \delta^{ij} \frac{x^j}{r} \frac{\partial r}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial f(r)}{\partial r} + \sum_{i,j=1}^n \delta^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{x^j}{r} \right) \frac{\partial f(r)}{\partial r} \\ &= \sum_{i,j=1}^n \delta^{ij} \frac{x^j x^i}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial f(r)}{\partial r} + \sum_{i,j=1}^n \delta^{ij} \frac{\delta^{ij} r - \frac{x^i x^j}{r}}{r^2} \frac{\partial f(r)}{\partial r}, \end{aligned}$$

da cui, notando che

$$\sum_{i,j=1}^n \delta^{ij} \delta^{ij} = \sum_{i=1}^n \delta^{ii} = \sum_{i=1}^n 1 = n,$$

si trova alla fine a:

$$\Delta f(r) = \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial f(r)}{\partial r}.$$

Ora, tramite il conto esplicito usando (3.1), si verifica la proprietà (b):

$$\Delta \mathcal{G}_n(r) = \frac{\partial^2 \mathcal{G}_n(r)}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial \mathcal{G}_n(r)}{\partial r} = 0.$$

Tornando in coordinate cartesiane data la (3.1), abbiamo trovato che, se $x \neq y$:

$$\Delta_x G_n(x, y) = 0^1$$

Direttamente dalla definizione risulta ovvio che $\mathcal{G}_n \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, cioè, ripristinando le coordinate cartesiane iniziali $G_n \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\})$. In particolare \mathcal{G}_n è dunque misurabile. L'elemento di volume in coordinate sferiche ha la struttura:

$$d^n x = r^{n-1} |p(\sin \theta_{n-1}, \dots, \sin \theta_2, \cos \theta_{n-1}, \dots, \cos \theta_2)| dr d\theta_{n-1} \dots d\theta_1,$$

con p un polinomio nelle variabili $\sin \theta_k$ e $\cos \theta_k$. Sopra:

$$r^{n-1} |p(\sin \theta_{n-1}, \dots, \sin \theta_2, \cos \theta_{n-1}, \dots, \cos \theta_2)|,$$

è il valore assoluto del determinante dalla matrice jacobiana delle coordinate cartesiane in funzione di quelle polari e l'espressione detta si dimostra subito usando le (3.4)-(3.7) e tenendo conto del fatto che il determinante è una funzione multilineare delle sue colonne.

È spesso comodo introdurre

$$d\Omega_n := |p(\sin \theta_{n-1}, \dots, \sin \theta_2, \cos \theta_{n-1}, \dots, \cos \theta_2)| d\theta_{n-1} \dots d\theta_1$$

pensato come l'elemento di volume superficie sulla sfera di raggio unitario \mathbb{S}^{n-1} in \mathbb{R}^n (in realtà definito solo sull'insieme aperto $\Omega' \cap \mathbb{S}^{n-1}$, dove $\mathbb{R}^n \setminus \Omega'$ ha misura nulla). Per esempio indicando gli angoli polari con le notazioni più usuali nel caso di coordinate polari piane e sferiche si trova, rispettivamente: $d\Omega_2 = d\theta$ e $d\Omega_3 = \sin \theta d\theta d\phi$.

Concludiamo che la funzione \mathcal{G}_n è assolutamente integrabile in ogni aperto limitato B la cui chiusura include l'origine, dato che la divergenza per $r \rightarrow 0$ di \mathcal{G}_n è controbilanciata da un fattore infinitesimo per $r \rightarrow 0^+$ dovuto alla misura usata: si ha in totale un termine $r^{2-n} r^{n-1}$, ovvero $r \ln r$ se $n = 2$, da integrare rispetto alla misura dr . Il fattore $p(\sin \theta_{n-1}, \dots, \sin \theta_2, \cos \theta_{n-1}, \dots, \cos \theta_2)$ è una funzione limitata dato che è un polinomio di seni e coseni che sono funzioni limitate. L'integrazione di $d\Omega_n$ produce invece ω_n finito. Su aperti limitati la cui chiusura non include l'origine, essendo \mathcal{G}_n continua, la sua integrabilità è ovvia. In definitiva $\mathcal{G}_n \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R})$. L'invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue assicura infine l'indipendenza dal punto x_0 e che quindi $G_n(\cdot, x_0) \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\})$. Per simmetria nello scambio di x_0 e x in

¹In realtà avendo usato coordinate polari che non ricoprono l'insieme chiuso $\Pi := \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^1 \leq 0, x^2 = 0, x^3, \dots, x^n \in \mathbb{R}\}$ possiamo concludere ciò solo fuori da tale insieme. Tuttavia è banale dimostrare che tale insieme è costituito da punti di accumulazione di $\mathbb{R}^n \setminus \Pi$ e, lavorando in coordinate cartesiane risulta ovvio che $\Delta_x G_n(x, y)$ è continua in x per $x \neq y$. Per continuità il risultato $\Delta_x G_n(x, y) = 0$ si estende subito a $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$.

$G_n(x, x_0) = \mathcal{G}_n(\|x - x_0\|)$ si ha anche che $G_n(x_0, \cdot) \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\})$. In particolare sono ben definiti integrali del tipo:

$$\int_{\mathbb{R}^n} G_n(x, y) f(y) d^n y,$$

per $f \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ valendo:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |G_n(x, y) f(y)| d^n y \leq \max_{\mathbb{R}^n} |f| \int_{\text{supp} f} |G_n(x, y)| d^n y < +\infty.$$

Abbiamo quindi provato anche la proprietà (a).

Dimostriamo ora che (c) \Rightarrow (d).

Sia $\rho \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, se vale la (c), sfruttando l'invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue dopo aver definito $u := x - y$,

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{G}_n(\|x - y\|) \Delta_y \rho(y) d^n y = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{G}_n(\|u\|) \Delta_u \rho(x - u) d^n u \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{G}_n(\|u\|) \Delta_x \rho(x - u) d^n u = \Delta_x \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{G}_n(\|u\|) \rho(x - u) d^n u \\ &= \Delta_x \int_{\mathbb{R}^n} G_n(x, y) \rho(y) d^n y. \end{aligned}$$

La penultima uguaglianza segue dalla formula di derivazione sotto il segno di integrale nella variabile x basata sul teorema della convergenza dominata di Lebesgue (vedi la sezione B.2 in Appendice). Ipotesi sufficienti per applicarla per le derivate nel punto x_0 sono che, per una palla aperta $B_\epsilon(x_0)$ centrata nel punto x_0 , la funzione $f(x, u) = \mathcal{G}_n(\|u\|) \rho(x - u)$ sia una funzione Lebesgue integrabile nella variabile $u \in \mathbb{R}^n$ per ogni $x \in B_\epsilon(x_0)$ e le derivate di tale funzione nella variabile x , fino all'ordine voluto (quello dell'operatore differenziale che si vuole scambiare con l'integrale), siano ciascuna rispettivamente maggiorata in valore assoluto, uniformemente in $x \in B_\epsilon(x_0)$, da una corrispondente funzione assolutamente integrabile dipendente dalla sola variabile d'integrazione $u \in \mathbb{R}^n$. Queste condizioni sono effettivamente verificate. Infatti al variare di $x \in B_\epsilon(x_0)$, i supporti delle funzioni $u \mapsto \rho(x - u)$ sono tutti contenuti in un compatto comune² K . Di conseguenza lo stesso accade, su K , per le derivate in x delle funzioni $u \mapsto \rho(x - u)$ (fino al secondo ordine). Definiamo una funzione C^∞ a supporto compatto $\mathbb{R}^n \ni u \mapsto g(u)$, che valga:

$$\max \left\{ \left| \frac{\partial \rho}{\partial x^k} \right|, \left| \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^i \partial x^j} \right| \mid x \in \mathbb{R}^n, i, j, k = 1, 2, \dots, n \right\}$$

²Sia $B_R(0)$ una palla di raggio $R > 0$ centrata nell'origine e sufficientemente grande da includere il supporto, compatto per ipotesi, di $u \mapsto \rho(0 - u)$. Sia $B_S(0)$ una seconda palla, centrata nell'origine, di raggio $S > 0$ che includa $B_\epsilon(x_0)$. I supporti delle funzioni $u \mapsto \rho(x - u)$, per $x \in B_\epsilon(x_0) \subset B_S(0)$, sono sicuramente inclusi in $\cup_{x \in B_S(0)} B_R(x)$. Tale insieme è sicuramente contenuto nella palla compatta $K := \overline{B_{R+S}(0)}$ che, a maggior ragione, contiene tutti i supporti delle funzioni dette.

su K e si annulli rapidamente fuori da tale insieme. Per costruzione la funzione

$$\mathbb{R}^n \ni u \mapsto g(u)\mathcal{G}_n(\|u\|)$$

è Lebesgue integrabile e soddisfa, per $i, j = 1, 2, \dots, n$:

$$\left| \frac{\partial \rho(u, x)}{\partial x^k} \mathcal{G}_n(\|u\|) \right|, \left| \frac{\partial^2 \rho(u, x)}{\partial x^i \partial x^j} \mathcal{G}_n(\|u\|) \right| \leq |g(u)\mathcal{G}_n(\|u\|)|, \quad (x, u) \in B_\epsilon(x_0) \times \mathbb{R}^n.$$

Questo giustifica lo scambio del simbolo di integrale con il laplaciano Δ_x (e con le derivate di ordine 1) eseguito sopra.

Dimostriamo infine la proprietà (c).

Ricordiamo che per ipotesi ρ ha supporto compatto, quindi ha supporto chiuso e limitato. Fissato $x \in \mathbb{R}^n$ consideriamo dunque una palla aperta $B_R(x)$, di raggio finito R e centrata in x , che include il supporto di ρ :

$$\int_{\mathbb{R}^n} G_n(x, y) \Delta_y \rho(y) d^n y = \int_{B_R(x)} G_n(x, y) \Delta_y \rho(y) d^n y.$$

Gli integrali sono ben definiti visto che $\rho \in C^2(\overline{B_R(x)})$ è quindi limitata e pertanto, $y \mapsto G_n(x, y) \Delta_y \rho(y)$ è Lebesgue integrabile essendo G_n localmente integrabile. Siano $B_\epsilon(x)$ palle aperte di centro x con raggio $\epsilon > 0$ e $\epsilon < R$. Consideriamo la classe di funzioni, parametrizzate in $\epsilon > 0$, ottenute restringendo $y \mapsto G_n(x, y) \Delta_y \rho(y)$ agli insiemi $B_R(x) \setminus B_\epsilon(x)$ e definendole nulle fuori da tali insiemi. Per $\epsilon \rightarrow 0^+$, tali funzioni tendono puntualmente a $y \mapsto G_n(x, y) \Delta_y \rho(y)$ definita su tutta $B_R(x)$, inoltre sono maggiorate in valore assoluto dal valore assoluto di tale funzione che è integrabile per ipotesi. Applicando il teorema della convergenza dominata abbiamo allora che:

$$\int_{B_R(x)} G_n(x, y) \Delta_y \rho(y) d^n y = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{B_R(x) \setminus B_\epsilon(x)} G_n(x, y) \Delta_y \rho(y) d^n y.$$

Quindi, applicando la seconda identità di Green al risultato, troviamo:

$$\begin{aligned} \int_{B_R(x)} G_n(x, y) \Delta_y \rho(y) d^n y &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{B_R(x) \setminus B_\epsilon(x)} \Delta_y G_n(x, y) \rho(y) d^n y + \right. \\ &+ \oint_{+\partial(B_R(x) \setminus B_\epsilon(x))} G_n(x, y) \nabla_y \rho(y) \cdot \mathbf{nd}S(y) - \oint_{+\partial(B_R(x) \setminus B_\epsilon(x))} \nabla_y G_n(x, y) \rho(y) \cdot \mathbf{nd}S(y) \left. \right] \end{aligned}$$

Ora $\Delta_y G_n(x, y) = \Delta_y \mathcal{G}_n(\|x - y\|) = \Delta_x G_n(x, y)$ e, dato che il dominio di integrazione in y è esterno a $B_\epsilon(x)$, varrà:

$$\Delta_x G_n(x, y) = 0 \quad \forall y \in B_R(x) \setminus B_\epsilon(x).$$

Inoltre:

$$\rho \upharpoonright_{\partial B_R(x)} = 0, \quad \nabla_y \rho \upharpoonright_{\partial B_R(x)} = 0$$

in quanto $(\text{supp}\rho) \cap \partial B_R(x) = \emptyset$.

Dunque:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} G_n(x, y) \Delta_y \rho(y) d^n y = \\ & = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{+\partial B_\epsilon(x)} \nabla_y G_n(x, y) \rho(y) \cdot \mathbf{n}' dS(y) - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{+\partial B_\epsilon(x)} G_n(x, y) \nabla_y \rho(y) \cdot \mathbf{n}' dS(y) \end{aligned}$$

Il cambiamento di segno rispetto all'integrale precedente è dovuto al fatto che abbiamo cambiato il verso del versore normale a $\partial B_\epsilon(x)$: per come lo abbiamo definito, \mathbf{n} indica il versore entrante in $\partial B_\epsilon(x)$; invece $\mathbf{n}' = -\mathbf{n}$ indica il versore uscente.

L'ultimo integrale soddisfa la seguente disequaglianza:

$$\left| \oint_{+\partial B_\epsilon(x)} G_n(x, y) \nabla_y \rho(y) \cdot \mathbf{n}' dS(y) \right| \leq \sup_{\partial B_\epsilon(x)} \|\nabla_y \rho\| \oint_{+\partial B_\epsilon(x)} |G_n(x, y)| dS(y),$$

e quindi, tenendo conto che $G(x, y)$ è costante in y su $\partial B_\epsilon(x)$, mentre $\oint_{+\partial B_\epsilon(x)} dS(y) = \text{cost.} \cdot \epsilon^{n-1}$,

$$\left| \oint_{+\partial B_\epsilon(x)} G_n(x, y) \nabla_y \rho(y) \cdot \mathbf{n}' dS(y) \right| \leq \sup_{\partial B_\epsilon(x)} \|\nabla_y \rho\| \text{cost.} \cdot \epsilon^{n-1} \begin{cases} \frac{1}{\epsilon^{n-2}} & n > 2 \\ |\ln \epsilon| & n = 2 \end{cases}$$

che tende a 0 per $\epsilon \rightarrow 0^+$. Rimane quindi:

$$\int_{\mathbb{R}^n} G_n(x, y) \Delta_y \rho(y) d^n y = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{+\partial B_\epsilon(x)} \nabla_y G_n(x, y) \rho(y) \cdot \mathbf{n}' dS(y).$$

Con il solito sistema di coordinate polari sferiche centrato in x , si ha per (3.8):

$$\mathbf{n}' \cdot \nabla_y G_n(x, y)|_{\partial B_\epsilon(x)} = \frac{\partial}{\partial r} \mathcal{G}_n(r)|_{\partial B_\epsilon(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\epsilon} & n = 2 \\ \frac{1}{\omega_n \epsilon^{n-1}} & n > 2 \end{cases} = \frac{1}{\text{Vol}(\partial B_\epsilon(x))}, \quad (3.10)$$

dove abbiamo usato il fatto che, riferendosi alle coordinate polari centrate in x , vale $\mathbf{n}' = \mathbf{e}_r$ e, per funzioni della sola coordinata radiale, $\mathbf{e}_r \cdot \nabla f(r) = \frac{\partial}{\partial r} f(r)$. Quindi:

$$\int_{\mathbb{R}^n} G_n(x, y) \Delta_y \rho(y) d^n y = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\text{Vol}(\partial B_\epsilon(x))} \oint_{\partial B_\epsilon(x)} \rho(y) dS(y).$$

Il limite può essere facilmente calcolato:

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\text{Vol}(\partial B_\epsilon(x))} \oint_{\partial B_\epsilon(x)} \rho(y) dS(y) \\ & = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\text{Vol}(\partial B_\epsilon(x))} \oint_{\partial B_\epsilon(x)} (\rho(y) - \rho(x)) dS(y) + \rho(x) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\text{Vol}(\partial B_\epsilon(x))} \oint_{\partial B_\epsilon(x)} dS(y) \\ & = 0 + \rho(x). \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che:

$$\left| \frac{1}{\text{Vol}(\partial B_\epsilon(x))} \oint_{\partial B_\epsilon(x)} (\rho(y) - \rho(x)) dS(y) \right| \leq \frac{\max_{\partial B_\epsilon(x)} |\rho(y) - \rho(x)|}{\text{Vol}(\partial B_\epsilon(x))} \oint_{\partial B_\epsilon(x)} dS(y) = \max_{\partial B_\epsilon(x)} |\rho(y) - \rho(x)|$$

In definitiva

$$\left| \frac{1}{\text{Vol}(\partial B_\epsilon(x))} \oint_{\partial B_\epsilon(x)} (\rho(y) - \rho(x)) dS(y) \right| \leq \max_{\partial B_\epsilon(x)} |\rho(y) - \rho(x)| \leq \frac{\max_{B_\epsilon(x)} |\rho(y) - \rho(x)|}{B_\epsilon(x)}$$

e l'ultimo termine tende a zero per $\epsilon \rightarrow 0^+$, dato che ρ è continua. Pertanto

$$\int_{\mathbb{R}^n} G_n(x, y) \Delta_y \rho(y) d^n y = \rho(x) .$$

□

Facciamo qualche osservazione sui risultati trovati, in particolare i punti (c) e (d).

Gli insiemi $C_0^2(\mathbb{R}^n)$ e $C^2(\mathbb{R}^n)$ sono evidentemente spazi vettoriali reali, il primo è anche un sottospazio del secondo, Su di essi possiamo definire l'operatore lineare:

$$H_n : C_0^2(\mathbb{R}^n) \ni f \mapsto H_n f \in C^2(\mathbb{R}^n) , \quad (3.11)$$

dove

$$(H_n f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} G_n(x, y) f(y) d^n y . \quad (3.12)$$

Osserviamo che, dalla definizione di G_n si vede facilmente che $H_n f$ può non avere supporto compatto anche se f ha supporto compatto, pertanto l'immagine di $C_0^2(\mathbb{R}^n)$ secondo H_n è diversa da $C_0^2(\mathbb{R}^n)$ stesso (vedremo sotto che più precisamente è più grande), e per questo abbiamo usato $C^2(\mathbb{R}^n)$ come codominio di H_n in (3.11). Il laplaciano Δ può essere definito come

$$\Delta : C^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^2(\mathbb{R}^n) , \quad (3.13)$$

ma, diversamente da H_n , ha la proprietà che

$$\Delta(C_0^2(\mathbb{R}^n)) \subset C_0^2(\mathbb{R}^n) . \quad (3.14)$$

In altre parole il sottospazio $C_0^2(\mathbb{R}^n)$ del dominio di Δ secondo (3.13) è **invariante** sotto l'azione di Δ .

Usando il linguaggio introdotto, le identità (c) e (d) provate nel teorema precedente si trascrivono in una forma più interessante, rispettivamente

$$H_n \circ \Delta \upharpoonright_{C_0^2(\mathbb{R}^n)} = id_{C_0^2(\mathbb{R}^n)} , \quad (3.15)$$

e

$$\Delta \circ H_n \upharpoonright_{C_0^2(\mathbb{R}^n)} = id_{C_0^2(\mathbb{R}^n)} . \quad (3.16)$$

La prima identità ci dice che Δ ristretto a $C_0^2(\mathbb{R}^n)$ ammette un'inversa sinistra ed è pertanto *iniettivo* su tale sottospazio. Tale inversa sinistra è data dallo stesso operatore H_n . Saremmo ora tentati di dire, in base alla seconda identità, che tale inversa sinistra è anche *inversa destra*. Tuttavia ciò è falso perché

$$H_n(C_0^2(\mathbb{R}^n)) \not\supseteq C_0^2(\mathbb{R}^n)$$

Si noti, infatti che (3.15) e (3.14) implicano $H_n(C_0^2(\mathbb{R}^n)) \supset C_0^2(\mathbb{R}^n)$, ma come osservato sopra esistono funzioni in $H_n(C_0^2(\mathbb{R}^n))$ che non hanno supporto compatto. In altre parole, perché l'immagine di Δ ricopra $C_0^2(\mathbb{R}^n)$ bisogna che Δ sia valutato su un dominio in $C^2(\mathbb{R}^n)$ più grande di $C_0^2(\mathbb{R}^n)$, dato appunto da $H_n(C_0^2(\mathbb{R}^n))$.

Useremo l'identità (3.16) per costruire la soluzione esplicita del problema di Dirichlet su tutto \mathbb{R}^n con ipotesi di decadimento uniforme all'infinito della soluzione e con sorgente a supporto compatto.

3.2 Ulteriori proprietà delle funzioni armoniche in \mathbb{R}^n .

Nella dimostrazione del teorema 3.1, nell'espressione:

$$\begin{aligned} \int_{B_R(x)} G_n(x, y) \Delta_y \rho(y) d^n(y) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{B_R(x) \setminus B_\epsilon(x)} \Delta_y G_n(x, y) \rho(y) d^n y + \right. \\ &\left. + \oint_{+\partial(B_R(x) \setminus B_\epsilon(x))} G_n(x, y) \nabla_y \rho(y) \cdot \mathbf{n} dS(y) - \oint_{+\partial(B_R(x) \setminus B_\epsilon(x))} \nabla_y G_n(x, y) \rho(y) \cdot \mathbf{n} dS(y) \right] \end{aligned}$$

abbiamo trascurato gli integrali di superficie relativi a $\partial B_R(x)$, dato che la funzione ρ si annulla prima di arrivare a $\partial B_R(x)$. Tuttavia avremmo potuto considerare una palla $B_R(x)$ e più in generale un dominio Ω a chiusura compatta e con bordo regolare, sul quale ρ e le sue derivate non si annullano. Usando *essenzialmente la stessa dimostrazione* con Ω al posto di $B_R(x)$, ma senza trascurare gli integrali di bordo su $\partial\Omega$, si arriva al seguente importante teorema:

Teorema 3.2. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto, $\bar{\Omega}$ compatto e $\partial\Omega$ una superficie regolare ed orientabile. Sia $\rho : \bar{\Omega} \mapsto \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2(\bar{\Omega})$. Per ogni $x \in \Omega$, vale l'identità :*

$$\rho(x) = \oint_{+\partial\Omega} (\nabla_y G_n(x, y)) \rho(y) \cdot \mathbf{n} dS(y) - \oint_{+\partial\Omega} G_n(x, y) \nabla_y \rho(y) \cdot \mathbf{n} dS(y) + \int_{\Omega} G_n(x, y) \Delta_y \rho(y) d^n y. \quad (3.17)$$

A parità di ipotesi su Ω , la stessa formula vale se, più debolmente, $\rho \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ con $\Delta\rho$ limitato su Ω e dove l'ultimo integrale a secondo membro è pensato come integrale di Lebesgue. \diamond

Dimostrazione. La prima affermazione si prova come per (c) del teorema 3.1 semplicemente rimpiazzando $B_R(x)$ con Ω e tenendo conto che il supporto di ρ ora può intersecare $\partial\Omega$ per cui rimangono dei contributi dovuti agli integrali di superficie trascurati nella dimostrazione di (c) del teorema 3.1. Se la funzione continua $\Delta\rho$ è limitata su Ω allora $\Omega \ni y \mapsto G_n(x, y) \Delta_y \rho(y)$

è comunque integrabile nel senso di Lebesgue su Ω essendo G_n localmente integrabile e pertanto la dimostrazione si può ripetere similmente alla precedente dato che siamo nelle ipotesi di validità delle identità di Green e possiamo interpretare l'integrale che appare per ultimo nel senso di Lebesgue. \square

Studiamo ora le conseguenze di questo risultato fondamentale.

3.2.1 Non esistenza di funzioni armoniche con supporto compatto e non nulle.

La prima conseguenza del teorema 3.2, è la seguente proposizione che stabilisce che non esistono funzioni armoniche a supporto compatto se non la funzione identicamente nulla (il cui supporto è quindi il compatto banale dato dall'insieme vuoto).

Proposizione 3.1. *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto non vuoto e $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ armonica. Se il supporto di g calcolato relativamente ad A (dato quindi dalla chiusura nella topologia indotta su A dell'insieme dei punti in A su cui g non si annulla) è compatto, allora $g(x) = 0$ per ogni $x \in A$. \diamond*

Dimostrazione. L'idea più ovvia è quella di applicare l'identità (3.17) per $x \in A$ e scegliendo come Ω un insieme aperto contenuto in A che contenga il supporto di $\rho = g$ ma il cui bordo $\partial\Omega$ non intersechi tale supporto. $\partial\Omega$ deve anche essere una superficie regolare ed orientabile. Una simile strada è possibile ma piuttosto tecnica. Un'alternativa è quella di estendere la funzione iniziale ad una funzione su \mathbb{R}^n come la funzione nulla fuori da A , in modo che continui ad essere una funzione armonica (ora su tutto \mathbb{R}^n) a supporto compatto incluso in A . A questo punto si può ripetere il ragionamento precedente per $x \in A$ e scegliendo Ω dato da una palla abbastanza grande. Il problema è provare che una simile estensione di ρ esiste davvero. Questo è proprio quanto andiamo a dimostrare ora.

Supponiamo che $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ sia armonica a supporto (rispetto a A) compatto K . Dato che la proprietà di compattezza non dipende dalla topologia indotta, K è compatto anche rispetto alla topologia di \mathbb{R}^n ed è, in particolare, chiuso in \mathbb{R}^n . Di conseguenza ogni punto di $x_0 \in \partial A$ ammette un intorno aperto I_{x_0} che non interseca K , altrimenti x_0 sarebbe un punto di accumulazione di K e quindi $x_0 \in K$ perché K è chiuso in \mathbb{R}^n , ma avremmo la contraddizione che $\partial A \ni x_0 \in K \subset A$ che è impossibile, dato che A è aperto. Possiamo allora prolungare g su tutto \mathbb{R}^n , usando lo stesso nome g per l'estensione, definendola come la funzione nulla fuori da A , ottenendo una funzione $C^2(\mathbb{R}^n)$ dato che tale estensione è differenziabile con continuità fino al secondo ordine in un intorno aperto di ogni punto di $\mathbb{R}^n = \text{int}(A) \cup \text{ext}(A) \cup \partial A$. Infatti, nell'aperto $A = \text{int}(A)$ la funzione estesa è C^2 per ipotesi, nell'aperto $\text{ext}(A)$ la funzione estesa è nulla ed è pertanto C^2 , in un intorno aperto, il suddetto I_{x_0} , di ogni punto $x_0 \in \partial A$ la funzione estesa è ancora la funzione nulla ed è pertanto ancora C^2 . La funzione estesa è armonica su A per ipotesi, ma lo è anche sui rimanenti punti di \mathbb{R}^n dato che è la funzione nulla in un intorno di ciascuno di tali punti:

$$\Delta g(y) = 0 \quad \text{per ogni } y \in \mathbb{R}^n.$$

Applicando l'identità stabilita nel teorema 3.2 per Ω dato da una palla di raggio sufficientemente grande da includere strettamente K e x , in modo tale che g e ∇g si annullino su $\partial\Omega$, si ha:

$$\begin{aligned} g(x) = & - \oint_{+\partial\Omega} G_n(x, y) \nabla_y g(y) \cdot \mathbf{nd}S(y) + \oint_{+\partial\Omega} (\nabla_y G_n(x, y)) g(y) \cdot \mathbf{nd}S(y) \\ & + \int_{\Omega} G_n(x, y) \Delta_y g(y) d^n y = 0, \end{aligned}$$

per ogni $x \in \Omega$ ed in particolare $x \in A$. \square

3.2.2 Le funzioni armoniche definite in aperti di \mathbb{R}^n sono C^∞ ed analitiche.

Per enunciare e dimostrare (parzialmente) il prossimo teorema, ricordiamo che una funzione di più variabili complesse $f : \Omega_{\mathbb{C}} \ni z \mapsto \mathbb{C}$, con $\Omega_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^n$ aperto non vuoto, è detta **funzione olomorfa di più variabili complesse** [ST84] se è olomorfa in ciascuna variabile z^k di $z = (z^1, \dots, z^n)$ separatamente, quando le altre sono fissate arbitrariamente. Si osservi che queste funzioni di una variabile complessa sono definite su insiemi aperti di \mathbb{C} , la prova è elementare³. L'importante **Teorema di Hartogs** dimostra che se $f : \Omega_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa di più variabili complesse, allora è **continua** congiuntamente in tutte le variabili complesse ed è ulteriormente una **funzione analitica di più variabili complesse**. Cioè, per ogni $z_0 \in \Omega_{\mathbb{C}}$, essa è sviluppabile in serie di Taylor centrata in z_0 in un intorno aperto di z_0 incluso in $\Omega_{\mathbb{C}}$. Ovviamente ci stiamo riferendo allo sviluppo di Taylor in più variabili complesse:

$$f(z) = \sum_{N=0}^{+\infty} \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = N} \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \left. \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} f}{\partial z^{1\alpha_1} \dots \partial z^{n\alpha_n}} \right|_{z_0} (z^1 - z_0^1)^{\alpha_1} \dots (z^n - z_0^n)^{\alpha_n}. \quad (3.18)$$

(Il fatto che le funzioni analitiche di più variabili complesse siano anche olomorfe nel senso della definizione data, si prova subito, tenendo conto che le due nozioni coincidono nel caso di funzioni di una variabile complessa.) Si osservi che, posto $z = x + iy$, se $f(x)$ assume valori reali per ogni $x \in \mathbb{R}^n \cap \Omega_{\mathbb{C}}$, lo sviluppo sopra scritto calcolato attorno a $z_0 = x_0$ con $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e calcolato per $x \in \mathbb{R}$ si riduce al solito sviluppo di Taylor reale:

$$f(x) = \sum_{N=0}^{+\infty} \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = N} \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \left. \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} f}{\partial x^{1\alpha_1} \dots \partial x^{n\alpha_n}} \right|_{x_0} (x^1 - x_0^1)^{\alpha_1} \dots (x^n - x_0^n)^{\alpha_n}, \quad (3.19)$$

³Fissiamo $z_0^2, \dots, z_0^n \in \mathbb{C}^{n-1}$ e studiamo il dominio, se non è vuoto, $\Omega_{(z_0^2, \dots, z_0^n)}^{(1)} \subset \mathbb{C}$ di $z^1 \mapsto f(z^1, z_0^2, \dots, z_0^n)$ dove $\Omega_{(z_0^2, \dots, z_0^n)}^{(1)} := \{z^1 \in \mathbb{C} \mid (z^1, z_0^2, \dots, z_0^n) \in \Omega_{\mathbb{C}}\}$. Vale $\Omega_{(z_0^2, \dots, z_0^n)}^{(1)} = \Omega_{\mathbb{C}} \cap \Sigma_{z_0^2, \dots, z_0^n}$, dove $\Sigma_{z_0^2, \dots, z_0^n} = \{(z^1, \dots, z^n) \in \mathbb{C}^n \mid z^1 \in \mathbb{C}, z^k = z_0^k, k = 2, \dots, n\}$. Se $(z^1, z_0^2, \dots, z_0^n) \in \Omega_{(z_0^2, \dots, z_0^n)}^{(1)}$ allora $(z^1, z_0^2, \dots, z_0^n) \in \Omega_{\mathbb{C}}$ che è aperto e quindi c'è una palla aperta $B \subset \mathbb{C}^n$ di raggio finito centrata in $(z^1, z_0^2, \dots, z_0^n)$ tale che $B \subset \Omega_{\mathbb{C}}$. L'intersezione $B \cap \Sigma_{z_0^2, \dots, z_0^n}$ è una palla aperta di \mathbb{C} , pertanto $(z^1, z_0^2, \dots, z_0^n)$ è contenuto in una palla aperta di \mathbb{C} inclusa in $\Omega_{(z_0^2, \dots, z_0^n)}^{(1)}$ che quindi è un aperto di \mathbb{C} .

dove abbiamo calcolato tutte le derivate parziali eseguendo i limiti sull'asse reale. In questo caso, dato che $\Omega := \mathbb{R}^n \cap \Omega_{\mathbb{C}}$ è aperto in \mathbb{R}^n , la restrizione di f a tale dominio definisce una **funzione analitica reale**, cioè una funzione definita su un aperto di \mathbb{R}^n a valori in \mathbb{R} che è sviluppabile in serie di Taylor (di più variabili reali) nell'intorno di ogni punto del dominio.

Si prova facilmente che se $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni analitiche reali sull'aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ allora lo è ogni loro combinazione lineare $af + bg$ con $a, b \in \mathbb{R}$, definendo $(af + bg) := af(x) + bg(x)$ per ogni $x \in \Omega$. Vale l'analogo risultato nel caso complesso.

Teorema 3.3. (Infinita regolarità ed analiticità delle funzioni armoniche). *Se $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto, è armonica su Ω , allora $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ e più fortemente φ è analitica reale su Ω . \diamond*

Traccia della dimostrazione. Sia $x_0 \in \Omega$, consideriamo una palla B aperta di raggio finito e con $\bar{B} \subset \Omega$ centrata in x_0 e applichiamo la formula (3.17) su B , tenendo conto che $\Delta\varphi = 0$:

$$\varphi(x) = - \oint_{+\partial B} G_n(x, s) \nabla_s \varphi(s) \cdot \mathbf{n} dS(s) + \oint_{+\partial B} (\nabla_s G_n(x, s)) \varphi(s) \cdot \mathbf{n} dS(s),$$

dove, in particolare, $x \in B'$, con B' palla aperta centrata in x_0 di raggio strettamente inferiore a quello di B . I due integrandi sono funzioni continue nelle variabili (x, s) e quindi limitate su $(x, s) \in \bar{B}' \times \partial B$ (che è un insieme compatto in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$). La stessa cosa accade alle derivate in x , di ogni ordine, degli integrandi. Notare le divergenze di $G_n(x, s)$ (e delle sue derivate) appaiono solamente quando $x = s$, cosa impossibile se $(x, s) \in \bar{B}' \times \partial B$. Per ogni derivata di ogni fissato ordine α (incluse derivate miste) nelle componenti di x , $D_x^{(\alpha)}$ esiste una costante M_α per cui $|D_x^{(\alpha)} G_n(x, s) \mathbf{n} \cdot \nabla_s \varphi(s)| \leq M_\alpha$ per ogni $s \in \partial B$ ed uniformemente in $x \in B'$. Dato che, per ogni α , ogni funzione costante $\partial B \ni s \mapsto M_\alpha \geq 0$ è sicuramente assolutamente integrabile su ∂B (che ha misura finita!), concludiamo dal Teorema B.5 in Appendice che possiamo passare la derivata $D_x^{(\alpha)}$ fuori dal segno di integrale in

$$- \oint_{+\partial B} D_x^{(\alpha)} G_n(x, s) \nabla_s \varphi(s) \cdot \mathbf{n} dS(s)$$

derivando per $x = x_0$. Lo stesso ragionamento si può fare per il secondo integrale nella decomposizione integrale di φ :

$$\varphi(x) = - \oint_{+\partial B} G_n(x, s) \nabla_s \varphi(s) \cdot \mathbf{n} dS(s) + \oint_{+\partial B} (\nabla_s G_n(x, s)) \varphi(s) \cdot \mathbf{n} dS(s).$$

In altre parole, possiamo dunque derivare φ ad ogni ordine α , scaricando le derivate sulle funzioni $G_n(x, s)$ e $\mathbf{n} \cdot \nabla_s G_n(x, s)$, sotto il segno di integrale. In tal modo abbiamo verificato che φ è infinitamente differenziabile in x_0 e quindi, dato che ciò vale per ogni punto $x_0 \in \Omega$, abbiamo provato che $\varphi \in C^\infty(\Omega)$. Diamo ora una dimostrazione del fatto che, localmente, φ può essere estesa ad una funzione analitica di più variabile complesse $z \mapsto \varphi'(z)$ con $z \in \Omega_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^n$ un

aperto che include $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Per prima cosa notiamo che, dalla loro definizione, le funzioni $B' \ni x \mapsto G_n(x, s) = \mathcal{G}_n(\|x - s\|)$, con $s \in \partial B$ fissato, si estendono a funzioni analitiche complesse di più variabili (non daremo una dimostrazione rigorosa di tale fatto): $z \mapsto G'_n(z, s)$ con $z = x + iy$, dove $y \in B'$ e $x \in B'$ e possiamo anche prendere $(x, y) \in \overline{B'} \times \overline{B'}$, restringendo il raggio originale di B' . Definiamo pertanto per $(x, y) \in \overline{B'} \times \overline{B'}$:

$$\varphi'(z) := - \oint_{+\partial B} G_n(z, s) \nabla_s \varphi(s) \cdot \mathbf{nd}S(s) + \oint_{+\partial B} (\nabla_s G_n(z, s)) \varphi(s) \cdot \mathbf{nd}S(s).$$

Il secondo membro è ben definito e può essere derivato in x e y passando le derivate sotto il segno di integrale, dato che la funzione G_n è infinitamente differenziabile sul compatto $\overline{B'} \times \overline{B'} \times \partial B$. Dato che per ogni fissato s , la funzione $z \mapsto G'_n(z, s)$ soddisfa in ogni variabile z^k le condizioni di Cauchy-Riemann, soddisferà le stesse condizioni la funzione φ' : è sufficiente passare le derivate sotto il segno di integrale. In definitiva, la funzione di variabile complessa $B' + iB' \ni z \mapsto \varphi'(z)$ è definita su un aperto, ammette derivate continue (essendo di classe C^∞) nelle variabili x^k e y^k (dove $z = (z^1, \dots, z^n) = (x^1 + iy^1, \dots, x^n + iy^n)$) e soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann in ogni variabile z^k . Tenuto conto di quanto detto in (2) in osservazioni 2.5, φ' è una funzione olomorfa in più variabili complesse e nell'intorno di ogni punto nel suo dominio varrà lo sviluppo (3.18) con φ' al posto di f . Dato che per valori reali $z_0 = x_0 \in \mathbb{R}^n$, φ' si riduce alla funzione a *valori reali* φ , concludiamo che nell'intorno di ogni $x_0 \in \Omega$ vale lo sviluppo (3.19) con φ al posto di f . In altre parole φ è una funzione analitica reale sul dominio aperto Ω . \square

Osservazioni 3.2.

- (1) Il teorema appena dimostrato ci dice quindi che, nell'intorno di ogni suo punto del dominio, una funzione armonica può sempre essere estesa ad una funzione analitica complessa su un'opportuna estensione complessa di quell'intorno \mathbb{C}^n .
- (2) Le funzioni analitiche reale godono della proprietà dell'unicità della continuazione analitica che enunciamo a proviamo nella prossima proposizione.

Proposizione 3.2. *Se due funzioni analitiche reali φ e ψ sono entrambe definite sull'aperto non vuoto e connesso $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e coincidono sull'aperto non vuoto $A \subset \Omega$, allora coincidono su tutto Ω . \diamond*

Dimostrazione 1 (dimostrazione diretta usando cammini continui). Definiamo la funzione analitica reale $\phi := \psi - \varphi$. Sia $U \subset \Omega$ l'insieme dato dall'unione di tutti gli aperti inclusi in Ω su cui $\phi \equiv 0$. Ovviamente U è non vuoto dato che $\emptyset \neq A \subset U$, aperto e $U \subset \Omega$. Supponiamo per assurdo che $U \neq \Omega$. Sia allora $q \in \Omega \setminus U$ e $p \in U$. Ci sarà un cammino continuo $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ con $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$. Se $s = \sup\{t \in [0, 1] \mid \gamma(t) \in U\}$, sarà $p' := \gamma(s) \in \partial U \cap \Omega$ per costruzione. (Benchè sia elementare lo dimostriamo per completezza. Se $p' = \gamma(s) \in \text{int}(U) = U$, c'è una palla aperta B centrata in $\gamma(s)$ tutta contenuta in U . La controimmagine di B secondo la funzione continua γ è un intorno aperto di s per cui include un intervallo aperto $I \ni s$ con la proprietà che $\gamma(I) \subset U$, ma allora ci sarebbe un intorno destro di s la cui immagine secondo γ è inclusa in U e questo è impossibile per definizione di s che non potrebbe essere un

maggiorante dell'insieme $\{t \in [0, 1] \mid \gamma(t) \in U\}$. Si ottiene un analogo assurdo assumendo che $p' = \gamma(s) \in \text{ext}(U)$: si trova un intorno sinistro di s la cui immagine secondo γ è nell'esterno di U e questo è impossibile per definizione di s , dato che avremmo $\gamma(s) \notin \{t \in [0, 1] \mid \gamma(t) \in U\}$ e anche che s non è un punto di accumulazione di $\{t \in [0, 1] \mid \gamma(t) \in U\}$. L'unica possibilità è quindi $p' \in \partial U$, ma anche $p' = \gamma(s) \in \Omega$ per definizione di γ .) Dato che $p' \in \Omega$, ha senso valutare ϕ in p' ed in un intorno di esso. Dato che ϕ è continua con tutte le sue derivate di ogni ordine e che, essendo $p' \in \partial U$, esiste una successione di punti $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset U$ che converge a p' , tutte le derivate di ϕ in p' possono essere calcolate prendendo i limiti di tali derivate verso $p' \in \Omega$, calcolandole sulla successione $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset U$, prima di fare i limiti. Dato che $\phi|_U \equiv 0$ e che U è aperto, le derivate di ϕ in U sono tutte nulle ad ogni ordine. Le derivate ad ogni ordine di ϕ saranno allora nulle quando valutate in p' con la procedura di limite indicata sopra. Dato che in p' la funzione ϕ è analitica, facendo lo sviluppo di Taylor centrato in p' , concludiamo che $\phi \equiv 0$ in un intorno aperto $J_{p'} \subset \Omega$ di p' . Abbiamo raggiunto un assurdo dato che $J_{p'}$ è un aperto su cui $\phi \equiv 0$, ma $J_{p'} \not\subset U$ (dato che $J_{p'} \ni p' \in \partial U$ e $\partial U \cap U = \emptyset$ essendo U aperto). Questo è impossibile per definizione di U . Concludiamo che deve essere $U = \Omega$.

Dimostrazione 2 (usando altre proprietà topologiche). Definiamo la funzione analitica reale $\phi := \psi - \varphi$. Sia $U \subset \Omega$ l'insieme dato dall'unione di tutti gli aperti inclusi in Ω su cui $\phi \equiv 0$. Ovviamente U è non vuoto dato che $\emptyset \neq A \subset U$. Per costruzione $U \subset \Omega$ è dunque aperto in \mathbb{R}^n e aperto anche nella topologia relativa di Ω . Come ben noto dai corsi di topologia, dato che Ω è connesso, gli unici suoi sottoinsiemi contemporaneamente aperti e chiusi (nella sua topologia relativa) sono Ω e \emptyset . Se proviamo che U è anche chiuso nella topologia di Ω dobbiamo concludere che deve coincidere con Ω dato che $U \neq \emptyset$. Per provare che U è chiuso nella topologia relativa ad Ω è sufficiente mostrare che, per esempio, U include la sua frontiera $\partial_\Omega U$ (riferita alla topologia relativa di Ω e quindi sottoinsieme di Ω). Se $p \in \partial_\Omega U$ allora ogni intorno di p in Ω include punti di U per definizione di frontiera. Di conseguenza i limiti di tutte le derivate di ϕ verso p saranno nulli essendo ϕ nulla in U ed essendo tali derivate funzioni continue su Ω . Dato che ϕ è analitica su Ω ci sarà un intorno V di p in Ω in cui tale funzione è sviluppabile in serie di Taylor, ma abbiamo appena dimostrato che tale serie è costituita da termini nulli. Di conseguenza $p \in V$ dove $V \subset \Omega$ è un insieme aperto su cui $\phi \equiv 0$. Per definizione $\partial_\Omega U \ni p \in U$ e quindi U è chiuso nella topologia relativa di Ω come volevamo provare. \square

La proposizione 3.2 ha la seguente implicazione immediata in virtù del teorema 3.3.

Proposizione 3.3. *Se due funzioni armoniche reali φ e ψ sono entrambe definite sull'aperto non vuoto e connesso $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e coincidono su un aperto non vuoto $A \subset \Omega$, allora esse coincidono su tutto Ω . \diamond*

Dimostrazione (basata sull'analiticità reale delle funzioni armoniche). La funzione $\varphi - \psi$ è analitica reale su Ω aperto e connesso ed è nulla sul sottoinsieme aperto non vuoto $A \subset U$. Per la proposizione 3.2 $\varphi - \psi = 0$ ovunque su Ω . \square

3.2.3 Teorema della media e principio del massimo in forma forte.

Un'altra importante conseguenza del teorema 3.2 è il cosiddetto *teorema della media*.

Teorema 3.4. (Teorema della media). *Sia $\varphi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto, una funzione armonica. Allora, per ogni $x \in \Omega$ vale l'identità, detta **formula della media superficiale**:*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\text{Vol}(\partial B_R(x))} \oint_{\partial B_R(x)} \varphi(y) dS(y), \quad (3.20)$$

dove $B_R(x)$ è una palla aperta centrata in x di raggio finito $R > 0$ con $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$, arbitrariamente scelta. Similmente vale anche la **formula della media volumetrica**:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\text{Vol}(B_R(x))} \int_{B_R(x)} \varphi(y) d^n x(y). \quad (3.21)$$

◇

Dimostrazione. Sia R il raggio della palla $B_R(x)$. Utilizziamo un sistema di coordinate polari sferiche centrate in x . Dalla (3.17) e tenendo conto del fatto, già notato, che $\mathbf{n} \cdot \nabla_y G_n(x, y) = \frac{\partial \mathcal{G}_n(r)}{\partial r}$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \oint_{\partial B_R(x)} \varphi(y) \frac{\partial \mathcal{G}_n(r)}{\partial r} dS(y) - \oint_{+\partial B_R(x)} \mathcal{G}_n(r) \nabla \varphi(y) \cdot \mathbf{n} dS(y) \\ &= \oint_{\partial B_R(x)} \varphi(y) \frac{\partial \mathcal{G}_n(r)}{\partial r} dS(y) - \mathcal{G}_n(R) \oint_{+\partial B_R(x)} \nabla \varphi(y) \cdot \mathbf{n} dS(y). \end{aligned}$$

L'ultimo integrale è nullo perchè φ è armonica (teorema 2.8), mentre il primo, usando (3.10) si può scrivere:

$$\oint_{\partial B_R(x)} \varphi(y) \frac{1}{\text{Vol}(\partial B_R(x))} dS(y) = \frac{1}{\text{Vol}(\partial B_R(x))} \oint_{\partial B_R(x)} \varphi(y) dS(y).$$

Passiamo alla seconda formula della media. Applichiamo la prima formula della media alla classe di palle $B_r(x)$ di raggio r , con $0 < r \leq R$, ed usiamo un sistema di coordinate polari sferiche di centro x , coordinata radiale r e coordinate angolari ω . Avremo allora che, da (3.20) vale:

$$\text{Vol}(\partial B_r(x)) \varphi(x) = \oint_{\partial B_r(x)} \varphi(r, \omega) dS(r, \omega) \quad (3.22)$$

e quindi, integrando in dr da $r = 0$ a $r = R$:

$$\left(\int_0^R \text{Vol}(\partial B_r(x)) dr \right) \varphi(x) = \int_0^R \left(\oint_{\partial B_r(x)} \varphi(r, \omega) dS(r, \omega) \right) dr. \quad (3.23)$$

Il primo integrale produce proprio il volume della palla $B_R(x)$ moltiplicato per la costante $\varphi(x)$, mentre il secondo produce l'integrale di volume su tale palla della funzione φ , decomposto in due integrazioni in coordinate polari. In definitiva otteniamo la formula della media volumetrica (3.21):

$$\text{Vol}(B_R(x))\varphi(x) = \int_{B_R(x)} \varphi(y) d^n x(y).$$

Questa identità riscritta come in (3.23), derivando in R ed osservando che $(0, R_0) \ni r \mapsto \oint_{\partial B_r(x)} \varphi(r, \omega) dS(r, \omega)$ è continua se φ è continua (come si prova subito dal teorema della convergenza dominata) riproduce la formula della media superficiale (3.22). \square

È importante osservare che i teoremi della media sono in realtà *equivalenti* all'armonicità della funzione come chiarito dal seguente importante teorema.

Teorema 3.5. (Condizioni equivalenti all'armonicità.) *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto e $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione $C^0(\Omega)$. I seguenti fatti sono equivalenti.*

(a) $\varphi \in C^2(\Omega)$ ed è armonica su Ω .

(b) Vale la formula della media volumetrica (3.21) per ogni palla aperta $B_R(x)$ di centro $x \in \Omega$ e raggio $R > 0$ tali che $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$.

(c) Vale la formula della media superficiale (3.20) per ogni palla aperta $B_R(x)$ di centro $x \in \Omega$ e raggio $R > 0$ tali che $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$. \diamond

Una conseguenza diretta del teorema della media è un rafforzamento del principio del massimo che dimostriamo in due parti.

Lemma 3.1. (Principio del massimo forte su una palla.) *Sia $B_R(x_0)$ una palla aperta in \mathbb{R}^n , di raggio $R > 0$ finito centrata in x_0 e $\varphi : \overline{B_R(x_0)} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione armonica in $B_R(x_0)$ e continua in $\overline{B_R(x_0)}$. Se vale uno dei seguenti fatti:*

$$\varphi(x_0) = \max_{\overline{B_R(x_0)}} \varphi,$$

oppure

$$\varphi(x_0) = \min_{\overline{B_R(x_0)}} \varphi,$$

oppure

$$|\varphi(x_0)| = \max_{\overline{B_R(x_0)}} |\varphi|,$$

allora la funzione φ è costante su $\overline{B_R(x_0)}$. \diamond

Dimostrazione: È sufficiente dimostrare la tesi per il caso $\varphi(x_0) = \max_{x \in \overline{B_R(x_0)}} \varphi$, in quanto se vale la seconda ipotesi, cambiando segno alla funzione φ , si ricade nella prima situazione. Se vale la terza ipotesi allora deve valer la prima oppure la seconda (Dato che non è del tutto evidente dimostriamo quest'ultimo fatto. Ci sono tre casi da considerare. (i) $\varphi \geq 0$ in $\overline{B_R(x_0)}$; in questo caso $|\varphi(x)| = \varphi(x)$ e dunque, $|\varphi(x_0)| = \max_{\overline{B_R(x_0)}} |\varphi|$ equivale a dire $\varphi(x_0) = \max_{\overline{B_R(x_0)}} \varphi$. (ii) $\varphi \leq 0$ in $\overline{B_R(x_0)}$; in questo caso $|\varphi(x)| = -\varphi(x)$ e dunque, $|\varphi(x_0)| = \max_{\overline{B_R(x_0)}} |\varphi|$ equivale a dire $\varphi(x_0) = \min_{\overline{B_R(x_0)}} \varphi$. (iii) φ assume sia valori positivi che valori negativi in $\overline{B_R(x_0)}$, in questo caso il valore massimo raggiunto da φ è positivo e quello minimo è negativo. Nella situazione considerata, il valore massimo raggiunto da $|\varphi|$ deve necessariamente corrispondere al massimo valore di φ oppure al minimo valore di φ cambiato di segno, se non corrispondesse a nessuno dei due non potrebbe essere il massimo per $|\varphi|$. Allora abbiamo due sottocasi. (a) Il valore massimo che la funzione $|\varphi|$ assume è il massimo di φ ; in questo caso, dato che tale valore di φ è positivo, la condizione $|\varphi(x_0)| = \max_{\overline{B_R(x_0)}} |\varphi|$ equivale a dire $\varphi(x_0) = \pm \max_{\overline{B_R(x_0)}} \varphi$. Se risultasse $\varphi(x_0) = -\max_{\overline{B_R(x_0)}} \varphi$, significherebbe $\varphi(x_0) = \min_{\overline{B_R(x_0)}} \varphi$ altrimenti ci sarebbero valori più piccoli di $\varphi(x_0)$ raggiunti da φ e quindi ci sarebbero valori più grandi di $|\varphi(x_0)|$ raggiunti da $|\varphi|$, cosa impossibile per ipotesi. (b) Il valore massimo che la funzione $|\varphi|$ assume è, cambiato di segno, il minimo di φ ; in questo caso la condizione $|\varphi(x_0)| = \max_{\overline{B_R(x_0)}} |\varphi|$ equivale a dire $\varphi(x_0) = \pm \min_{\overline{B_R(x_0)}} \varphi$. Se risultasse $\varphi(x_0) = -\min_{\overline{B_R(x_0)}} \varphi$, significherebbe $\varphi(x_0) = \max_{\overline{B_R(x_0)}} \varphi$ altrimenti ci sarebbero valori più grandi di $\varphi(x_0)$ raggiunti da φ e quindi ci sarebbero valori più grandi di $|\varphi(x_0)|$ raggiunti da $|\varphi|$, cosa impossibile per ipotesi.) Sia dunque $\varphi(x_0) = \max_{\overline{B_R(x_0)}} \varphi$, dimostriamo che $\varphi(x) = \varphi(x_0)$ per ogni $x \in B_R(x_0)$, per continuità ciò varrà anche per $x \in \partial B_R(x_0)$.

Supponiamo *per assurdo* che esista $x_1 \in B_R(x_0)$ con $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_0)$, per le ipotesi fatte, deve essere $\varphi(x_1) < \varphi(x_0)$. Fissiamo $R' > 0$ con $R' < R$ tale che $x_1 \in B_{R'}(x_0)$. φ sarà armonica su tutto $\overline{B_{R'}(x_0)}$. Per la continuità di φ , scegliendo $0 < \epsilon < |\varphi(x_0) - \varphi(x_1)|$, esisterà una palla aperta $B_\delta(x_1) \subset B_{R'}(x_0)$ centrata in x_1 e di raggio $\delta > 0$ tale che $|\varphi(x) - \varphi(x_1)| < \epsilon$ se $x \in B_\delta(x_1)$. Di conseguenza, se $x \in B_\delta(x_1)$, vale anche: $\varphi(x) < \varphi(x_0)$. In particolare varrà $\varphi(x) < \varphi(x_0)$, se $x \in K := \overline{B_{\delta/2}(x_1)}$ dato che $\overline{B_{\delta/2}(x_1)} \subset B_\delta(x_1)$. Applichiamo il teorema della media volumetrica alla palla $B_{R'}(x_0)$:

$$\text{Vol}(B_{R'}(x_0)) \varphi(x_0) = \int_{B_{R'}(x_0)} \varphi d^n x = \int_{B_{R'}(x_0) \setminus K} \varphi d^n x + \int_K \varphi d^n x. \quad (3.24)$$

K è compatto per costruzione e quindi esiste $\max_K \varphi$, con $\max_K \varphi < \varphi(x_0)$ per costruzione di K . Quindi

$$\int_K \varphi d^n x \leq \left(\max_K \varphi \right) \int_K d^n x < \varphi(x_0) \int_K d^n x.$$

Dato che vale anche, essendo $\varphi(x_0)$ il valore massimo di φ ,

$$\int_{B_{R'}(x_0) \setminus K} \varphi d^n x \leq \varphi(x_0) \int_{B_{R'}(x_0) \setminus K} d^n x,$$

da (3.24) segue subito che:

$$\text{Vol}(B_{R'}(x_0))\varphi(x_0) < \varphi(x_0) \int_{B_{R'}(x_0)\setminus K} d^n x + \varphi(x_0) \int_K d^n x = \varphi(x_0) \left(\int_{B_{R'}(x_0)\setminus K} d^n x + \int_K d^n x \right),$$

ossia

$$\text{Vol}(B_{R'}(x_0)) \varphi(x_0) < \text{Vol}(B_{R'}(x_0)) \varphi(x_0),$$

che è assurdo e, pertanto, il punto x_1 con $\varphi(x_1) < \varphi(x_0)$ non può esistere in $B_{R'}(x_0)$ e quindi nemmeno in $B_R(x_0)$. \square

Il risultato appena dimostrato ci consente di estendere il principio del massimo, nel senso forte appena visto, a funzioni armoniche su regioni Ω diverse da un palla.

Teorema 3.6. (Principio del massimo forte.) *Sia Ω aperto, connesso a chiusura compatta in \mathbb{R}^n e sia $\varphi \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ armonica su Ω . Se vale una delle seguenti condizioni per qualche $x_0 \in \Omega$:*

(i) $\varphi(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} \varphi$, oppure

(ii) $\varphi(x_0) = \min_{\overline{\Omega}} \varphi$, oppure

(iii) $|\varphi(x_0)| = \max_{\overline{\Omega}} |\varphi|$,

allora φ è costante e vale ovunque $\varphi(x_0)$ su $\overline{\Omega}$. \diamond

Dimostrazione 1 (dimostrazione diretta con uso di cammini continui). Dimostriamo la tesi nel caso in cui sia verificata la prima ipotesi. Se vale l'ipotesi (ii), allora possiamo ricadere in (i) cambiando segno a φ , mentre se vale (iii), allora si ricade in (i) o in (ii) con lo stesso ragionamento del lemma precedente. Notiamo infine che è sufficiente mostrare la validità della tesi in Ω , perché da questa segue, per la continuità di φ , la tesi in $\overline{\Omega}$.

Dato che $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e connesso, allora è connesso per archi continui. Sia dunque $x_1 \in \Omega$ e $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ continua con $\gamma(a) = x_0$, $\gamma(b) = x_1$. Mostriamo che $\varphi(x_1) = \varphi(x_0)$. Ciò prova la tesi per l'arbitrarietà di $x_1 \in \Omega$. Assumendo la validità di (i), per ogni palla di raggio finito $B_R(x_0)$ centrata in x_0 e con $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$ deve anche evidentemente essere:

$$\varphi(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} \varphi = \max_{\overline{B_R(x_0)}} \varphi.$$

Applicando il teorema precedente concludiamo che $\varphi(x) = \varphi(x_0)$ per ogni $x \in B_R(x_0)$. La controimmagine dell'aperto $B_R(x_0)$ secondo la funzione continua γ deve essere un aperto (relativamente alla topologia di $[a, b]$ indotta da \mathbb{R}) che include il punto $\gamma(a) = x_0$. Di conseguenza, ci sarà un intervallo $[a, \epsilon)$, con $a < \epsilon \leq b$ e con $\gamma(t) \in B_R(x_0)$ se $t \in [a, \epsilon)$, per cui $\varphi(\gamma(t)) = \varphi(x_0)$ se $t \in [a, \epsilon)$. L'insieme

$$S = \{s \in (a, b] \mid \varphi(\gamma(u)) = \varphi(x_0) \text{ per } u \in [a, s)\}$$

è non vuoto (per quanto appena dimostrato $\epsilon \in S$) ed è limitato superiormente da $b < \infty$, quindi esiste $L = \sup S \leq b$.

Supponiamo per assurdo che $L < b$, in tal caso $\varphi(\gamma(t)) = \varphi(x_0)$ per $t \in [a, L]$ e per continuità $\varphi(\gamma(L)) = \varphi(x_0)$. Esisterà dunque una palla centrata in $\gamma(L)$ e di raggio $\rho > 0$, che indichiamo con $B_\rho(\gamma(L)) \subset \Omega$, tale che⁴ $\overline{B_\rho(\gamma(L))} \subset \Omega$. Come prima:

$$\varphi(\gamma(L)) = \max_{\Omega} \varphi = \max_{\overline{B_\rho(\gamma(L))}} \varphi.$$

e quindi $\varphi(x) = \varphi(x_0)$ costantemente su $B_\rho(\gamma(L))$. Come prima, la controimmagine della palla aperta $B_\rho(\gamma(L))$ secondo la funzione continua γ è un aperto che contiene L per costruzione. Su tale aperto $\varphi(\gamma(t)) = \varphi(x_0)$. In particolare dovrà dunque valere $\varphi(\gamma(t)) = \varphi(x_0)$ in un intorno destro di L , per cui L non può essere il sup di S e siamo quindi giunti ad un assurdo. Dovrà dunque essere $L = b$ e pertanto $\varphi(\gamma(t)) = \varphi(x_0)$ se $t \in [a, b]$. Per continuità: $\varphi(x_1) = \varphi(\gamma(b)) = \varphi(x_0)$.

Dimostrazione 2 (con altre proprietà della connessione). Dimostriamo la tesi, nel solo caso (i) dato che gli altri seguono da questo, in un altro modo. Supponiamo che per $x_0 \in \Omega$ valga $\varphi(x_0) = \max_{x \in \overline{\Omega}} \varphi =: M$. Dato che Ω è aperto ci sarà una palla aperta $B_r(x_0)$ di raggio finito $r > 0$ centrata in x_0 la cui chiusura è contenuta in Ω . Dato che M è anche il massimo di φ su $\overline{B_r(x_0)}$, per il principio del massimo forte sulla palla, avremo che $\varphi(x) = M$ se $x \in B_r(x_0)$. Ne consegue che il sottoinsieme $A := \{x \in \Omega \mid \varphi(x) = M\} \subset \Omega$ è aperto (e lo è quindi anche nella topologia relativa di Ω). D'altra parte, dato che $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e $\{M\}$ è un insieme chiuso di \mathbb{R} , avremo anche che $\varphi^{-1}(M)$ è un insieme chiuso nella topologia relativa di Ω . Come ben noto dai corsi di topologia, dato che Ω è connesso, gli unici suoi sottoinsiemi contemporaneamente aperti e chiusi (nella sua topologia relativa) sono Ω e \emptyset . Essendo A non vuoto per ipotesi si deve avere che $A = \Omega$ e, per continuità, $\varphi(x) = M$ se $x \in \overline{\Omega}$. Questa è la tesi. \square

Osservazioni 3.3.

(1) Abbiamo dato una dimostrazione del principio del massimo forte senza usare il fatto che le funzioni armoniche sono analitiche reali (risultato che non abbiamo dimostrato completamente) e quindi soddisfano la proposizione 3.3. La dimostrazione del principio del massimo forte segue infatti facilmente dalla proposizione 3.3 osservando che, nelle ipotesi del teorema 3.6, la funzione φ è sicuramente costante in una palla aperta $B_R(x_0) \subset \Omega$ come provato nella parte iniziale della dimostrazione data sopra. In virtù del fatto che Ω è aperto e connesso con $B_R(x_0) \subset \Omega$, dalla proposizione 3.3 segue allora che, su tutto Ω , φ deve coincidere con la funzione ψ che vale costantemente $\varphi(x_0)$ (ed è quindi armonica) dato che $\varphi|_{B_R(x_0)} \equiv \psi|_{B_R(x_0)}$.

(2) La proposizione 3.3 consente di rafforzare ulteriormente l'enunciato del principio del massimo forte come segue, riferendosi all'esistenza di punti estremali locali. Ricordiamo che $x_0 \in \Omega$ è, rispettivamente, un punto di **massimo locale** o di **minimo locale** per la funzione f a valori

⁴Una palla aperta di raggio $r > 0$, centrata in $\gamma(L)$ ed inclusa in Ω esiste sicuramente perchè $\gamma(L) \in \Omega$ che è aperto. La palla concentrica alla precedente, ma di raggio $\rho := r/2$, è quella che cerchiamo.

reali e definita sull'aperto Ω , se esiste un intorno aperto $J \subset \Omega$ di x_0 tale che $\max f|_J = f(x_0)$ o, rispettivamente, $\min f|_J = f(x_0)$.

Corollario del principio del massimo forte su una palla e della proposizione 3.3. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, non vuoto, aperto, connesso e sia φ armonica su Ω . Se vale una delle seguenti condizioni per qualche $x_0 \in \Omega$:

(i) x_0 è un punto di massimo locale per φ , oppure

(ii) x_0 è un punto di minimo locale per φ , oppure

(iii) x_0 è un punto di massimo locale per $|\varphi|$

allora φ è costante e vale ovunque $\varphi(x_0)$ su Ω . \diamond

Dimostrazione. È sufficiente provare la tesi nel caso (i), dato che gli altri due casi si riducono a questo. Per ipotesi esiste una palla aperta $B \subset \overline{B} \subset \Omega$ centrata in x_0 su cui $\varphi(x_0)$ è il valore massimo raggiunto da φ in \overline{B} . Il principio del massimo forte in una palla implica che φ sia costantemente uguale a $\varphi(x_0)$ su B . La proposizione 3.3 implica infine che la funzione φ debba coincidere con la funzione armonica in Ω che vale costantemente $\varphi(x_0)$ su Ω . \square

Osservazioni 3.4. Il corollario di sopra ha una conseguenza importante in elettromagnetismo nota come **Teorema di Eearnshaw**. In termini fisici e nella versione più elementare il teorema dice che non è possibile produrre un campo elettrostatico non nullo in una regione aperta $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ che dia luogo ad una configurazione di equilibrio stabile in Ω per una carica elettrica che subisce il campo elettrico. Si sta assumendo che tale configurazione corrisponda ad un punto di minimo locale della funzione potenziale elettrico e ciò è impossibile per il corollario enunciato sopra: il campo elettrico sarebbe nullo.

3.2.4 Teorema di Liouville per le funzioni armoniche in \mathbb{R}^n e non esistenza di funzioni armoniche non nulle a quadrato sommabile in \mathbb{R}^n

Come risultato che segue dal teorema della media e dal fatto che le funzioni armoniche sono di classe C^∞ (per la dimostrazione è sufficiente C^3), si ha il seguente importante teorema.

Teorema 3.7. (Teorema di Liouville per funzioni armoniche.) Ogni funzione armonica su tutto \mathbb{R}^n limitata superiormente oppure inferiormente su \mathbb{R}^n è costante. \diamond

Dimostrazione. Se $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è armonica e limitata inferiormente, sia $\phi(x) := \varphi(x) - \inf_{\mathbb{R}^n} \varphi$ per $x \in \mathbb{R}^n$. ϕ è armonica e non negativa. Se deriviamo ϕ rispetto a x^k avremo ancora una funzione armonica per costruzione (si tenga conto del fatto che $\phi \in C^\infty$ essendo essa armonica). Possiamo usare la formula della media volumetrica su una palla $B_r(x_0)$ centrata in x_0 di raggio finito $r > 0$ arbitrario:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^k}(x_0) = \frac{1}{\text{Vol}B_r(x_0)} \int_{B_r(x_0)} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} d^n x = \frac{1}{\text{Vol}B_r(x_0)} \int_{B_r(x_0)} \nabla \cdot (\phi \mathbf{e}_k) d^n x = \frac{1}{\text{Vol}B_r(x_0)} \oint_{+\partial B_r(x_0)} \phi n^k dS,$$

dove abbiamo usato il teorema di Gauss, \mathbf{e}_i è l' i -esimo versore della base canonica di \mathbb{R}^n e n^k è la k -esima componente di \mathbf{n} uscente da ∂B . Quindi:

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial x^k}(x_0) \right| = \left| \frac{1}{\text{Vol}B_r(x_0)} \int_{+\partial B_r(x_0)} \phi n^k dS \right| \leq \frac{1}{\text{Vol}B_r(x_0)} \int_{+\partial B_r(x_0)} |\phi n^k| dS .$$

Dato che $\phi \geq 0$ e $|n^k| \leq 1$, abbiamo infine la stima:

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial x^k}(x_0) \right| \leq \frac{1}{\text{Vol}B_r(x_0)} \int_{+\partial B_r(x_0)} \phi dS .$$

Applicando al secondo membro il teorema della media superficiale, abbiamo anche che:

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial x^k}(x_0) \right| \leq \frac{\text{Vol}\partial B_r(x_0)}{\text{Vol}B_r(x_0)} \phi(x_0) .$$

Ossia, dato che il rapporto a secondo membro vale n/r :

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial x^k}(x_0) \right| \leq \frac{n}{r} \phi(x_0) .$$

Dato che $r > 0$ può essere scelto arbitrariamente grande (il dominio di φ è tutto \mathbb{R}^n) otteniamo che deve necessariamente essere:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^k}(x_0) = 0 \quad \text{per ogni } x_0 \in \mathbb{R}^n .$$

Dato che \mathbb{R}^n è connesso e che quanto scritto sopra vale per ogni derivata, concludiamo che ϕ , e dunque φ , deve essere costante su \mathbb{R}^n . Se φ è limitata superiormente, si può ripetere la stessa dimostrazione usando $-\varphi$. \square

La dimostrazione contiene un risultato che è utile menzionare separatamente in un lemma.

Lemma 3.2. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto e $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione armonica. Se $x \in \Omega$ e $B_r(x) \subset \Omega$ è una palla aperta centrata in x di raggio $r > 0$ tale che $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$, allora vale per la derivata k -esima, $k = 1, 2, \dots, n$:*

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}(x) \right| \leq \frac{n}{r} (\varphi(x) - \min_{B_r(x)} \varphi) ,$$

e

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}(x) \right| \leq \frac{n}{r} (\max_{B_r(x)} \varphi - \varphi(x)) .$$

\diamond

Un analogo risultato si ha sostituendo alla condizione di limitatezza quella di quadrato sommabile o assolutamente sommabile, si può immediatamente generalizzare il risultato a funzioni di spazi \mathcal{L}^p con $1 \leq p < +\infty$ tramite la disuguaglianza di Hölder usata al posto di quella di Cauchy-Schwartz nella dimostrazione che segue, ma noi rimarremo nel caso più semplice lasciando al lettore interessato tale diretta generalizzazione.

Teorema 3.8. *Ogni funzione armonica $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfi*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi| d^n x < +\infty \quad \text{oppure} \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^2 d^n x < +\infty$$

è necessariamente la funzione nulla. \diamond

Dimostrazione. Se $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è armonica consideriamo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e una palla $B_r(x_0)$ di raggio finito $r > 0$ centrata in x_0 . Il teorema della media volumetrica dice che

$$\varphi(x_0) = \frac{1}{\text{Vol}B_r(x_0)} \int_{B_r(x_0)} \varphi(x) d^n x$$

e quindi

$$0 \leq |\varphi(x_0)| = \frac{1}{\text{Vol}B_r(x_0)} \left| \int_{B_r(x_0)} \varphi(x) d^n x \right| \leq \frac{1}{\text{Vol}B_r(x_0)} \int_{B_r(x_0)} |\varphi(x)| d^n x. \quad (3.25)$$

Se la funzione φ è assolutamente integrabile, il limite del secondo membro per $r \rightarrow +\infty$ produce 0 perchè $\text{Vol}B_r(x_0) \rightarrow +\infty$ mentre, per esempio per il teorema della convergenza dominata, $\int_{B_r(x_0)} |\varphi(x)| d^n x \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| d^n x < +\infty$. Dunque $\varphi(x_0) = 0$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Nel caso in cui φ sia a quadrato sommabile, dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, abbiamo che:

$$\begin{aligned} \int_{B_r(x_0)} |\varphi(x)| d^n x &= \int_{B_r(x_0)} 1|\varphi(x)| d^n x \leq \sqrt{\int_{B_r(x_0)} |\varphi(x)|^2 d^n x} \sqrt{\int_{B_r(x_0)} 1^2 d^n x} \\ &= \sqrt{\int_{B_r(x_0)} |\varphi(x)|^2 d^n x} \sqrt{\text{Vol}B_r(x_0)}. \end{aligned}$$

Usando questo risultato in (3.25):

$$0 \leq |\varphi(x_0)| \leq \sqrt{\frac{\int_{B_r(x_0)} |\varphi(x)|^2 d^n x}{\text{Vol}B_r(x_0)}}.$$

Prendendo il limite per $r \rightarrow +\infty$, il secondo membro tende a zero nell'ipotesi di $\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^2 d^n x < +\infty$ e pertanto $\varphi(x_0) = 0$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$. \square

Osservazioni 3.5. Il teorema appena provato ha un'importante conseguenza fisica. È noto che la *densità di energia elettrica* immagazzinata in un campo elettrico $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t, x)$ è proporzionale a $\mathbf{E}(t, x)^2$, dove $x \in \mathbb{R}^3$ e $t \in \mathbb{R}$ sono le coordinate spaziali e temporali standard in un

sistema di riferimento. Se tale campo elettrico è statico, allora soddisfa, in assenza di sorgenti, le due equazioni dell'elettrostatica che portano immediatamente a concludere come ben sappiamo che $\mathbf{E}(x) = \nabla\varphi(x)$ dove φ è armonica e quindi ogni componente di \mathbf{E} è di classe C^∞ ed è a sua volta una funzione armonica. Ci si può ora chiedere se esistano in natura *configurazioni di campo elettrico statico nel vuoto con energia elettrica totale finita*. La risposta è negativa, perché dovremmo avere tre funzioni armoniche $E_j = E_j(x)$ con $j = 1, 2, 3$, definite su tutto \mathbb{R}^3 e che soddisfano

$$\int_{\mathbb{R}^3} E_1(x)^2 + E_2(x)^2 + E_3(x)^2 d^3x < +\infty .$$

Questo è impossibile in base al teorema 3.8. Un risultato analogo si ha per configurazioni di campo magnetostatico la cui densità di energia è proporzionale a $\mathbf{B}(x)^2$. In realtà esistono configurazioni di campo elettromagnetico definite in tutto lo spazio (privo di sorgenti) che possiedono un'energia elettromagnetica totale finita: sono le ben note onde elettromagnetiche. Tuttavia tali configurazioni di campo *non* sono statiche, ma evolvono nel tempo. In questo modo soddisfano le equazioni di Maxwell generali che non danno luogo a campi le cui componenti sono funzioni armoniche per ogni istante di tempo e l'assurdo trovato sopra non si manifesta.

Capitolo 4

Soluzioni dell'equazione di Poisson su particolari domini tramite Funzioni di Green.

In questo capitolo mostreremo come costruire soluzioni dell'equazione di Poisson (con condizioni di Dirichlet) per domini Ω specifici, tutti limitati eccetto il primo caso che tratteremo. Useremo soluzioni opportune, simili alle soluzioni fondamentali, ma che tengono conto del dominio Ω quando questo non è tutto \mathbb{R}^n , dette *funzioni di Green* e *nuclei di Poisson*. Questo approccio è sicuramente interessante, in particolare per il significato fisico (carica immagine) e per gli sviluppi che ha avuto nella fisica matematica in riferimento a problemi di natura completamente diversa. Tuttavia, da un punto di vista puramente matematico, si tratta di un metodo che non si riesce a generalizzare nel caso di domini abbastanza arbitrari e ad equazioni differenziali di tipo ellittico non a coefficienti costanti. Le tecniche moderne di costruzione della soluzione di problemi con dati al contorno per equazioni ellittiche, sono basate su altri approcci in cui la soluzione viene cercata e costruita in spazi funzionali *deboli* (soluzioni nel senso delle *distribuzioni* in *spazi di Sobolev*) e poi viene provata la regolarità di tali soluzioni (sfruttando proprietà di regolarità specifiche degli operatori ellittici [RS75]). In Appendice A si trova qualche ulteriore dettaglio su questo tipo di approccio.

4.1 Soluzione dell'equazione di Poisson in tutto \mathbb{R}^n tramite G_n .

Consideriamo prima di tutto il caso più semplice di problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson in cui il dominio della soluzione è tutto \mathbb{R}^n , con $n > 2$, la funzione sorgente è di classe $C_0^2(\mathbb{R}^n)$ e si richiedono condizioni di annullamento all'infinito. Si tratta quindi di un problema di Dirichlet in cui si assegnano condizioni all'infinito.

La rilevanza fisica di questo problema è che esso corrisponde a cercare, se $n = 3$, il potenziale elettrico generato da una densità di carica localizzata, descritta cioè da una funzione C^2 a supporto compatto, richiedendo condizioni di annullamento uniforme nelle direzioni, all'infinito.

In questo caso la soluzione esiste ed è unica e la si può scrivere usando la soluzione fondamentale G_n .

Teorema 4.1. Per $n > 2$, si consideri il problema di determinare $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dove $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ soddisfa:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = f & \text{su } \mathbb{R}^n \\ \varphi(x) \rightarrow 0 & \text{uniformemente (in tutte le direzioni) quando } \|x\| \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (4.1)$$

essendo assegnata $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$.

Esiste un'unica soluzione al problema ed è data da:

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G_n(x, y) f(y) d^n y. \quad (4.2)$$

Per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (che si può in particolare scegliere come un punto del supporto di f), esistono una palla aperta B di centro x_0 e raggio abbastanza grande da includere $\text{supp}(f)$, e una costante $K_n \geq 0$ che dipende solo da B , per le quali vale la stima:

$$|\varphi(x)| \leq \frac{K_n \|f\|_\infty \text{Vol}(\text{supp}(f))}{\|x - x_0\|^{n-2}} \quad \text{se } x \notin B. \quad (4.3)$$

◇

Dimostrazione. Il fatto che la soluzione se esiste è unica è già stato provato nel teorema 2.5. In tal caso compariva anche un bordo $\partial\Omega$ sul quale assegnare dati di Dirichlet. Si vede immediatamente che quella dimostrazione rimane valida anche se $\Omega = \emptyset$. Il fatto che il secondo membro di (4.2) soddisfi l'equazione di Poisson con sorgente f è stato dimostrato in (c) del teorema 3.1. Non rimane che provare che il secondo membro di (4.2) si annulli uniformemente in tutte le direzioni per $\|x\| \rightarrow +\infty$. Questo fatto segue immediatamente dalla (4.3) scegliendo $x_0 = 0$. Per concludere proviamo la (4.3). Per fare ciò ci serve una stima sull'andamento di $G_n(x, y)$ a grandi $\|x\|$, quando y varia in un insieme limitato. Per la disuguaglianza triangolare:

$$\|x - y\| + \|y\| \geq \|x\|.$$

Se $\|y\| \leq R$ per qualche costante $R > 0$ fissata, abbiamo che:

$$\|x - y\| + R \geq \|x - y\| + \|y\| \geq \|x\|,$$

per cui:

$$\|x - y\| \geq \|x\| - R. \quad (4.4)$$

Se prendiamo $\|x\| > R$ il secondo membro è positivo. Osserviamo infine che se $0 < \delta < 1$, esisterà $R_\delta > R$ per cui, se $\|x\| \geq R_\delta$ allora

$$\|x\| - R \geq \delta \|x\|,$$

A tal fine basta per esempio scegliere $R_\delta = R/(1 - \delta)$. La (4.4) implica allora che:

$$\|x - y\| \geq \delta\|x\| \quad \text{se } \|y\| \leq R \text{ e } \|x\| \geq R_\delta.$$

In altre parole:

$$\frac{1}{\|x - y\|} \leq \frac{1}{\delta\|x\|} \quad \text{se } \|y\| \leq R \text{ e } \|x\| \geq R_\delta. \quad (4.5)$$

Tenendo conto di come è definita G_n , per $n > 2$, abbiamo trovato che, per ogni $R > 0$ e se $0 < \delta < 1$, esiste una seconda costante $R_\delta > R$ per cui:

$$|G_n(x, y)| \leq \frac{C_{n,\delta}}{\|x\|^{n-2}} \quad \text{se } \|x\| \geq R_\delta \text{ e } \|y\| \leq R \text{ e dove: } C_{n,\delta} := \frac{1}{(n-2)\delta^{n-2}\omega_n}. \quad (4.6)$$

Se usiamo palle centrate in un fissato $x_0 \in \mathbb{R}^n$ invece che nell'origine, tenendo conto che $G_n(x, y)$ è in realtà funzione di $x - y$ e rimpiazzando x con $x - x_0$ e y con $y - x_0$, la stima di sopra implica che:

$$|G_n(x, y)| \leq \frac{C_{n,\delta}}{\|x - x_0\|^{n-2}} \quad \text{se } \|x - x_0\| \geq R_\delta \text{ e } \|y - x_0\| \leq R \text{ e dove: } C_{n,\delta} := \frac{1}{(n-2)\delta^{n-2}\omega_n}. \quad (4.7)$$

Ora applichiamo quest'ultima stima alla soluzione (4.2). Dato che il supporto di f è limitato ci sarà una palla aperta, B_R , di raggio $R > 0$ centrata in qualsiasi fissato punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ per cui $\text{supp}(f) \subset B_R$. Se $0 < \delta < 1$ è fissato, usando (4.7) in (4.2) con $R > 0$ suddetto si trova subito che, se $\|x\| \geq R_\delta$:

$$|\varphi(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |G_n(x, y)| |f(y)| d^n y \leq \frac{C_{n,\delta}}{\|x - x_0\|^{n-2}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| d^n y \leq \frac{C_{n,\delta} \|f\|_\infty \text{Vol}(\text{Supp}(f))}{\|x - x_0\|^{(n-2)}}. \quad (4.8)$$

Si osservi che $\|f\|_\infty < +\infty$ perché tale funzione è continua a supporto compatto e ancora $\text{Vol}(\text{supp}(f)) < +\infty$, perché i compatti hanno misura di Lebesgue finita. La stima (4.3) si ha definendo $B_{R_\delta} =: B$ e $K_n := C_{n,\delta}$. \square

Il teorema provato e la (4.2) permettono di dare un significato intuitivo a $G_n(x, y)$. Possiamo infatti pensare che, per $y_0 \in \mathbb{R}^n$ fissato, la funzione $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto G_n(x, y_0)$ rappresenti una soluzione che si annulla all'infinito per l'equazione di Poisson in cui la sorgente f è una funzione di integrale totale 1 che sia strettamente localizzata attorno al punto y_0 , cioè il suo supporto è approssimativamente $\{y_0\}$. Sotto queste ipotesi ci si aspetta che

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G_n(x, y) f(y) d^n y \sim \int_{\mathbb{R}^n} G_n(x, y_0) f(y) d^n y = G_n(x, y_0) \int_{\mathbb{R}^n} f(y) d^n y = G_n(x, y_0).$$

Dal punto di vista fisico, se $n = 3$, stiamo parlando, per esempio, del potenziale elettrico per una sorgente, una carica puntiforme, localizzata nel punto y_0 . Rigorosamente parlando però quest'idea non è sostenibile per vari motivi di carattere matematico, primo fra tutti il fatto che una simile funzione f , che è quasi ovunque nulla per costruzione, genererebbe, tramite la

formula (4.2), una soluzione ovunque nulla!

È possibile dare comunque un senso matematicamente rigoroso a questo genere di idee introducendo la *teoria delle distribuzioni* o *funzioni generalizzate*. In tal caso, la funzione $f = f(x)$ che rappresenterebbe la sorgente elementare suddetta, localizzata in y , è in realtà individuata dalla *distribuzione* detta *delta di Dirac*, che si indica con $\delta(x - y)$.

4.2 Ancora sul problema di Dirichlet per regioni limitate.

Torniamo ora a considerare il problema di Dirichlet in una regione $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto a chiusura $\bar{\Omega}$ compatta per $\varphi \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$

$$\begin{cases} \Delta\varphi = f, & f \in C_0^0(\Omega) \text{ funzione assegnata,} \\ \varphi|_{\partial\Omega} = \psi & \psi \in C^0(\partial\Omega) \text{ funzione assegnata.} \end{cases} \quad (4.9)$$

Se $\partial\Omega$ è una superficie chiusa regolare orientabile e, per esempio, f è limitata oppure a supporto compatto in Ω come assunto sopra, allora abbiamo a disposizione un'identità, la (3.17), che ci permette di esprimere la soluzione φ , *se esiste*, in funzione dei valori che φ e il suo gradiente $\nabla\varphi$ assumono su $\partial\Omega$. Ovviamente dobbiamo anche assumere per esempio che $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$. Infatti vale:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \int_{\Omega} G_n(x, y) \Delta_y \varphi d^n y - \oint_{+\partial\Omega} G_n(x, y) \nabla_y \varphi(y) \cdot \mathbf{n} dS(y) + \\ & + \oint_{+\partial\Omega} \nabla_y G_n(x, y) \cdot \mathbf{n} \varphi(y) dS(y), \end{aligned} \quad (4.10)$$

da cui:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \int_{\Omega} G_n(x, y) f(y) d^n y - \oint_{+\partial\Omega} G_n(x, y) \nabla_y \varphi(y) \cdot \mathbf{n} dS(y) + \\ & + \oint_{+\partial\Omega} \nabla_y G_n(x, y) \cdot \mathbf{n} \psi(y) dS(y). \end{aligned}$$

Questa formula, al contrario del caso del problema in tutto \mathbb{R}^n , non può tuttavia essere utilizzata per *determinare* la soluzione al problema assegnato perchè per utilizzarla per conoscere φ in ogni punto di Ω è necessario conoscere *anche* $\nabla\varphi$ su $\partial\Omega$, che non è noto dalle condizioni al contorno. Per un problema con condizioni al contorno di Neumann si avrebbe lo stesso problema in quanto non sarebbero noti i valori che φ assume su $\partial\Omega$.

Osservazioni 4.1. Se, oltre ai valori di φ su $\partial\Omega$, fossero assegnati anche valori di $\nabla\varphi$ su $\partial\Omega$ (ad esempio $\nabla\varphi \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \psi_1$), e tentassimo di usare l'espressione (4.10) per scrivere una possibile soluzione,

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \int_{\Omega} G_n(x, y) f(y) d^n y - \oint_{+\partial\Omega} G_n(x, y) \psi_1(y) dS(y) \\ & + \oint_{+\partial\Omega} \nabla_y G_n(x, y) \cdot \mathbf{n} \psi(y) dS(y) \end{aligned} \quad (4.11)$$

in generale avremmo che la funzione φ così calcolata *non* risolverebbe il problema:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = f \text{ funzione assegnata,} \\ \varphi|_{\partial\Omega} = \psi \text{ funzione assegnata,} \\ \nabla\varphi \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \psi_1 \text{ funzione assegnata.} \end{cases} \quad (4.12)$$

Infatti, dai teoremi di unicità per il problema di Dirichlet e Neumann, sappiamo che in generale questo problema *può non ammettere soluzione* assegnando $\varphi|_{\partial\Omega}$ e $\nabla\varphi|_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n}$ contemporaneamente e arbitrariamente. In qualche modo per poter usare la procedura detta dobbiamo estrarre il dato incognito $\nabla\varphi|_{\partial\Omega}$ da quelli noti: ψ e f . Oppure dobbiamo modificare la formula in modo da non richiedere la conoscenza del dato $\nabla\varphi|_{\partial\Omega}$ che non può essere assegnato indipendentemente da ψ .

4.2.1 Funzioni di Green e nuclei di Poisson.

Per usare (4.10) al fine di scrivere la soluzione del problema di Dirichlet in funzione dei dati al bordo, possiamo cercare di modificare G_n in modo da far sparire in (4.10) il termine contenente il gradiente di φ e cercare di usare i soli dati di Dirichlet. In questo modo potremmo riuscire a produrre un candidato della soluzione del problema. Con un problema di Neumann si può procedere similmente anche se noi ci limiteremo a trattare il problema di Dirichlet unicamente. Abbiamo la seguente proposizione che ci porta verso la direzione voluta.

Proposizione 4.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ insieme aperto non vuoto a chiusura compatta e con bordo dato da una superficie regolare orientabile. Sia $\{v_\Omega(x, \cdot)\}_{x \in \Omega} \subset C^2(\bar{\Omega})$ una classe di soluzioni dell'equazione:*

$$\Delta_y v_\Omega(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega \times \Omega$$

per le quali valga anche:

$$v_\Omega(x, y) + G_n(x, y) = 0, \quad \text{se } x \in \Omega \text{ e } y \in \partial\Omega.$$

Allora valgono i fatti seguenti.

(a) Per ogni funzione $\varphi \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ con $\nabla\varphi$ e $\Delta\varphi$ limitate su Ω , vale:

$$\varphi(x) = \int_{\Omega} G_\Omega(x, y) \Delta\varphi(y) d^n y + \oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x, y) \varphi(y) dS(y), \quad \text{per ogni } x \in \Omega, \quad (4.13)$$

dove $G_\Omega(x, y) := G_n(x, y) + v_\Omega(x, y)$ e $N_\Omega(x, y) := \nabla_y G_\Omega(x, y) \cdot \mathbf{n}|_{y \in \partial\Omega}$ (con \mathbf{n} versore uscente da $\partial\Omega$) sono detti rispettivamente la **funzione di Green** ed il **nucleo di Poisson** per il problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson su Ω .

(b) Per ogni fissato $x \in \Omega$, $\Omega \setminus \{x\} \ni y \mapsto G_\Omega(x, y)$ si estende univocamente per continuità ad una funzione $C^2(\bar{\Omega} \setminus \{x\})$, armonica su tutto $\bar{\Omega} \setminus \{x\}$ e nulla su $\partial\Omega$.

(c) Se $(x, y) \in \Omega \times \Omega$, allora

$$v_\Omega(x, y) = v_\Omega(y, x) \quad \text{e, se } x \neq y, \quad G_\Omega(y, x) = G_\Omega(x, y).$$

In particolare, quindi per ogni fissato $y \in \Omega$, $\Omega \setminus \{y\} \ni x \mapsto G_\Omega(x, y)$ si estende univocamente per continuità ad una funzione $C^2(\bar{\Omega} \setminus \{y\})$, armonica su $\bar{\Omega} \setminus \{y\}$ e nulla su $\partial\Omega$. \diamond

Schema di dimostrazione. (a) Fissiamo $x \in \Omega$ e quindi scegliamo una classe di domini Ω_ϵ , con le stesse caratteristiche di Ω , per $\epsilon \in (0, \delta)$ con $\delta > 0$, in modo tale che $\bar{\Omega}_\epsilon \subset \Omega_{\epsilon'} \subset \Omega$ se $\epsilon < \epsilon'$ e $\cup_{\epsilon \in (0, \delta)} \Omega_\epsilon = \Omega$.

Dato che, se $x \in \Omega$ è fissato, vale $\Delta_y v_\Omega(x, y) = 0$ quando $y \in \bar{\Omega}$ (per $y \in \partial\Omega$, ciò vale per continuità tenendo conto che la funzione è C^2 fino al bordo), pertanto:

$$\int_{\Omega_\epsilon} \varphi(y) \Delta_y v_\Omega(x, y) d^n y = 0$$

per ogni funzione $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Se ammettiamo che $\varphi \in C^2(\Omega)$, dalla seconda identità di Green abbiamo come conseguenza:

$$0 = \int_{\Omega_\epsilon} v_\Omega(x, y) \Delta_y \varphi(y) d^n y + \oint_{+\partial\Omega_\epsilon} \varphi(y) \nabla_y v_\Omega(x, y) \cdot \mathbf{n} dS(y) - \oint_{+\partial\Omega_\epsilon} v_\Omega(x, y) \nabla_y \varphi(y) \cdot \mathbf{n} dS(y).$$

Sommando membro a membro con (4.10) calcolata su Ω_ϵ e definendo $G_\Omega(x, y) = G_n(x, y) + v_\Omega(x, y)$, si ha:

$$\varphi(x) = \int_{\Omega_\epsilon} G_\Omega(x, y) \Delta_y \varphi(y) d^n y + \oint_{+\partial\Omega_\epsilon} N_\Omega(x, y) \varphi(y) dS(y) - \oint_{+\partial\Omega_\epsilon} G_\Omega(x, y) \nabla_y \varphi(y) \cdot \mathbf{n} dS(y)$$

dove $N_\Omega(x, y) := \nabla_y G_\Omega(x, y) \cdot \mathbf{n}|_{y \in \partial\Omega}$. Se ora assumiamo che $\varphi \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ e che $\nabla\varphi$ e $\Delta\varphi$ siano limitati su Ω , possiamo calcolare il limite per $\epsilon \rightarrow 0$ essenzialmente usando il teorema della convergenza dominata ottenendo

$$\varphi(x) = \int_{\Omega} G_\Omega(x, y) \Delta_y \varphi(y) d^n y + \oint_{+\partial\Omega} N_\Omega(x, y) \varphi(y) dS(y),$$

dove abbiamo trascurato il contributo dovuto all'ultimo integrale di bordo che vale zero nelle nostre ipotesi in quanto $G_\Omega(x, y) = 0$ se $y \in \partial\Omega$. Nel passaggio precedente per l'integrazione sul bordo si procede come segue, scegliendo con cura la classe dei domini Ω_ϵ in modo che $\partial\Omega_\epsilon = f_\epsilon(\partial\Omega)$, per una classe di funzioni regolari $f_\epsilon : \partial\Omega \rightarrow \Omega$ parametrizzate in $\epsilon \in [0, \delta)$, che prendono valori in un fissato intorno di $\partial\Omega$ in modo tale che, in particolare, f_0 sia la funzione identità. La misura naturale su ogni $\partial\Omega_\epsilon$ viene scritta come quella su $\partial\Omega$ moltiplicata per una funzione continua positiva (la derivata di Radon Nykodim). In questo modo ogni integrazione su $\partial\Omega_\epsilon$, componendo le funzioni integrate con la funzione f_ϵ , può sempre vedersi come un'integrazione su $\partial\Omega$, con una misura che è quella di $\partial\Omega$ moltiplicata per una funzione che tiene conto di ϵ . Il teorema della convergenza dominata viene applicato per calcolare il limite $\epsilon \rightarrow \delta^-$ per un integrale eseguito nella variabile y su $\partial\Omega$ per funzioni delle variabili $y \in \partial\Omega$ e $\epsilon \in [0, \delta)$, congiuntamente continue sul compatto $\partial\Omega \times [0, \delta']$, dove $\delta' < \delta$ con $\delta > 0$ e fissato a piacere.

(b) La dimostrazione è ovvia per definizione di G_Ω , dalle proprietà note di v_Ω e G_n . Si noti che G_Ω resta comunque singolare per $x = y$ dato che tale è G_n , mentre $v_\Omega(x, x)$ è comunque ben definita.

(c) Fissiamo $x_1, x_2 \in \Omega$ con $x_1 \neq x_2$ e consideriamo il volume, con ovvie notazioni, $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus (B_\epsilon(x_1) \cup B_\epsilon(x_2))$. Su tale volume le funzioni: $y \mapsto G_\Omega(x_1, y)$ e $y \mapsto G_\Omega(x_2, y)$ sono regolari, armoniche e si annullano sul bordo esterno di Ω_ϵ , dato da $\partial\Omega$. In conseguenza dell'armonicità:

$$0 = \int_{\Omega_\epsilon} (G_\Omega(x_1, y)\Delta_y G_\Omega(x_2, y) - G_\Omega(x_2, y)\Delta_y G_\Omega(x_1, y)) d^n y.$$

Applicando la seconda identità di Green al secondo membro scritto sopra e tenendo conto che il contributo dovuto all'integrale di superficie su $\partial\Omega$ si annulla dato che $G_\Omega(x_1, y) = G_\Omega(x_2, y) = 0$ se $y \in \partial\Omega$, otteniamo che:

$$\begin{aligned} & \oint_{+\partial B_\epsilon(x_1)} G_\Omega(x_1, y) \mathbf{n} \cdot \nabla_y G_\Omega(x_2, y) dS(y) - \oint_{+\partial B_\epsilon(x_1)} G_\Omega(x_2, y) \mathbf{n} \cdot \nabla_y G_\Omega(x_1, y) dS(y) \\ & + \oint_{+\partial B_\epsilon(x_2)} G_\Omega(x_1, y) \mathbf{n} \cdot \nabla_y G_\Omega(x_2, y) dS(y) - \oint_{+\partial B_\epsilon(x_2)} G_\Omega(x_2, y) \mathbf{n} \cdot \nabla_y G_\Omega(x_1, y) dS(y) = 0. \end{aligned}$$

Si osservi che la divergenza che si ha nel primo integrale per $\epsilon \rightarrow 0^+$ è unicamente dovuta alla divergenza di $G_n(x_1, y)$ per $y \rightarrow x_1$. Fissando coordinate polari centrate in x_1 , tale divergenza è di ordine ϵ^{2-n} se $n > 2$ oppure $\ln \epsilon$ se $n = 2$. Tuttavia l'area della superficie $\partial B_\epsilon(x_1)$ tende a zero con rapidità ϵ^{n-1} oppure ϵ rispettivamente. Da ciò si conclude che il primo integrale tende a 0 per $\epsilon \rightarrow 0^+$. Lo stesso discorso vale per il quarto integrale. Nel secondo integrale, la divergenza è invece dovuta a $\mathbf{n} \cdot \nabla_y G_n(x_1, y)$, $y \rightarrow x_1$. Usando un sistema di coordinate polari centrate in x_1 si vede che $\mathbf{n} \cdot \nabla_y G_n(x_1, y) = 1/vol(\partial B_\epsilon(x_1))$ come già osservato nella dimostrazione di (c) del teorema 3.1. Tale divergenza si compensa esattamente con il limite a 0 dell'area della superficie $\partial B_\epsilon(x_1)$ quando $\epsilon \rightarrow 0^+$, lo stesso discorso vale per il terzo integrale. (Si osservi che il contributo dovuto ai termini $v_\Omega(x, y)$ è sempre nullo nel limite per $\epsilon \rightarrow 0^+$ dato che tali funzioni sono regolari nel dominio considerato e vengono integrate su domini di misura che tende a zero.) Ragionando nella dimostrazione di (c) del teorema 3.1 si verifica facilmente che, prendendo il limite per $\epsilon \rightarrow 0^+$ si ottiene un valore finale dato dai seguenti contributi:

$$0 - G_\Omega(x_2, x_1) + G_\Omega(x_1, x_2) + 0 = 0.$$

Da cui: $G_\Omega(x_2, x_1) = G_\Omega(x_1, x_2)$. Dato che vale anche $G_n(x_2, x_1) = G_n(x_1, x_2)$ per definizione, concludiamo che $v_\Omega(x_2, x_1) = v_\Omega(x_1, x_2)$ quando $x_1 \neq x_2$. Questa identità per v_Ω vale banalmente anche nel caso $x_1 = x_2$, dato che $v_\Omega(x, x)$ è definita per ogni $x \in \Omega$.

Si osservi infine che, per definizione, per ogni $x \in \Omega$, $y \mapsto G_\Omega(x, y)$ è una funzione $C^2(\bar{\Omega} \setminus \{x\})$, armonica e nulla su $\partial\Omega$. Pertanto per ogni $y \in \Omega$, $\Omega \ni x \mapsto G_\Omega(x, y) = G_\Omega(y, x)$ si estende univocamente per continuità ad una funzione $C^2(\bar{\Omega} \setminus \{y\})$, armonica e nulla su $\partial\Omega$. \square

L'espressione (4.13) fornisce φ in termini delle sole quantità assegnate in un problema di Dirichlet su Ω . Tale formula può essere usata per determinare la soluzione del problema di Dirichlet.

Sussiste infatti il seguente teorema.

Teorema 4.2. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ insieme aperto, non vuoto, a chiusura compatta e con bordo dato da una superficie regolare orientabile. Sia G_Ω una funzione di Green per il laplaciano su Ω con nucleo di Poisson N_Ω . Se valgono i seguenti fatti:*

- (i) *la funzione $v_\Omega := G_\Omega - G_n$ è di classe $C^3(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \setminus \Delta)$, dove abbiamo definito $\Delta := \{(x, x) \mid x \in \partial\Omega\}$, e*
- (ii) *vale l'identità :*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x, y) \psi(y) dS(y) = \psi(x_0), \quad \text{per ogni } \psi \in C^0(\partial\Omega) \text{ e ogni } x_0 \in \partial\Omega, \quad (4.14)$$

allora valgono i due seguenti fatti.

(a) *la funzione:*

$$\varphi(x) := \int_{\Omega} G_\Omega(x, y) f(y) d^n y + \oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x, y) \psi(y) dS(y), \quad \text{per } x \in \Omega \quad (4.15)$$

estesa per continuità su $\bar{\Omega}$ è soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta\varphi = f, \\ \varphi|_{\partial\Omega} = \psi, \end{cases} \quad (4.16)$$

per ogni scelta delle funzioni assegnate $f \in C_0^2(\Omega)$ e $\psi \in C^0(\partial\Omega)$.

(b) *Esiste al più una funzione di Green G_Ω per l'equazione di Poisson con condizioni di Dirichlet su Ω soddisfacente (i) e (ii) (e quindi un unico nucleo di Poisson associato). \diamond*

Dimostrazione. (a) Fissato un qualsiasi $x' \in \Omega$ si consideri una palla aperta $B(x') \subset \Omega$ con $\bar{B}(x') \subset \Omega$. La funzione $\bar{B}(x') \times \text{supp} f \ni (x, y) \mapsto v_\Omega(x, y) f(y)$ è limitata e lo sono tutte le sue derivate in x di ogni ordine (essendo tale funzione con le sue derivate continue su un compatto), dunque esisterà una funzione costante $g \geq$ definita sull'insieme, di misura finita per ipotesi, Ω , e tale funzione maggiora i valori assoluti delle derivate in x fino al secondo ordine di $v_\Omega(x, y) f(y)$ per tutti i valori di $y \in \Omega$ uniformemente in $x \in B(x')$. Possiamo allora derivare sotto il segno di integrale in $x \in B(x')$ due volte ottenendo, da (b) del lemma 4.1

$$\Delta_x \int_{\Omega} v_\Omega(x, y) f(y) d^n y = \int_{\Omega} \Delta_x v_\Omega(x, y) f(y) d^n y = 0.$$

Similmente, dato che f ha supporto compatto e pertanto

$$\int_{\Omega} G_n(x, y) f(y) d^n y = \int_{\mathbb{R}^n} G_n(x, y) f(y) d^n y$$

Per (d) del teorema 3.1 abbiamo che:

$$\Delta_x \int_{\Omega} G_n(x, y) f(y) d^n y = f(x).$$

Mettendo tutto insieme abbiamo ottenuto che:

$$\Delta_x \int_{\Omega} G_{\Omega}(x, y) f(y) d^n y = f(x).$$

La funzione $\overline{B(x')} \times \partial\Omega \ni (x, y) \mapsto N_{\Omega}(x, y) f(y)$ è derivabile in x e le sue derivate sono limitate, essendo funzioni continue su un compatto: per costruzione $x \neq y$ lavorando nell'insieme detto. Come prima possiamo derivare due volte sotto il segno di integrale ottenendo

$$\Delta_x \oint_{\partial\Omega} N_{\Omega}(x, y) \psi(y) dS(y) = \oint_{\partial\Omega} \Delta_x N_{\Omega}(x, y) \psi(y) dS(y) = 0,$$

dato che possiamo applicare il teorema di Schwartz, essendo v di classe C^3 e G_n di classe C^{∞} (per argomenti non coincidenti):

$$\Delta_x \mathbf{n} \cdot \nabla G_{\Omega}(x, y) = \mathbf{n} \cdot \nabla \Delta_x G_{\Omega}(x, y) = 0$$

in quanto $G_{\Omega}(x, y)$ è, per costruzione, armonica in x se $x \neq y$. In definitiva

$$\Delta_x \left(\int_{\Omega} G_{\Omega}(x, y) f(y) d^n y + \oint_{\partial\Omega} N_{\Omega}(x, y) \psi(y) dS(y) \right) = f(x).$$

La funzione φ è quindi in $C^2(\Omega)$ per costruzione (anzi è in $C^4(\Omega)$).

Se $B(x_0)$ è una palla aperta centrata in $x_0 \in \partial\Omega$ tale che $\partial B(x_0) \cap \text{supp } f = \emptyset$, la funzione $(x, y) \mapsto G_{\Omega}(x, y) f(y)$ per $(x, y) \in (\overline{B(x_0)} \cap \overline{\Omega}) \times \Omega$ è continua con supporto compatto incluso in $(\overline{B(x_0)} \cap \overline{\Omega}) \times \text{supp } f$ (le singolarità di G_{Ω} per $x = y$ non hanno effetto visto che tali punti sono fuori dal supporto). Sia $C \geq 0$ una costante che maggiora $(x, y) \mapsto G_{\Omega}(x, y) f(y)$ sul dominio detto. La funzione costante $\Omega \ni y \mapsto C$ è integrabile dato che Ω ha chiusura compatta. Possiamo allora applicare il teorema della convergenza dominata e concludere che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_{\Omega} G_{\Omega}(x, y) f(y) d^n y = \int_{\Omega} \lim_{x \rightarrow x_0} G_{\Omega}(x, y) f(y) d^n y = 0,$$

dove abbiamo usato il fatto che $\lim_{x \rightarrow x_0} G_{\Omega}(x, y) = G_{\Omega}(x_0, y) = G_{\Omega}(y, x_0) = 0$ quando $x_0 \in \partial\Omega$ e $y \in \Omega$. Se infine vale anche la condizione 4.14, allora φ definita in (4.15) ed estesa su $\partial\Omega$ come $\varphi(x) := \psi(x)$ è continua su $\overline{\Omega}$ e, banalmente, soddisfa le condizioni al bordo. Mostriamone la continuità in ogni punto $x_0 \in \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Se $x_0 \in \Omega$ la funzione φ è continua in x_0 per costruzione, essendo di classe C^2 , e non c'è nulla da provare. Se invece $x_0 \in \partial\Omega$ si procede come segue. Per ogni $\epsilon > 0$ possiamo trovare un intorno aperto A_{ϵ} di x_0 tale che, se $x \in A_{\epsilon} \cap \Omega$ allora $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \epsilon$ come conseguenza di (4.14). Dato che ψ è a sua volta continua in x_0 , per ogni $\epsilon > 0$ possiamo trovare un intorno aperto A'_{ϵ} di x_0 tale che, se $x \in A'_{\epsilon} \cap \partial\Omega$ allora $|\psi(x) - \psi(x_0)| < \epsilon$. In definitiva, tenendo conto del fatto che $\varphi = \psi$ su $\partial\Omega$, se $\epsilon > 0$, esiste un intorno di $x_0 \in \partial\Omega$, $B_{\epsilon} := A_{\epsilon} \cap A'_{\epsilon}$, tale che se $x \in B_{\epsilon} \cap \overline{\Omega} = B_{\epsilon} \cap (\Omega \cup \partial\Omega)$, allora $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \epsilon$. (b) Ovviamente è sufficiente dimostrare l'unicità della funzione di Green quando è valutata per $x, y \in \Omega$ (con $x \neq y$), i rimanenti punti del bordo vengono inclusi nella dimostrazione per

continuità. Sia G'_Ω un'altra funzione di Green soddisfacente (4.14). Per ogni problema di Dirichlet (4.16), l'unica (per il teorema 2.3) soluzione φ si potrà anche scrivere come:

$$\varphi(x) := \int_{\Omega} G'_\Omega(x, y) f(y) d^n y + \oint_{\partial\Omega} N'_\Omega(x, y) \psi(y) dS(y).$$

Se scegliamo ψ identicamente nulla su $\partial\Omega$, per differenza con (4.15) avremmo che, per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $f \in C_0^2(\Omega)$:

$$0 = \int_{\Omega} [G'_\Omega(x, y) - G_\Omega(x, y)] f(y) d^n y.$$

Supponiamo per assurdo che per fissati $x, y \in \Omega$ con $x \neq y$, $G'_\Omega(x, y) - G_\Omega(x, y) = l \neq 0$. Assumiamo senza perdere generalità $l > 0$. In una palla aperta di raggio finito B centrata in y e con x fissato, $G'_\Omega(x, y) - G_\Omega(x, y)$ si manterrebbe in $[l - \epsilon, l + \epsilon]$ con $l - \epsilon > 0$. Potremmo allora trovare una funzione $f \in C_0^2(\Omega)$ il cui supporto è contenuto in B che abbia integrale strettamente positivo pari a k . In modo tale che $\int_{\Omega} [G'_\Omega(x, y) - G_\Omega(x, y)] f(y) d^n y \geq k(l - \epsilon) > 0$ che è impossibile. Quindi $G'_\Omega(x, y) = G_\Omega(x, y)$ su $\Omega \times \Omega$ per $x \neq y$. \square

Osservazioni 4.2.

(1) Nelle ipotesi di validità del teorema precedente sappiamo risolvere, su Ω dato, *ogni* problema di Dirichlet con dati $\psi \in C^0(\partial\Omega)$ e $f \in C_0^2(\Omega)$. La conoscenza della funzione di Green non permette di risolvere un problema di Dirichlet, ma *ogni* problema di Dirichlet (se valgono tutte le ipotesi richieste).

(2) La validità della condizione (4.14) è abbastanza generale. Daremo una condizione sufficiente affinché essa valga nella prossima proposizione.

(3) Cambiamenti della definizione della funzione G_Ω sull'insieme Δ non alterano, evidentemente, i risultati in (a). Si osservi che anche la relazione (4.14) è indipendente dal valore assunto da G_Ω su Δ .

Proposizione 4.2. *Nelle ipotesi del teorema 4.2, la condizione (4.14) è verificata se, per ogni $x_0 \in \partial\Omega$ e per ogni palla aperta $B_\delta(x_0)$ centrata in x_0 e con raggio $\delta > 0$ vale:*

$$\oint_{\partial\Omega \setminus B_\delta(x_0)} N_\Omega(x, y) dS(y) \rightarrow 0 \quad \text{per } \Omega \ni x \rightarrow x_0.$$

◇

Dimostrazione. La dimostrazione usa il seguente lemma:

Lemma 4.1. *Il nucleo di Poisson $N_\Omega(x, y)$ soddisfa:*

$$N_\Omega(x, y) \geq 0 \quad \text{se } x \in \Omega, y \in \partial\Omega \text{ ed anche } \oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x, y) dS(y) = 1, \quad \text{per ogni } x \in \Omega. \quad (4.17)$$

◇

Dimostrazione del lemma. Infatti, se $x \in \Omega$ è fissato e $B_r(x)$ è una palla aperta di raggio r centrata in x con $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$, la funzione $\Omega \setminus \overline{B_r(x)} \ni y \mapsto G_\Omega(x, y) = G_n(x, y) + v_\Omega(x, y)$ è sicuramente negativa su $\partial B_r(x)$ scegliendo r sufficientemente piccolo, visto che $G_n(x, y)$ diverge a $-\infty$ quando $y \rightarrow x$, mentre $v(x, y)$ rimane limitata nell'intorno di x . Per costruzione $G_\Omega(x, y) = 0$ se $y \in \partial\Omega$. Dato che il massimo di $\Omega \setminus \overline{B_r(x)} \ni y \mapsto G_\Omega(x, y)$ è assunto sul bordo del dominio (essendo la funzione armonica nell'interno del dominio e continua sulla chiusura), concludiamo che tale massimo è sicuramente 0 e che $G_n(x, y) < 0$ nell'interno del dominio per il principio del massimo forte. Segue facilmente che $-\mathbf{n} \cdot \nabla_y G_n(x, y) \leq 0$ quando $y \in \partial\Omega$, dove $-\mathbf{n}$ punta verso l'interno: se ciò non fosse, dato che $G_n(x, y) = 0$ su $y \in \partial\Omega$, troveremmo una curva C^1 , $y = y(t)$, che entra in Ω partendo da $y(0) \in \partial\Omega$, lungo la quale $t \mapsto G_n(x, y(t))$ cresce raggiungendo valori positivi. Notiamo poi che, se $x \in \Omega$:

$$\oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x, y) dS(y) = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \nabla_y G_n(x, y) dS(y) + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \nabla_y v_\Omega(x, y) dS(y).$$

Consideriamo i due integrali a secondo membro. Il secondo integrale vale 0, dato che $y \mapsto v_\Omega(x, y)$ è armonica su $\overline{\Omega}$ e vale il teorema 2.8. Il primo integrale vale invece 1, applicando la formula (3.17) alla funzione g che vale costantemente 1 su \mathbb{R}^n . In definitiva:

$$\oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x, y) dS(y) = 1, \quad \text{per ogni } x \in \Omega.$$

Questo conclude la dimostrazione. \square

Proseguendo con la dimostrazione principale, abbiamo che, in conseguenza del secondo risultato in (4.17):

$$\oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x, y) \psi(y) dS(y) = \psi(x_0) \oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x, y) dS(y) + \oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x, y) (\psi(y) - \psi(x_0)) dS(y).$$

In altre parole, per ogni fissata palla $B_\delta(x_0)$:

$$\oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x, y) \psi(y) dS(y) - \psi(x_0) = \oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x, y) (\psi(y) - \psi(x_0)) dS(y) = A_\delta(x) + A'_\delta(x). \quad (4.18)$$

dove:

$$A_\delta(x) := \oint_{\partial\Omega \setminus B_\delta(x_0)} N_\Omega(x, y) (\psi(y) - \psi(x_0)) dS(y), \quad A'_\delta(x) := \oint_{\partial\Omega \cap B_\delta(x_0)} N_\Omega(x, y) (\psi(y) - \psi(x_0)) dS(y).$$

Consideriamo ora una successione di punti $\Omega \ni x_n \rightarrow x_0$ se $n \rightarrow +\infty$. Avremo che

$$\limsup_n \left| \oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x_n, y) \psi(y) dS(y) - \psi(x_0) \right| \leq \limsup_n |A_\delta(x_n)| + \limsup_n |A'_\delta(x_n)| = \limsup_n |A'_\delta(x_n)|,$$

dato che $\limsup_n |A_\delta(x_n)| = 0$, essendo per ipotesi (usando anche il fatto che $|N_\Omega(x_n, y)| = N_\Omega(x_n, y)$):

$$|A_\delta(x_n)| \leq \sup_{y \in \partial\Omega \setminus B_\delta(x_0)} |\psi(y) - \psi(x_0)| \oint_{\partial\Omega \setminus B_\delta(x_0)} |N_\Omega(x_n, y)| dS(y) \rightarrow 0 \quad \text{se } n \rightarrow +\infty,$$

dato che $\sup_{y \in \partial\Omega \setminus B_\delta(x_0)} |\psi(y) - \psi(x_0)|$ è finito per la continuità di ψ sul compatto $\partial\Omega$.
Concludiamo che:

$$\limsup_n \left| \oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x_n, y) \psi(y) dS(y) - \psi(x_0) \right| \leq \limsup_n |A'_\delta(x_n)|,$$

per ogni $\delta > 0$. Mostriamo che possiamo rendere piccolo a piacere il secondo membro scegliendo $\delta > 0$ opportunamente. Dato che ψ è continua su $\partial\Omega$, per ogni fissato $\epsilon > 0$ deve esistere $\delta > 0$ tale che $|\psi(y) - \psi(x_0)| < \epsilon$ se $y \in \partial\Omega$ con $\|y - x_0\| < \delta$ e quindi:

$$\begin{aligned} |A'_\delta(x)| &\leq \sup_{y \in \partial\Omega \cap B_\delta(x_0)} |\psi(y) - \psi(x_0)| \oint_{\partial\Omega \cap B_\delta(x_0)} |N_\Omega(x, y)| dS(y) \leq \epsilon \oint_{\partial\Omega} |N_\Omega(x, y)| dS(y) \\ &= \epsilon \oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x, y) dS(y) = \epsilon. \end{aligned}$$

Il risultato vale per ogni $x \in \Omega$ e quindi anche per x_n . Concludiamo che, per ogni $\epsilon > 0$:

$$\limsup_n \left| \oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x_n, y) \psi(y) dS(y) - \psi(x_0) \right| \leq \epsilon.$$

Abbiamo ottenuto che, comunque fissiamo una successione $\Omega \ni x_n \rightarrow x_0$ se $n \rightarrow +\infty$

$$0 \leq \liminf_n \left| \oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x_n, y) \psi(y) dS(y) - \psi(x_0) \right| \leq \limsup_n \left| \oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x_n, y) \psi(y) dS(y) - \psi(x_0) \right| \leq 0.$$

E quindi, per ogni successione $\Omega \ni x_n \rightarrow x_0$ se $n \rightarrow +\infty$, vale:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x_n, y) \psi(y) dS(y) - \psi(x_0) \right| = 0.$$

L'arbitrarietà della successione implica che vale la tesi:

$$\lim_{\Omega \ni x \rightarrow x_0} \oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x, y) \psi(y) dS(y) = \psi(x_0).$$

□

4.3 Funzioni di Green per domini particolari.

Non ci occuperemo della questione generale, mentre ci occuperemo solamente di determinare le funzioni di Green ed il nucleo di Poisson per domini Ω particolari.

4.3.1 Il metodo delle cosiddette *cariche immagine*.

Al fine di ottenere una funzione di Green per un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, si deve trovare una classe di funzioni $\{v_\Omega(x, \cdot)\}_{x \in \Omega} \subset C^2(\overline{\Omega})$ (come visto nel teorema 4.2, si rinforza la richiesta di regolarità richiedendo $v_\Omega(\cdot, \cdot) \in C^3(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \setminus \Delta)$) tale che siano soddisfatte le condizioni:

$$\Delta_y v_\Omega(x, y) = 0 \quad x \in \Omega, y \in \Omega$$

e

$$G_3(x, y) + v_\Omega(x, y) = 0 \quad x \in \Omega, y \in \partial\Omega.$$

Quest'ultima condizione si scrive esplicitamente:

$$-\frac{1}{4\pi\|x-y\|} + v_\Omega(x, y) = 0 \quad x \in \Omega, y \in \partial\Omega.$$

L'intuizione fisica ci può aiutare nella ricerca della funzione $v_\Omega(x, y)$. Partiamo dal fatto che, come ben noto dai corsi di elettromagnetismo elementare, la funzione

$$\mathbb{R}^3 \ni y \mapsto \varphi(y) := \frac{e}{4\pi\|x-y\|}$$

è il *potenziale elettrostatico generato nel punto y da una carica elettrica e , puntiforme, posta nel punto x* . Il gradiente di tale campo, cambiato di segno,

$$\mathbf{E}(y) = \frac{e(y-x)}{4\pi\|x-y\|^3},$$

coincide con il campo elettrostatico generato in y dalla carica detta. Infine, seguendo la formula della forza di Lorentz (1.4) il prodotto di tale campo per la carica e' di prova posta nel punto y riproduce la **legge di Coulomb**:

$$\mathbf{F}(y) = \frac{ee'(y-x)}{4\pi\|x-y\|^3},$$

che esprime la forza elettrostatica che la carica e in x esercita sulla carica e' in y .

La condizione:

$$G_3(x, y) + v_\Omega(x, y) = 0 \quad x \in \Omega, y \in \partial\Omega,$$

dice che il potenziale elettrostatico in y totale dovuto sia ad una carica puntiforme negativa unitaria situata in x (che genera il potenziale $G_3(x, y)$ in y) unitamente ad un ulteriore potenziale incognito $v_\Omega(x, y)$, è sempre nullo sulla superficie $\partial\Omega$. Il fatto che $y \mapsto v_\Omega(x, y)$ si possa sempre pensare come un potenziale elettrostatico è dovuto alla richiesta $\Delta_y v_\Omega(x, y) = 0$ che è soddisfatta dai potenziali elettrostatici, come spiegato nella sezione 2.1, quando le sorgenti del campo non cadono nel punto y . *Quindi la determinazione della funzione $v_\Omega(x, \cdot)$ è legata alla determinazione di una configurazione di cariche, che non cada su $\partial\Omega$, in aggiunta a quella posta in x che annulli su $\partial\Omega$ il potenziale prodotto dalla carica unitaria posta in x* . Queste cariche, da aggiungersi a quella unitaria già presente in x , vengono chiamate *cariche immagine*. La dipendenza parametrica di v_Ω da x è dovuta al fatto che possiamo muovere a piacimento la carica in x e ci aspettiamo che ciò cambi la distribuzione di cariche immagine.

4.3.2 La funzione di Green nella palla in \mathbb{R}^3 .

Sia Ω la palla aperta di raggio R in \mathbb{R}^3 centrata nell'origine. Vogliamo trovare la funzione di Green per il problema interno alla sfera. Nel caso della palla, il problema di determinare le cariche immagine è molto semplice: si verifica che è sufficiente una sola altra carica da aggiungersi a quella in x al fine di annullare il potenziale in $\partial\Omega$. Se $x'(x)$ è la posizione della carica immagine di valore q_x (può dipendere da x), deve essere:

$$-\frac{1}{4\pi\|x-y\|} + \frac{q_x}{4\pi\|x'(x)-y\|} = 0 \quad y \in \partial\Omega.$$

Per la simmetria del problema ci aspettiamo che

$$x' = \lambda(x)x, \quad \text{con } |\lambda(x)|\|x\| \geq R,$$

la seconda condizione è dovuta al fatto che x' deve essere fuori da Ω altrimenti avremmo una singolarità in più per G_Ω , mentre sappiamo che essa è singolare solo per $y = x$. In questo modo, se $x \in \Omega$ allora $x'(x) \notin \Omega$. Si osservi ancora che, per ogni $x \in \Omega$ fissato, cioè x' fissato, la funzione

$$v_\Omega(x, y) := \frac{q_x}{4\pi\|x'(x)-y\|}$$

è C^∞ ed armonica nella variabile $y \in \Omega$ proprio come richiesto, dato che non è altro che la funzione $y \mapsto q_x G_3(x'(x), y)$. Questa funzione, al variare di $y \in \mathbb{R}^3$ è di classe C^∞ se $y \neq x'$ ed è anche armonica in tale insieme.

Se il metodo funziona si deve avere l'annullamento del potenziale totale su $\partial\Omega$, in particolare nei due punti y_1 e y_2 intersezione della retta congiungente x e x' con $\partial\Omega$:

$$\begin{cases} -\frac{1}{4\pi(R-\|x\|)} + \frac{q_x}{4\pi(\|x'(x)\|-R)} = 0 \\ -\frac{1}{4\pi(\|x\|+R)} + \frac{q_x}{4\pi(\|x'(x)\|+R)} = 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

In questo modo si ottiene, se $\|x\| < R$:

$$\begin{cases} \|x'(x)\|\|x\| = R^2, \\ q_x = \frac{R}{\|x\|}. \end{cases} \quad (4.20)$$

Dalla prima equazione ricaviamo che

$$|\lambda(x)| = \frac{R^2}{\|x\|^2},$$

in modo tale che, come richiesto, $\|x\||\lambda(x)| = R^2/\|x\| \geq R$ se $\|x\| \leq R$. Assumendo $\lambda(x) > 0$, ci aspettiamo che la funzione di Green cercata sia:

$$G_\Omega(x, y) = -\frac{1}{4\pi\|x-y\|} + \frac{R\|x\|}{4\pi\|R^2x - \|x\|^2y\|} \quad (4.21)$$

La funzione $v_\Omega(x, y) = G_\Omega(x, y) - G_n(x, y)$ soddisfa $\Delta_y v_\Omega(x, y) = 0$ dove non è singolare, essendo per costruzione, una soluzione fondamentale nelle variabili x' e y :

$$v_\Omega(x, y) := \frac{q_x}{4\pi \|x'(x) - y\|}$$

Ciò accade in particolare per $x \in \Omega$ e $y \in \bar{\Omega}$ come richiesto nella definizione di funzione di Green. Infatti, più fortemente si può provare che v_Ω è di classe C^∞ su $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ se si escludono i punti (x, y) con $x = y \in \partial\Omega$. Questo risultato si ottiene facilmente se si nota che, esplicitando i calcoli, e dove $\alpha(x, y)$ è l'angolo tra x e y :

$$v_\Omega(x, y) = \frac{R}{4\pi \sqrt{R^4 + \|x\|^2 \|y\|^2 - 2R^2 \|x\| \|y\| \cos \alpha(x, y)}}. \quad (4.22)$$

Ma, dato che $|\cos \alpha(x, y)| \leq 1$ e quindi in particolare $-1 \leq -\cos \alpha(x, y)$, abbiamo una minorazione per il quadrato del denominatore di v_Ω :

$$(R^2 - \|x\| \|y\|)^2 = R^4 + \|x\|^2 \|y\|^2 - 2R^2 \|x\| \|y\| \leq R^4 + \|x\|^2 \|y\|^2 - 2R^2 \|x\| \|y\| \cos \alpha(x, y). \quad (4.23)$$

Quindi, se si annulla il denominatore nel secondo membro di (4.22) con $x, y \in \bar{\Omega}$ (e quindi $\|x\|, \|y\| \leq R$), deve accadere anche che $(R^2 - \|x\| \|y\|)^2 = 0$ e dunque $\|x\| = \|y\| = R$, cioè $x, y \in \partial\Omega$. Con queste richieste aggiuntive, la condizione di annullamento del denominatore del secondo membro della (4.22) fornisce infine:

$$R^4 + R^2 R^2 - 2R^4 \cos \alpha(x, y) = 0,$$

che è possibile solo se $\cos \alpha(x, y) = 1$ e quindi $x = y \in \partial\Omega$ come detto sopra. Pertanto le singolarità di $v_\Omega(x, y)$ su $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ si possono avere (e si hanno) solo quando $x = y \in \partial\Omega$. Possiamo riscrivere l'espressione trovata come:

$$v_\Omega(x, y) = \frac{R}{4\pi \sqrt{R^4 + \|x\|^2 \|y\|^2 - 2R^2 x \cdot y}}.$$

Questa funzione, per $x, y \in \Omega$, è C^∞ dove non si annulla il denominatore, cioè ovunque su $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ escludendo i punti (x, y) con $x = y \in \partial\Omega$.

Infine, si controlla facilmente che anche la seconda condizione richiesta per avere una funzione di Green è soddisfatta: se $y \in \partial\Omega$ e $x \in \Omega$, allora $G_\Omega(x, y) = 0$. Infatti, in questo caso se \mathbf{n}_x e \mathbf{n}_y sono rispettivamente il versore di x e quello di y e tenendo conto che $\|y\| = R$ equivale a $y \in \partial\Omega$, si trova da (4.21):

$$\begin{aligned} G_\Omega(x, y)|_{y \in \partial\Omega} &= -\frac{1}{4\pi \| \|x\| \mathbf{n}_x - R \mathbf{n}_y \|} + \frac{1}{4\pi \| R \mathbf{n}_x - \|x\| \mathbf{n}_y \|} \\ &= -\frac{1}{4\pi \| \|x\| \mathbf{n}_x - \|y\| \mathbf{n}_y \|} + \frac{1}{4\pi \| \|y\| \mathbf{n}_x - \|x\| \mathbf{n}_y \|} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\sqrt{||x||^2 + ||y||^2 - 2||x||||y||\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y}} + \frac{1}{4\pi\sqrt{||y||^2 + ||x||^2 - 2||y||||x||\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y}} = 0.$$

Tutte le condizioni richieste sono dunque soddisfatte: la (4.21) è una funzione di Green per la palla di raggio R centrata nell'origine in \mathbb{R}^3 .

Valutiamo il nucleo di Poisson associato $N_\Omega(x, y)$. Utilizziamo coordinate polari sferiche con l'asse z diretto lungo il vettore uscente dall'origine e diretto verso il punto y , partendo da

$$G_\Omega(x, y) = -\frac{1}{4\pi||x - y||} + \frac{1}{4\pi||R\mathbf{n}_x - ||x||y/R||}$$

si trova in coordinate polari, dove $||y||$ è la coordinata radiale:

$$G_\Omega(x, y) = -\frac{1}{4\pi\sqrt{||x||^2 + ||y||^2 - 2||x||||y||\cos\theta}} + \frac{1}{4\pi\sqrt{R^2 + ||x||^2||y||^2/R^2 - 2||x||||y||\cos\theta}}. \quad (4.24)$$

Quindi dobbiamo valutare:

$$N_\Omega(x, y) = \mathbf{n}_y \cdot \nabla_y G_\Omega(x, y)|_{\partial\Omega} = \frac{\partial}{\partial||y||} G_\Omega(x, y) \Big|_{||y||=R}$$

Nel calcolo si tenga conto di due fatti: (i) dopo aver calcolato le derivate, si può porre $||y|| = R$ (ii) i denominatori dei due addendi a secondo membro in (4.24) coincidono per $||y|| = R$ come notato sopra, coincideranno, per $||y|| = R$ anche i denominatori delle *derivate* di tali espressioni, dato che che altro non sono che i precedenti denominatori elevati alla terza potenza.

Il calcolo produce immediatamente:

$$N_\Omega(x, y) = \frac{R^2 - ||x||^2}{4\pi R||x - y||^3} \Big|_{y \in \partial\Omega} \quad ||x|| < R \quad (4.25)$$

(Per il problema di Dirichlet esterno alla sfera si può ragionare analogamente scambiando il ruolo di x e y e si ottiene, si tenga conto che ora il versore uscente da $\partial\Omega$ punta verso l'origine:

$$N_\Omega(x, y) = \frac{||x||^2 - R^2}{4\pi R||x - y||^3} \Big|_{y \in \partial\Omega} \quad ||x|| > R.$$

Non diremo altro sul problema esterno.)

Le ipotesi del teorema 4.2 sono soddisfatte, la condizione (i) è vera dato che $v_\Omega \in C^\infty(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \setminus \Delta)$ come provato precedentemente, la condizione (ii) (cioè la (4.14)) è anch'essa valida dato che si verifica facilmente per computo diretto, dalla forma esplicita del nucleo di Poisson trovata, che l'ipotesi della proposizione 4.2 è verificata nel caso in esame: se integriamo in $y \in \partial\Omega \setminus B_\delta(x_0)$ per un fissato $x_0 \in \partial\Omega$, il denominatore del nucleo di Poisson rimane limitato, mentre il numeratore tende a zero se $x \rightarrow x_0$, dato che ciò implica che $||x|| \rightarrow R$. Dato che l'integrando è in valore assoluto limitato da una costante uniformemente in x quando y è confinato a stare in $\partial\Omega \setminus B_\delta(x_0)$ e

x è, per esempio, in $B_{\delta/2}(x_0) \cap \Omega$ ¹, il teorema della convergenza dominata implica che l'integrale in (4.14) tenda a zero verificando la condizione (ii).

Pertanto siamo in grado di determinare tutte le soluzioni del problema di Dirichlet in Ω con funzione sorgente di classe $C_0^2(\Omega)$ e dato di Dirichlet $\psi \in C^0(\partial\Omega)$, quando Ω è la palla aperta in \mathbb{R}^3 di raggio $R > 0$ centrata nell'origine. In particolare, se $\varphi \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ è armonica in Ω (cioè non c'è la sorgente f) e si riduce alla funzione continua ψ su $\partial\Omega$, vale:

$$\varphi(x) = \frac{R^2 - \|x\|^2}{4\pi R} \oint_{\|y\|=R} \frac{\psi(y)}{\|x-y\|^3} dS(y).$$

4.3.3 La funzione di Green nel cerchio in \mathbb{R}^2 .

Ora Ω è il cerchio in \mathbb{R}^2 centrato nell'origine e di raggio R . Vogliamo determinare una funzione di Green $G_\Omega(x, y)$ per tale insieme. In questo caso siamo nel piano, ma il ragionamento è molto simile a quello precedente sviluppato nello spazio, cambiano solo i calcoli. Cerchiamo una distribuzione di cariche all'esterno di $\bar{\Omega}$ che annulli il potenziale sulla circonferenza $\partial\Omega$.

Osservazioni 4.3. Dal punto di vista fisico non possiamo pensare tali cariche come cariche elettriche, visto che siamo in due dimensioni e che il potenziale dovuto ad una carica si deve pensare come logaritmico. A parte questo dettaglio, fondamentale dal punto di vista fisico, ma inessenziale dal punto di vista matematico, la procedura è la stessa che nel caso tridimensionale.

Dalla definizione 3.1, ci aspettiamo una funzione di Green della forma della funzione armonica in $y \in \Omega \setminus \{x\}$ data da, per ogni x fissato in Ω :

$$G_\Omega(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \|x - y\| - \frac{1}{2\pi} \ln(q_x \|x'(x) - y\|),$$

in modo tale che:

$$G_\Omega(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \|x - y\| - \frac{1}{2\pi} \ln(q_x \|x'(x) - y\|) = 0 \quad \forall y \in \partial\Omega.$$

Dobbiamo determinare la carica immagine q_x e la posizione di essa x' in funzione di x . Esattamente come nel caso precedente, per la simmetria del problema ci aspettiamo che $x' = \lambda(x)x$, con $|\lambda(x)|\|x\| \geq R$ dato che x' deve essere fuori da $\bar{\Omega}$. Se il metodo funziona si deve avere l'annullamento del potenziale totale su $\partial\Omega$, in particolare nei due punti y_1 e y_2 intersezione della retta congiungente x e x' con $\partial\Omega$:

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln(R - \|x\|) - \frac{1}{2\pi} \ln(q_x (\|x'(x)\| - R)) = 0 \\ \frac{1}{2\pi} \ln(R + \|x\|) - \frac{1}{2\pi} \ln(q_x (\|x'(x)\| + R)) = 0 \end{cases} \quad (4.26)$$

La soluzione è di nuovo:

$$\begin{cases} \|x\|\|x'\| = R^2 \\ q_x = \|x\|/R \end{cases} \quad (4.27)$$

¹La funzione $(B_{\delta/2}(x_0) \cap \Omega) \times (\partial\Omega \setminus B_\delta(x_0)) \ni (x, y) \rightarrow N_\Omega(x, y)$ è continua e definita su un compatto.

In particolare $|\lambda(x)| = R^2/||x||^2$. Scegliendo $\lambda(x) > 0$ si trova:

$$G_{\Omega}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{||x - y||}{||Rx/||x|| - ||x||y/R||}.$$

Questa funzione è di classe C^{∞} su $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ se si escludono i punti (x, y) con $x = y$. Inoltre la funzione $v_{\Omega}(x, y) = G_{\Omega}(x, y) - G_n(x, y)$ è di classe C^{∞} su $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ se si escludono i punti (x, y) con $x = y \in \partial\Omega$. Si controlla facilmente che per $||y|| = R$, $G_{\Omega}(x, y)$ si annulla.

Ragionando come nel problema precedente si può calcolare $N_{\Omega}(x, y)$, ottenendo:

$$N_{\Omega}(x, y) = \frac{R^2 - ||x||^2}{2\pi R ||x - y||^2} \Big|_{y \in \partial\Omega} \quad ||x|| < R$$

(Per il problema esterno si ottiene analogamente un nucleo di Poisson:

$$N_{\Omega}(x, y) = \frac{||x||^2 - R^2}{2\pi R ||x - y||^2} \Big|_{y \in \partial\Omega} \quad ||x|| > R,$$

non ci occuperemo oltre del problema esterno.)

Si può verificare che la condizione (4.14) è effettivamente verificata per il nucleo di Poisson trovato, pertanto siamo in grado di determinare tutte le soluzioni del problema di Dirichlet in Ω con funzione sorgente di classe $C_0^2(\Omega)$ e dato di Dirichlet $\psi \in C^0(\partial\Omega)$, quando Ω è il disco aperto in \mathbb{R}^2 di raggio $R > 0$ centrato nell'origine. In particolare, se $\varphi \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ è armonica in Ω (cioè non c'è la sorgente f) e si riduce alla funzione continua ψ su $\partial\Omega$, vale:

$$\varphi(x) = \frac{R^2 - ||x||^2}{2\pi R} \oint_{||y||=R} \frac{\psi(y)}{||x - y||^2} dS(y).$$

Osservazioni 4.4. Dal punto di vista fisico espressioni come:

$$G_{\Omega}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln ||x - y|| - \frac{1}{2\pi} \ln(q_x ||x'(x) - y||)$$

(dove stiamo assumendo che q_x sia un numero senza dimensioni) sono *scorrette* perché l'argomento di un logaritmo deve essere un numero puro, mentre $||x - y||$ è una lunghezza. Pertanto, per dare senso a tali espressioni bisogna aggiungere una qualche costante ℓ dalle dimensioni di una lunghezza con cui dividere $||x - y||$, che prima abbiamo implicitamente assunto essere di valore unitario rispetto all'unità di misura delle lunghezze che stiamo usando. Ma la scelta di tale unità di misura è arbitraria a sua volta, per cui, discutendo le formule precedenti con l'occhio del fisico, è impossibile non introdurre la costante ℓ al limite pari a $1m$ oppure $1cm$ ecc, ma presente. Per cui l'espressione corretta sarebbe:

$$G_{\Omega}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{||x - y||}{\ell} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{q_x ||x'(x) - y||}{\ell}.$$

Si osservi che comunque la scala ℓ non altera la funzione G_Ω , dato che, la stessa espressione di sopra può riscriversi:

$$G_\Omega(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\frac{\|x-y\|}{\ell}}{\frac{q_x \|x'(x)-y\|}{\ell}} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\|x-y\|}{q_x \|x'(x)-y\|}.$$

Osserviamo ancora che, però, a priori si potrebbero scegliere due scale differenti ℓ e ℓ' nei due logaritmi, per cui G_Ω sembrerebbe poter essere determinata a meno di una costante adimensionale data dal rapporto (adimensionale!) $r = \ell/\ell'$ delle due scale. Dalle proprietà dei logaritmi avremmo che:

$$G_\Omega(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\frac{\|x-y\|}{\ell}}{\frac{q_x \|x'(x)-y\|}{\ell'}} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\|x-y\|}{q_x \|x'(x)-y\|} - \frac{1}{2\pi} \ln(r).$$

In realtà siamo costretti a scegliere le due scale uguali per la richiesta di annullamento di $G_\Omega(x, y)$ quando $y \in \partial\Omega$ e $x \in \Omega$: dato che la G_Ω che abbiamo determinato sopra senza introdurre alcuna scala soddisfa tale requisito e coincide con

$$\frac{1}{2\pi} \ln \frac{\|x-y\|}{q_x \|x'(x)-y\|}$$

deve essere $\ln r = 0$, cioè $\ell = \ell'$.

4.3.4 La funzione di Green in un semispazio di \mathbb{R}^3 .

Consideriamo la seguente regione

$$\Omega = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 > 0\} \quad \text{con, quindi:} \quad \partial\Omega = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 = 0\}$$

Vogliamo determinare una funzione di Green per questa regione illimitata. Possiamo vedere questa regione come il limite per $n \rightarrow +\infty$ delle regioni Ω_n date dall'intersezione di Ω e delle palle di raggio n centrate nell'origine. Non ci occuperemo della questione in dettaglio, diremo solo che i precedenti teoremi si generalizzano a questo caso quando si lavora con soluzioni dell'equazione di Poisson che decadono rapidamente a zero (con le loro derivate prime) all'infinito.

Dalla definizione 3.1, sappiamo che in \mathbb{R}^3 :

$$G_3(x, y) = \frac{-1}{4\pi \|x-y\|}.$$

Dobbiamo allora cercare una distribuzione di cariche (nel semispazio $\{x^3 < 0\}$) tale da annullare il potenziale G_3 su $\partial\Omega$. È sufficiente porre una carica unitaria in $x' = (x^1, x^2, -x^3)$, dove $x = (x^1, x^2, x^3)$. Otteniamo dunque:

$$G_\Omega(x, y) = \frac{-1}{4\pi} \left(\frac{1}{\|x-y\|} - \frac{1}{\|x'-y\|} \right)$$

$$= \frac{-1}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 + y^3)^2}} \right)$$

Il nucleo di Poisson $N_\Omega(x, y)$ risulta essere, tenendo conto che $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_3$:

$$\begin{aligned} N_\Omega(x, y) &= -\frac{\partial}{\partial y^3} G_\Omega(x, y) \Big|_{y^3=0} \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y^3} \left(\frac{1}{\sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 + y^3)^2}} \right) \Big|_{y^3=0} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{2x^3}{\|x - y\|^3} \Big|_{y^3=0} = \frac{1}{2\pi} \frac{x \cdot \mathbf{e}_3}{\|x - y\|^3} \Big|_{y^3=0}. \end{aligned}$$

Consideriamo ora una funzione *continua e limitata* $\psi = \psi(y^1, y^2)$ definita sul piano $y^3 = 0$. Per tale funzione ha senso l'integrale, valutato per $x \in \Omega$ (cioè $x^3 > 0$):

$$\varphi(x) = \frac{x^3}{2\pi} \oint_{y^3=0} \frac{\psi(y)}{\|x - y\|^3} dS(y). \quad (4.28)$$

Esplicitamente, passando in coordinate polari piane sul piano $x^3 = 0$ e scegliendo l'origine nel punto (x^1, x^2) :

$$\varphi(x^1, x^2, x^3) = \frac{x^3}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} dr \frac{r\psi(r, \theta)}{(r^2 + (x^3)^2)^{3/2}}.$$

È evidente che la limitatezza di ψ assicura l'assoluta convergenza dell'integrale. Il calcolo diretto del laplaciano del primo membro, passando le derivate sotto il segno di integrale (si provi per esercizio che è possibile), provano che la funzione φ è effettivamente $C^2(\Omega)$ ed armonica in tale insieme. Inoltre si prova, essenzialmente verificando la proposizione 4.2, che vale la condizione:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 \in \partial\Omega} \frac{x^3}{2\pi} \int_{y^3=0} \frac{\psi(y)}{\|x - y\|^3} dS(y) = \psi(x_0)$$

e pertanto (4.28) produce una soluzione del problema di Dirichlet in Ω , senza sorgente f e con dato al bordo ψ . Lasciamo per esercizio la formulazione di un corrispondente teorema di unicità delle soluzioni, tenendo conto del decadimento all'infinito delle funzioni φ individuate in (4.28).

4.4 Soluzione per il problema di Dirichlet nel cerchio in \mathbb{R}^2 tramite l'analisi di Fourier.

In quest'ultima sezione presentiamo un metodo alternativo a quello delle "cariche immagine" che permette, sotto opportune ipotesi sul dato al bordo f , di ricavare la soluzione del problema

di Dirichlet per il cerchio in \mathbb{R}^2 . Gli elementi della teoria delle serie di Fourier che usiamo qui saranno discussi nella sezione 6.3. Si può posticipare la lettura di questa sezione a quella della sezione 6.3, tenendo anche conto della sottosezione 6.3.3 e dell'osservazione 6.6.

Consideriamo dunque il seguente problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & \phi \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \\ \phi|_{\partial\Omega} = f & f \in C^0(\partial\Omega) \text{ assegnata,} \end{cases} \quad (4.29)$$

dove Ω è il cerchio in \mathbb{R}^2 di raggio R : $\Omega = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2, (x^1)^2 + (x^2)^2 < R^2\}$. Per la simmetria del problema è conveniente introdurre un sistema di coordinate polari ρ, θ in \mathbb{R}^2 , con $x^1 = \rho \cos \theta, x^2 = \rho \sin \theta$. L'equazione di Laplace assume la seguente forma:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \phi \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \phi = 0. \quad (4.30)$$

Per risolverla cominciamo a cercare delle soluzioni particolari della forma:

$$\phi(\rho, \theta) = \psi(\rho)\chi(\theta),$$

con ψ e χ differenziabili due volte con continuità nel loro dominio. Restringendo le possibili soluzioni a tale classe di funzioni, l'equazione (4.30) diviene:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \psi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \psi \right) \chi + \frac{\psi}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \chi = 0,$$

ovvero, nei punti in cui le due funzioni ψ e χ non si annullano:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \psi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \psi \right) \frac{\rho^2}{\psi} = -\frac{1}{\chi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \chi.$$

Al primo membro troviamo una funzione dipendente solo dalla variabile ρ , mentre al secondo membro troviamo una funzione dipendente solo dalla variabile θ . L'uguaglianza può dunque essere verificata se e solo se entrambi i membri sono uguali ad una costante λ (indipendente da ρ, θ). Per continuità ci aspettiamo che valga ovunque:

$$\begin{cases} \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \psi + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \psi = \lambda \psi \\ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \chi = -\lambda \chi. \end{cases} \quad (4.31)$$

Sicuramente, per ogni fissata costante λ , le soluzioni di questo sistema risolvono l'equazione iniziale. Studiamo pertanto le soluzioni di tale sistema. Iniziamo a considerare la seconda equazione:

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \chi(\theta) + \lambda \chi(\theta) = 0, \quad (4.32)$$

che è un'equazione differenziale ordinaria lineare del secondo ordine a coefficienti costanti di cui ben nota la soluzione generale. Dato che vogliamo, ovviamente che la soluzione soddisfi

la condizione di monodromia $\chi(0) = \chi(2\pi)$, è necessario che $\mathbb{R} \ni \lambda \geq 0$, in modo tale che le soluzioni di (4.32) siano funzioni periodiche. In tal caso la soluzione generale è data da

$$\chi(\theta) = A \cos(\sqrt{\lambda}\theta) + B \sin(\sqrt{\lambda}\theta).$$

Inoltre $\sqrt{\lambda}$ deve essere un numero intero, ovvero $\lambda = n^2$, $n \in \mathbb{N}$ per fornire la giusta periodicità che assicuri $\chi(0) = \chi(2\pi)$. Il caso $n = 0$ corrisponde a soluzioni costanti.

Consideriamo ora la seconda equazione, che un'equazione lineare:

$$\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \psi + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \psi = n^2 \psi, \quad (4.33)$$

Una classe di soluzioni linearmente indipendenti è data da:

$$\psi_n(\rho) = \begin{cases} 1, \ln \rho, \\ \rho^n, \rho^{-n} \end{cases} \quad n \geq 1$$

Dobbiamo scartare la funzione $\ln \rho$ per $n = 0$ e la funzione ρ^{-n} per $n \geq 1$ in quanto sono singolari in 0, mentre noi stiamo cercando delle soluzioni dell'equazione di Laplace che siano regolari in tutto il cerchio interno. Per linearità, una soluzione ovunque regolare dell'equazione (4.30) può avere la forma

$$\phi(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)), \quad (4.34)$$

dove A_n, B_n sono coefficienti reali arbitrari e n varia in qualche sottoinsieme finito (ma arbitrariamente grande) dell'insieme degli interi positivi o nulli. I coefficienti A_n e B_n , in linea di principio si determinano imponendo la condizione al bordo $\phi(R, \theta) = f$:

$$\begin{cases} A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta \\ A_m = \frac{1}{R^m \pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(m\theta) d\theta \\ B_m = \frac{1}{R^m \pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin(m\theta) d\theta \end{cases}$$

Per ottenere le identità sopra scritte abbiamo tenuto conto delle note identità (vedi la sezione C in Appendice):

$$\int_0^{2\pi} \sin(n\theta) d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos(m\theta) d\theta = 0, \quad \text{se } n = 0, 1, 2, \dots \text{ e } m = 1, 2, \dots,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(n\theta) \cos(m\theta) d\theta = 0, \quad \text{se } n, m = 0, 1, \dots,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(n\theta) \sin(m\theta) d\theta = \pi \delta_{mn}, \quad \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta = \pi \delta_{mn}, \quad \text{per } n, m = 0, 1, 2, \dots,$$

dopo aver moltiplicato i due membri di (4.34) rispettivamente per $1, \cos(m\theta), \sin(m\theta)$ ed integrato il risultato.

È chiaro che affinché si possa sempre risolvere il problema ci aspettiamo che l'insieme di variabilità di n sia tutto \mathbb{N} e non solo un sottoinsieme finito. Questo fatto però pone il problema della convergenza della serie (4.34). Ulteriormente bisogna anche dimostrare che la serie (4.34) converge ad una soluzione del problema: questo fatto non è ovvio, mentre è ovvio, per linearità quando n varia su un insieme finito.

Formalmente dunque la soluzione del problema di Dirichlet interno è data dalla *serie*

$$\phi(\rho, \theta) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (\rho/R)^n (\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)),$$

dove i numeri reali α_n, β_n sono i *coefficienti di Fourier* della funzione reale f riferiti alle funzioni seno e coseno sul segmento $[-\pi, \pi]$ ovvero, equivalentemente, $[0, 2\pi]$:

$$f(\theta) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)),$$

con, quindi:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta, \quad \alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta.$$

Che è lo stesso che dire che vale lo sviluppo di Fourier in termini di esponenziali:

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{2\pi}},$$

e:

$$\alpha_n = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} (f_n + f_{-n}), \quad \beta_n = i \sqrt{\frac{1}{2\pi}} (f_n - f_{-n}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Dobbiamo ora dimostrare che la funzione cosicostituita è effettivamente soluzione del problema di Dirichlet, ovvero che è di classe $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, che è armonica in Ω e che coincide con f su $\partial\Omega$. Prima di tutto dimostriamo l'armonicità di ϕ in Ω . Dobbiamo in particolare mostrare che è giustificato derivare sotto il segno di serie. Di fatto, nell'ipotesi che la funzione f sia limitata, i suoi coefficienti di Fourier α_n, β_n sono limitati, sia ha cioè che

$$|\alpha_n| \leq M, \quad |\beta_n| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Infatti, dalle definizioni date sopra:

$$|\alpha_0| \leq \frac{\sup |f|}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 d\theta, \quad |\alpha_n| \leq \frac{\sup |f|}{\pi} \int_0^{2\pi} |\cos(n\theta)| d\theta, \quad \beta_n = \frac{\sup |f|}{\pi} \int_0^{2\pi} |\sin(n\theta)| d\theta,$$

da cui seguono le stime dette prima con $M = \sup |f|/\pi$, tenendo conto che le funzioni sin e cos sono limitate da 1.

Concludiamo che vale la seguente diseguaglianza per i termini della serie di Fourier di ϕ :

$$|(\rho/R)^n(\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta))| < |\rho/R|^n 2M$$

Quindi nei punti interni al cerchio, cioè per $|\rho/R| < 1$, la serie di ϕ è *dominata*² dalla serie geometrica di costanti positive $2M \sum_{n=0}^{+\infty} (\rho/R)^n$ che, come ben noto, converge a $2M(1 - (\rho/R))^{-1}$. Per il teorema della convergenza totale di Weierstrass, la serie che definisce ϕ converge assolutamente ed uniformemente all'interno del cerchio.

Possiamo ripetere lo stesso ragionamento anche per dimostrare la convergenza della serie delle derivate. Derivando k volte ogni termine della serie rispetto alla variabile θ otteniamo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\rho^n}{R^n} \left[\alpha^n n^k \cos(n\theta + k\pi/2) + \beta^n n^k \sin(n\theta + k\pi/2) \right].$$

Tale serie è dominata dalla serie di costanti positive $2M \sum_{n=1}^{+\infty} (\rho/R)^n n^k$. Questa serie non è altro che la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} n^k x^n$ valutata per $x = \rho/R < 1$. Il raggio di convergenza della serie di potenze detta è r dove al solito, se il limite esiste: $1/r = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^k)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{k(\ln n)/n} = 1$. Pertanto la serie di costanti positive considerata converge. Concludiamo che la serie delle derivate converge uniformemente ed è giustificato dunque derivare sotto il segno di serie (infinite volte) rispetto a θ e le funzioni che si ottengono sono funzioni continue (congiuntamente in entrambe le variabili), dato che sono limiti uniformi di funzioni continue. Per quanto riguarda la derivazione rispetto alla variabile ρ vorremmo che valesse l'identità, per $k = 1, 2, \dots$:

$$\frac{\partial^k}{\partial \rho^k} \phi(\rho, \theta) = \sum_{n \geq k} R^{-k} \frac{n!}{(n-k)!} (\rho/R)^{n-k} (\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)). \quad (4.35)$$

È facile verificare che la serie a secondo membro (ottenuta passando formalmente sotto il simbolo di somma l'operatore $d^k/d\theta^k$ nella serie che definisce ϕ) è assolutamente convergente, in quanto è dominata dalla serie³ di costanti positive da $2MR^{-k} \sum_{n \geq k} \frac{n!}{(n-k)!} (\rho/R)^{n-k}$. Dunque per noti teoremi riguardanti lo scambio del simbolo di serie con quello di derivata, possiamo derivare, ad ogni ordine k sotto il segno di serie e l'identità (4.35) è vera e la funzione ottenuta è continua (congiuntamente in entrambe le variabili) perchè limite uniforme di funzioni continue. Per quanto riguarda le derivate seconde miste possiamo procedere nello stesso modo e risulta che

$$\frac{\partial^2 \phi(\rho, \theta)}{\partial \rho \partial \theta} = \frac{\partial^2 \phi(\rho, \theta)}{\partial \theta \partial \rho} = \frac{1}{R} \sum_{n \geq 1} n^2 (\rho/R)^{n-1} (\alpha_n \cos(n\theta + \pi/2) + \beta_n \sin(n\theta + \pi/2)).$$

²Cioè i termini della serie di funzioni che definisce ϕ sono, in valore assoluto ed uniformemente nella variabile di tali funzioni, maggiorati dai corrispondenti termini della serie di costanti.

³Si tratta, a meno di una costante moltiplicativa e di un numero finito di termini, della serie di Taylor in $x = 0$ della derivata k -esima della funzione $(1 - (\rho/R)x)^{-1}$ valutata per $x = 1$. La serie di Taylor della funzione detta ha cerchio di convergenza $|(\rho/R)x| < 1$ e $x = 1$ cade in tale cerchio essendo $\rho/R < 1$.

La serie a secondo membro converge uniformemente in quanto è dominata dalla serie di costanti positive convergente $2(M/R) \sum_{n \geq 1} n^2 (\rho/R)^{n-1}$ come si verifica subito verificando che il raggio di convergenza della serie di potenze $2(M/R) \sum_{n \geq 1} n^2 x^{n-1}$ è $r = 1$. Abbiamo provato che ϕ è almeno di classe $C^2(\Omega)$ e che, per costruzione, soddisfa l'equazione di Laplace in Ω .

Resta da verificare la continuità sul bordo di Ω della soluzione costruita in questo modo. Per dimostrare questa proprietà dobbiamo imporre delle ipotesi aggiuntive su f . Sappiamo infatti dalla teoria delle serie di Fourier (vedi la proposizione 6.2) che se f è continua e di classe C^1 a tratti su $\partial\Omega$, allora i suoi coefficienti di Fourier α_n, β_n soddisfano la seguente disuguaglianza:

$$\sum_n |\alpha_n + i\beta_n| < \infty,$$

e quindi, in particolare, anche:

$$\sum_n |\alpha_n|, \sum_n |\beta_n| \leq \sum_n \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} = \sum_n |\alpha_n + i\beta_n| < \infty.$$

La funzione ϕ è, per costruzione, il limite di una serie di funzioni continue

$$\phi(\rho, \theta) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (\rho/R)^n (\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)).$$

Inoltre su tutto $\bar{\Omega}$, essendo $0 \leq \rho/R \leq 1$ su di esso, abbiamo:

$$(\rho/R)^n (\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)) \leq (\rho/R)^n (|\alpha_n| + |\beta_n|) \leq |\alpha_n| + |\beta_n|.$$

Dato che la serie delle costanti positive $|\alpha_n| + |\beta_n|$ converge, abbiamo che la serie definente ϕ converge assolutamente ad una funzione continua su tutto $\bar{\Omega}$ come volevamo. In particolare sul bordo di Ω :

$$\phi(R, \theta) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)) = f(\theta),$$

dato che α_n, β_n sono i coefficienti di Fourier della funzione f e che tale serie converge ad f stessa puntualmente come garantito dalla proposizione 6.3 nelle ipotesi fatte su f .

Abbiamo provato il seguente teorema.

Teorema 4.3. *Si consideri il problema di Dirichlet nel cerchio aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ di raggio R e centrato sull'origine:*

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & \phi \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \\ \phi|_{\partial\Omega} = f & f \in C^0(\partial\Omega) \text{ e } C^1 \text{ a tratti, assegnata.} \end{cases} \quad (4.36)$$

Esiste (ed è unica) la soluzione e si esprime come la somma della serie, che converge assolutamente e uniformemente in $\bar{\Omega}$,

$$\phi(\rho, \theta) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n (\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)) \quad (4.37)$$

dove i coefficienti α_n e β_n sono dati da:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta, \quad \alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta.$$

◇

Vediamo come scrivere la soluzione ottenuta con il teorema precedente facendo uso di un nucleo di Poisson. Possiamo riorganizzare la forma della soluzione espressa come serie nel modo che segue, tenendo conto dell'espressione esplicita dei coefficienti di Fourier della funzione f :

$$\begin{aligned} \phi(\rho, \theta) &= \alpha_0 + \sum_{n \geq 1} (\rho/R)^n (\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta + \sum_{n \geq 1} (\rho/R)^n \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta') \cos(n\theta') \cos(n\theta) d\theta' + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta') \sin(n\theta') \sin(n\theta) d\theta' \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta + \sum_{n \geq 1} (\rho/R)^n \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta') (\cos(n\theta') \cos(n\theta) + \sin(n\theta') \sin(n\theta)) d\theta' \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta + \sum_{n \geq 1} (\rho/R)^n \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta') \cos(n(\theta' - \theta)) d\theta' \end{aligned}$$

Lavorando in Ω , cioè per $0 \leq \rho < R$, possiamo scambiare il simbolo di serie con quello di integrale, dato che la serie converge uniformemente come è immediato dimostrare tenendo conto è dominata dalle serie di costanti $M \sum_{n \geq 1} (\rho/R)^n$ che converge per $0 \leq \rho/R < 1$, per $M \geq \sup |f|/\pi$. In questo modo otteniamo:

$$\phi(\rho, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta') \left(\frac{1}{2} + \sum_{n \geq 1} (\rho/R)^n \cos(n(\theta - \theta')) \right) d\theta'. \quad (4.38)$$

Possiamo calcolare la somma della serie nell'integrale come segue:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{n \geq 1} (\rho/R)^n \cos(n(\theta - \theta')) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (\rho/R)^n (e^{in(\theta - \theta')} + e^{in(\theta' - \theta)}) \\ &= \frac{1}{2} \left(-1 + \sum_{n=0}^{+\infty} (\rho/R)^n e^{in(\theta - \theta')} + \sum_{n=0}^{+\infty} (\rho/R)^n e^{in(\theta' - \theta)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-1 + \frac{1}{1 - (\rho/R)e^{i(\theta - \theta')}} + \frac{1}{1 - (\rho/R)e^{i(\theta' - \theta)}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{(1 - (\rho/R)e^{i(\theta' - \theta)}) (1 - (\rho/R)e^{i(\theta - \theta')}) + (1 - (\rho/R)e^{i(\theta - \theta')}) + (1 - (\rho/R)e^{i(\theta' - \theta)})}{(1 - (\rho/R)e^{i(\theta - \theta')}) (1 - (\rho/R)e^{i(\theta' - \theta)})} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1 - (\rho/R)^2}{1 - 2(\rho/R) \cos(\theta - \theta') + (\rho/R)^2} = \frac{1}{2} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2\rho R \cos(\theta - \theta') + \rho^2}.$$

Definiamo allora il **nucleo di Poisson**:

$$N_{\Omega}(\rho, \theta, R, \theta') = \frac{1}{2\pi R} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2\rho R \cos(\theta - \theta') + \rho^2},$$

che può anche essere scritto come, se x è individuato dalle coordinate polari ρ, θ e $y \in \partial\Omega$ è individuato dalle coordinate polari R, θ' :

$$N_{\Omega}(x, y) = \frac{R^2 - \|x\|^2}{2\pi R \|x - y\|^2} \Big|_{y \in \partial\Omega}.$$

L'espressione è ovviamente la stessa che abbiamo ottenuto precedentemente con il metodo delle cariche immagini. Tenendo conto del fatto che l'elemento di lunghezza del bordo $\partial\Omega$ è $ds(y) = R d\theta'$, la formula (4.38) che definisce la soluzione ϕ in funzione del dato al bordo f può allora essere scritta come:

$$\phi(x) = \int_{\partial\Omega} N_{\Omega}(x, y) f(y) ds(y) \quad \text{se } x \in \Omega.$$

Capitolo 5

Equazioni iperboliche: alcuni risultati generali elementari per le equazioni di D'Alembert e di Klein-Gordon in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

In questo capitolo ci occuperemo di alcuni fatti generali riguardanti due equazioni del secondo ordine di tipo iperbolico: l'equazione di D'Alembert e quella di Klein-Gordon. La prima:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \Delta_{\mathbf{x}} \varphi = 0 \quad (5.1)$$

con $\varphi = \varphi(t, \mathbf{x})$, $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ è ben nota dalla fisica classica e descrive nello spaziotempo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, in una certa approssimazione, tutti i fenomeni di propagazione ondosa/elastica in mezzi estesi in \mathbb{R}^n (tipicamente $n = 1, 2, 3$). La costante c è la velocità di propagazione delle perturbazioni descritte dal campo φ , che dipende dal tipo di mezzo e di perturbazione. La seconda:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \Delta_{\mathbf{x}} \varphi - \mu^2 \varphi = 0, \quad (5.2)$$

dove $\mu = \frac{mc^2}{\hbar}$ con $\varphi = \varphi(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ è un'equazione che nasce nella fisica moderna e descrive (se $\mathbb{R}^{1+n} = \mathbb{R}^4$ pensato come spaziotempo della relatività speciale e c è la velocità della luce) l'equazione di evoluzione relativistica per campo associato a particelle quantistiche di massa $m > 0$ e prive di spin e carica. Nel caso $m = 0$, ovviamente la forma della seconda equazione si riduce alla forma della prima. Le due equazioni sopra scritte possono essere leggermente modificate introducendo un *termine di sorgente* dato da una funzione nota $\rho = \rho(t, \mathbf{x})$:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \Delta_{\mathbf{x}} \varphi = \rho \quad (5.3)$$

e

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \Delta_{\mathbf{x}} \varphi - \mu^2 \varphi = \rho. \quad (5.4)$$

Nota importante. Nel seguito del capitolo Δ indicherà sempre e solo il laplaciano rispetto alle coordinate spaziali \mathbf{x} . Sopra abbiamo indicato tale operatore con $\Delta_{\mathbf{x}}$, ma d'ora in poi ometteremo l'indice \mathbf{x} . Nello stesso modo, il simbolo di gradiente ∇ significherà sempre $\nabla_{\mathbf{x}}$ e non includerà mai le derivate temporali.

5.1 L'equazione di D'Alembert come equazione della corda vibrante e della membrana vibrante.

L'equazione di D'Alembert descrive, in prima approssimazione, tutti i fenomeni di propagazione ondulatoria classici in mezzi estesi. A titolo di esempio, vogliamo mostrare come l'equazione di D'Alembert descriva le onde trasversali di deformazione che si propagano lungo una corda tesa e in una membrana tesa.

5.1.1 L'equazione per la corda oscillante per piccole deformazioni.

Consideriamo una corda orizzontale a riposo, in generale descritta da $y = y(x)$ in un sistema di coordinate x, y solidale con un sistema di riferimento inerziale, con y verticale. La coordinata x può variare in tutto l'asse reale, sulla semiretta reale oppure in un intervallo chiuso ad interno non vuoto $[a, b]$ e, negli ultimi due casi, sono imposte condizioni al bordo del dominio, tipicamente l'annullamento della deformazione verticale, come nel caso delle corde degli strumenti musicali a corda. Sia $\lambda > 0$, costante (nel tempo e nel punto della corda) la densità lineare di massa della corda lungo x e sia $\tau = \|\mathbf{T}\|$ il valore costante (nel tempo e nel punto della corda) del modulo della tensione \mathbf{T} della corda¹. Supponiamo che la corda, al tempo $t = 0$, venga deformata in una funzione $y = y(x)$ con $|y(x)|$ “molto piccolo” nel senso che preciseremo nel seguito, e che poi venga lasciata libera (sempre verificando le eventuali condizioni al bordo). A causa dell'elasticità del mezzo, accade che la configurazione della corda varierà nel tempo e sarà descritta da una funzione $y = y(t, x)$. Vogliamo ricavare, dalle leggi della dinamica, l'equazione a cui deve soddisfare questa funzione assumendo che il modulo della tensione τ e la densità λ rimangano costanti e che le deformazioni trasversali siano piccole. Consideriamo un punto x_0 e quindi un pezzo di corda relativo all'intervallo $[x_0 - h, x_0 + h]$. Su tale porzione di corda agisce la tensione ai due estremi: $\mathbf{T}(x_0 + h)$ e $\mathbf{T}(x_0 - h)$. Entrambi i vettori saranno uscenti dalla porzione di corda e saranno in ogni punto tangenti alla corda. Si osservi che quindi le componenti lungo l'asse x di tali vettori hanno segno opposto. In prima approssimazione l'accelerazione nella direzione \mathbf{e}_y della porzione di corda è $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, mentre la massa della porzione di corda è $2h\lambda$. La seconda equazione della dinamica afferma allora che deve valere, in prima approssimazione:

$$2h\lambda \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = (\mathbf{T}(x_0 + h) + \mathbf{T}(x_0 - h)) \cdot \mathbf{e}_y, \quad (5.5)$$

¹Ricordiamo che la tensione \mathbf{T} in un punto della corda viene definita, a meno del segno, come la forza che, tagliando idealmente la corda nel punto considerato, un'estremo della corda tagliata esercita sull'altro.

Il secondo membro si può riscrivere come:

$$(\mathbf{T}(x_0 + h) + \mathbf{T}(x_0 - h)) \cdot \mathbf{e}_y = \tau(\sin \alpha(x_0 + h) - \sin \alpha(x_0 - h)),$$

dove $\alpha(x_0 + h)$ e $\alpha(x_0 - h)$ sono gli angoli che $\mathbf{T}(x_0 + h)$ e $-\mathbf{T}(x_0 - h)$ individuano rispetto a \mathbf{e}_x e quindi, approssimando $\sin \alpha$ con $\tan \alpha$ tenendo conto che lavoriamo con piccoli $|y|$ e tenendo conto che: $\tan \alpha(x_0 + h) = \frac{\partial y}{\partial x}|_{x_0+h}$ e $\tan \alpha(x_0 - h) = \frac{\partial y}{\partial x}|_{x_0-h}$, (5.5) può essere riscritta come:

$$\frac{\lambda}{\tau} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\frac{\partial y}{\partial x}|_{x_0+h} - \frac{\partial y}{\partial x}|_{x_0-h}}{2h}.$$

In realtà l'identità trovata è solo approssimata. Tuttavia, nel limite per $h \rightarrow 0$, ci si aspetta che diventi rigorosamente valida. In tal caso, si trova l'equazione:

$$\frac{\lambda}{\tau} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Questa è l'equazione di D'Alembert in \mathbb{R}^2 per le perturbazioni ondose trasversali della corda:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0,$$

in cui la *velocità di propagazione delle perturbazioni* c (vedremo più avanti il significato di tale nome) è data da:

$$c = \sqrt{\frac{\tau}{\lambda}}. \quad (5.6)$$

Osservazioni 5.1. Nel caso in cui sulla corda agisca anche la forza di gravità, sulla porzione di corda usata per ottenere l'equazione di D'Alembert agisce anche la forza verticale $-\lambda 2hg\mathbf{e}_y$. In questo caso, ripetendo il ragionamento fatto sopra, l'equazione finale che si ottiene è quella di D'Alembert con sorgente:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\lambda}{\tau} g.$$

Si noti che $-\lambda g$ è la forza di gravità per unità di lunghezza agente sulla corda nella direzione verticale. In generale, come si prova facilmente, se sulla corda agisce qualche densità lineare di forza normale ad essa (componenti tangenti produrrebbero deformazioni longitudinali che non consideriamo nel nostro modello), individuata dalla funzione $f = f(t, x)$ nella direzione verticale, l'equazione che si ottiene alla fine è:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{f(t, x)}{\tau}. \quad (5.7)$$

5.1.2 L'equazione per la membrana oscillante per piccole deformazioni.

Consideriamo una membrana orizzontale a riposo, descritta da $z = z(x, y)$ in generale, rispetto ad un sistema di coordinate x, y, z solidale con un sistema di riferimento inerziale, con z verticale.

Le coordinate x e y variano su tutto il piano \mathbb{R}^2 oppure in un certo dominio dato un insieme $\bar{\Omega}$ dove $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto (non necessariamente limitato) e $\partial\Omega$ è una curva sufficientemente regolare. Nel caso di $\partial\Omega \neq \emptyset$, si impongono su di esso opportune condizioni al bordo, tipicamente l'annullarsi della deformazione verticale $z|_{\partial\Omega} = 0$, come accade per le membrane dei tamburi.

Sia $\mu > 0$, costante (nel tempo e nel punto della membrana) la densità superficiale di massa della membrana e sia $\tau = \|\mathbf{T}\|$ il valore costante (nel tempo e nel punto della membrana) del modulo della tensione \mathbf{T} della membrana assunta essere isotropa². Supponiamo che la membrana, al tempo $t = 0$, venga deformata in una funzione $z = z(x, y)$ con $|z(x)|$ “molto piccolo” nel senso che vedremo poi, e che poi venga lasciata libera (sempre soddisfacendo le eventuali condizioni al bordo su $\partial\Omega$). A causa dell'elasticità del mezzo, accade che la configurazione della membrana varierà nel tempo e sarà descritta da una funzione $z = z(t, x, y)$. Vogliamo ricavare, dalle leggi della dinamica, l'equazione a cui deve soddisfare questa funzione assumendo che il modulo della tensione τ e la densità μ rimangano costanti e che le deformazioni trasversali siano piccole. Consideriamo un punto p_0 di membrana individuato da (x_0, y_0) e quindi un pezzo di membrana rettangolare, di lati $2h$ e $2k$, centrato in p_0 , con proiezioni dei lati sul piano $z = 0$ che risultano essere parallele agli assi x e y (il tutto approssimativamente con approssimazione tanto migliore quanto h e k sono presi piccoli). Su tale porzione di membrana agisce la tensione sui 4 lati. Approssimativamente, su ciascun lato possiamo pensare la tensione costante, pari al valore che assume nel punto medio del lato: $\mathbf{T}(x_0 - h, y_0)$, $\mathbf{T}(x_0 + h, y_0)$, $\mathbf{T}(x_0, y_0 + k)$, $\mathbf{T}(x_0, y_0 - k)$. Questi vettori saranno uscenti dalla porzione di membrana perpendicolarmente ai lati e saranno in ogni punto tangenti alla membrana stessa. In prima approssimazione l'accelerazione nella direzione \mathbf{e}_z della porzione di corda è $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$, mentre la massa della porzione di corda è $4hk\mu$. La seconda equazione della dinamica afferma allora che deve valere, in prima approssimazione:

$$4hk\mu \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 2k(\mathbf{T}(x_0 + h, y_0) + \mathbf{T}(x_0 - h, y_0)) \cdot \mathbf{e}_z + 2h(\mathbf{T}(x_0, y_0 + k) + \mathbf{T}(x_0, y_0 - k)) \cdot \mathbf{e}_z, \quad (5.8)$$

Il primo addendo secondo membro si può riscrivere come:

$$2k(\mathbf{T}(x_0 + h, y_0) + \mathbf{T}(x_0 - h, y_0)) \cdot \mathbf{e}_y = 2k\tau(\sin \alpha(x_0 + h, y_0) - k \sin \alpha(x_0 - h, y_0)),$$

dove $\alpha(x_0 + h, y_0)$ e $\alpha(x_0 - h, y_0)$ sono gli angoli che $\mathbf{T}(x_0 + h, y_0)$ e $-\mathbf{T}(x_0 - h, y_0)$ individuano rispetto a \mathbf{e}_x e quindi, approssimando $\sin \alpha$ con $\tan \alpha$ tenendo conto che lavoriamo con piccoli $|z|$ e tenendo conto che: $\tan \alpha(x_0 + h, y_0) = \frac{\partial z}{\partial x}|_{(x_0+h, y_0)}$ e $\tan \alpha(x_0 - h, y_0) = \frac{\partial z}{\partial x}|_{(x_0-h, y_0)}$, e procedendo nello stesso modo per le due tensioni valutate sui lati paralleli all'asse y , la (5.8) può essere riscritta come:

$$\frac{\mu}{\tau} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\frac{\partial z}{\partial x}|_{(x_0+h, y_0)} - \frac{\partial z}{\partial x}|_{(x_0-h, y_0)}}{2h} + \frac{\frac{\partial z}{\partial y}|_{(x_0, y_0+k)} - \frac{\partial z}{\partial y}|_{(x_0, y_0-k)}}{2k}.$$

²Ricordiamo che la tensione \mathbf{T} in un punto p della membrana attraversato dalla curva γ viene definita, a meno del segno, come densità lineare di forza che, tagliando idealmente la membrana lungo γ è esercitata nel punto p dall'altro lembo della membrana. L'ipotesi di mezzo isotropo, per quanto riguarda la tensione, corrisponde alla richiesta che la tensione in p abbia modulo indipendente dalla scelta della curva γ che passa per p e sia sempre perpendicolare ad essa.

In realtà l'identità trovata è solo approssimata. Tuttavia, nel limite per $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ ci si aspetta che diventi rigorosamente valida. In tal caso, si trova l'equazione:

$$\frac{\mu}{\tau} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Questa è l'equazione di D'Alembert in \mathbb{R}^3 per le perturbazioni ondose trasversali della membrana:

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \Delta_{(x,y)} z = 0,$$

in cui la *velocità di propagazione delle perturbazioni* c è data da:

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}. \quad (5.9)$$

Osservazioni 5.2.

(1) Si noti che, a differenza del caso della corda, ora le dimensioni di τ sono pari ad una forza diviso una lunghezza e quelle di μ sono pari ad una massa diviso una superficie, per cui v definita sopra ha correttamente le dimensioni di una velocità.

(2) Nel caso in cui sulla membrana agisca anche la forza di gravità, sulla porzione di corda usata per ottenere l'equazione di D'Alembert agisce anche la forza verticale $-\lambda 4hkg \mathbf{e}_z$. In questo caso, ripetendo il ragionamento fatto sopra, l'equazione finale che si ottiene è quella di D'Alembert con sorgente:

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \Delta z = \frac{\mu}{\tau} g.$$

Si osservi che $-\mu g$ è la forza di gravità per unità di superficie che agisce sulla membrana in direzione verticale. In generale, si vede facilmente che, se sulla membrana agisce qualche densità superficiale di forza normale alla superficie individuata dalla funzione $f = f(t, x)$ nella direzione verticale, l'equazione che si ottiene alla fine è:

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \Delta z = -\frac{f(t, x)}{\tau}. \quad (5.10)$$

5.1.3 *L'equazione per la vibrazione di un tamburo ideale di topologia arbitraria.

In questa sezione useremo alcuni concetti elementari di *geometria differenziale riemanniana* ed *analisi globale*, tuttavia l'argomento e le nozioni matematiche che saranno richieste sono largamente al di fuori delle competenze usuali di uno studente del secondo anno di matematica. Di conseguenza il contenuto di questa sezione è completamente indipendente dalla parte rimanente delle dispense che si occupa degli argomenti standard.

Consideriamo un tamburo descritto da una varietà differenziabile M bidimensionale di classe C^∞ , connessa, compatta, orientabile, embedded nello spazio tridimensionale \mathbb{R}^3 . Indicheremo con g la metrica riemanniana indotta su M dalla metrica standard di \mathbb{R}^3 . Possiamo pensare ad

una superficie sferica, una superficie torica o una superficie bidimensionale di genere arbitrario. Assumiamo che questa superficie sia costituita da un materiale elastico che, rispetto ad una certa configurazione di riposo fissata, possa deformarsi leggermente nella direzione normale alla superficie stessa.

Se $p \in M$ rappresenta un punto in situazione non deformata e p^* la posizione dello stesso punto dopo la deformazione avvenuta al tempo t , $u(t, p)\mathbf{n}_p$ indica il vettore posizione di p^* , valutato a partire da p , dove \mathbf{n}_p è il versore normale uscente da M in p . In generale, se $A \subset M$, allora A^* indica l'insieme dei punti q^* individuati da $u(q)\mathbf{n}_q$ con $q \in A$.

Assumeremo al solito che il materiale sia omogeneo ed isotropo con una densità superficiale di massa μ ed una tensione τ entrambe costanti. *L'ipotesi di omogeneità ed isotropia è in realtà estremamente poco fisica, perché appare fisicamente improbabile per configurazioni di riposo differenti da quella di una superficie sferica ed in assenza di forze esterne.*

Consideriamo ora una piccola regione C attorno a $p \in M$ individuata, in coordinate polari geodetiche³ r, θ centrate in p , dal cerchio di raggio $r_0 > 0$. Su ogni punto q^* di ∂C^* agisce una densità lineare di forza $\tau\mathbf{m}_q$ diretta perpendicolarmente a ∂C^* e tangente a C^* in q^* . Approssimativamente la componente totale nella direzione \mathbf{n}_p di tutte le forze che agiscono sui punti $q^* \in \partial C^*$ se q ha coordinate (r_0, θ) è:

$$T \simeq \int_{-\pi}^{\pi} \tau \sin \alpha(\theta) r_0 d\theta,$$

dove $\alpha(\theta)$ è l'angolo tra la densità di forza e la normale a ∂C nel punto q in cui è applicata (abbiamo tenuto in particolare conto del fatto che $\mathbf{n}_q \rightarrow \mathbf{n}_p$ quando $r_0 \rightarrow 0$). Per piccole deformazioni:

$$\sin \alpha \simeq \tan \alpha \simeq \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Quindi approssimativamente e tanto più correttamente quanto r_0 è piccolo:

$$T \simeq \tau \oint_{\partial C} \frac{\partial u}{\partial r} dl \simeq \tau \oint_{\partial C} \nabla^{(M,g)} u \cdot \mathbf{t} dl,$$

dove $\nabla^{(M,g)}$ è la derivata covariante rispetto alla connessione di Levi-Civita della metrica g indotta da quella euclidea su M , \mathbf{t} è il versore in $T_q M$ normale a $\partial C \subset M$ e dl è la misura naturale della lunghezza d'arco in M (che coincide con quella valutata in \mathbb{R}^3 per costruzione). Applicando il teorema della divergenza rispetto alla metrica g , concludiamo che

$$T \simeq \tau \int_C \Delta^{(M,g)} u d\nu^{(M,g)},$$

dove $\Delta^{(M,g)}$ è l'operatore di Laplace-Beltrami associato alla metrica g su M e $\nu^{(M,g)}$ la misura di Borel su M associata a g .

³Se x, y indica un sistema di coordinate locali riemanniane con origine p e definite in un intorno di p , allora $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ dove $\theta \in (-\pi, \pi)$ e $r \in (0, R)$ per qualche $R > 0$ sufficientemente piccolo.

L'equazione del moto in \mathbb{R}^3 per la porzione C di tessuto, nella direzione normale a p è, tanto più precisamente quanto r_0 è piccolo:

$$\mu \left(\int_C d\nu^{(M,g)} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \simeq \tau \int_C \Delta^{(M,g)} u \, d\nu^{(M,g)} .$$

Di conseguenza:

$$\frac{\mu}{\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \simeq \frac{1}{\int_C d\nu^{(M,g)}} \int_C \Delta^{(M,g)} u \, d\nu^{(M,g)} .$$

Prendendo il limite per $r_0 \rightarrow 0$ troviamo l'equazione di D'Alembert per piccole deformazioni normali a M descritte dalla funzione $u = u(t, p)$:

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta^{(M,g)} u = 0 , \quad (5.11)$$

dove v è ancora data dalla (5.9). La differenza, importante, rispetto al caso della membrana piatta è che ora l'equazione di D'Alembert è scritta "sopra" una varietà differenziabile riemanniana e l'operatore di Laplace(-Beltrami) è quello riferito alla metrica di cui la varietà è dotata. Nel caso sia presente una forzante esterna, l'equazione ottenuta prende, al solito una sorgente:

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(t, p)}{\partial t^2} + \Delta^{(M,g)} u(t, p) = -\frac{f(t, p)}{\tau} , \quad (5.12)$$

dove f è la componente normale a M di una densità superficiale di forza agente su M che ha direzione normale in ogni punto (componenti tangenti provocherebbero deformazioni longitudinali che non trattiamo nel modello considerato).

Osservazione importante. L'equazione (5.11) ammette soluzioni palesemente non fisiche, come quella del tipo $u(t, p) = U_0$ con $U_0 \neq 0$ costante. Anche soluzioni che si ottengono da questa aggiungendo (dato che l'equazione è lineare) soluzioni apparentemente più fisiche sono similmente inaccettabili, perché ci si aspetta che il sistema deformato leggermente tenda a tornare nella sua configurazione iniziale indeformata, dato che è questo il meccanismo fisico che, nella pratica, assicura che le deformazioni rimangano piccole. In generale se $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione armonica su M , cioè soddisfa $\Delta^{(M,g)} \phi = 0$ (e le funzioni costanti sono un caso particolare di questo), allora:

$$u(t, p) := \phi(p) \quad \text{per ogni } p \in M \text{ e ogni } t \in \mathbb{R},$$

soddisfa (5.11), ma non ha evidentemente senso fisico per gli stessi motivi esposti sopra. Per dare un significato fisicamente sensato alle soluzioni dell'equazione (5.11) una scelta possibile è quella di restringersi a lavorare nell'ortogonale (rispetto al prodotto scalare di $L^2(M, d\nu^{(M,g)})$) al sottospazio delle funzioni armoniche, dove $\nu^{(M,g)}$ è la misura di Borel associata alla metrica g di M .

5.2 Condizioni iniziali ed al contorno.

I problemi tipici che si incontrano lavorando con equazioni iperboliche come (5.3) e (5.4) sono generalmente del seguente tipo.

Si cerca $\varphi \in C^2((\alpha, \beta) \times \overline{D})$ che soddisfi (5.3) oppure (5.4) in $(\alpha, \beta) \times \overline{D}$ per qualche $\rho \in C^0((\alpha, \beta) \times \overline{D})$ assegnata, dove:

(a) $(\alpha, \beta) \ni 0$

(b) $D \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto, non vuoto, (non necessariamente connesso) con \overline{D} compatto e ∂D regolare orientabile.

Il fatto di lavorare in D con \overline{D} compatto si dice *problema interno*. Si può anche considerare il caso del *problema esterno* in cui si lavora in $(\alpha, \beta) \times (\mathbb{R}^n \setminus \overline{D})$.

Riferendosi al solo problema interno, vengono quindi assegnate *condizioni iniziali* e *condizioni al bordo* sulla funzione φ .

Le **condizioni iniziali** corrispondono alla coppia di richieste:

$$\varphi(0, \mathbf{x}) = \varphi_0(\mathbf{x}), \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{(0, \mathbf{x})} = \varphi_1(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{D}, \text{ con } \varphi_0 \in C^2(\overline{D}) \text{ e } \varphi_1 \in C^1(\overline{D}) \text{ assegnate.} \quad (5.13)$$

Le **condizioni al bordo**, riferite all'insieme $S := (\alpha, \beta) \times \partial D$ con vettore normale uscente \mathbf{n} , possono essere di tre tipi distinti:

(i) (*condizioni di Dirichlet*) $\varphi|_S = \psi$ con $\psi \in C^2(S)$ funzione assegnata tale che $\psi(0, \mathbf{x}) = \varphi_0(\mathbf{x})$;

(ii) (*condizioni di Neumann*) $\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi|_S = \psi$ con $\psi \in C^1(S)$ funzione assegnata tale che $\psi(0, \mathbf{x}) = \mathbf{n} \cdot \nabla \varphi_0|_S(\mathbf{x})$;

(iii) (*condizioni di Robin*) $a\varphi|_S + b\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi|_S = \psi$ con $a, b \in \mathbb{R}$ costanti assegnate tali che $ab \neq 0$ e $\psi \in C^1(S)$ funzione assegnata tale che $\psi(0, \mathbf{x}) = a\varphi_0|_S + b\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi_0|_S$.

Osservazioni 5.3.

(1) Le condizioni dette si possono notevolmente indebolire per esempio assumendo più debolmente che $\varphi \in C^2((0, \beta) \times D) \cap C^1([0, \beta) \times \overline{D})$ (e che soddisfi in tale insieme (5.3) oppure (5.4) per qualche $\rho \in C^0((0, \beta) \times D)$), con $\varphi_0 \in C^1(\overline{D})$ e $\varphi_1 \in C^0(\overline{D})$, e $\psi \in C^1(S)$ in (ii) e $C^0(S)$ in (i) e (iii). In questo caso bisogna assumere più precise ipotesi di regolarità sul dominio D al fine di avere teoremi di esistenza ed unicità.

(2) Si possono considerare casi in cui D non è limitato e sono assegnate condizioni iniziali. In questo caso le condizioni al contorno, che sono importanti per i teoremi di esistenza ed unicità sono, in generale, rimpiazzate da condizioni sull'andamento all'infinito spaziale (cioè per

$|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty$ a t fissato) per il campo φ incognito. Nel caso in cui $D = \mathbb{R}$ e $(\alpha, \beta) = \mathbb{R}$, per l'equazione di D'Alembert non è necessario fissare alcun dato al contorno, come vedremo più avanti, per avere un teorema di esistenza ed unicità.

(3) Esaminando il significato delle condizioni al contorno nel caso di una corda orizzontale, di lunghezza fissata, vibrante trasversalmente (dove quindi $\varphi(t, x) = y(t, x)$) si traggono le seguenti conclusioni. Nel caso di condizioni al contorno di tipo (i) la funzione ψ (che in tal caso misura la deformazione trasversale della corda) definita sul bordo S si riduce ad una coppia di funzioni $u = u(t)$ e $v = v(t)$, definite sui due estremi della corda, che stabiliscono come oscilla la corda ai suoi estremi al variare del tempo. Le condizioni al contorno di tipo (ii), per la corda vibrante corrispondono a fissare l'andamento temporale della componente verticale della forza che agisce sulla corda agli estremi. Infatti, se τ è il modulo costante della tensione della corda e si lavora in regime di piccole deformazioni trasversali come abbiamo fatto nella sezione 5.1.1, allora $\tau \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ valutata agli estremi, non è altro che la componente trasversale (cioè verticale se la corda è tesa in orizzontale lungo l'asse x) della tensione che agisce sulla corda. Più precisamente, $\tau \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ valutata all'estremo destro è la componente verticale della forza che agisce su tale estremo applicata dall'esterno, mentre $\tau \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ valutata all'estremo sinistro è, con il segno cambiato, la componente verticale della forza che agisce su tale estremo applicata dall'esterno.

Le condizioni al contorno di tipo (iii) corrispondono a fissare una relazione (che dipende dal tempo) tra ciascuna forza che agisce ad ogni estremo e la deformazione della corda nello stesso estremo.

5.3 Bilancio energetico e teoremi di unicità.

5.3.1 Densità di energia ed equazione di continuità.

Consideriamo una funzione φ di classe $C^2(\Omega)$ dove $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ è un aperto sul quale la funzione soddisfa l'equazione di Klein-Gordon (5.4) e quindi in particolare l'equazione di D'Alembert (5.3) nel caso $\mu = 0$. Definiamo su Ω la funzione $E \in C^1(\Omega)$:

$$E(t, \mathbf{x}) := \frac{1}{2} \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi(t, \mathbf{x})}{\partial t} \right)^2 + \nabla \varphi(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla \varphi(t, \mathbf{x}) + \mu^2 \varphi(t, \mathbf{x})^2 \right]. \quad (5.14)$$

Chiameremo la funzione E **densità di energia** di φ . Questa funzione è di fondamentale importanza in matematica oltre che in fisica in quanto consente di provare dei teoremi di unicità per le soluzioni delle equazioni considerate.

Osservazioni 5.4.

(1) In realtà E descrive effettivamente la densità di energia associata al campo φ nel caso in cui esso sia il campo quantistico di Klein-Gordon. Negli altri casi, la grandezza E non ha sempre il significato di densità di energia anche se lo ha in certi casi importanti, per esempio quando φ descrive le deformazioni longitudinali di una sbarra elastica e l'equazione considerata è quella di D'Alembert piuttosto che quella di Klein-Gordon. In tal caso E è davvero la densità di energia

elastica del mezzo continuo.

(2) Si osservi che $E(t, \mathbf{x}) \geq 0$ ovunque è definita e questo fatto sarà di cruciale importanza tra poco.

(3) Nel caso in cui si lavori con funzioni a valori complessi, la densità di energia viene ridefinita come:

$$E(t, \mathbf{x}) := \frac{1}{2} \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial \overline{\varphi(t, \mathbf{x})}}{\partial t} \frac{\partial \varphi(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \nabla \overline{\varphi(t, \mathbf{x})} \cdot \nabla \varphi(t, \mathbf{x}) + \mu^2 \overline{\varphi(t, \mathbf{x})} \varphi(t, \mathbf{x}) \right]. \quad (5.15)$$

Proposizione 5.1. *Si consideri una funzione φ di classe $C^2(\Omega)$ dove $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ è un aperto sul quale la funzione soddisfa l'equazione di Klein-Gordon (5.4) e quindi in particolare l'equazione di D'Alembert (5.3) nel caso $\mu = 0$. La densità di energia E di φ soddisfa:*

$$\frac{\partial}{\partial t} E(t, \mathbf{x}) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \nabla \varphi \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \rho(t, \mathbf{x}), \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in \Omega. \quad (5.16)$$

In particolare, nel caso in cui $n = 1$, la (5.16) si riduce a:

$$\frac{\partial}{\partial t} E(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \rho(t, x), \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in \Omega. \quad (5.17)$$

◇

Dimostrazione. Per computo diretto, dalla definizione di E :

$$\frac{\partial}{\partial t} E = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \nabla \varphi \cdot \frac{\partial \nabla \varphi}{\partial t} + \mu^2 \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Dato che, dall'equazione di Klein-Gordon con sorgente:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \Delta \varphi - \mu^2 \varphi - \rho,$$

sostituendo nell'espressione trovata sopra per la derivata temporale di E , abbiamo:

$$\frac{\partial}{\partial t} E = \frac{\partial \varphi}{\partial t} (\Delta \varphi - \mu^2 \varphi - \rho) + \nabla \varphi \cdot \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu^2 \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

dove abbiamo anche scambiato l'ordine di due derivate essendo la funzione φ di classe C^2 . Il risultato ottenuto si può riscrivere:

$$\frac{\partial}{\partial t} E = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Delta \varphi + \nabla \varphi \cdot \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \rho,$$

e cioè:

$$\frac{\partial}{\partial t} E(t, \mathbf{x}) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \nabla \varphi \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \rho(t, \mathbf{x}).$$

Il caso $n = 1$ si dimostra nello stesso modo. \square

Osservazioni 5.5.

(1) La proposizione precedente è valida anche per funzioni a valori complessi che soddisfano l'equazione di Klein-Gordon e si dimostra nello stesso modo, partendo dalla (5.15) invece che dalla (5.14). In tal caso la (5.16) deve essere modificata in:

$$\frac{\partial}{\partial t} E(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \nabla \cdot \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} \nabla \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \nabla \bar{\varphi} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} \rho(t, \mathbf{x}) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \overline{\rho(t, \mathbf{x})} \right), \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in \Omega. \quad (5.18)$$

(2) In riferimento al teorema precedente (e quanto segue si estende facilmente al caso di funzioni a valori complessi), in assenza della sorgente ρ , l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial t} E(t, \mathbf{x}) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \nabla \varphi \right)$$

può essere riscritta in termini di un'equazione di continuità:

$$\frac{\partial}{\partial t} E(t, \mathbf{x}) + \nabla \cdot \mathbf{J}_E = 0,$$

dove $\mathbf{J}_E := -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \nabla \varphi$. Vediamo il significato fisico di tale equazione. Fissiamo un insieme $[t_1, t_2] \times \bar{V} \subset \Omega$, dove $V \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto non vuoto a chiusura compatta il cui bordo è una superficie regolare orientabile e $t_1 < t_2$. Un tale insieme esiste nell'intorno di ogni punto di Ω , dato che questo è aperto e che i cilindri aperti $(t_1, t_2) \times V$ sono una base della topologia di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, prendendo, per esempio, gli insiemi V come palle aperte di \mathbb{R}^n . Consideriamo il caso in cui non ci sia la sorgente ρ . Se integriamo l'equazione (5.16) sul volume V otteniamo:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} E(t, \mathbf{x}) d^n x = \int_V \nabla \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \nabla \varphi \right) d^n x.$$

La derivata parziale nel tempo può essere portata fuori dall'integrale, dato che $\frac{\partial}{\partial t} E$ è continua e quindi è limitata sul compatto $[t_1, t_2] \times \bar{V}$ e V ha misura finita (pari a quella di \bar{V})⁴. In questo modo, l'equazione trovata può essere riscritta:

$$\frac{d}{dt} \int_V E(t, \mathbf{x}) d^n x = \oint_{+\partial V} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \nabla \varphi \right) \cdot \mathbf{n} dS(x).$$

Questa è, a tutti gli effetti, un'equazione di conservazione (o bilancio) della grandezza che si ottiene integrando E su un volume. L'identità trovata dice che la variazione per unità di tempo dell'energia totale presente nel volume V è pari al flusso di energia entrante che passa attraverso la superficie che circonda V stesso. In questo senso $\mathbf{J}_E = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \nabla \varphi$ si interpreta come la densità di corrente di energia o altrimenti detta il campo di flusso di energia.

⁴Infatti, dato che E è continua e quindi limitata su \bar{V} per ogni fissato t , è sicuramente (assolutamente) integrabile secondo Lebesgue su tale insieme per ogni valore del parametro t , inoltre $\frac{\partial}{\partial t} E$ una funzione continua congiuntamente nelle due variabili ed è dunque limitata, uniformemente in t , da qualche costante $M \geq 0$ sul compatto $[t_1, t_2] \times \bar{V}$. Dato che la funzione costante $V \ni \mathbf{x} \mapsto M$ (pensata come funzione della sola \mathbf{x}) è non negativa ed integrabile su V , avendo quest'ultimo misura finita, siamo nelle ipotesi di poter calcolare la derivata di $t \mapsto \int_V \frac{\partial}{\partial t} E(t, \mathbf{x}) d^n x$, per ogni $t \in (t_1, t_2)$ passando la derivata in t sotto il segno di integrale (vedi la sezione B.2 in Appendice).

5.3.2 Teoremi di unicità.

Possiamo ora enunciare e provare un teorema di unicità per l'equazione di Klein-Gordon con sorgente (5.4) che include, come caso particolare l'equazione di D'Alembert con sorgente (5.3).

Teorema 5.1. *Sia $(\alpha, \beta) \ni 0$ e $D \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, non vuoto, con \bar{D} compatto e ∂D regolare orientabile. Si consideri il problema di determinare $\varphi \in C^2((\alpha, \beta) \times \bar{D})$ che soddisfi l'equazione differenziale di Klein-Gordon con sorgente:*

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \Delta \varphi - \mu^2 \varphi = \rho,$$

(incluso il caso di D'Alembert $\mu = 0$) dove la costante $\mu \geq 0$ e la funzione $\rho \in C^0((\alpha, \beta) \times \bar{D})$ sono assegnate. Supponendo ulteriormente che siano state imposte condizioni iniziali:

$$\varphi(0, \mathbf{x}) = \varphi_0(\mathbf{x}), \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{(0, \mathbf{x})} = \varphi_1(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \bar{D}, \text{ con } \varphi_0 \in C^2(\bar{D}) \text{ e } \varphi_1 \in C^1(\bar{D}) \text{ assegnate,}$$

e condizioni al contorno di tipo (i) oppure (ii) oppure (iii), con la funzione ψ assegnata come in 5.2. Infine, se si assegnano condizioni al contorno di tipo (iii), le costanti a e b sono supposte soddisfare $ab > 0$ (e non solo $ab \neq 0$).

Se esiste una soluzione questa è unica. \diamond

Dimostrazione. Dimostreremo l'unicità della soluzione in $[0, \beta) \times \bar{D}$, la dimostrazione in $(\alpha, 0] \times \bar{D}$ è del tutto analoga. Siano φ_1 e φ_2 due soluzioni dello stesso problema di sopra. La funzione $\phi := \varphi_1 - \varphi_2 \in C^2((\alpha, \beta) \times \bar{D})$ risolve allora l'equazione senza sorgente

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \Delta \phi - \mu^2 \phi = 0,$$

con condizioni iniziali:

$$\phi(0, \mathbf{x}) = 0, \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{(0, \mathbf{x})} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \bar{D},$$

e condizioni al contorno rispettivamente: (i) $\phi|_S = 0$, oppure (ii) $\mathbf{n} \cdot \nabla \phi|_S = 0$, oppure (iii) $a\phi|_S + b\mathbf{n} \cdot \nabla \phi|_S = 0$ con $ab > 0$, dove $S := (\alpha, \beta) \times \partial D$.

Ragionando esattamente come in (2) di osservazioni 5.5 arriviamo a concludere che:

$$\frac{d}{dt} \int_D E(t, \mathbf{x}) d^n x = \oint_{+\partial D} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla \phi \right) \cdot \mathbf{n} dS(x).$$

Si osservi che il secondo membro è una funzione continua di t come si prova subito dal teorema della convergenza dominata notando che ∂D ha misura finita e che la funzione integranda è congiuntamente continua in tutte le variabili (vedi la sezione B.2 in Appendice). Concludiamo che, per ogni $T \in [0, \beta)$:

$$\int_D E(T, \mathbf{x}) d^n x = \int_0^T dt \oint_{+\partial D} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla \phi \right) \cdot \mathbf{n} dS(x). \quad (5.19)$$

Il caso $T \in (\alpha, 0]$ è analogo e apparirebbe un segno $-$ davanti al secondo membro di sopra e la dimostrazione procederebbe nello stesso modo. (Nel caso $n = 1$ la formula di sopra si scrive

$$\int_D E(T, \mathbf{x}) dx = \int_0^T \left(\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_b - \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_a \right) dt. \quad (5.20)$$

dove a e b sono gli estremi dell'intervallo $D = (a, b)$.) Nel dedurre l'identità (5.19) abbiamo tenuto conto del fatto che, nelle nostre ipotesi E per il campo ϕ si annulla a $t = 0$ e quindi $\int_D E(0, \mathbf{x}) d^n x = 0$. Nel caso di condizioni al contorno di tipo (i) e (ii) il secondo membro di (5.19) è evidentemente nullo. Nel caso di condizioni al contorno di tipo (iii) si ottiene lo stesso risultato con un po' più di fatica, come proveremo alla fine. Concludiamo che, nelle nostre ipotesi, con condizioni al contorno di tipo (i) e (ii) e se $T \in [0, \beta)$, vale $\int_D E(T, \mathbf{x}) d^n x = 0$ e quindi la funzione $E \geq 0$ deve essere quasi ovunque nulla. Essendo continua deve essere ovunque nulla. In definitiva abbiamo ottenuto che, per ogni $(t, \mathbf{x}) \in [0, \beta) \times \bar{D}$:

$$E(t, \mathbf{x}) := \frac{1}{2} \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi(t, \mathbf{x})}{\partial t} \right)^2 + \nabla \phi(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla \phi(t, \mathbf{x}) + \mu^2 \phi(t, \mathbf{x})^2 \right] = 0.$$

Dato che si tratta di una somma di addendi non negativi ogni addendo deve essere nullo separatamente. Se $\mu > 0$ concludiamo che $\phi = 0$ ovunque e quindi $\varphi_1 = \varphi_2$ su $[0, \beta) \times \bar{D}$. Lo stesso risultato si ottiene se $\mu = 0$ osservando che, in virtù di quanto ottenuto sopra, le derivate temporali di ϕ devono annullarsi. Concludiamo (applicando il teorema di Lagrange) che per ogni fissato $\mathbf{x} \in \bar{D}$, $\phi(t, \mathbf{x}) = \phi(0, \mathbf{x})$ per ogni $t \in [0, \beta)$. Ma $\phi(0, \mathbf{x}) = 0$ nelle nostre ipotesi. In definitiva $\varphi_1 = \varphi_2$ vale su $[0, \beta) \times \bar{D}$ e quindi il teorema di unicità è provato.

Per concludere la dimostrazione proviamo che il primo membro di (5.19) è nullo anche per condizioni al bordo di tipo (iii). Dato che $\nabla \phi \cdot \mathbf{n} = -\frac{a}{b} \phi$, il secondo membro può ancora essere scritto,

$$-\int_0^T dt \oint_{+\partial D} \frac{a}{b} \frac{\partial \phi}{\partial t} \phi dS(x) = -\frac{a}{2b} \int_0^T dt \oint_{+\partial D} \frac{\partial \phi^2}{\partial t} dS(x) = -\frac{a}{2b} \int_0^T dt \frac{d}{dt} \oint_{+\partial D} \phi^2 dS(x).$$

Dove abbiamo usato note conseguenze del teorema della convergenza dominata (vedi la sezione B.2 in Appendice). In definitiva, dato che $\phi^2(0, \mathbf{x}) = 0$ su \bar{D} , se $T \in [0, \beta)$,

$$\int_D E(T, \mathbf{x}) d^n x = -\frac{a}{2b} \int_0^T dt \frac{d}{dt} \oint_{+\partial D} \phi^2 dS(x) = -\frac{a}{2b} \oint_{+\partial D} \phi^2(T, x) dS(x).$$

Si osservi che se $ab > 0$ significa che a e b hanno lo stesso segno e pertanto:

$$-\frac{a}{2b} \oint_{+\partial D} \phi^2(T, x) dS(x) \leq 0.$$

D'altra parte, dato che $E \geq 0$ abbiamo anche che $\int_D E(T, \mathbf{x}) d^n x \geq 0$. Di conseguenza l'identità ottenuta:

$$\int_D E(T, \mathbf{x}) d^n x = -\frac{a}{2b} \oint_{+\partial D} \phi^2(T, x) dS(x),$$

implica che: $\int_D E(t, \mathbf{x}) d^n x = 0$ se $t \in [0, \beta)$ e, in $[0, \beta) \times \overline{D}$ come voluto. \square

Osservazioni 5.6.

(1) Il teorema di unicità provato è valido, e si dimostra nello stesso modo, per il caso di funzioni a valori complessi, usando la forma (5.15) della densità di energia.

(2) Con una procedura di limite ed eseguendo in ordine diverso alcune delle integrazioni fatte nella dimostrazione di sopra, il risultato presentato nel teorema si può estendere al caso in cui si richiede più debolmente $\varphi \in C^2((0, \beta) \times D) \cap C^1([0, \beta) \times \overline{D})$, con $\varphi_0 \in C^1(\overline{D})$ e $\varphi_1 \in C^0(\overline{D})$, e $\psi \in C^1(S)$ in (ii) e $C^0(S)$ in (i) e (iii). In questa situazione però è necessario assumere che il volume D sia più regolare e che sia ottenibile (in un preciso senso che non chiariremo qui) come limite di una successione di domini $D_1 \subset \dots \subset D_n \subset D_{n+1} \subset \dots \subset D$ in modo tale che $Vol(\partial D_n) \leq Vol(\partial D)$.

(3) Lavorando su tutto lo spazio \mathbb{R}^n , si può dimostrare, e noi lo faremo per l'equazione di D'Alembert sulla retta reale, che se al tempo $t = 0$ i dati iniziali sono a supporto compatto, allora la soluzione $\varphi = \varphi(t, \mathbf{x})$, dell'equazione di Klein-Gordon/D'Alembert senza sorgente su $(\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^n$, ha supporto compatto quando ristretta ad ogni insieme $[\alpha', \beta'] \times \mathbb{R}^n$, con $[\alpha', \beta'] \subset (\alpha, \beta)$. Questo risultato non è per nulla ovvio, per esempio non vale per equazioni paraboliche oppure per l'equazione di Schrödinger. In base a tale risultato il seguente teorema di unicità non risulta essere inutile.

Teorema 5.2. *Sia $(\alpha, \beta) \ni 0$. Si consideri il problema di determinare $\varphi \in C^2((\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^n)$ che soddisfi l'equazione differenziale di Klein-Gordon:*

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \Delta \varphi - \mu^2 \varphi = 0,$$

(incluso il caso di D'Alembert $\mu = 0$) dove la costante $\mu \geq 0$ è assegnata. Supponendo ulteriormente che siano state imposte condizioni iniziali:

$$\varphi(0, \mathbf{x}) = \varphi_0(\mathbf{x}), \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{(0, \mathbf{x})} = \varphi_1(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \text{ con } \varphi_0 \in C_0^2(\mathbb{R}^n) \text{ e } \varphi_1 \in C_0^1(\mathbb{R}^n) \text{ assegnate.}$$

Se esiste una soluzione φ tale che ha supporto compatto quando ristretta ad ogni insieme $[\alpha', \beta'] \times \mathbb{R}^n$, con $[\alpha', \beta'] \subset (\alpha, \beta)$, tale soluzione è unica. \diamond

Dimostrazione. Siano φ_1 e φ_2 due soluzioni del problema. Consideriamo $\phi := \varphi_1 - \varphi_2 \in C^2((\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^n)$. Questa è ancora una soluzione del problema, con dati iniziali nulli ed ha supporto compatto quando ristretta ad ogni insieme $[\alpha', \beta'] \times \mathbb{R}^n$, con $[\alpha', \beta'] \subset (\alpha, \beta)$. Fissato $[\alpha', \beta'] \subset (\alpha, \beta)$, dato che il supporto di ϕ ristretta a tale insieme è compatto e quindi limitato, consideriamo una palla chiusa di raggio finito e centrata nell'origine, $B \subset \mathbb{R}^n$ in modo tale che $[\alpha', \beta'] \times B$ includa il supporto di ϕ . Consideriamo poi una seconda palla aperta di raggio finito e centrata nell'origine, $D \subset \mathbb{R}^n$ che includa la palla chiusa B . Per costruzione, per ogni $T \in [\alpha', \beta']$, la funzione $\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto \phi(T, \mathbf{x})$ si annulla nella corona sferica aperta $D \setminus B$. Di

conseguenza, si annulla con tutte le sue derivate (spaziali e temporali) su ∂D . Lavorando come nella dimostrazione del teorema precedente abbiamo che, per ogni $T \in [\alpha', \beta']$:

$$\int_D E(T, \mathbf{x}) d^n x = \int_0^T dt \oint_{+\partial D} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla \phi \right) \cdot \mathbf{n} dS(x) = 0,$$

dato che su $[0, T] \times \partial D$ la funzione ϕ e le sue derivate sono nulle. Ragionando come nel caso del teorema precedente si ha $\phi(T, \mathbf{x}) = 0$ per ogni $T \in (\alpha, \beta)$ e $\mathbf{x} \in \overline{D}$, ma quindi anche fuori da \overline{D} dato che fuori da tale insieme ϕ si annulla per ipotesi. Di conseguenza: $\varphi_1(t, \mathbf{x}) = \varphi_2(t, \mathbf{x})$ ovunque su $(\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^n$. \square

Osservazioni 5.7. È interessante notare che, nelle ipotesi del teorema, scegliendo cioè D abbastanza grande in modo tale che ∂D non intersechi mai il supporto di $\varphi(t, \mathbf{x})$ per $t \in (\alpha', \beta')$, abbiamo che $\mathcal{E} := \int_D E(t, \mathbf{x}) d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} E(t, \mathbf{x}) d^n x$. In questo modo abbiamo una nozione di *energia totale* associata al campo φ e tale energia è conservata nel tempo essendo, come è provato nel teorema $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0$. Il valore di \mathcal{E} dipende ovviamente dalla soluzione φ considerata.

5.4 Esistenza delle soluzioni

Il problema dell'esistenza delle soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon e D'Alembert è molto più difficile del problema dell'unicità delle soluzioni e lo affronteremo in casi particolari nei capitoli successivi. Nel caso dell'equazione di D'Alembert su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \Delta \varphi = 0,$$

possiamo già esibire delle soluzioni che, su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sono anche le uniche soluzioni come vedremo nel prossimo capitolo. Se $f \in C^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ e \mathbf{n} è un vettore di norma 1 in \mathbb{R}^n allora

$$\varphi_{\pm}(t, \mathbf{x}) := f(\mathbf{x} \pm ct\mathbf{n}) \tag{5.21}$$

risolvono l'equazione di D'Alembert. Infatti:

$$\frac{\partial \varphi_{\pm}(t, \mathbf{x})}{\partial x^k} = \pm \frac{n^k}{c} \frac{\partial \varphi_{\pm}(t, \mathbf{x})}{\partial t}$$

e quindi

$$\frac{\partial^2 \varphi_{\pm}(t, \mathbf{x})}{\partial (x^k)^2} = \frac{(n^k)^2}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi_{\pm}(t, \mathbf{x})}{\partial t^2}$$

e quindi

$$\Delta \varphi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Nel caso di $n > 1$ le soluzioni del tipo detto non esauriscono l'insieme delle soluzioni.

Capitolo 6

Equazione di D'Alembert e di Klein-Gordon in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \times [a, b]$.

In questo capitolo studieremo il problema dell'equazione di D'Alembert sul dominio spaziale dato da tutto \mathbb{R} in assenza di condizioni al contorno. Successivamente discuteremo alcuni semplici risultati per l'equazione di D'Alembert e Klein-Gordon con un dominio spaziale dato da un segmento con l'aggiunta di condizioni al contorno, facendo uso di elementari teoremi della teoria della serie di Fourier. Nel caso dell'equazione di D'Alembert, estenderemo qualche risultato al caso di oscillazioni di membrane. Dopo avere mostrato come l'equazione di D'Alembert descriva anche le onde sonore nei gas in approssimazione adiabatica, useremo i risultati ottenuti per l'equazione di D'Alembert per descrivere, in modo piuttosto idealizzato e generale, il funzionamento di alcuni strumenti musicali a corde e cassa armonica facendo anche un breve excursus nella teoria matematica della musica.

6.1 Equazione di D'Alembert sulla retta reale senza condizioni al contorno.

Consideriamo l'equazione di D'Alembert in \mathbb{R}^2 e quindi con x che varia su tutta la retta reale. Benché si tratti di un caso molto particolare, è possibile in questo caso, scrivere esplicitamente la soluzione dell'equazione di D'Alembert. Inoltre molte delle proprietà di queste soluzioni hanno validità molto generale anche in dimensione maggiore ed in varietà ambiente (spazitempo) curve.

6.1.1 Assenza di sorgenti, formula di D'Alembert, domini di dipendenza.

Per prima cosa ci occupiamo del problema con soli dati iniziali ed in assenza di sorgenti (non ci sono dati al bordo in questo caso):

$$\begin{cases} -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, & \varphi \in C^2(\mathbb{R}^2), \\ \varphi(0, x) = \phi_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, x) = \phi_1(x) & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (6.1)$$

dove $\phi_0 \in C^2(\mathbb{R})$ e $\phi_1 \in C^1(\mathbb{R})$ sono funzioni assegnate. Dimostreremo un teorema di esistenza ed unicità per il problema (6.1), dando esplicitamente l'espressione della soluzione in funzione dei dati iniziali. Successivamente, in un'osservazione, mostreremo anche che il problema è ben posto nel senso di Hadamard.

Per risolvere l'equazione differenziale di D'Alembert:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad (6.2)$$

facciamo il cambiamento di coordinate $v := (x - ct)/2$ e $w = (x + ct)/2$ che si inverte in $x = v + w$ e $t = (w - v)/c$ e pertanto definisce una funzione biettiva C^∞ da \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^2 con inversa C^∞ . Con questa scelta risulta:

$$\frac{\partial}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$$

e quindi si ha, per ogni funzione $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2)$:

$$\frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial}{\partial w} \varphi(t(v, w), x(v, w)) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \varphi(t, x) = \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \varphi(t, x).$$

Concludiamo che: $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ risolve (6.2) se e solo se la funzione $C^2(\mathbb{R}^2)$, definita come $\psi(v, w) := \varphi(t(v, w), x(v, w))$, risolve

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial v \partial w} = 0. \quad (6.3)$$

Abbiamo allora il seguenti due lemmi.

Lemma 6.1. *Sia $\Omega \in \mathbb{R}^2$ un aperto connesso per segmenti paralleli all'asse x (cioè, per ogni coppia di punti in Ω il segmento parallelo all'asse x che li congiunge è tutto incluso in Ω). Se $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è ovunque derivabile nella variabile x e soddisfa $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$ ovunque su Ω , allora, su tutto Ω , $\phi(x, y) = F(y)$ per qualche funzione F della sola variabile y . \diamond*

Dimostrazione. Si considerino due punti $(x, y), (x', y) \in \Omega$, con y fissato arbitrariamente. Il teorema di Lagrange per la funzione $s \mapsto \phi(s, y)$ può essere applicato sul segmento chiuso parallelo all'asse x che connette (x, y) e (x', y) , dato che tale segmento è tutto incluso nel dominio

della funzione ϕ e che la funzione $s \mapsto \phi(s, y)$ è derivabile su tale segmento per ipotesi. Si ottiene allora $\phi(x, y) - \phi(x', y) = (x - x') \frac{\partial \phi}{\partial x} |_{(\xi, y)} = 0$, cioè $\phi(x, y) = \phi(x', y)$. Indichiamo allora con $F(y)$ il valore comune che ϕ assume sui punti in Ω appartenenti alla retta parallela all'asse x e tracciata alla generica quota y . Per costruzione, vale $\phi(x, y) = F(y)$ per ogni $(x, y) \in \Omega$. \square

Osservazioni 6.1. Il risultato è meno banale di quello che si potrebbe credere a prima vista, ed è per questo che lo abbiamo dimostrato esplicitamente. Infatti, se Ω non è connesso per segmenti paralleli all'asse x , la condizione $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$ ovunque su Ω non assicura che si possa scrivere $\phi(x, y) = F(y)$ per qualche funzione F della sola variabile y ! Si consideri infatti l'aperto $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, y \geq 0\}$ e su di esso la funzione $\phi = \phi(x, y)$ definita come segue.

(i) $\phi(x, y) = 0$ se $y < 0$,

(ii) $\phi(x, y) = 0$ se $x > 0$ e $y \geq 0$,

(iii) $\phi(x, y) = h(y)$ se $y \geq 0$ e $x < 0$, dove h è una qualsiasi (ma fissata) funzione $C^1([0, +\infty))$ che vale 0 per $y \in [0, 1/3]$ e 1 per $y \in [2/3, +\infty)$.

La funzione ϕ costruita in questo modo è in $C^1(\Omega)$ e soddisfa $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$ ovunque su Ω , ma non è possibile scrivere $\phi(x, y) = F(y)$ per qualche funzione F della sola variabile y : se ciò fosse possibile avremmo $1 = \phi(-1, 1) = F(1) = \phi(1, 1) = 0$.

Lemma 6.2. La funzione $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ risolve l'equazione (6.2) se e solo se è della forma

$$\varphi(t, x) = f(x - ct) + g(x + ct), \quad \text{per ogni } (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad (6.4)$$

dove $f, g \in C^2(\mathbb{R})$. \diamond

Dimostrazione. Per quanto detto prima dell'enunciato del lemma 6.1, definita la funzione in $C^2(\mathbb{R}^2)$ data da $\psi(v, w) := \varphi(t(v, w), x(v, w))$, è sufficiente dimostrare che le soluzioni di (6.3) sono tutte e sole della forma $\psi(v, w) = k(v) + h(w)$ dove $k, h \in C^2(\mathbb{R})$ e quindi definire $f(x - ct) := k((x - ct)/2)$ e $g(x + ct) := h((x + ct)/2)$. Dimostriamo quanto detto. Se $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ soddisfa la (6.3), poniamo $G(v, w) := \frac{\partial \psi}{\partial w}$. Valendo $\frac{\partial G(v, w)}{\partial v} = 0$, per $(v, w) \in \mathbb{R}^2$ che è sicuramente connesso per segmenti paralleli all'asse v , per il lemma 6.1 concludiamo che $\frac{\partial \psi}{\partial w} = F(w)$ per una certa funzione F . Tale funzione deve essere C^1 , e quindi integrabile, dato che $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Dato che \mathbb{R}^2 è anche connesso per segmenti paralleli all'asse w , possiamo allora scrivere, per v, w_0 fissati:

$$\int_{w_0}^w \frac{\partial \psi}{\partial w}(v, w') dw' = \int_{w_0}^w F(w') dw'.$$

Da cui:

$$\psi(v, w) = \psi(v, w_0) + \int_{w_0}^w F(w') dw',$$

che possiamo riscrivere:

$$\psi(v, w) = k(v) + h(w),$$

dove $k(v) := \psi(v, w_0)$ e $h(w) := \int_{w_0}^w F(w') dw'$. Le funzioni k e h risultano essere funzioni $C^2(\mathbb{R})$ per costruzione. Viceversa, se $\psi(v, w) = k(v) + h(w)$ per ogni $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ con $k, h \in C^2(\mathbb{R})$,

allora $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e risolve (6.3), come si verifica immediatamente. \square

Dato che ora abbiamo la classe completa delle soluzioni dell'equazione (6.2), non ci resta che verificare se esistano, in tale classe, delle soluzioni che soddisfino anche le condizioni iniziali del problema (6.1). Arriviamo in tal modo al seguente teorema di esistenza ed unicità di D'Alembert.

Teorema 6.1. *Esiste ed è unica la soluzione φ del problema (6.1) per ogni scelta delle condizioni iniziali $\phi_0 \in C^2(\mathbb{R})$ e $\phi_1 \in C^1(\mathbb{R})$. Tale soluzione si esprime tramite la **formula di D'Alembert**:*

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{2} [\phi_0(x - ct) + \phi_0(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \phi_1(\xi) d\xi. \quad (6.5)$$

◇

Dimostrazione. Sappiamo dal lemma 6.2 che, se esiste, la soluzione deve avere forma $\varphi(t, x) = f(x - ct) + g(x + ct)$, dove $f, g \in C^2(\mathbb{R})$. Vogliamo determinare f e g in funzione delle condizioni iniziali. Per $t = 0$ deve allora risultare $\phi_0(x) = f(x) + g(x)$ e quindi $\phi_0'(x) = f'(x) + g'(x)$. Dato che vale anche $\phi_1(x) = -cf'(x) + cg'(x)$, ricaviamo subito: $f'(x) = \frac{1}{2c}(c\phi_0'(x) - \phi_1(x))$ e $g'(x) = \frac{1}{2c}(c\phi_0'(x) + \phi_1(x))$. Possiamo integrare queste espressioni ottenendo, se a, b sono costanti reali,

$$f(x) = a + \frac{1}{2}\phi_0(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x \phi_1(\xi) d\xi, \quad g(x) = b + \frac{1}{2}\phi_0(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x \phi_1(\xi) d\xi.$$

Di conseguenza, se esiste una soluzione al problema è nella classe di funzioni, parametrizzata dalle costanti $A \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(t, x) = A + \frac{1}{2}\phi_0(x - ct) - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} \phi_1(\xi) d\xi + \frac{1}{2}\phi_0(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} \phi_1(\xi) d\xi.$$

Si osservi ogni funzione di tale classe è C^2 per costruzione e soddisfa necessariamente (6.2) per ogni scelta di $A \in \mathbb{R}$, dato che è proprio della forma richiesta nel lemma 6.2. La prima condizione iniziale è soddisfatta solo se $A = 0$, valendo $\varphi(0, x) = A + \phi_0(x)$, e la seconda condizione iniziale è sempre soddisfatta, valendo: $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, x) = \phi_1(x)$. In definitiva l'unica soluzione al problema (6.1) è la funzione della classe di sopra con $A = 0$. Possiamo riscrivere la soluzione come:

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{2}\phi_0(x - ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^0 \phi_1(\xi) d\xi + \frac{1}{2}\phi_0(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} \phi_1(\xi) d\xi,$$

e quindi:

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{2} [\phi_0(x - ct) + \phi_0(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \phi_1(\xi) d\xi.$$

\square

Osservazioni 6.2.

(1) La forma generale della soluzione dell'equazione di D'Alembert ha comunque una struttura

della forma:

$$\varphi(t, x) = f(x - ct) + g(x + ct).$$

Il primo addendo a secondo membro rappresenta un profilo d'onda che procede da sinistra verso destra traslando senza deformarsi, alla velocità c (infatti, in un intervallo di tempo Δt , il profilo trasla di un intervallo di spazio $\Delta x = c\Delta t$). Questo tipo di onda è detta **onda progressiva**. Il secondo addendo a secondo membro rappresenta un profilo d'onda che procede da destra verso sinistra traslando senza deformarsi, alla velocità c . Questo tipo di onda è detta **onda regressiva**. In questo senso la costante c che appare nell'equazione di D'Alembert rappresenta la velocità di propagazione delle perturbazioni soluzioni dell'equazione. In dimensione spaziale maggiore di 1, la situazione è analoga, ma si assiste anche ad una deformazione del profilo della perturbazione; in ogni caso si riesce a provare che la costante c ha ancora lo stesso significato fisico, dopo avere introdotto la nozione di *velocità di fase*, della quale qui non ci occuperemo.

(2) Consideriamo il problema (6.1) e la sua soluzione espressa dalla formula di D'Alembert (6.5). Se $(a, b) \subset \mathbb{R}$ è limitato, si definisce in \mathbb{R}^2 il **dominio di dipendenza futuro** $D_+(a, b)$ come l'insieme chiuso dato dal triangolo di base $[a, b]$ sull'asse $t = 0$ e vertice nel semipiano $t > 0$ individuato dall'intersezione delle due rette che partono da a e b rispettivamente ed hanno inclinazione $1/c$ e $-1/c$ rispettivamente. Tale vertice ha coordinate $x_+ = (a+b)/2$ e $t_+ = (b-a)/(2c)$. Si definisce analogamente il **dominio di dipendenza passato** $D_-(a, b)$ come l'insieme chiuso dato dal triangolo di base $[a, b]$ sull'asse $t = 0$ e vertice nel semipiano $t < 0$ individuato dall'intersezione delle due rette che partono da a e b rispettivamente ed hanno inclinazione $-1/c$ e $1/c$ rispettivamente. Tale vertice ha coordinate $x_- = (a+b)/2$ e $t_- = -(b-a)/(2c)$. Il **dominio di dipendenza** $D(a, b)$ è, per definizione l'unione di $D_+(a, b)$ e $D_-(a, b)$. Si osservi che le rette di inclinazione $\pm 1/c$, che individuano il bordo di $D(a, b)$, sono *rette caratteristiche* per l'equazione di D'Alembert.

Se si considera un punto $(t_0, x_0) \in D_+(a, b)$, la formula di D'Alembert per un campo φ valutato in (t_0, x_0) , mostra che il valore $\varphi(t_0, x_0)$ dipende solo dal valore di ϕ_0 e ϕ_1 in $[a, b]$. Più precisamente, i valori rilevanti di ϕ_0 e ϕ_1 sono quelli che cadono nel sottointervallo $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0] \subset [a, b]$. Tale sottointervallo si ottiene intersecando con l'asse $t = 0$ le due rette caratteristiche emanate, verso il passato, da (t_0, x_0) . Un discorso analogo si può fare per i punti in $D_-(a, b)$.

La formula di D'Alembert implica quindi che, all'interno di $D(a, b)$, la funzione φ sia completamente determinata dalle due condizioni iniziali ristrette ad $[a, b]$, nel senso che, se alteriamo tali condizioni iniziali *fuori* da $[a, b]$, la soluzione φ non risulta essere alterata dentro $D(a, b)$.

L'esistenza di domini di dipendenza con le proprietà dette è comune alla teoria di tutte le equazioni differenziali a derivate parziali del secondo ordine di tipo iperbolico su varietà differenziabili Lorentziane, cioè su spaziotempo (generalmente curvi), quando la forma quadratica dell'equazione è data dalla stessa metrica dello spaziotempo. Si tratta di uno dei punti di partenza per sviluppare la *teoria della causalità* in teoria dei campi in ambiente relativistico generale.

(3) La formula di D'Alembert implica che il problema iperbolico (6.1) sia ben posto nel senso di Hadamard. Sappiamo già che la soluzione esiste ed è unica, dobbiamo quindi studiare la dipendenza continua dai dati iniziali. L'ambiente naturale in cui studiare questo problema è un dominio di dipendenza. Consideriamo due set di condizioni iniziali ϕ_0, ϕ_1 e $\tilde{\phi}_0, \tilde{\phi}_1$, indichiamo con

φ e $\tilde{\varphi}$ le corrispondenti soluzioni dell'equazione di D'Alembert, fissiamo un intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e l'associato dominio di dipendenza $D(a, b)$. Dalla formula di D'Alembert segue immediatamente che, se $(t, x) \in D(a, b)$

$$|\varphi(t, x) - \widetilde{\varphi(t, x)}| \leq \frac{1}{2} \sup_{\xi \in [a, b]} |\phi_0(\xi) - \tilde{\phi}_0(\xi)| + \frac{1}{2} \sup_{\xi \in [a, b]} |\phi_0(\xi) - \tilde{\phi}_0(\xi)| + \frac{1}{2c} \sup_{\xi \in [a, b]} |\phi_1(\xi) - \tilde{\phi}_1(\xi)| \int_{x-ct}^{x+ct} d\xi.$$

L'ultimo integrale, tenuto conto del fattore $(2c)^{-1}$, vale t e quindi è maggiorato da $T_{[a, b]}$ pari all'altezza del triangolo $D_+(a, b)$. In definitiva abbiamo trovato che, se $\|\cdot\|_{\infty A}$ indica la norma dell'estremo superiore calcolata restringendo il dominio delle funzioni all'insieme A ,

$$\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{\infty D(a, b)} \leq \|\phi_0 - \tilde{\phi}_0\|_{\infty [a, b]} + T_{[a, b]} \|\phi_1 - \tilde{\phi}_1\|_{\infty [a, b]}. \quad (6.6)$$

Se deriviamo entrambi i membri della formula di D'Alembert nella variabile t otteniamo che

$$\partial_t \varphi(t, x) = \frac{c}{2} [-\phi_0'(x - ct) + \phi_0'(x + ct)] + \frac{1}{2} (\phi_1(x + ct) + \phi_1(x - ct)).$$

In conseguenza di quanto trovato abbiamo che:

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} \right\|_{\infty D(a, b)} \leq c \|\phi_0' - \tilde{\phi}_0'\|_{\infty [a, b]} + \|\phi_1 - \tilde{\phi}_1\|_{\infty [a, b]}.$$

In modo analogo abbiamo anche che:

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} \right\|_{\infty D(a, b)} \leq \|\phi_0' - \tilde{\phi}_0'\|_{\infty [a, b]} + \frac{1}{c} \|\phi_1 - \tilde{\phi}_1\|_{\infty [a, b]}.$$

Valgono, e si ottengono con la stessa procedura, delle disuguaglianze per le derivate seconde:

$$\left\| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x^2} \right\|_{\infty D(a, b)} \leq \|\phi_0'' - \tilde{\phi}_0''\|_{\infty [a, b]} + \frac{1}{c} \|\phi_1' - \tilde{\phi}_1'\|_{\infty [a, b]},$$

$$\left\| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial t^2} \right\|_{\infty D(a, b)} \leq c^2 \|\phi_0'' - \tilde{\phi}_0''\|_{\infty [a, b]} + c \|\phi_1' - \tilde{\phi}_1'\|_{\infty [a, b]},$$

$$\left\| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} - \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial t \partial x} \right\|_{\infty D(a, b)} \leq c \|\phi_0'' - \tilde{\phi}_0''\|_{\infty [a, b]} + \|\phi_1' - \tilde{\phi}_1'\|_{\infty [a, b]}.$$

Queste relazioni mostrano come, prendendo condizioni iniziali vicine fino ad un certo ordine di differenziabilità, si ottengono soluzioni vicine fino all'ordine di differenziabilità considerato. Questo è proprio il senso della dipendenza continua dai dati iniziali proposta da Hadamard. Questa proprietà si generalizza a equazioni differenziali di tipo iperbolico in dimensione ed ambienti molto più generali. Lavorando con soluzioni particolari della forma (5.21) la cosa è particolarmente evidente.

(4) La formula di D'Alembert definisce una funzione φ su \mathbb{R}^2 anche se le due funzioni ϕ_0 e

ϕ_1 non sono C^2 in qualche punto isolato di \mathbb{R} attorno al quale ϕ_1 sia comunque integrabile. Perché esista φ definita dal secondo membro della formula di D'Alembert è, a rigore, sufficiente che ϕ_1 sia integrabile. Si vede facilmente che se x_0 è uno dei punti isolati di singolarità di ϕ_0 o ϕ_1 , il secondo membro della formula di D'Alembert è una funzione ovunque C^2 che soddisfa l'equazione di D'Alembert e le condizioni iniziali, eccetto che sulle rette caratteristiche che escono dal punto $(0, x_0)$ (e sulle rette analoghe che escono dagli altri punti isolati di singolarità). In questo senso *le singolarità delle condizioni iniziali si propagano lungo le curve caratteristiche*. Questo fatto è piuttosto generale e vale per equazioni differenziali di tipo iperbolico in dimensione ed ambienti molto più generali.

L'osservazione (3) di sopra ha un'importante conseguenza precedentemente preannunciata. Dato $[a, b] \subset \mathbb{R}$, pensato come retta a $t = 0$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, definiamo lo **sviluppo causale** di $[a, b]$, indicato con $J(a, b) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, come l'insieme (chiuso) dei punti di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ che possono essere raggiunti da una retta di pendenza in valore assoluto $\geq 1/c$ emanata da $[a, b]$ (quindi per esempio la retta $x = x_0 \in [a, b]$ costante, per $t \in \mathbb{R}$).

$J(a, b)$ risulta essere l'unione dei due coni infiniti, uno di vertice con coordinate $x_+ = (a + b)/2$ (cioè il punto medio di (a, b)) e $t_+ = (b - a)/(2c)$, emanato verso il passato, e l'altro di vertice di coordinate $x_- = x_+$ e $t_- = -t_+$ emanato verso il futuro. Si osservi ancora che $\mathbb{R}^2 \setminus J(a, b)$ è l'unione di tutti i domini di dipendenza $D(c, d)$ con $c > b$ oppure $d < a$.

Teorema 6.2. *Se nel problema (6.1) le condizioni iniziali sono scelte a supporto compatto: $\phi_0 \in C_0^2(\mathbb{R})$ e $\phi_1 \in C_0^1(\mathbb{R})$, e $[a, b] \supset \text{supp}(\phi_0) \cup \text{supp}(\phi_1)$, allora la soluzione φ del problema è nulla fuori da $J(a, b)$. Di conseguenza, per ogni fissato $[\alpha, \beta]$ con $[\alpha, \beta] \ni 0$:*

- (a) *il supporto della soluzione φ ristretta a $[\alpha, \beta] \times \mathbb{R}$ è compatto;*
- (b) *per ogni fissato $t \in [\alpha, \beta]$, il supporto di $\mathbb{R} \ni x \mapsto \varphi(t, x)$ è compatto in \mathbb{R} . \square*

Dimostrazione. Dalla (6.6), scegliendo $\tilde{\varphi}$ come la funzione ovunque nulla (che quindi risolve il problema con dati iniziali ovunque nulli), troviamo:

$$\|\varphi\|_{\infty D(a', b')} \leq \|\phi_0\|_{\infty [a', b']} + T_{[a', b']} \|\phi_1\|_{\infty [a', b']}.$$

Fissiamo ora un qualsiasi punto (t_0, x_0) fuori da $J(a, b)$ con $t_0 \geq 0$. Per definizione di $J(a, b)$, se $a' = x_0 - ct_0$ e $b' = x_0 + ct_0$, allora $[a', b']$ non interseca mai $[a, b]$. Dato che $[a, b]$ contiene i supporti di ϕ_0 e ϕ_1 , tali funzioni sono nulle in $[a', b']$. Concludiamo che

$$0 \leq \|\varphi\|_{\infty D(a', b')} \leq \|\phi_0\|_{\infty [a', b']} + T_{[a', b']} \|\phi_1\|_{\infty [a', b']} = 0 + 0 = 0$$

e quindi, in particolare, dato che $(t_0, x_0) \in D(a', b')$, $\varphi(t_0, x_0) = 0$. Fissiamo infine il compatto $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ con $[\alpha, \beta] \ni 0$. Tenendo conto della forma di $J(a, b)$ che è dato dall'unione di due coni come precisato sopra, segue subito che il supporto di φ ristretta alla regione chiusa tra le due rette $t = \alpha$ e $t = \beta$, è contenuto nell'unione dei due trapezi chiusi di base minore in comune data da $[a, b]$ e basi maggiori individuate dalla porzione delle rette $t = \alpha$ e $t = \beta$ che cadono in $J(a, b)$. Tale insieme è evidentemente limitato, pertanto il supporto di φ ristretta alla regione

chiusa tra le due rette $t = \alpha$ e $t = \beta$, che è un insieme chiuso per definizione, è anch'esso compatto. Il supporto di $\mathbb{R} \ni x \mapsto \varphi(t, x)$, con $t \in [\alpha, \beta]$, è un chiuso sottoinsieme di un compatto ed è pertanto anch'esso compatto. \square

Osservazioni 6.3. Come già osservato precedentemente, ma ora possiamo essere più chiari, le due proprietà (a) e (b) sono valide anche in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ per le soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon e d'Alembert quando i dati iniziali hanno supporto compatto (e tale fatto vale in maniera molto generale per soluzioni di equazioni iperboliche su uno spaziotempo curvo con la proprietà della "globale iperbolicità"). Nel caso generale però, la dimostrazione di (a) e (b) è molto più complicata.

6.1.2 Equazione di D'Alembert su tutta la retta con sorgente.

Consideriamo ora il problema con sorgente, data dalla funzione f :

$$\begin{cases} -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = f(t, x), & \varphi \in C^2(\mathbb{R}^2), \\ \varphi(0, x) = \phi_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, x) = \phi_1(x) & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (6.7)$$

dove $\phi_0 \in C^2(\mathbb{R})$ e $\phi_1 \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$ sono funzioni assegnate.

Abbiamo un primo risultato, abbastanza semplice, che riguarda l'unicità della soluzione.

Teorema 6.3. *Se esiste una soluzione al problema (6.7) con fissati dati $\phi_0 \in C^2(\mathbb{R})$ e $\phi_1 \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$, allora è unica. \diamond*

Dimostrazione. Se φ_1 e φ_2 risolvono il problema (6.7) con gli stessi dati $\phi_0 \in C^2(\mathbb{R})$ e $\phi_1 \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$ allora $\varphi := \varphi_1 - \varphi_2$ risolve il problema (6.1) con condizioni iniziali nulle. In base al teorema 6.1 deve essere $\varphi(t, x) = 0$ ovunque, dato che la soluzione ovunque nulla risolve il problema posto ed è l'unica a farlo. Pertanto $\varphi_1(t, x) = \varphi_2(t, x)$ per ogni $(t, x) \in \mathbb{R}^2$. \square

Passiamo a dimostrare un teorema di esistenza nel caso in cui $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Possiamo decomporre la funzione φ in due parti $\varphi = \phi + \Phi$, in cui ϕ soddisfa il problema omogeneo

$$\begin{cases} -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0, & \phi \in C^2(\mathbb{R}^2), \\ \phi(0, x) = \phi_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial t}(0, x) = \phi_1(x) & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (6.8)$$

mentre Φ soddisfa il problema con sorgente, ma con dati iniziali nulli

$$\begin{cases} -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = f(t, x), & \Phi \in C^2(\mathbb{R}^2), \\ \Phi(0, x) = 0 & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t}(0, x) = 0 & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (6.9)$$

Dovrebbe essere ovvio che $\varphi = \phi + \Phi$ soddisfa (6.7) se le due funzioni hanno le proprietà richieste. La funzione ϕ esiste sicuramente in base al teorema 6.1. Mostriamo ora che esiste anche una funzione Φ che risolve (6.9) ed in particolare è di classe $C^2(\mathbb{R}^2)$. Una funzione Φ che soddisfa le richieste dette, come andiamo a dimostrare, ha la forma:

$$\Phi(t, x) := -\frac{c}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} d\xi f(\tau, \xi). \quad (6.10)$$

Si osservi che l'integrale può essere riscritto (anche se $t \leq 0$) come l'integrale doppio di Riemann (o Lebesgue)

$$\Phi(t, x) := -\frac{c}{2} \int_{A(t, x)} f(\tau, \xi) d\tau d\xi,$$

e il dominio d'integrazione $A(t, x)$ nel piano (τ, ξ) è un compatto essendo dato dal triangolo di base $[x - ct, x + ct]$ sull'asse $\tau = 0$ e vertice (t, x) , e quindi la funzione continua f è dunque integrabile su tale dominio. Si noti che quindi $A(t, x) = D_+(x - ct, x + ct)$ se $t \geq 0$, oppure $A(t, x) = D_-(x - ct, x + ct)$ se $t \leq 0$.

Nel seguito applicheremo ricorrentemente il seguente risultato la cui prova elementare, basata sul teorema della media integrale, sul teorema della media differenziale (teorema di Lagrange) e sul teorema della convergenza dominata, è lasciata per esercizio.

Proposizione. *Se $F \in C^0((a, b) \times (a, b))$ ed esiste $\frac{\partial F(t, x)}{\partial t}$ per $(t, x) \in (a, b) \times (a, b)$ e definisce una funzione $C^0((a, b) \times (a, b))$, allora:*

$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t F(t, x) dx = F(t, t) + \int_{t_0}^t \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} dx,$$

per ogni coppia di numeri $t_0, t \in (a, b)$ con $t_0 \leq t$.

Per verificare che Φ soddisfi l'equazione di D'Alembert dobbiamo calcolarne le derivate fino al secondo ordine. Applicando la proposizione abbiamo subito che:

$$-\partial_t \left(-\frac{c}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} d\xi f(\tau, \xi) \right) = \frac{c}{2} \int_{x-c(t-t)}^{x+c(t-t)} d\xi f(t, \xi) + \frac{c}{2} \int_0^t d\tau \partial_t \left(\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} d\xi f(\tau, \xi) \right),$$

e quindi

$$-\partial_t \Phi(t, x) = 0 + \frac{c^2}{2} \int_0^t d\tau [f(\tau, x + c(t - \tau)) + f(\tau, x - c(t - \tau))]. \quad (6.11)$$

Passando alla derivata seconda, ed usando esplicitamente il fatto che $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$,

$$\begin{aligned} -\frac{2}{c^2} \partial_t^2 \Phi(t, x) &= \partial_t \int_0^t d\tau [f(\tau, x + c(t - \tau)) + f(\tau, x - c(t - \tau))] \\ &= [f(t, x + c(t - t)) + f(t, x - c(t - t))] + c \int_0^t d\tau [\partial_x f(\tau, x + c(t - \tau)) - \partial_x f(\tau, x - c(t - \tau))] . \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto:

$$-\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Phi(t, x) = f(t, x) + \frac{c}{2} \int_0^t d\tau [\partial_x f(\tau, x + c(t - \tau)) - \partial_x f(\tau, x - c(t - \tau))] . \quad (6.12)$$

Similmente:

$$\partial_x \Phi(t, x) = -\partial_x \frac{c}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} d\xi f(\tau, \xi) = -\frac{c}{2} \int_0^t d\tau [f(\tau, x + c(t - \tau)) - f(\tau, x - c(t - \tau))] ,$$

e quindi:

$$\partial_x^2 \Phi(t, x) = -\frac{c}{2} \int_0^t d\tau [\partial_x f(\tau, x + c(t - \tau)) - \partial_x f(\tau, x - c(t - \tau))] . \quad (6.13)$$

Sommando membro a membro (6.12) e (6.13) otteniamo:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = f .$$

Da (6.10) e (6.11) abbiamo immediatamente che Φ soddisfa anche le condizioni iniziali nulle del problema (6.9) come volevamo. Rimane da provare che la funzione Φ sia $C^2(\mathbb{R}^2)$. Le derivate seconde in x e t sono state calcolate sopra, le derivate miste si calcolano analogamente e forniscono:

$$\partial_x \partial_t \Phi(t, x) = \partial_t \partial_x \Phi(t, x) = -\frac{c^2}{2} \int_0^t d\tau [\partial_x f(\tau, x + c(t - \tau)) + \partial_x f(\tau, x - c(t - \tau))] .$$

Tenendo conto, nella (6.12), la funzione f che appare sommata all'integrale nel secondo membro è continua, l'unica cosa che rimane da provare è che la funzione

$$\mathbb{R}^2 \ni (t, x) \mapsto \int_0^t d\tau [\partial_x f(\tau, x + c(t - \tau)) + \partial_x f(\tau, x - c(t - \tau))] , \quad (6.14)$$

che appare nell'espressione esplicita di tutte le derivate seconde di Φ , sia una funzione continua se $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Definiamo la funzione continua:

$$g(\tau, x, t) := \partial_x f(\tau, x + c(t - \tau)) + \partial_x f(\tau, x - c(t - \tau)) \quad \text{per } (\tau, t, x) \in \mathbb{R}^3 .$$

Mostriamo che

$$\mathbb{R}^2 \ni (t, x) \mapsto \int_0^t d\tau g(\tau, t, x) ,$$

è continua nel punto generico $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ che d'ora in poi si penserà fissato. Fissiamo a tal fine un cubo aperto $B \subset \mathbb{R}^3$ centrato nell'origine, di lato $L > 0$ finito. Lavoreremo in un analogo cubo $C \subset \mathbb{R}^2$ aperto centrato in (t, x) di lato $\delta' > 0$ abbastanza piccolo in modo tale che $(\tau, t', x') \in B$ se $\tau \in (-L, L)$ e $(t', x') \in C$. Definiamo infine il numero $M := \sup\{|g(\tau', t', x')| \mid (\tau', t', x') \in \overline{B}\} < +\infty$. L'ultima condizione è soddisfatta perché g è continua sul compatto \overline{B} . Possiamo scrivere, se $(t', x') \in C$:

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{t'} d\tau g(\tau, t', x') - \int_0^t d\tau g(\tau, t, x) \right| \leq \\ & \left| \int_0^{t'} d\tau g(\tau, t', x') - \int_0^t d\tau g(\tau, t', x') \right| + \left| \int_0^t d\tau g(\tau, t', x') - \int_0^t d\tau g(\tau, t, x) \right| \\ & \leq |t' - t|M + |t| \sup\{|g(\tau, t', x') - g(\tau, t, x)| \mid \tau \in [-L, L]\}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Dato che g è continua sul compatto \overline{B} essa è anche uniformemente continua su tale compatto. Di conseguenza, per ogni $\epsilon > 0$, possiamo scegliere $\delta > 0$ (con $\delta < \delta'$) in modo che, se $|t - t'| < \delta$, $|x - x'| < \delta$ e $|\tau - \tau'| < \delta$ insieme, allora $|t| |g(\tau', t', x') - g(\tau, t, x)| < \epsilon/2$. In particolare, se $|t - t'| < \delta$ e $|x - x'| < \delta$, allora:

$$|t| \sup\{|g(\tau, t', x') - g(\tau, t, x)| \mid \tau \in [-L, L]\} \leq \epsilon/2$$

e quindi Rimpicciolendo ancora $\delta > 0$ se necessario, in modo tale che $M\delta < \epsilon/2$, dalla (6.15) segue che:

$$\left| \int_0^{t'} d\tau g(\tau, t', x') - \int_0^t d\tau g(\tau, t, x) \right| < \epsilon. \quad (6.16)$$

Riassumendo, abbiamo dimostrato che per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che, se $|t - t'| < \delta$ e $|x - x'| < \delta$, allora vale (6.16) e quindi la funzione in (6.14) è continua come richiesto e quindi $\Phi \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Mettendo tutto insieme è stato provato il seguente risultato.

Teorema 6.4. *Si consideri il problema (6.7) dove $\phi_0 \in C^2(\mathbb{R})$ e $\phi_1 \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ sono funzioni assegnate. Esiste ed è unica la soluzione φ di tale problema e si esprime come:*

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{2} [\phi_0(x - ct) + \phi_0(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \phi_1(\xi) d\xi - \frac{c}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} d\xi f(\tau, \xi).$$

□

Osservazioni 6.4.

(1) In realtà la dimostrazione funziona con l'ipotesi più debole che $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$ ed esiste $\partial_x f$ ed è data da una funzione continua su \mathbb{R}^2 .

(2) La formula (6.10), come già osservato può essere scritta come

$$\Phi(t, x) := -\frac{c}{2} \int_{A(t,x)} f(\tau, \xi) d\tau d\xi,$$

dove $A(t, x)$ è un dominio compatto dato da $D_+(x - ct, x + ct)$ se $t \geq 0$, oppure $D_-(x - ct, x + ct)$ se $t \leq 0$. Possiamo riscrivere la formula che determina Φ come

$$\Phi(t, x) := \int_{\mathbb{R}^2} G(t, x|\tau, \xi) f(\tau, \xi) d\tau d\xi,$$

dove $G(t, x|\tau, \xi)$, a parte la costante moltiplicativa $-\frac{c}{2}$, non è altro che la funzione caratteristica, nel piano (τ, ξ) , di $D_{\pm}(x - ct, x + ct)$ a seconda del segno di t . Tale funzione (in realtà è più propriamente pensabile come una funzione generalizzata o distribuzione) si chiama **funzione di Green** (con condizioni di annullamento sulla superficie $t = 0$) dell'operatore di D'Alembert su \mathbb{R}^2 :

$$\square := -\frac{1}{c^2} \partial_t^2 + \partial_x^2.$$

Le funzioni di Green per le equazioni iperboliche possono essere definite (con vari dati iniziali) anche in dimensione maggiore ed in ambienti più generali. Esse giocano un ruolo importante negli sviluppi della teoria specie nelle teorie relativistiche (come dimostrato da Riesz, Hadamard e Leray, Hörmander).

(3) La scelta dell'estremo d'integrazione inferiore pari a 0 nella variabile t in (6.10) è abbastanza arbitraria: avremmo potuto scegliere un qualsiasi altro valore finito se non avessimo richiesto le condizioni iniziali nulle a $t = 0$. La finitezza principalmente serve ad avere un dominio d'integrazione limitato nelle due variabili. Se sappiamo però a priori che il supporto di f è compatto (e f è C^1), possiamo lasciare la libertà a tale estremo di essere $-\infty$ ottenendo la formula:

$$\Phi_+(t, x) := -\frac{c}{2} \int_{-\infty}^t d\tau \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} d\xi f(\tau, \xi). \quad (6.17)$$

In realtà, per ogni fissato (t, x) , il dominio di integrazione è sempre limitato, dato che il supporto di f è limitato essendo compatto. Con la stessa dimostrazione di sopra si verifica subito che Φ_+ soddisfa l'equazione di D'Alembert con sorgente f . Le condizioni iniziali nulle a $t = 0$ non sono però verificate. Viceversa la funzione Φ_+ sopra definita soddisfa la seguente caratterizzazione: se $J^+(supp(f))$ è l'unione di tutti i coni $\Gamma_{(t_0, x_0)}^+$ (triangoli di altezza infinita) con vertice in $(t_0, x_0) \in supp(f)$, definiti per $t \geq t_0$ con lati di pendenza $\pm 1/c$:

$$\Gamma_{(t_0, x_0)}^+ := \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t \geq t_0, c|t - t_0| \geq |x - x_0|\}$$

Φ_+ è nulla fuori da $J^+(supp(f))$.

Possiamo anche scrivere:

$$\Phi_+(t, x) := \int_{\mathbb{R}^2} G_R(t, x|\tau, \xi) f(\tau, \xi) d\tau d\xi,$$

dove $G_R(t, x|\tau, \xi)$ non è altro che la funzione caratteristica del cono infinito nelle variabili (τ, ξ) che ha vertice in (t, x) e sta nel "passato" di tale vertice:

$$\Gamma_{(t, x)}^- := \{(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^2 \mid \tau \leq t, c|\tau - t| \geq |\xi - x|\}$$

moltiplicata per il fattore $-c/2$. Tale funzione di Green è detta **funzione di Green ritardata**. In modo del tutto analogo, sempre se f ha supporto compatto (e f è C^1), possiamo considerare la soluzione dell'equazione di D'Alembert:

$$\Phi_-(t, x) := \frac{c}{2} \int_t^\infty d\tau \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} d\xi f(\tau, \xi). \quad (6.18)$$

Come prima, per ogni fissato (t, x) , il dominio di integrazione è sempre limitato, dato che il supporto di f è limitato essendo compatto. Con la stessa dimostrazione di prima si verifica subito che Φ_- soddisfa l'equazione di D'Alembert con sorgente f . Le condizioni iniziali nulle a $t = 0$ non sono di nuovo verificate. Viceversa la funzione Φ_- sopra definita soddisfa la seguente caratterizzazione: se $J^-(\text{supp}(f))$ è l'unione di tutti i coni con vertice in ogni $(t_0, x_0) \in \text{supp}(f)$ e definiti per $t \leq t_0$:

$$\Gamma_{(t_0, x_0)}^- := \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t \leq t_0, c|t - t_0| \geq |x - x_0|\}$$

Φ_- è nulla fuori da $J^+(\text{supp}(f))$.

Possiamo anche scrivere:

$$\Phi_-(t, x) := \int_{\mathbb{R}^2} G_A(t, x | \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\tau d\xi,$$

dove $G_A(t, x | \tau, \xi)$ non è altro che la funzione caratteristica del cono infinito nelle variabili (τ, ξ) che ha vertice in (t, x) e sta nel "futuro" di tale vertice::

$$\Gamma_{(t, x)}^+ := \{(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^2 \mid \tau \geq t, c|\tau - t| \geq |\xi - x|\}$$

moltiplicata per il fattore $c/2$. Tale funzione di Green è detta **funzione di Green avanzata**.

6.2 Dalla separazione delle variabili alla serie di Fourier.

Consideriamo ora il problema di dover risolvere l'equazione di D'Alembert senza sorgente per la funzione $\varphi = \varphi(t, x)$ quando il dominio spaziale è un intervallo $[-L/2, L/2] \subset \mathbb{R}$ e $t \in (\alpha, \beta) \ni 0$, nella situazione in cui, oltre a condizioni iniziali a $t = 0$, sono imposte *condizioni al contorno di periodicità*:

$$\varphi(t, -L/2) = \varphi(t, L/2), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, -L/2) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, L/2), \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, -L/2) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, L/2) \quad \forall t \in (\alpha, \beta) \quad (6.19)$$

La terza condizione segue dalla prima e dall'equazione differenziale stessa. Dato che l'equazione è:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2},$$

possiamo tentare di risolverla, con la procedura detta di *separazione delle variabili*, assumendo una forma particolare delle soluzioni del tipo

$$\varphi(t, x) = f(t)g(x).$$

Inserendo nell'equazione di sopra si arriva subito all'identità, che vale quando le funzioni f e g non si annullano,

$$\frac{1}{c^2 f(t)} \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} = \frac{1}{g(x)} \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2}.$$

Dato che i due membri dell'identità ottenuta sono funzione di due variabili diverse, i due membri devono essere funzioni costanti separatamente. Otteniamo in tal modo le due equazioni, per qualche costante $E \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = c^2 E f(t), \quad \frac{d^2 g(x)}{dx^2} = E g(x).$$

La seconda equazione fornisce la classe di soluzioni

$$g_E(x) := C_+(E)e^{\sqrt{E}x} + C_-(E)e^{-\sqrt{E}x}. \quad (6.20)$$

Tuttavia dobbiamo ancora imporre le condizioni di periodicità su $\varphi(t, x) = f(t)g(x)$ che, nel caso in esame implicano la richiesta che la funzione g_E soddisfi

$$g_E(-L/2) = g_E(L/2) \quad \text{e} \quad \frac{dg_E}{dx}(-L/2) = \frac{dg_E}{dx}(L/2).$$

Se $E > 0$ in (6.20), le due condizioni scritte sopra non sono mai soddisfatte (nel caso generico di costanti $C_{\pm}(E) \neq 0$). Nel caso in cui $E \leq 0$, gli esponenti diventano complessi:

$$\pm i\sqrt{-E}x, \quad x \in [-L/2, L/2],$$

e pertanto le funzioni g_E sono periodiche. Affinché risultino essere periodiche, con tutte le derivate, sul segmento di lunghezza L (non importa quali siano i suoi estremi, ciò vale per $[-L/2, L/2]$ come per $[0, L]$ o altro), è necessario e sufficiente che $\sqrt{-E}L/(2\pi)$ sia un numero naturale. Quindi deve essere $E = -(2\pi n/L)^2$ con $n \in \mathbb{N}$ arbitrario. In questo modo si trova subito che, etichettando le funzioni g_E con l'indice $n \in \mathbb{N}$ invece che E , esse possono solo essere del tipo:

$$g_0(x) := C_0, \quad g_n(x) := C_+(n)e^{i\frac{2\pi n}{L}x} + C_-(n)e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}.$$

Per tenere conto dei due segni degli esponenti è conveniente usare un unico esponenziale e fare variare n in \mathbb{Z} invece che in \mathbb{N} . Abbiamo allora che le funzioni g_n ammissibili, hanno tutte la forma:

$$g_0(x) := C_0, \quad g_n(x) := C_n e^{i\frac{2\pi n}{L}x}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (6.21)$$

L'equazione per la funzione f_E , che ora indicheremo con f_n , è ora:

$$\frac{d^2 f_n(t)}{dt^2} = -c^2 \left(\frac{2\pi n}{L} \right)^2 f_n(t),$$

che ha come risultato la classe di soluzioni dove $D_n, D'_n \in \mathbb{C}$

$$f_0(t) := D'_0 t + D_0, \quad f_n(t) := D_n e^{i\frac{2\pi n}{L}ct} + D'_n e^{-i\frac{2\pi n}{L}ct}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (6.22)$$

In particolare ognuna delle funzioni, con $A_0, A'_0, A_n^{(\pm)} \in \mathbb{C}$:

$$\varphi_0(t) = A_0 t + A'_0, \quad \varphi_n(t, x)_\pm := A_n^{(\pm)} e^{i\frac{2\pi n}{L}x} e^{\pm i\frac{2\pi n}{L}ct}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad (6.23)$$

ed ogni loro possibile combinazione lineare finita sarà una possibile soluzione dell'equazione di D'Alembert in $\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]$ con condizioni al contorno periodiche sul segmento $[-L/2, L/2]$. Anche se queste soluzioni sono complesse, possiamo sempre ridurci al caso reale prendendo delle combinazioni lineari di esse con coefficienti opportuni, ricordando che $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta$ e $-i(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = 2 \sin \theta$. Dato che stiamo lavorando con un'equazione differenziale lineare omogenea, combinazioni lineari di soluzioni saranno ancora soluzioni. Quest'ultima osservazione potrebbe essere utile anche per cercare di soddisfare le condizioni iniziali, cioè la forma che φ e la sua derivata temporale devono assumere all'istante $t = 0$. Tuttavia, è intuitivo pensare che se le condizioni iniziali sono assegnate in termini di funzioni arbitrarie, non sarà possibile trovare una combinazione lineare *finita* di soluzioni della forma (6.23) che soddisfi anche tali condizioni iniziali. Si può pensare che ciò sia invece possibile considerando anche combinazioni lineari *infinite*. Questa idea è quella che ha condotto Fourier ad inventare la teoria della serie omonima¹ come vedremo nella Sezione 8.3. L'idea fondamentale è quella di sviluppare le funzioni periodiche f definite su un intervallo $[-L/2, L/2] \subset \mathbb{R}$ (ma l'approccio si generalizza su varietà toroidali compatte k -dimensionali) con una serie di funzioni i cui termini siano funzioni esponenziali $e^{i\frac{2\pi n}{L}x}$ con opportuni coefficienti complessi e con $n \in \mathbb{Z}$:

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n e^{i\frac{2\pi n}{L}x}.$$

Nel caso della nostra funzione φ soluzione periodica dell'equazione di D'Alembert, ci si aspetta che essa abbia una forma, che assicura automaticamente la periodicità in x di φ :

$$\varphi(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(t) e^{i\frac{2\pi n}{L}x}. \quad (6.24)$$

La dipendenza temporale di φ (e quindi il fatto che φ soddisfi l'equazione di D'Alembert) si scarica tutta nei coefficienti complessi $C_n(t)$. Ci aspettiamo, da quanto visto sopra, che la forma di tali coefficienti sia proprio una combinazione lineare finita di funzioni di t del tipo di quelle in (6.22). Le infinite costanti arbitrarie che appaiono in tutte queste combinazioni lineari dovranno anche essere fissate in modo tale da soddisfare le condizioni iniziali. Dopo aver enunciato alcuni risultati ben noti della teoria delle serie di Fourier, torneremo all'equazione di D'Alembert e di Klein-Gordon per vedere come si conclude il discorso cominciato sopra sulle soluzioni periodiche dell'equazione di Klein-Gordon e D'Alembert.

¹Lavorando però con un'equazione differente – ma con analoghe caratteristiche per quanto riguarda l'applicazione della teoria della serie di Fourier – l'equazione del calore, che vedremo più avanti.

6.3 Alcuni risultati elementari sulla serie di Fourier.

Richiamiamo qui alcuni semplici risultati della teoria della serie di Fourier dal punto di vista della teoria degli *spazi di Hilbert* (vedi per es. [Mo18]). Tutti questi argomenti saranno approfonditi in corsi avanzati di analisi.

Supponiamo che una funzione $f : [-L/2, L/2] \rightarrow \mathbb{C}$ si possa sviluppare in serie di Fourier, per il momento lavorando del tutto formalmente senza farci domande sul tipo di convergenza:

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}}. \quad (6.25)$$

Abbiamo introdotto il fattore $1/\sqrt{L}$ per pura convenienza. Vogliamo determinare la forma dei coefficienti $f_n \in \mathbb{C}$. Moltiplicando membro a membro per $\frac{e^{-i\frac{2\pi m}{L}x}}{\sqrt{L}}$ abbiamo:

$$f(x) \frac{e^{-i\frac{2\pi m}{L}x}}{\sqrt{L}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} \frac{e^{-i\frac{2\pi m}{L}x}}{\sqrt{L}}. \quad (6.26)$$

Tenendo infine conto delle **relazioni di ortogonalità** (vedi la sezione C in Appendice):

$$\frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} e^{-i\frac{2\pi m}{L}x} e^{i\frac{2\pi n}{L}x} dx = \delta_{nm}, \quad (6.27)$$

ed integrando i due membri di (6.26), ammettendo di poter scambiare il simbolo di integrale con quello di somma in (6.26) (questo è sicuramente possibile se f è una combinazione lineare finita di esponenziali oppure se la serie converge uniformemente), giungiamo alla conclusione che:

$$\int_{-L/2}^{L/2} f(x) \frac{e^{-i\frac{2\pi m}{L}x}}{\sqrt{L}} dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \int_{-L/2}^{L/2} \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} \frac{e^{-i\frac{2\pi m}{L}x}}{\sqrt{L}} dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \delta_{nm} = f_m.$$

Cambiando nome all'indice m :

$$f_n = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} f(x) dx. \quad (6.28)$$

I numeri complessi f_n , con $n \in \mathbb{Z}$, individuati da (6.28) quando esistono, sono detti **coefficienti di Fourier della funzione f** . Ora che abbiamo un candidato per i coefficienti di Fourier f_n , ci si può chiedere in quale senso la serie (6.25) converga.

6.3.1 La serie di Fourier nello spazio di Hilbert $L^2([-L/2, L/2], dx)$.

La teoria della serie di Fourier, a livello più astratto, viene sviluppata nell'insieme di funzioni $f : [-L/2, L/2] \rightarrow \mathbb{C}$ misurabili che siano **a quadrato sommabile**, cioè soddisfino:

$$\int_{[-L/2, L/2]} |f(x)|^2 dx < +\infty, \quad (6.29)$$

rispetto alla misura dx di Lebesgue. L'insieme di funzioni determinato in tal modo si indica con $\mathcal{L}^2([-L/2, L/2], dx)$. È importante osservare che questo insieme di funzioni include tutte le funzioni misurabili limitate, a causa del fatto che la misura di Lebesgue di $[-L/2, L/2]$ è finita. Infatti, se $f : [-L/2, L/2] \rightarrow \mathbb{C}$ è misurabile ed è limitata in valore assoluto da $M < +\infty$ (basterebbe che fosse *essenzialmente limitata* da M per ottenere quanto segue), allora f è a quadrato sommabile essendo:

$$\int_{[-L/2, L/2]} |f(x)|^2 dx \leq M \int_{[-L/2, L/2]} dx = ML < +\infty.$$

Ricordiamo la seguente definizione generale.

Definizione 6.1. Se X è uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{C} , un'applicazione $(|) : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ è detta **forma quadratica hermitiana** se valgono le proprietà seguenti:

- (1) $(u|av + bw) = a(u|v) + b(u|w)$ per ogni $a, b \in \mathbb{C}$ e ogni $u, v, w \in X$;
- (2) $(au|v) = \overline{a}(u|v)$ per ogni $a \in \mathbb{C}$ e ogni $u \in X$;
- (3) $(u|v) = \overline{(v|u)}$ per ogni $u, v \in X$ (per cui $(u|u) \in \mathbb{R}$ in particolare).

Tale forma quadratica hermitiana è detta **prodotto scalare (hermitiano)** su X se valgono le due ulteriori proprietà:

- (4) $(u|u) \geq 0$ per ogni $u \in X$;
- (5) $(u|u) = 0$ per $u \in X$ implica che $u = 0$.

◇

Dalle proprietà (1)-(4) si prova la validità della **disuguaglianza di Cauchy-Schwarz**:

$$|(u|v)|^2 \leq (u|u)(v|v) \quad \text{per ogni } u, v \in X.$$

Da tale disuguaglianza si dimostra facilmente che $\|x\| := \sqrt{(x|x)}$, con $x \in X$ è una *norma*² su X se $(|)$ è un prodotto scalare su X . Nel caso in cui valgano tutte le proprietà del prodotto scalare eccetto la stretta positività (5), allora $\| \cdot \|$ risulta essere una *seminorma*.

$\mathcal{L}^2([-L/2, L/2], dx)$ risulta essere uno spazio vettoriale complesso dotato della forma quadratica hermitiana:

$$(f|g) := \int_{[-L/2, L/2]} \overline{g(x)} f(x) dx, \quad \text{se } f, g \in \mathcal{L}^2([-L/2, L/2], dx). \quad (6.30)$$

In riferimento alla definizione di sopra, questo non è un prodotto scalare hermitiano unicamente per il fatto che $(f|f) = 0$ implica che $f(x) = 0$ quasi ovunque, ma non necessariamente ovunque. Si rimedia al problema identificando funzioni che differiscono tra di loro solo quando valutate su un (arbitrario) insieme di misura nulla in $[-L/2, L/2]$, e lavorando con classi (di equivalenza) di funzioni piuttosto che con funzioni. Lo spazio vettoriale con prodotto scalare hermitiano che si ottiene da $\mathcal{L}^2([-L/2, L/2], dx)$ quotizzando rispetto alla relazione di equivalenza che

²In particolare vale la **disuguaglianza triangolare**: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ se $x, y \in X$.

identifica due funzioni se differiscono su un (qualsiasi) insieme di misura nulla, si indica con $L^2([-L/2, L/2], dx)$. Tale spazio vettoriale complesso risulta anche essere *completo* (vedi la sezione 1.1.3) [Ru82] nella topologia normata indotta dalla norma associata al prodotto scalare suddetto (dove ora, più propriamente f indica una classe di equivalenza di funzioni):

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_{[-L/2, L/2]} |f(x)|^2 dx}.$$

La completezza rende, per definizione, lo spazio vettoriale complesso $L^2([-L/2, L/2], dx)$ dotato del prodotto scalare $(\cdot|\cdot)$ uno **spazio di Hilbert** complesso.

Definizione 6.2. Uno spazio vettoriale H sul campo \mathbb{C} dotato di un prodotto scalare hermitiano $(\cdot|\cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ in modo tale che H risulti essere completo rispetto alla topologia della norma $\|x\| := \sqrt{(x|x)}$, con $x \in H$, è detto **spazio di Hilbert** (complesso). \diamond

Si osservi che la definizione di $\mathcal{L}^2([-L/2, L/2], dx)$ e $L^2([-L/2, L/2], dx)$ e le loro proprietà generali sono indipendenti dalla teoria della serie di Fourier.

Come ultimo ingrediente che caratterizza gli spazi di Hilbert e riveste un ruolo importante nell'interpretazione della serie di Fourier quando lo spazio di Hilbert sia $L^2([-L/2, L/2], dx)$, introduciamo la nozione di *base hilbertiana*. Ricordiamo che un insieme di vettori $\{u_j\}_{j \in J} \subset X$, dove X è uno spazio con prodotto scalare $(\cdot|\cdot)$, è detto un **insieme** o **sistema di vettori ortonormali** quando: $(u_j|u_k) = \delta_{jk}$ per $j, k \in J$.

Vale la seguente ben nota proposizione (vedi per es. [Ru82, Mo18]).

Proposizione 6.1. *Sia H uno spazio di Hilbert con prodotto scalare $(\cdot|\cdot)$ e J un insieme di cardinalità qualsiasi. Se $\{u_j\}_{j \in J} \subset H$ è un insieme di vettori ortonormali, allora i seguenti fatti sono equivalenti e, se valgono, $\{u_j\}_{j \in J}$ viene detto **base hilbertiana** di H .*

(a) *Se $v \in H$ allora:*

$$\|v\|^2 = \sum_{j \in J} |(u_j|v)|^2,$$

dove nella somma a secondo membro solo una quantità al più numerabile di numeri $(u_j|v)$ risulta essere non nulla.

(b) *Se $v \in H$ allora:*

$$v = \sum_{j \in J} (u_j|v) u_j,$$

dove la convergenza della serie è nella topologia associata alla norma $\|\cdot\|$, solo una quantità al più numerabile di v_j risulta essere non nulla e non dipende da come sono ordinati gli elementi non nulli.

(c) *Se $v, v' \in H$ allora:*

$$(v|v') = \sum_{j \in J} \overline{(u_j|v)} (u_j|v'),$$

dove la convergenza della serie è assoluta e solo una quantità al più numerabile di $(u_j|v)$ e $(u_j|v')$ risulta essere non nulla.

Risulta infine che, se solo una quantità al più numerabile di $c_j \in \mathbb{C}$ è non nulla e la serie

$$\sum_{j \in J} c_j u_j$$

converge a qualche $v \in H$ per qualche ordinamento degli elementi non nulli e nel senso della topologia di H indotta dalla norma $\| \cdot \|$, allora $\sum_{j \in J} |c_j|^2 < +\infty$ e $c_j = (u_j|v)$.

Osservazioni importanti.

(1) Dato che le serie numeriche considerate sopra sono assolutamente convergenti, non importa l'ordine con cui si esegue la somma della serie. Per esempio, in riferimento alla serie in (c), consideriamo solo una quantità numerabile di addendi, etichettati sull'insieme numerabile di indici $J_0 \subset J$, che include i termini non nulli tra tutti i numeri $(u_j|v)$ e $(u_j|v')$. È allora sufficiente numerare gli indici di J_0 con un'arbitraria funzione biettiva $h : \mathbb{N} \rightarrow J_0$ e sommare la serie su $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \overline{(u_{h(m)}|v)} (u_{h(m)}|v'),$$

che si ottiene in tal modo. Il valore comune delle somme di tali serie che si ottengono comunque fissiamo la funzione biettiva h è, per definizione, il numero

$$\sum_{j \in J} \overline{(u_j|v)} (u_j|v).$$

(2) Tenuto anche conto di quanto appena scritto in (1), l'identità $v = \sum_{j \in J} (u_j|v) u_j$ significa:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| v - \sum_{m=0}^N (u_{j(m)}|v) u_{j(m)} \right\|_2 = 0,$$

dove la funzione $j = j(m)$, con $m \in \mathbb{N}$, è una qualunque funzione che etichetta i soli coefficienti non nulli $(u_j|v)$ (oppure una quantità numerabile di coefficienti che includono quelli non nulli se questi ultimi sono in numero finito).

(3) L'identità in (a) non è altro che una versione astratta ed infinitodimensionale del *teorema di Pitagora*. Mentre l'identità in (b) non è altro che la decomposizione di un vettore su una base ortonormale nel caso infinitodimensionale. Infine (c) esprime il prodotto scalare hermitiano eseguito su una base ortonormale infinitodimensionale in termini delle infinite componenti dei vettori.

(4) Esistono infinite basi hilbertiane per ogni spazio di Hilbert e, per un fissato spazio di Hilbert, hanno tutte la stessa cardinalità. Gli spazi di Hilbert che, come $L^2([-L/2, L/2], dx)$, ammettono una base hilbertiana numerabile sono detti essere **separabili**. Questa proprietà equivale alla proprietà topologica per lo spazio di Hilbert di ammettere un sottoinsieme denso e numerabile.

In riferimento alla serie di Fourier, risulta [Ru82] che vale il seguente teorema fondamentale.

Teorema 6.5. *L'insieme delle funzioni $e_n(x) := \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}}$, dove $x \in [-L/2, L/2]$, per $n \in \mathbb{N}$ individua una base Hilbertiana numerabile di $L^2([-L/2, L/2], dx)$.*

In riferimento alla definizione (6.28) dei coefficienti di Fourier di una funzione Lebesgue-misurabile a valori complessi $f : [-L/2, L/2] \rightarrow \mathbb{C}$ valgono in particolare i fatti seguenti.

(a) *Se $f \in \mathcal{L}^2([-L/2, L/2], dx)$ allora i coefficienti di Fourier f_n sono ben definiti e*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n|^2 < +\infty, \quad (6.31)$$

in tal caso vale anche:

$$\int_{[-L/2, L/2]} |f(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n|^2. \quad (6.32)$$

(b) *Se $f \in \mathcal{L}^2([-L/2, L/2], dx)$ allora*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{[-L/2, L/2]} \left| f(x) - \sum_{|n| \leq N} f_n \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} \right|^2 dx \rightarrow 0. \quad (6.33)$$

(c) *Se $f, g \in \mathcal{L}^2([-L/2, L/2], dx)$ e $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $\{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sono i rispettivi coefficienti di Fourier, allora:*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{g}_n f_n = \int_{[-L/2, L/2]} \overline{g(x)} f(x) dx \quad (6.34)$$

dove la serie a primo membro converge assolutamente. \diamond

Osservazioni 6.5.

(1) A meno di non interpretare la serie di Fourier come serie di *distribuzioni*, il senso più generale con il quale si intende la convergenza della serie (6.25) è quello in (6.33). Questo tipo di convergenza, detta **convergenza (della serie) in $L^2([-L/2, L/2], dx)$** . Si tratta della nozione di convergenza nella topologia normata indotta dalla norma $\|\cdot\|_2$ sopra definita. Si osservi che, come spiegato sopra, in questo caso la funzione f deve pensarsi come una classe di equivalenza di funzioni che differiscono su insiemi di misura nulla (alternativamente si può anche interpretare la $\|\cdot\|_2$ come una *seminorma* sullo spazio vettoriale complesso $\mathcal{L}^2([-L/2, L/2], dx)$ e, in questo caso, la convergenza della serie di Fourier è quella relativa alla topologia indotta da tale seminorma. Topologia che, come per tutte le seminorme che non sono norme, non è di Hausdorff).

(2) Tenuto conto delle relazioni (6.27), la proprietà (a) afferma proprio che la classe di funzioni $[-L/2, L/2] \ni x \mapsto e_n(x) := e^{i2\pi nx/L}/\sqrt{L}$, per $n \in \mathbb{Z}$, è una *base hilbertiana*, dello spazio di Hilbert $L^2([-L/2, L/2], dx)$. In particolare, le relazioni (6.27) non dicono altro che i vettori e_n formano un sistema ortonormale rispetto al prodotto scalare naturale (6.30) di $L^2([-L/2, L/2], dx)$:

$$(e_m | e_n) = \delta_{mn}.$$

Come precisato nell'osservazione precedente, la (6.33) si può trascrivere come:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| f - \sum_{|n| \leq N} f_n e_n \right\|_2 = 0, \quad (6.35)$$

che si trova scritta frequentemente come, semplicemente:

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e_n. \quad (6.36)$$

È importante notare che, in generale, la convergenza in L^2 *non implica la convergenza puntuale della serie*. Per questo motivo non abbiamo scritto l'argomento di f ed e_n in (6.36), le quali funzioni, tra l'altro, sono individuate a meno di insiemi di misura nulla.

(3) $L^2([0, L], dx)$ (che non è altro che $L^2([-L/2, L/2], dx)$ con una banale traslazione dell'asse x di $L/2$ e pertanto quanto stiamo per dire vale anche per $L^2([-L/2, L/2], dx)$ con ovvie modifiche) ammette altre due basi hilbertiane (quindi necessariamente numerabili) interessanti. Sono rispettivamente date da:

$$\left\{ s_n \mid s_n(x) := \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right), \quad x \in [0, L], \quad n = 1, 2, \dots \right\},$$

e

$$\left\{ c_n \mid c_n(x) := \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right), \quad x \in [0, L], \quad n = 0, 1, 2, \dots \right\},$$

per le quali valgono dunque, rispettivamente, $(s_m | s_n) = \delta_{mn}$ e $(c_m | c_n) = \delta_{mn}$ (vedi la sezione C in Appendice) insieme a $\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n|^2$, avendo definito, rispettivamente, $f_n := (s_n | f)$ oppure $f_n := (c_n | f)$ per ogni vettore $f \in L^2([0, L], dx)$.

6.3.2 Convergenza uniforme della serie di Fourier e derivazione sotto il simbolo di serie.

Dato che vogliamo sviluppare in serie di Fourier le soluzioni dell'equazione di D'Alembert e Klein-Gordon come suggerito dalla (6.24) siamo più che altro interessati alla convergenza *puntuale* della serie di Fourier ed alla possibilità di *derivare sotto il segno di serie* nella variabile x che appare nelle funzioni esponenziali che formano la base Hilbertiana (per quanto riguarda la derivabilità sotto il segno di serie nella variabile t useremo teoremi generali ricordati all'inizio delle dispense). Mostriamo come si possano ottenere serie di Fourier con queste proprietà rafforzando le ipotesi di regolarità delle funzioni sviluppate in serie di Fourier. Ricordiamo (vedi la definizione 1.3) che una funzione continua definita su $[a, b]$ si dice C^k **a tratti** su $[a, b]$ se esiste un numero finito di punti $a := t_1 < t_2 < \dots < t_m := b$, in modo tale che $f|_{[t_l, t_{l+1}]} \in C^k([t_l, t_{l+1}]; \mathbb{C})$ per $l = 0, \dots, m-1$ (quindi, in particolare, esistono le derivate sinistre e destre fino all'ordine k anche sui bordi di $[t_l, t_{l+1}]$ per (2) in osservazioni 1.1). Si osservi che, se $k > 0$, la derivata k -esima di f (pensata come derivata destra o sinistra agli estremi di ogni sottointervallo $[t_k, t_{k+1}])$

può non essere continua su $[a, b]$ ma i valori che essa assume formano un insieme limitato. Il primo risultato è stabilito nella seguente proposizione.

Proposizione 6.2. *Sia $N = 0, 1, \dots$ fissato e $f : [-L/2, L/2] \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione con i seguenti requisiti:*

- (i) $f \in C^N([-L/2, L/2]; \mathbb{C})$,
- (ii) f sia C^{N+1} a tratti su $[-L/2, L/2]$,
- (iii) f sia periodica su $[-L/2, L/2]$ con tutte le sue derivate fino alla derivata N -esima inclusa, cioè:

$$f(-L/2) = f(L/2), \quad \left. \frac{d^k f}{dx^k} \right|_{x=-L/2} = \left. \frac{d^k f}{dx^k} \right|_{x=L/2} \quad \text{se } k = 1, \dots, N.$$

Se f_n sono i coefficienti di Fourier di f dati da (6.28) e $f_n^{(k)}$ indica l'analogo coefficiente di Fourier della funzione $\frac{d^k f}{dx^k}$, allora vale quanto segue.

(a) Per $k = 0, 1, \dots, N + 1$, vale:

$$f_n^{(k)} = \left(\frac{2\pi i}{L} \right)^k n^k f_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (6.37)$$

(b) La serie di Fourier di f e delle sue derivate fino all'ordine $k = N + 1$ può essere derivata sotto il simbolo di serie (interpretando la convergenza delle serie nel senso di L^2), dato che risulta, per $k = 0, 1, \dots, N + 1$:

$$f_n^{(k)} \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} = \frac{d^k}{dx^k} \left(f_n \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} \right).$$

(c) Per $k = 0, 1, \dots, N$ vale:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^k |f_n| < +\infty. \quad (6.38)$$

◇

Dimostrazione. (a) Fissiamo $k = 1, \dots, N + 1$. Dalla (6.28) integrando per parti (su ogni sottointervallo chiuso nel quale esistono le derivate k -esime, se $k = N + 1$, e poi sommando i contributi dei vari sottointervalli) abbiamo che:

$$f_n^{(k)} = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{d^k f}{dx^k} \frac{e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} dx = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{k-1} f}{dx^{k-1}} \frac{e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} \right) dx - \int_{-L/2}^{L/2} \frac{d^{k-1} f}{dx^{k-1}} \frac{d}{dx} \frac{e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} dx.$$

Il secondo integrale da sinistra risulta essere nullo dato che:

$$[-L/2, L/2] \ni x \mapsto \frac{d^{k-1} f}{dx^{k-1}} \frac{e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}}$$

è una funzione periodica su $[-L/2, L/2]$ per ipotesi. Abbiamo trovato che:

$$f_n^{(k)} = - \int_{-L/2}^{L/2} \frac{d^{k-1} f}{dx^{k-1}} \frac{d}{dx} \frac{e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} dx .$$

Possiamo iterare $k - 1$ volte la procedura, con lo stesso risultato, fino ad ottenere, alla fine

$$f_n^{(k)} = (-1)^k \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \frac{d^k}{dx^k} \frac{e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} dx = (-1)^k \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \left(-i\frac{2\pi n}{L}\right)^k \frac{e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} dx .$$

Abbiamo quindi trovato che

$$f_n^{(k)} = \left(i\frac{2\pi n}{L}\right)^k \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \frac{e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} dx = \left(\frac{2\pi ni}{L}\right)^k \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \frac{e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} dx = \left(\frac{2\pi i}{L}\right)^k n^k f_n ,$$

che è la (6.37).

(b) Il calcolo diretto mostra che

$$\frac{d^k}{dx^k} \left(f_n \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} \right) = \left(\frac{2\pi i}{L}\right)^k n^k f_n \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} .$$

Da (a) abbiamo allora che, come enunciato nella tesi:

$$\frac{d^k}{dx^k} \left(f_n \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} \right) = f_n^{(k)} \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} .$$

Questo risultato implica banalmente che si possa derivare sotto il segno di serie, interpretando però la convergenza nel senso di L^2 , dato che lo sviluppo di Fourier di $\frac{d^k f}{dx^k}$ si scrive:

$$\frac{d^k}{dx^k} \sum_n f_n \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} = \frac{d^k f}{dx^k} = \sum_n f_n^{(k)} \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} = \sum_n \frac{d^k}{dx^k} \left(f_n \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} \right) .$$

Si osservi che le funzioni $d^k f/dx^k$ considerate sopra ammettono sviluppo di Fourier nel senso di $L^2([-L/2, L/2], dx)$ dato che appartengono a tale spazio essendo funzioni (misurabili) limitate, per costruzione, definite su un insieme di misura finita.

(c) Da (6.37) abbiamo anche che, se $n \neq 0$ e se $k = 1, \dots, N + 1$,

$$2 \left| n^{k-1} f_n \right| = 2 \left| n^k f_n \right| \frac{1}{|n|} = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^k 2 \frac{|f_n^{(k)}|}{|n|} \leq \left(\frac{L}{2\pi}\right)^k \left(|f_n^{(k)}|^2 + \frac{1}{n^2} \right) ,$$

dove abbiamo banalmente usato la disuguaglianza

$$0 \leq \left(|f_n^{(k)}| - \frac{1}{|n|} \right)^2 = |f_n^{(k)}|^2 + \frac{1}{n^2} - 2 \frac{|f_n^{(k)}|}{|n|} .$$

Concludiamo che, se $k - 1 = 0, 1, 2, \dots, N$ e dove $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |n^{k-1} f_n| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{L}{2\pi} \right)^k \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |f_n^{(k)}|^2 + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2} \right) < +\infty,$$

ossia cambiando il nome di $k - 1$ in k ed assumendo ora $k = 0, 1, 2, \dots, N$:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |n^k f_n| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{L}{2\pi} \right)^{k+1} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |f_n^{(k+1)}|^2 + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2} \right) < +\infty.$$

(Sommando su tutto \mathbb{Z} il risultato finale non cambia e si ottiene (6.38).) A commento del $< +\infty$, si osservi che la seconda serie a secondo membro converge come ben noto, mentre la prima serie a secondo membro converge per (a) del teorema 6.5, dato che ogni funzione $\frac{d^{k+1}f}{dx^{k+1}}$, per $k = 0, \dots, N$, essendo continua su un compatto (più precisamente per $k = N$ è continua su un numero finito di compatti la cui unione è $[-L/2, L/2]$), è limitata in valore assoluto da qualche numero $M_k < +\infty$ nelle nostre ipotesi e quindi è in $L^2([-L/2, L/2], dx)$, avendo $[-L/2, L/2]$ misura finita:

$$\int_{[-L/2, L/2]} \left| \frac{d^{k+1}f}{dx^{k+1}} \right|^2 dx \leq \int_{[-L/2, L/2]} M_k^2 dx = M_k^2 L < +\infty.$$

□

Abbiamo poi il seguente utile risultato che discende dalla precedente proposizione.

Proposizione 6.3. *Sia $N = 0, 1, \dots$ fissato e $f : [-L/2, L/2] \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione con i seguenti requisiti:*

- (i) $f \in C^N([-L/2, L/2]; \mathbb{C})$,
- (ii) f sia C^{N+1} a tratti su $[-L/2, L/2]$,
- (iii) f sia periodica su $[-L/2, L/2]$ con tutte le sue derivate fino alla derivata N -esima inclusa nel senso di (iii) della proposizione 6.2.

Allora gli sviluppi di Fourier, per $k = 0, 1, \dots, N$:

$$\frac{d^k f}{dx^k}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n^{(k)} \frac{e^{i \frac{2\pi n}{L} x}}{\sqrt{L}}$$

sono identità puntuali di funzioni e convergono puntualmente, assolutamente ed uniformemente su $[-L/2, L/2]$ (dove $f_n^{(k)}$ è l' n -esimo coefficiente di Fourier di $\frac{d^k f}{dx^k}$ (con $f_k^{(0)} := f_k$)).

In particolare, possiamo derivare N volte sotto il segno di serie lo sviluppo di Fourier di f in senso puntuale:

$$\frac{d^k f}{dx^k}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{d^k}{dx^k} \left(f_n \frac{e^{i \frac{2\pi n}{L} x}}{\sqrt{L}} \right) \quad \text{per ogni } x \in [-L/2, L/2]$$

per $k = 0, 1, \dots, N$. \diamond

Dimostrazione. Nelle ipotesi fatte, prendendo $k = 0$ in (6.38), abbiamo che

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n| < +\infty,$$

pertanto la serie di funzioni per $x \in [-L/2, L/2]$ (che sappiamo per ora solo convergere a f nel senso di L^2 ma non puntualmente)

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \frac{e^{i \frac{2\pi n}{L} x}}{\sqrt{L}}$$

è termine a termine dominata dalla serie di costanti convergente

$$\frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n| < +\infty,$$

dove abbiamo usato il fatto che $|e^{i \frac{2\pi n}{L} x}| = 1$. Come conseguenza di un ben noto teorema di Weierstrass, esisterà una funzione $g : [-L/2, L/2] \rightarrow \mathbb{C}$ con

$$g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \frac{e^{i \frac{2\pi n}{L} x}}{\sqrt{L}},$$

in cui la convergenza della serie è assoluta ed uniforme e quindi g è continua perché limite uniforme di funzioni continue. Si osservi che, moltiplicando per $\frac{e^{-i \frac{2\pi m}{L} x}}{\sqrt{L}}$ i due membri dell'identità trovata abbiamo lo sviluppo in serie con convergenza puntuale

$$g(x) \frac{e^{-i \frac{2\pi m}{L} x}}{\sqrt{L}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \frac{e^{i \frac{2\pi(n-m)}{L} x}}{\sqrt{L}}.$$

La convergenza è anche uniforme per lo stesso teorema usato precedentemente (gli esponenziali nella serie hanno modulo 1). Tenendo conto del fatto che le serie uniformemente convergenti di funzioni continue definite su compatti possono essere integrate sotto il segno di serie, concludiamo che:

$$g_m := \int_{-L/2}^{L/2} g(x) \frac{e^{-i \frac{2\pi m}{L} x}}{\sqrt{L}} dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \int_{-L/2}^{L/2} \frac{e^{i \frac{2\pi(n-m)}{L} x}}{L} dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \delta_{nm} = f_m$$

dove abbiamo fatto uso della (6.27). Ne segue che la funzione $g - f$ (che è in $\mathcal{L}^2([-L/2, L/2], dx)$ perché funzione continua su un compatto) ha coefficienti di Fourier $(g - f)_n = g_n - f_n$ che sono tutti nulli. Dalla (6.32) abbiamo immediatamente che:

$$\int_{[-L/2, L/2]} |f(x) - g(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 0 = 0.$$

Concludiamo che $|f(x) - g(x)|^2 = 0$ quasi ovunque, cioè $f(x) - g(x) = 0$ quasi ovunque. Data la continuità di f e g , dovrà essere $f(x) - g(x) = 0$ ovunque e cioè $f(x) = g(x)$ su $[-L/2, L/2]$. Abbiamo ottenuto che, *nel senso della convergenza puntuale*, vale su $[-L/2, L/2]$:

$$f(x) = (g(x) =) \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \frac{e^{i \frac{2\pi n}{L} x}}{\sqrt{L}}.$$

La convergenza è anche assoluta ed uniforme dato che la serie converge assolutamente ed uniformemente a g come visto sopra.

Se $N \geq 1$, possiamo fare lo stesso ragionamento anche per la serie, dove l'uguaglianza è al momento interpretata nel senso della sola convergenza in L^2 :

$$\frac{df}{dx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n^{(1)} \frac{e^{i \frac{2\pi n}{L} x}}{\sqrt{L}}.$$

Tenendo conto che, essendo per (6.37),

$$f_n^{(1)} = \frac{2\pi i}{L} n f_n,$$

deve valere:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n^{(1)}| = \frac{2\pi}{L} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n f_n| < +\infty,$$

dove abbiamo applicato (6.38) ristretta al caso $k = 1$. In questo modo, seguendo la stessa strada seguita per la serie della funzione f , si prova che la serie di Fourier di $\frac{df}{dx}$ converge assolutamente ed uniformemente a $\frac{df}{dx}$. Si procede nello stesso modo, usando (6.37) e (6.38) per ogni ordine di derivazione k fino a $k = N$ (e non oltre dato che non è assicurato che valga (6.38) per $k = N + 1$). Il punto (b) di Proposizione 6.2 prova infine l'ultima asserzione della proposizione in esame. \square

In realtà si può provare che la serie di Fourier converge puntualmente sotto ipotesi molto più deboli di quelle che abbiamo usato sopra (anche se questo non garantisce la convergenza uniforme). Si ha a tal proposito il seguente classico teorema di Dirichlet che citiamo senza dimostrazione.

Teorema 6.6. (Teorema di Dirichlet) *Sia $f : [-L/2, L/2] \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione con i seguenti requisiti:*

- (i) *sia limitata,*
 - (ii) *sia continua eccetto un numero finito di punti $x_k \in (-L/2, L/2)$, $k = 1, \dots, p$ in cui esistono finiti il limite destro $f(x_k^+)$ ed il limite sinistro $f(x_k^-)$,*
 - (iii) *ammetta in ogni punto derivata destra e sinistra, usando nei punti di discontinuità il limite destro e sinistro per il calcolo del rapporto incrementale da destra e da sinistra.*
- Sotto queste ipotesi la serie di Fourier di f (6.25), con coefficienti di Fourier dati da (6.28),*

soddisfa,

(a) per ogni $x \in (-L/2, L/2) \setminus \{x_1, \dots, x_p\}$:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \frac{e^{i \frac{2\pi n}{L} x}}{\sqrt{L}} = f(x), \quad (6.39)$$

(b) per ogni $k = 1, \dots, p$,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \frac{e^{i \frac{2\pi n}{L} x_k}}{\sqrt{L}} = \frac{f(x_k^-) + f(x_k^+)}{2}, \quad (6.40)$$

(c) per $x = \pm L/2$ la serie converge a $\frac{f(-L/2) + f(L/2)}{2}$. \diamond

6.3.3 Serie di Fourier in seni e coseni

Osserviamo che la teoria della serie di Fourier può essere sviluppata usando le funzioni trigonometriche invece che gli esponenziali complessi e ciò è particolarmente utile quando la funzione da sviluppare è reale, dato che i coefficienti dello sviluppo, che indicheremo sotto con α_n e β_n , risultano essere reali in tal caso. Si procede partendo dalla relazione:

$$e^{i \frac{2\pi n}{L} x} = \cos\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) + i \sin\left(\frac{2\pi n}{L} x\right). \quad (6.41)$$

Ammettendo che la serie di Fourier della funzione $f : [-L/2, L/2] \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \frac{e^{i \frac{2\pi n}{L} x}}{\sqrt{L}} \quad (6.42)$$

converga puntualmente e dove la serie è interpretata come il limite, per $N \rightarrow +\infty$, delle ridotte troncate a $|n| \leq N$, tenendo conto della (6.41), possiamo riscrivere la stessa serie come:

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\alpha_n \cos\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) + \beta_n \sin\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) \right), \quad (6.43)$$

dove, tenendo conto della definizione (6.28), semplicemente abbiamo definito, se $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$\alpha_0 := \frac{f_0}{\sqrt{L}}, \quad \alpha_n := \frac{f_n + f_{-n}}{\sqrt{L}}, \quad \beta_n := i \frac{f_n - f_{-n}}{\sqrt{L}}, \quad (6.44)$$

Dalla stessa definizione (6.28) risulta immediatamente che $f_{-n} = \overline{f_n}$ se f è una funzione reale. In tal caso, dalle definizioni (6.44) segue subito che i coefficienti α_n e β_n sono reali.

Ci si può chiedere se la (6.43) valga anche nel senso della nozione di convergenza nello spazio di Hilbert $L^2([-L/2, L/2], dx)$ quando la serie di Fourier a secondo membro di (6.43) non converge

puntualmente, ma f è comunque misurabile ed a quadrato sommabile. La risposta è positiva ed è basata sul fatto che l'insieme delle funzioni reali:

$$\frac{1}{\sqrt{L}}, \quad \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right), \quad \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

è una base hilbertiana dello spazio di Hilbert complesso $L^2([-L/2, L/2])$. In particolare valgono le relazioni di ortogonalità (vedi la sezione C in Appendice):

$$\int_{-L/2}^{L/2} \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx = \int_{-L/2}^{L/2} \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \sin\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx = \frac{L\delta_{nm}}{2}, \quad (6.45)$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \sin\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx = 0, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots \quad (6.46)$$

Tenuto conto di ciò, la norma L^2 della funzione f si esprime, sulla base detta, come:

$$\|f\|_2^2 = \int_{-L/2}^{L/2} |f(x)|^2 dx = \frac{L}{2} \left[2|\alpha_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2) \right].$$

Osservazioni 6.6. Abbiamo sempre lavorato sul segmento $[-L/2, L/2]$. Tuttavia, tenendo conto dell'invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue, segue facilmente che tutto quello che abbiamo visto può essere ripetuto per il segmento $[a, a + L]$ sostituendo sistematicamente $a, a + L$ a $-L/2, L/2$ negli estremi di integrazione di tutti gli integrali considerati (per esempio lo spazio di Hilbert rilevante sarà ora dato da $L^2([a, a + L], dx)$) e definendo tutte le funzioni trigonometriche (inclusi gli esponenziali immaginari) sul segmento $[a, a + L]$.

6.4 Il problema su $\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]$ con condizioni al bordo periodiche.

Consideriamo ora il problema di determinare le soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon o D'Alembert nell'insieme $\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]$ una volta imposte condizioni iniziali e condizioni di periodicità ai bordi del compatto $[-L/2, L/2]$. L'esistenza di soluzioni sarà provata facendo uso della teoria della serie di Fourier sviluppata precedentemente in particolare la proposizione 6.2 ed il la proposizione 6.3.

6.4.1 Teorema di unicità.

Abbiamo un primo teorema di unicità.

Teorema 6.7. *Si consideri il seguente problema su $\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]$ con $\mu \geq 0$ costante fissata,*

$$\begin{cases} -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \mu^2 \varphi = 0, & \varphi \in C^2(\mathbb{R} \times [-L/2, L/2], \mathbb{C}), \\ \varphi(t, -L/2) = \varphi(t, L/2), & \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, -L/2) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, L/2) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ \varphi(0, x) = \phi_0(x) & \forall x \in [-L/2, L/2], \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, x) = \phi_1(x) & \forall x \in [-L/2, L/2], \end{cases} \quad (6.47)$$

dove $\phi_0 \in C^2([-L/2, L/2], \mathbb{C})$ e $\phi_1 \in C^1([-L/2, L/2], \mathbb{C})$ sono funzioni assegnate che soddisfano le condizioni di periodicità³:

$$\phi_0(-L/2) = \phi_0(L/2), \quad \frac{\partial \phi_0}{\partial x}(-L/2) = \frac{\partial \phi_0}{\partial x}(L/2), \quad \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2}(-L/2) = \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2}(L/2) \quad (6.48)$$

e

$$\phi_1(-L/2) = \phi_1(L/2), \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(-L/2) = \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(L/2). \quad (6.49)$$

Se esiste una soluzione al problema posto, essa è unica. In particolare, se i dati iniziali ϕ_0 e ϕ_1 sono funzioni a valori reali, la soluzione φ , se esiste, è a valori reali. \diamond

Dimostrazione. Se una soluzione φ del problema, ammesso che esista, è complessa, possiamo sempre decomporla in parte reale ed immaginaria: $\varphi(t, x) = \text{Re}\varphi(t, x) + i\text{Im}\varphi(t, x)$. Data la natura reale dell'equazione di Klein-Gordon, avremo anche che la parte reale $\text{Re}\varphi$ e quella immaginaria $\text{Im}\varphi$, che sono funzioni *reali* con la stessa regolarità di φ , soddisfano la stessa equazione di Klein-Gordon separatamente. Inoltre soddisfano le condizioni al contorno di periodicità e si raccordano, separatamente, alle parti reali ed immaginarie dei dati iniziali per costruzione. In base a ciò è sufficiente provare il teorema di unicità nel caso di φ reale (cioè per la parte reale ed immaginaria di φ separatamente, quando φ è complessa). Assumiamo dunque di lavorare con funzioni reali soluzioni del problema considerato con dati iniziali reali. La dimostrazione della proprietà di unicità, è, escluso un punto, uguale a quella del teorema 5.1 ponendo $(\alpha, \beta) := \mathbb{R}$, $D := [-L/2, L/2]$. L'unica differenza è che ora, se ϕ è la differenza di due soluzioni del problema posto, l'identità:

$$\int_0^T dt \oint_{+\partial D} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla \phi \right) \cdot \mathbf{n} dS(x) = 0$$

³La terza delle condizioni in (6.48) deve essere imposta a causa delle condizioni di periodicità per φ scritte sopra e della forma dell'equazione differenziale stessa valutata a $t = 0$. Infatti derivando due volte nel tempo la richiesta $\varphi(t, -L/2) = \varphi(t, L/2)$ si ottiene $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(t, -L/2) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(t, L/2)$; tenendo conto che deve anche valere l'equazione differenziale $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \mu^2 \varphi$ ed anche $\varphi(t, -L/2) = \varphi(t, L/2)$, si trova che: $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, -L/2) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, L/2)$ e cioè, per $t = 0$, $\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2}(-L/2) = \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2}(L/2)$.

nella dimostrazione del teorema 5.1 si scrive ora nella forma semplificata che deriva dalla (5.20):

$$\int_0^T dt \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{L/2} - \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{-L/2} \right) = 0,$$

e questa identità vale banalmente in virtù delle condizioni di periodicità imposte sulle soluzioni del problema e quindi su ϕ .

Se la parte immaginaria dei dati iniziali è nulla, una soluzione del problema per la parte immaginaria di φ è la soluzione ovunque nulla. In base alla proprietà di unicità della soluzione, concludiamo che questa è l'unica soluzione e che quindi la parte immaginaria della soluzione (complessa a priori) φ è identicamente nulla. \square

6.4.2 Esistenza delle soluzioni per dati iniziali sufficientemente regolari.

Passiamo ad un teorema di esistenza per il problema (6.47) con i vincoli (6.48) e (6.49). In realtà dovremo rinforzare le condizioni di regolarità sui dati iniziali per poter usare i risultati presentati prima relativi alla serie di Fourier. In riferimento al problema (6.47) con i vincoli (6.48) e (6.49), supponiamo che una soluzione φ esista e che sia sviluppabile in serie di Fourier per ogni tempo $t \in \mathbb{R}$. In tal caso avremo uno sviluppo del tipo:

$$\varphi(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(t) \frac{e^{i \frac{2\pi n}{L} x}}{\sqrt{L}}. \quad (6.50)$$

Se la somma fosse finita le condizioni di periodicità in $\pm L/2$ sarebbero automaticamente soddisfatte per la forma delle funzioni esponenziali, discuteremo tra poco se ciò accade anche nel caso di infinite funzioni C_n non nulle. Vogliamo trovare la forma delle funzioni del tempo $C_n = C_n(t)$ in modo che l'equazione sia soddisfatta e poi le vogliamo fissare in modo tale da rispettare i dati iniziali. Assumendo che si possa derivare fino al secondo ordine sotto il segno di somma, risulta subito che:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \mu^2 \varphi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{i \frac{2\pi n}{L} x}}{\sqrt{L}} \left\{ -\frac{1}{c^2} \frac{d^2 C_n}{dt^2} - \left[\left(\frac{2\pi n}{L} \right)^2 + \mu^2 \right] C_n \right\} = 0.$$

Consideriamo allora il set infinito di equazioni:

$$\frac{d^2 C_n}{dt^2} = -c^2 \left[\left(\frac{2\pi n}{L} \right)^2 + \mu^2 \right] C_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (6.51)$$

Se i C_n le soddisfano, se il secondo membro di (6.50) converge puntualmente e se si possono passare sotto il segno di integrale le derivate di φ fino al secondo ordine dando luogo a funzioni continue (è richiesto che $\varphi \in C^2(\mathbb{R} \times [-L/2, L/2], \mathbb{C})$), allora il secondo membro di (6.50) definisce una soluzione dell'equazione di Klein-Gordon con le richieste condizioni di periodicità. Queste ultime valgono in quanto le funzioni $e^{i 2\pi n x / L}$ sono evidentemente periodiche con tutte le loro

derivate di ogni ordine, pertanto, somme di tali funzioni, incluso il caso di somme infinite se puntualmente convergenti, saranno ancora periodiche. Nel caso in esame, se la serie a secondo membro di (6.50) converge puntualmente e convergono le serie fino alle delle derivate prime in x (e si può scambiare l'operatore di derivata con il simbolo di serie), allora siamo sicuri che, fino alla derivate prime in x è soddisfatto il vincolo di periodicità ai bordi di $[-L/2, L/2]$ per la candidata soluzione (6.50).

In generale il candidato per la soluzione φ data dalla serie a secondo membro di (6.50) sarà a valori complessi. Tuttavia se le condizioni iniziali sono rappresentate da funzioni reali e se la soluzione rispetta tali condizioni iniziali, il secondo membro di (6.50) definisce una funzione reale come garantito dal teorema di unicità sopra dimostrato.

Le soluzioni di (6.51) sono tutte e sole della forma⁴

$$C_n(t) = C_n^{(+)} e^{-iE_n t} + C_{-n}^{(-)} e^{iE_n t}, \quad E_n := c\sqrt{\left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 + \mu^2}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (6.52)$$

se $\mu > 0$, dove $C_n^{(\pm)} \in \mathbb{C}$ sono costanti arbitrarie. Se $\mu = 0$, abbiamo le soluzioni di sopra quando $n \neq 0$, con la differenza che ora:

$$C_0(t) = At + C_0. \quad (6.53)$$

dove $A, C_0 \in \mathbb{C}$ sono costanti arbitrarie. In definitiva, un candidato soluzione per $\mu > 0$ è dato da

$$\varphi(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{C_n^{(+)}}{\sqrt{L}} e^{i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)} + \frac{C_{-n}^{(-)}}{\sqrt{L}} e^{i\left(\frac{2\pi n}{L}x + E_n t\right)} \right) \quad (6.54)$$

che può essere modificata nella popolare formula (che si trova sui libri di fisica teorica):

$$\varphi(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{C_n^{(+)}}{\sqrt{L}} e^{i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)} + \frac{C_n^{(-)}}{\sqrt{L}} e^{-i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)} \right) \quad (6.55)$$

dove, nel secondo esponenziale abbiamo scambiato n con $-n$, dato che la somma opera su tutto \mathbb{Z} e $E_n = E_{-n}$, ciò non altera il risultato, purché le due serie

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{C_n^{(+)}}{\sqrt{L}} e^{i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)} \quad \text{e} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{C_{-n}^{(-)}}{\sqrt{L}} e^{i\left(\frac{2\pi n}{L}x + E_n t\right)} \quad (6.56)$$

converghino separatamente, cosa che proveremo tra poco. Nel caso $\mu = 0$, il candidato soluzione si deve modificare in (dove abbiamo scritto A al posto di $\frac{A}{\sqrt{L}}$ dato che A è comunque una costante arbitraria),

$$\varphi(t, x) = At + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{C_n^{(+)}}{\sqrt{L}} e^{i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)} + \frac{C_{-n}^{(-)}}{\sqrt{L}} e^{i\left(\frac{2\pi n}{L}x + E_n t\right)} \right), \quad (6.57)$$

⁴Ricordiamo che la famiglia completa di soluzioni dell'equazione differenziale $f''(t) + bf'(t) + cf(t) = 0$, con $f \in C^2(\mathbb{C}; \mathbb{C})$, è data dalle funzioni $f(t) = C_1 e^{\chi_1 t} + C_2 e^{\chi_2 t}$ dove $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ sono costanti arbitrarie e χ_1, χ_2 sono le soluzioni, assunte essere distinte, dell'equazione algebrica $\chi^2 + b\chi + c = 0$. Nel caso $\chi_1 = \chi_2$ la famiglia completa di soluzioni è $f(t) = Ate^{t\chi_1} + Be^{t\chi_1}$ con $A, B \in \mathbb{C}$ costanti arbitrarie.

che può essere riscritta come

$$\varphi(t, x) = At + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{C_n^{(+)}}{\sqrt{L}} e^{i(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t)} + \frac{C_n^{(-)}}{\sqrt{L}} e^{-i(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t)} \right), \quad (6.58)$$

dove come prima, le due serie che si ottengono separando i due addendi nel termine generico della serie convergono separatamente, e $C_0 = C_0^{(+)} + C_0^{(-)}$. Si osservi che abbiamo trovato, nel caso $\mu = 0$, una forma di soluzione che è combinazione lineare di funzioni del tipo (6.23), come già discusso nella sezione 6.2. Sempre ammettendo che le due serie (6.56) convergono e che si possano derivare sotto il segno di somma nella variabile t , andiamo a valutare i coefficienti $C_{\pm n}^{(\pm)}$ in modo da soddisfare le condizioni iniziali. Da (6.54) e ricordando che $\varphi(0, x) = \phi_0(x)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, x) = \phi_1(x)$ abbiamo che deve essere

$$\phi_0(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{C_n^{(+)} + C_{-n}^{(-)}}{\sqrt{L}} e^{i\frac{2\pi n}{L}x}, \quad \phi_1(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} iE_n \frac{-C_n^{(+)} + C_{-n}^{(-)}}{\sqrt{L}} e^{i\frac{2\pi n}{L}x}. \quad (6.59)$$

La seconda formula ha un ulteriore addendo A a secondo membro se $\mu = 0$. Per ottenere la seconda identità abbiamo derivato in t sotto il segno di somma la serie in (6.54) assumendo che ciò fosse possibile, e poi abbiamo posto $t = 0$ nel risultato. Si osservi che le due espressioni trovate non sono altro che gli sviluppi di Fourier di ϕ_0 e ϕ_1 , i cui coefficienti di Fourier, rispettivamente, $\phi_{(0)n}$ e $\phi_{(1)n}$ sono stati scritti in funzione dei $C_n^{(\pm)}$. Più precisamente

$$\phi_{(0)n} = C_n^{(+)} + C_{-n}^{(-)}, \quad \phi_{(1)n} = iE_n(-C_n^{(+)} + C_{-n}^{(-)}) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \text{se } \mu > 0,$$

oppure

$$\phi_{(0)n} = C_n^{(+)} + C_{-n}^{(-)} \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \phi_{(1)n} = iE_n(-C_n^{(+)} + C_{-n}^{(-)}) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad \phi_{(1)0} = A \quad \text{se } \mu = 0,$$

Queste relazioni si invertono in:

$$C_n^{(+)} = \frac{1}{2}\phi_{(0)n} + \frac{i}{2E_n}\phi_{(1)n}, \quad C_{-n}^{(-)} = \frac{1}{2}\phi_{(0)n} - \frac{i}{2E_n}\phi_{(1)n} \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (6.60)$$

se $\mu > 0$. Se $\mu = 0$ le identità di sopra valgono solo per $n \neq 0$, e vale anche:

$$C_0^{(+)} + C_0^{(-)} = \phi_{(0)0}, \quad A = \sqrt{L}\phi_{(1)0}. \quad (6.61)$$

Se $\mu = 0$, non è necessario conoscere $C_0^{(+)}$ e $C_0^{(-)}$ separatamente ai fini della costruzione della soluzione φ , dato che nel secondo membro di (6.54) compare solo la loro somma $C_0^{(+)} + C_0^{(-)}$.

Nota. Possiamo riassumere tutto come segue. Supponiamo che i dati iniziali ϕ_0 e ϕ_1 (assunti soddisfare (6.48) e (6.49)) siano sviluppabili in serie di Fourier convergenti puntualmente alle stesse ϕ_0 e ϕ_1 . Consideriamo ancora la funzione φ definita dal secondo membro di (6.54) (o

(6.57) se $\mu = 0$) dove i coefficienti $C_{\pm n}^{(\pm)}$ soddisfano (6.60) (e (6.61) se $\mu = 0$). Se le due serie (6.56) in cui spezziamo la serie a secondo membro di (6.54) (o (6.57) se $\mu = 0$) convergono puntualmente e definiscono funzioni $C^2(\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]; \mathbb{C})$ le cui derivate fino al secondo ordine possono essere calcolate derivando sotto il simbolo di somma, allora φ definito in (6.55) (o (6.58) se $\mu = 0$) è una soluzione del problema (6.47). Tutte queste richieste sono soddisfatte pur di assumere che i dati iniziali siano sufficientemente regolari come chiarito nel seguente teorema.

Teorema 6.8. *Si consideri il problema con condizioni al contorno periodiche (6.47) per la funzione $\varphi \in C^2(\mathbb{R} \times [-L/2, L/2])$ con $\mu \geq 0$ costante fissata.*

Se si assume che i dati iniziali soddisfino $\phi_0 \in C^2([-L/2, L/2], \mathbb{C})$ di classe C^3 a tratti su $[-L/2, L/2]$ e $\phi_1 \in C^1([-L/2, L/2], \mathbb{C})$ di classe C^2 a tratti su $[-L/2, L/2]$ e che valgano le condizioni di periodicità sui dati iniziali (6.48) e (6.49), allora esiste (ed è unica) una soluzione φ al problema. φ è data dalla serie convergente puntualmente:

$$\varphi(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{C_n^{(+)}}{\sqrt{L}} e^{i(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t)} + \frac{C_n^{(-)}}{\sqrt{L}} e^{-i(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t)} \right),$$

se $\mu > 0$, oppure:

$$\varphi(t, x) = At + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{C_n^{(+)}}{\sqrt{L}} e^{i(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t)} + \frac{C_n^{(-)}}{\sqrt{L}} e^{-i(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t)} \right),$$

se $\mu = 0$. A secondo membro di entrambe le equazioni, $E_n := c\sqrt{(\frac{2\pi n}{L})^2 + \mu^2}$ e i coefficienti $C_n^{(\pm)}$ sono definiti da:

$$C_n^{(+)} = \frac{1}{2}\phi_{(0)n} + \frac{i}{2E_n}\phi_{(1)n}, \quad C_n^{(-)} = \frac{1}{2}\phi_{(0)-n} - \frac{i}{2E_n}\phi_{(1)-n} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

se $\mu \neq 0$. Se $\mu = 0$ le identità di sopra valgono solo per $n \neq 0$, e vale:

$$C_0^{(+)} + C_0^{(-)} = \phi_{(0)0}, \quad A := \sqrt{L}\phi_{(1)0},$$

infine, $\phi_{(0)n}$ e $\phi_{(1)n}$ sono, rispettivamente i coefficienti di Fourier dei dati iniziali ϕ_0 e ϕ_1 . \diamond

Dimostrazione. È sufficiente verificare che tutte le richieste formulate nella **Nota** scritta prima dell'enunciato di questo teorema siano soddisfatte. Bisogna quindi verificare i due seguenti fatti:

(a) che ϕ_0 e ϕ_1 siano sviluppabili in serie di Fourier convergenti puntualmente alle stesse ϕ_0 e ϕ_1 ;

(b) che le due serie (6.56) in cui spezziamo la serie a secondo membro di (6.54) (o (6.57) se $\mu = 0$) convergano puntualmente e definiscano funzioni $C^2(\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]; \mathbb{C})$ le cui derivate fino al secondo ordine possono essere calcolate derivando sotto il simbolo di somma.

Ci restringeremo a lavorare per $\mu > 0$, dato che la dimostrazione per l'altro caso è del tutto simile.

Prima di tutto notiamo che (a) è vero dato che i dati iniziali sono $C^1([-L/2, L/2]; \mathbb{C})$ e quindi vale la proposizione 6.3. Non resta ora che provare (b). Nelle ipotesi fatte sulla regolarità di ϕ_0 e ϕ_1 , abbiamo dalla proposizione 6.2 che

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^h |\phi_{(0) n}| < \infty \quad \text{se } h = 0, 1, 2, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^k |\phi_{(1) n}| < \infty \quad \text{se } k = 0, 1. \quad (6.62)$$

D'altra parte, usando la definizione (6.60), essendo $E_n := c\sqrt{\left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 + \mu^2}$, risulta che, per $|n|$ più grande di qualche fissato intero $M > 0$, $E_n > 1$ e quindi:

$$2 \left| C_{\pm n}^{(\pm)} e^{i\left(\frac{2\pi n}{L}x \mp E_n t\right)} \right| \leq |\phi_{(0) \pm n}| + \frac{1}{E_n} |\phi_{(1) \pm n}| \leq |\phi_{(0) \pm n}| + |\phi_{(1) \pm n}|.$$

Di conseguenza le serie di funzioni che appaiono in (6.54) (o (6.55)) sono dominate dalle serie di costanti positive convergenti, per (6.62), $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\phi_{(0) \pm n}| + |\phi_{(1) \pm n}|$. In base al teorema di Weistrass le due serie (6.56) in cui spezziamo la serie a secondo membro di (6.54) e quindi la serie stessa a secondo membro di (6.54), converge assolutamente ed uniformemente ad una funzione continua φ su $\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]$. Consideriamo ora la funzione definita in tal modo:

$$\varphi(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{C_n^{(+)}}{\sqrt{L}} e^{i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{C_{-n}^{(-)}}{\sqrt{L}} e^{i\left(\frac{2\pi n}{L}x + E_n t\right)}.$$

Studiamo separatamente ognuna delle due serie a secondo membro. Possiamo derivare sotto il segno di serie rispetto alla variabile x (o t) se la serie delle derivate rispetto a x (o t) dei termini generici della serie iniziale converge uniformemente. Si osservi le derivate in x e t dei termini generici della serie definente φ sono funzioni continue. Se riusciamo a dominare la serie delle derivate in x e quella in t con serie di costanti convergenti, ragionando esattamente come prima usando il teorema di Weistrass, abbiamo non solo che φ è derivabile in x e t (e le derivate si calcolano scambiando la serie con il simbolo di derivata corrispondente), ma anche che $\varphi \in C^1(\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]; \mathbb{C})$. Infatti, in tal caso, le derivate di φ in x e t risulterebbero essere limiti di serie di funzioni continue convergenti uniformemente.

Le due serie delle derivate in x forniscono, a parte costanti moltiplicative comuni inessenziali,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{n C_n^{(+)}}{\sqrt{L}} e^{i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{n C_{-n}^{(-)}}{\sqrt{L}} e^{i\left(\frac{2\pi n}{L}x + E_n t\right)}.$$

D'altra parte, usando la definizione (6.60), per $|n|$ più grande di qualche fissato intero $M' > 0$ vale anche $|n|/E_n \leq c'$, dato che $|n|/E_n$ tende ad un valore finito ℓ se $|n| \rightarrow +\infty$ (e quindi basta scegliere $c' \geq \ell$). Abbiamo allora:

$$2 \left| n C_{\pm n}^{(\pm)} e^{i\left(\frac{2\pi n}{L}x \mp E_n t\right)} \right| \leq |n \phi_{(0) \pm n}| + \frac{|n|}{E_n} |\phi_{(1) \pm n}| \leq |n \phi_{(0) \pm n}| + c' |\phi_{(1) \pm n}|.$$

Di conseguenza le due serie delle derivate in x (quella dei coefficienti $C_n^{(+)}$ e quella dei coefficienti $C_n^{(-)}$) sono dominate dalle due serie di costanti positive convergenti, per (6.62), date da

$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n\phi_{(0) \pm n}| + c' |\phi_{(1) \pm n}|$. In base al teorema di Weistrass la serie delle derivate in x converge assolutamente ed uniformemente ad una funzione continua $\tilde{\phi}$ su $\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]$. Inoltre tale funzione deve coincidere con $\partial_x \varphi(t, x)$ dato che siamo nelle ipotesi di poter scambiare la derivata con il simbolo di somma nella serie che definisce φ .

Le serie delle derivate in t forniscono, a parte costanti moltiplicative comuni inessenziali,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{E_n C_n^{(+)}}{\sqrt{L}} e^{i(\frac{2\pi n}{L} x - E_n t)} - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{E_n C_{-n}^{(-)}}{\sqrt{L}} e^{i(\frac{2\pi n}{L} x + E_n t)}.$$

D'altra parte, usando la definizione (6.60), per $|n|$ più grande di qualche fissato intero $N > 0$ vale anche $E_n/|n| \leq c''$ dato che $E_n/|n|$ tende ad un valore finito se $|n| \rightarrow +\infty$ e quindi:

$$\frac{2}{\sqrt{L}} \left| E_n C_{\pm n}^{(\pm)} e^{i(\frac{2\pi n}{L} x \mp E_n t)} \right| \leq |E_n \phi_{(0) \pm n}| + |\phi_{(1) \pm n}| \leq c'' |n \phi_{(0) \pm n}| + |\phi_{(1) \pm n}|.$$

Di conseguenza le due serie delle derivate in t (quella dei coefficienti $C_n^{(+)}$ e quella dei coefficienti $C_n^{(-)}$) sono dominate dalle due serie di costanti positive convergenti, per (6.62), date da $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c'' |n \phi_{(0) \pm n}| + |\phi_{(1) \pm n}|$. In base al teorema di Weistrass la serie delle derivate in t converge assolutamente ed uniformemente ad una funzione continua $\tilde{\varphi}'$ su $\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]$. Inoltre tale funzione deve coincidere con $\partial_t \varphi(t, x)$ dato che siamo nelle ipotesi di poter scambiare la derivata con il simbolo di somma nella serie che definisce φ . La procedura può essere ripetuta per le derivate seconde, incluse quelle miste, si vede subito, in tal caso che le serie delle derivate seconde (di tipo fissato) sono comunque dominate da serie di costanti del tipo

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} A |n^2 \phi_{(0) \pm n}| + B |n \phi_{(1) \pm n}|,$$

con $A, B > 0$ dipendenti dal tipo di derivate. Queste serie di costanti convergono per (6.62). Si conclude, con lo stesso ragionamento di sopra, che $\varphi \in C^2(\mathbb{R} \times [-L/2, L/2])$ e che la serie (6.55) che definisce φ si può derivare termine a termine fino alle derivate seconde. Questo è quanto volevamo e conclude la dimostrazione provando che

$$\begin{aligned} \varphi(t, x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{C_n^{(+)}}{\sqrt{L}} e^{i(\frac{2\pi n}{L} x - E_n t)} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{C_{-n}^{(-)}}{\sqrt{L}} e^{i(\frac{2\pi n}{L} x + E_n t)} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{C_n^{(+)}}{\sqrt{L}} e^{i(\frac{2\pi n}{L} x - E_n t)} + \frac{C_n^{(-)}}{\sqrt{L}} e^{-i(\frac{2\pi n}{L} x - E_n t)} \right) \end{aligned}$$

è una soluzione del problema considerato. Per $\mu = 0$ si prova la stessa cosa con banali modifiche per i coefficienti con $n = 0$. \square

Osservazioni 6.7. Il teorema di esistenza provato richiede ipotesi abbastanza forti sulla regolarità delle condizioni iniziali, sicuramente più forti di quelle usate nel precedente teorema

di unicità. Ciò è dovuto alla procedura utilizzata per mostrare che la soluzione formale dell'equazione, ottenuta come una serie di Fourier (la cui convergenza è in generale solo nel senso dello spazio di Hilbert L^2), si possa derivare fino all'ordine voluto. È possibile indebolire queste ipotesi adottando una procedura che si basa su tecniche matematiche più avanzate (vedi per esempio [V184]). In pratica si prova che la soluzione formale ottenuta come una serie di Fourier è una cosiddetta "soluzione debole" del problema (cioè una *distribuzione* o *funzione generalizzata* che risolve il problema di Cauchy considerato). Imponendo ipotesi di regolarità sui dati iniziali, si dimostra infine che tale funzione generalizzata è davvero una funzione differenziabile fino all'ordine voluto ed è pertanto una soluzione del problema di Cauchy in senso proprio.

6.4.3 Velocità di fase, frequenza, lunghezza d'onda.

Consideriamo la forma generale della soluzione per il problema con condizioni al bordo periodiche nella decomposizione della soluzione per il problema con condizioni periodiche in $[-L/2, L/2]$ per $\mu = 0$, cioè per l'equazione di D'Alembert:

$$\varphi(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{C_n^{(+)}}{\sqrt{L}} e^{i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)} + \frac{C_n^{(-)}}{\sqrt{L}} e^{i\left(\frac{2\pi n}{L}x + E_n t\right)} \right),$$

Trascuriamo pure il termine At che non ci interessa qui e teniamo conto del fatto che ora $E_n = c \frac{2\pi|n|}{L}$. Si vede subito che φ è una sovrapposizione di onde del tipo:

$$\cos\left(\frac{2\pi n}{L}(x - ct)\right) + i \sin\left(\frac{2\pi n}{L}(x - ct)\right) \quad \text{e} \quad \cos\left(\frac{2\pi n}{L}(x + ct)\right) + i \sin\left(\frac{2\pi n}{L}(x + ct)\right) \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Queste soluzioni hanno la stessa forma delle soluzioni dell'equazione di D'Alembert in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, cioè di soluzioni del tipo $f(x - ct)$ (onde progressive) oppure $g(x + ct)$ (onde regressive). Tuttavia ora, a parte la scelta di n , la loro forma funzionale è fissata: vedendole come funzioni reali, possono solo essere seni oppure coseni. Come nel caso della teoria in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, c rappresenta la velocità di propagazione di tali profili, in questo caso si dice **velocità di fase** dell'onda φ_n . Consideriamo la soluzione $\varphi_n := \sin\left(\frac{2\pi n}{L}(x - ct)\right)$, per le altre analoghe soluzioni si possono fare discorsi analoghi. Se *fissiamo un punto* $x \in [-L/2, L/2]$ ed osserviamo, in quel punto, come oscilla φ_n , essa avrà un **periodo** di oscillazione $T_n = L/(nc)$ dato che $\frac{ncT_n}{L} = 1$ e dopo tale tempo l'argomento $\left(\frac{2\pi n}{L}(x - ct)\right)$ della funzione sin differisce da quello iniziale di un addendo pari a 2π . La **frequenza dell'onda** φ_n è, per definizione, l'inverso di tale periodo $\nu_n := nc/L$. Se invece, *a tempo fissato*, fotografiamo l'onda φ_n , essa sarà descritta da un senoide di periodo spaziale $\lambda_n = L/n$, ragionando analogamente al caso del periodo temporale. Questo numero è detto **lunghezza d'onda** dell'onda φ_n . La lunghezza d'onda e la frequenza soddisfano la relazione, rispetto alla velocità di fase: $\lambda_n \nu_n = c$.

6.5 Il problema su $\mathbb{R} \times [0, L]$ con condizioni al bordo di annullamento (e di Dirichlet)

Consideriamo ora il problema di determinare le soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon o D'Alembert nell'insieme $\mathbb{R} \times [0, L]$, una volta imposte condizioni iniziali e condizioni di annullamento ai bordi del compatto $[0, L]$. Questo caso è fisicamente più interessante del precedente, dato che sistemi fisici comuni descritti dall'equazione di D'Alembert (es. le corde della chitarra), obbediscono a tali condizioni al contorno. L'esistenza di soluzioni sarà provata facendo uso della teoria della serie di Fourier sviluppata precedentemente. Alla fine discuteremo brevemente anche il caso di condizioni di Dirichlet generiche, dato che si può ricondurre al caso di condizioni di annullamento.

6.5.1 Teorema di unicità.

Abbiamo un primo teorema di unicità che si può enunciare in modo più generale anche ammettendo che l'equazione di Klein-Gordon abbia un termine di sorgente a secondo membro, lasciando immutata la dimostrazione, come è facile rendersi conto.

Teorema 6.9. *Si consideri il seguente problema su $\mathbb{R} \times [0, L]$ con $\mu \geq 0$ costante fissata,*

$$\begin{cases} -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \mu^2 \varphi = 0, & \varphi \in C^2(\mathbb{R} \times [0, L], \mathbb{C}), \\ \varphi(t, L) = \varphi(t, 0) = 0 & \forall t \in \mathbb{R}, \\ \varphi(0, x) = \phi_0(x) & \forall x \in [0, L], \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, x) = \phi_1(x) & \forall x \in [0, L], \end{cases} \quad (6.63)$$

dove $\phi_0 \in C^2([0, L], \mathbb{C})$ e $\phi_1 \in C^1([0, L], \mathbb{C})$ sono funzioni assegnate che soddisfano le condizioni di annullamento al bordo⁵:

$$\phi_0(0) = \phi_0(L) = 0, \quad \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2}(0) = \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2}(L) = 0 \quad (6.64)$$

e

$$\phi_1(0) = \phi_1(L) = 0. \quad (6.65)$$

Se esiste una soluzione al problema posto, essa è unica. In particolare, se i dati iniziali ϕ_0 e ϕ_1 sono funzioni a valori reali, la soluzione φ , se esiste, è a valori reali. \diamond

Dimostrazione. Se una soluzione φ del problema, ammesso che esista, è complessa, possiamo sempre decomporla in parte reale ed immaginaria: $\varphi(t, x) = \text{Re}\varphi(t, x) + i\text{Im}\varphi(t, x)$. Data la natura reale dell'equazione di Klein-Gordon, avremo anche che la parte reale $\text{Re}\varphi$ e quella immaginaria $\text{Im}\varphi$, che sono funzioni *reali* con la stessa regolarità di φ , soddisfano la stessa equazione

⁵La seconda delle condizioni in (6.64) deve essere imposta a causa delle condizioni di annullamento al bordo di φ scritte sopra e della forma dell'equazione differenziale stessa valutata a $t = 0$.

di Klein-Gordon separatamente. Inoltre soddisfano le condizioni al contorno di annullamento e si raccordano, separatamente, alle parti reali ed immaginarie dei dati iniziali per costruzione. In base a ciò è sufficiente provare il teorema di unicità nel caso di φ reale (cioè per la parte reale ed immaginaria di φ separatamente, quando φ è complessa). Assumiamo dunque di lavorare con funzioni reali soluzioni del problema considerato con dati iniziali reali. La dimostrazione della proprietà di unicità, è, escluso un punto, uguale a quella del teorema 5.1 ponendo $(\alpha, \beta) := \mathbb{R}$, $D := [0, L]$. L'unica differenza è che ora, se ϕ è la differenza di due soluzioni del problema posto, l'identità

$$\int_0^T dt \oint_{+\partial D} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla \phi \right) \cdot \mathbf{n} dS(x) = 0$$

nella dimostrazione del teorema 5.1 si scrive ora nella forma semplificata che deriva dalla (5.20):

$$\int_0^T dt \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_L - \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_0 \right) = 0,$$

e questa identità vale banalmente in virtù delle condizioni di annullamento al bordo imposte sulle soluzioni del problema e quindi su ϕ .

Se la parte immaginaria dei dati iniziali è nulla, una soluzione del problema per la parte immaginaria di φ è la soluzione ovunque nulla. In base alla proprietà di unicità della soluzione, concludiamo che questa è l'unica soluzione e che quindi la parte immaginaria della soluzione (complessa a priori) φ è identicamente nulla. \square

6.5.2 Esistenza delle soluzioni per dati iniziali sufficientemente regolari.

Passiamo ora ad un teorema di esistenza la cui dimostrazione sfrutta il teorema 6.8 di esistenza nel caso di condizioni al contorno periodiche ed un trucco piuttosto ingegnoso. Cominciamo con un lemma.

Lemma 6.3. *Nelle stesse ipotesi del teorema 6.7 di unicità per il problema con condizioni al bordo periodiche, se le condizioni iniziali ϕ_0 e ϕ_1 , oltre a soddisfare le ipotesi del teorema, sono funzioni dispari, allora la soluzione φ , se esiste, è anch'essa una funzione dispari nella variabile x , cioè:*

$$\varphi(t, x) = -\varphi(t, -x), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times [-L/2, L/2]. \quad (6.66)$$

◇

Dimostrazione. Sia φ la soluzione, ammesso che esista, del problema (6.47), con condizioni iniziali $\phi_0 \in C^2([-L/2, L/2], \mathbb{C})$ e $\phi_1 \in C^1([-L/2, L/2], \mathbb{C})$ date da funzioni dispari che soddisfano i vincoli al contorno (6.48) e (6.49). Consideriamo la funzione, definita su $\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]$:

$$\Phi(t, x) := \varphi(t, x) + \varphi(t, -x).$$

La soluzione φ è una funzione dispari nella variabile x se e solo se Φ è identicamente nulla. Dimostriamo che Φ è la funzione nulla se valgono le ipotesi del lemma. Si osservi che, per costruzione

$\Phi \in C^2(\mathbb{R} \times [-L/2, L/2], \mathbb{C})$. Inoltre, dato che nell'equazione di Klein-Gordon appaiono le derivate seconde unicamente, la funzione $(t, x) \mapsto \varphi(t, -x)$ soddisferà l'equazione di Klein Gordon (dato che è soddisfatta da φ), infine, come è facile verificare, dato che la riflessione $x \rightarrow -x$ è eseguita rispetto al centro del segmento $[-L/2, L/2]$, la funzione $(t, x) \mapsto \varphi(t, -x)$ sarà periodica (con la sua derivata prima spaziale) ai bordi di tale segmento, dato che lo è φ . Sommando membro a membro le due equazioni di Klein-Gordon per $\varphi(t, x)$ e $\varphi(t, -x)$, otteniamo che

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \mu^2 \Phi = 0.$$

Φ soddisferà anche le condizioni di periodicità ai bordi perché somma di funzioni periodiche. Per costruzione la funzione Φ soddisfa infine:

$$\Phi(0, x) = 0 \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t}(0, x) = 0, \quad \forall x \in [-L/2, L/2],$$

dato che le condizioni iniziali per φ sono per ipotesi delle funzioni dispari e quindi:

$$\Phi(0, x) = \varphi(0, x) + \varphi(0, -x) = \phi_0(x) + \phi_0(-x) = 0,$$

e anche

$$(\partial_t \Phi)(0, x) = (\partial_t \varphi)(0, x) + (\partial_t \varphi)(0, -x) = \phi_1(x) + \phi_1(-x) = 0.$$

In definitiva $\Phi \in C^2(\mathbb{R} \times [-L/2, L/2])$ soddisfa l'equazione di Klein-Gordon, con dati iniziali nulli e condizioni periodiche al bordo. Usando il teorema 6.9 concludiamo che questa deve essere l'unica soluzione del problema detto, ma allora deve coincidere con la soluzione banale data dalla funzione ovunque nulla, notando che la soluzione nulla risolve lo stesso problema (con le stesse condizioni iniziali ed al bordo). \square

Possiamo ora enunciare e provare il teorema di esistenza. L'idea della dimostrazione è trasformare il problema con condizioni al bordo di annullamento in un problema con condizioni al bordo periodiche, ma definito su un dominio spaziale più grande. La soluzione determinata nel dominio più grande, che sappiamo esistere per il teorema 6.8, ristretta al dominio iniziale, sarà la soluzione del problema.

Teorema 6.10. *Si consideri il problema con condizioni al contorno di annullamento (6.63) per la funzione $\varphi \in C^2(\mathbb{R} \times [0, L], \mathbb{C})$ con $\mu \geq 0$ costante fissata.*

Se si assume che i dati iniziali soddisfino $\phi_0 \in C^2([0, L], \mathbb{C})$ di classe C^3 a tratti su $[0, L]$ e $\phi_1 \in C^1([0, L], \mathbb{C})$ di classe C^2 a tratti su $[0, L]$ e che valgano le condizioni di annullamento al bordo sui dati iniziali (6.64) e (6.65), allora esiste (ed è unica) una soluzione φ al problema. \diamond

Dimostrazione. Prima di tutto notiamo che tutti i risultati che abbiamo provato fino ad ora su $\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]$, inclusi i teoremi di esistenza ed unicità in presenza di condizioni al bordo periodiche, valgono se si sostituisce $[-L/2, L/2]$ con un qualsiasi intervallo $[a, b]$, dove $a < b$. Anche le formule risolutive sono identiche con l'eccezione che il dominio d'integrazione $[-L/2, L/2]$ (per

esempio nel calcolo dei coefficienti di Fourier) deve essere ovviamente rimpiazzato da $[a, b]$, ed il parametro L che appare, per esempio, negli esponenti deve essere sostituito con $b - a$.

Lavoriamo sul segmento $[0, L]$ che poi raddoppieremo in $[-L, L]$ su cui applicheremo la teoria provata in $[-L/2, L/2]$ semplicemente rinominando $L/2$ come L . Estendiamo le funzioni ϕ_0 e ϕ_1 dal segmento $[0, L]$ a tutto il segmento $[-L, L]$ in modo tale che risultino funzioni dispari. Indichiamo le funzioni estese in questo modo con Φ_0 e Φ_1 . Ora passeremo dal problema con condizioni al bordo di annullamento su $[0, L]$ ad un nuovo problema sul segmento allargato $[-L, L]$ con condizioni al bordo *periodiche* del quale conosciamo già un teorema di esistenza. La soluzione che otterremo in quel caso, ristretta al dominio originale, sarà la soluzione del nostro problema.

Date le proprietà delle funzioni ϕ_0 e ϕ_1 di annullarsi in $x = 0$ e di essere, rispettivamente: C^2 e C^3 a tratti la prima, e C^1 e C^2 a tratti la seconda, con considerazioni elementari di analisi, si ha facilmente quanto segue. $\Phi_0 \in C^2([-L, L], \mathbb{C})$ (si noti che, riguardo alle derivate seconde, per il punto $x = 0$ vale la (6.64) che assicura che la derivata seconda in $x = 0$ esista e sia continua) ed è di classe C^3 a tratti su $[-L, L]$, $\Phi_1 \in C^1([-L, L], \mathbb{C})$ ed è di classe C^2 a tratti su $[-L, L]$. Infine sono soddisfatte le condizioni di periodicità al bordo di $[-L, L]$:

$$\Phi_0(-L) = \Phi_0(L) (= 0), \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial x}(-L) = \frac{\partial \Phi_0}{\partial x}(L), \quad \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2}(-L) = \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2}(L) (= 0)$$

e

$$\Phi_1(-L) = \Phi_1(L) (= 0), \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(-L) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(L).$$

Si noti che le condizioni scritte sulle derivate prime sono conseguenza del fatto che le funzioni Φ_0 e Φ_1 sono funzioni dispari e quindi le loro derivate prime (in x) sono funzioni pari, le rimanenti condizioni sono anche conseguenza delle condizioni di annullamento al bordo delle funzioni ϕ_0 e ϕ_1 . Possiamo allora invocare il teorema 6.8 che assicura l'esistenza di una funzione $\Phi \in C^2(\mathbb{R} \times [-L, L]; \mathbb{C})$ che soddisfi l'equazione di Klein-Gordon in tale insieme, che si raccordi con i dati iniziali Φ_0 e Φ_1 al tempo $t = 0$ e che soddisfi condizioni di periodicità

$$\Phi(t, -L) = \Phi(t, L), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, -L) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, L) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

La soluzione Φ è una funzione dispari in x per il lemma 6.3, dato che i dati iniziali sono funzioni dispari. Quindi, in particolare $\Phi(t, 0) = -\Phi(t, -0) = -\Phi(t, 0) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ per il fatto che Φ è dispari. Inoltre essendo Φ dispari ma anche periodica su $[-L, L]$, deve valere contemporaneamente $\Phi(t, L) = -\Phi(t, -L)$ e $\Phi(t, L) = \Phi(t, -L)$ e quindi $\Phi(t, L) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Se allora definiamo $\varphi(t, x) := \Phi|_{\mathbb{R} \times [0, L]}(t, x)$, questa funzione soddisfa per costruzione:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \mu^2 \varphi = 0, \quad \varphi \in C^2(\mathbb{R} \times [0, L], \mathbb{C}), \\ \varphi(t, 0) = \varphi(t, L) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ \varphi(0, x) = \phi_0(x) \quad \forall x \in [0, L], \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, x) = \phi_1(x) \quad \forall x \in [0, L]. \end{array} \right.$$

ed è quindi una soluzione del problema con condizioni al contorno di annullamento (6.63) con dati iniziali ϕ_0 e ϕ_1 . \square

Osservazioni 6.8.

(1) Studiamo la forma particolare dello sviluppo di Fourier della soluzione del problema considerato, *nel caso in cui il campo φ sia reale*, dato che si presta a qualche osservazione interessante dal punto di vista fisico, specialmente nel caso in cui $\mu = 0$, cioè per l'equazione di D'Alembert. Sotto opportune ipotesi di regolarità delle condizioni iniziali, la generica soluzione Φ del problema periodico su $\mathbb{R} \times [-L, L]$, come sappiamo dal teorema 6.8 è data dallo sviluppo di Fourier:

$$\Phi(t, x) = At + \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n^{(+)} \frac{e^{i\frac{\pi n}{L}x}}{\sqrt{2L}} e^{-iE_n t} + C_{-n}^{(-)} \frac{e^{i\frac{\pi n}{L}x}}{\sqrt{2L}} e^{iE_n t},$$

dove il termine At può apparire solo se $\mu = 0$. Pertanto partiamo con la generica soluzione:

$$\Phi(t, x) = At + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(C_n^{(+)} e^{-iE_n t} + C_{-n}^{(-)} e^{iE_n t} \right) \frac{e^{i\frac{\pi n}{L}x}}{\sqrt{2L}}, \quad (6.67)$$

dove $E_n = c\sqrt{\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 + \mu^2}$ considerando il caso generico $\mu \geq 0$. Dalla dimostrazione del teorema 6.10, sappiamo che la soluzione generica del problema con condizioni di annullamento al bordo su $[0, L]$ si ottiene restringendo la funzione Φ a $[0, L]$ sotto l'ipotesi che Φ sia *dispari*. Ma allora deve valere:

$$\Phi(t, x) = -\Phi(t, -x) = -At - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(C_n^{(+)} e^{-iE_n t} + C_{-n}^{(-)} e^{iE_n t} \right) \frac{e^{-i\frac{\pi n}{L}x}}{\sqrt{2L}}. \quad (6.68)$$

Sommando membro a membro con (6.67) e dividendo il risultato a metà si ottiene allora che:

$$\Phi(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(iC_n^{(+)} e^{-iE_n t} + iC_{-n}^{(-)} e^{iE_n t} \right) \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)}{\sqrt{2L}}. \quad (6.69)$$

Ora, tenendo conto del fatto che Φ è reale, possiamo ancora scrivere che:

$$\Phi(t, x) = \overline{\Phi(t, x)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\overline{iC_n^{(+)} e^{-iE_n t}} + \overline{iC_{-n}^{(-)} e^{iE_n t}} \right) \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)}{\sqrt{2L}}, \quad (6.70)$$

che, sommata membro a membro con (6.69), fornisce:

$$\Phi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} -Im \left(C_n^{(+)} e^{-iE_n t} + C_{-n}^{(-)} e^{iE_n t} \right) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right).$$

Se infine definiamo $C_{\pm n}^{(\pm)} = \alpha_n^{(\pm)} + i\beta_n^{(\pm)}$, e decomponiamo gli esponenziali complessi $e^{\pm iE_n t} = \cos(E_n t) + i \sin(E_n t)$, con un semplice calcolo, l'identità trovata si riduce a:

$$\Phi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[\left(\alpha_n^{(+)} - \alpha_n^{(-)} \right) \sin(E_n t) - \left(\beta_n^{(+)} + \beta_n^{(-)} \right) \cos(E_n t) \right] \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right).$$

Possiamo concludere che, per un' opportuna scelta delle costanti *reali* A_n e B_n etichettate su \mathbb{N} , la soluzione del problema con condizioni di annullamento al bordo di $[0, L]$ ha la struttura, se $(t, x) \in \mathbb{R} \times [0, L]$:

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} [A_n \sin(E_n t) + B_n \cos(E_n t)] \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right), \quad (6.71)$$

con $A_n = (\alpha_n^{(+)} - \alpha_n^{(-)}) - (\alpha_{-n}^{(+)} - \alpha_{-n}^{(-)})$ e $B_n = (\beta_{-n}^{(+)} + \beta_{-n}^{(-)}) - (\beta_n^{(+)} + \beta_n^{(-)})$ e dove abbiamo ommesso i termini con $n = 0$ dato che non forniscono alcun contributo essendo $\sin(\pi 0 x/L) = 0$, inoltre abbiamo tenuto conto del fatto che $E_n = E_{-n}$, $\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) = -\sin\left(\frac{-\pi n x}{L}\right)$ e questo consente di sommare sui naturali invece che sugli interi raccogliendo i coefficienti opportunamente.

Per inciso, come segue subito dalla (6.69) cambiando nome ai coefficienti e raccogliendoli tenendo ancora conto del fatto che $E_n = E_{-n}$ e che $\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) = -\sin\left(\frac{-\pi n x}{L}\right)$, la (6.71) vale banalmente anche nel caso in cui si lavori con soluzioni complesse, pur di pensare i coefficienti A_n e B_n come numeri complessi. Infine, usando la formula di Eulero nell'espressione trovata (con A_n e B_n complessi), si ha anche che la soluzione generale complessa si può riscrivere come:

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} [D_n^{(+)} e^{-iE_n t} + D_n^{(-)} e^{iE_n t}] \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right), \quad (6.72)$$

dove, ancora, $D_n^{(\pm)} \in \mathbb{C}$ (l'unica differenza sostanziale con la (6.69) è che ora la somma su n è eseguita solo sui naturali non nulli invece che su \mathbb{Z}).

Tornando a (6.71), nel caso esplicitamente reale, mostriamo ora come individuare i coefficienti A_n e B_n in funzione dei dati iniziali. Con la stessa procedura che abbiamo usato nella dimostrazione del teorema 6.8 si riesce facilmente a dimostrare che la serie di sopra converge uniformemente, si può derivare sotto il segno di somma nella variabile t ottenendo una serie che converge ancora uniformemente:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} [A_n \cos(E_n t) - B_n \sin(E_n t)] E_n \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right).$$

Specializzando le due serie per $t = 0$ si ha allora il legame con i dati iniziali:

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} B_n \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right), \quad \phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} E_n A_n \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right).$$

Moltiplicando entrambe le espressioni per $\sin\left(\frac{\pi m x}{L}\right)$ ed integrando su $[0, L]$, passando il simbolo di integrale sotto quello di serie, dato che ciò è concesso per via della uniforme convergenza della serie, si trova infine:

$$B_n = \sqrt{\frac{8}{L}} \int_0^L \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \phi_0(x) dx, \quad A_n = \sqrt{\frac{8}{L E_n^2}} \int_0^L \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \phi_1(x) dx \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad (6.73)$$

dove abbiamo tenuto conto dell'identità (vedi la sezione C in Appendice)

$$\int_0^L \sin\left(\frac{\pi m x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{nm}, \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

(2) Consideriamo esplicitamente il caso dell'equazione di D'Alembert, $\mu = 0$, per cui $E_n = c \left| \frac{\pi n}{L} \right|$. In questo caso φ si può pensare come la deformazione trasversale di una corda oscillante con estremi bloccati alla stessa quota sul segmento $[0, L]$. La decomposizione (6.71) di $\varphi(t, x)$ è interessante perché non è data in termini di onde regressive o progressive, come quelle che appaiono nella decomposizione della soluzione per il problema con condizioni periodiche in $[0, L]$:

$$e^{\pm i\left(\frac{2\pi n}{L}x - iE_n t\right)} = \cos\left(\frac{2\pi n}{L}(x - ct)\right) \pm i \sin\left(\frac{2\pi n}{L}(x - ct)\right) \quad \text{con } n > 0,$$

$$e^{\pm i\left(\frac{2\pi n}{L}x - iE_n t\right)} = \cos\left(\frac{2\pi n}{L}(x + ct)\right) \pm i \sin\left(\frac{2\pi n}{L}(x + ct)\right) \quad \text{se } n < 0.$$

Invece appaiono soluzioni dette **onde stazionarie** o **armoniche** (che non si vedono “propagare” nelle due direzioni come invece accade nel caso di condizioni periodiche):

$$u_n(t, x) = A_n \sin\left(\frac{c\pi n}{L}t\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) + B_n \cos\left(\frac{c\pi n}{L}t\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \quad (6.74)$$

Queste onde hanno frequenze temporale:

$$\nu_n = \frac{cn}{2L},$$

dette **frequenze proprie** o **frequenze di risonanza** della corda. Analogamente a quanto fatto per le condizioni periodiche si definisce anche una **lunghezza d'onda** associata a ciascuna onda stazionaria (il periodo spaziale ciascuno dei due addendi a secondo membro di (6.74)) etichettata dal numero naturale n , con lo stesso significato fisico che per le soluzioni elementari con condizioni periodiche,

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}.$$

Si osservi che vale ancora

$$\lambda_n \nu_n = c.$$

A differenza delle soluzioni elementari analoghe trovate per lo sviluppo delle soluzioni con condizioni periodiche, nelle onde stazionarie vi sono punti nello spazio (tra i quali gli estremi del segmento $[0, L]$), detti **nodi**, in cui *le onde si annullano per ogni valore del tempo*. Le $n + 1$ posizioni $x_k^{(n)}$ dei nodi sono ottenute risolvendo $\sin(\pi n x_k^{(n)}/L) = 0$ su $[0, L]$ ed ottenendo quindi, per ogni fissato $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x_k^{(n)} = \frac{k}{n}L$ per $k = 0, 1, \dots, n$.

Un altro modo di scrivere la (6.74) è:

$$C_n \sin\left(\frac{c\pi n}{L}t + \delta_n\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \quad (6.75)$$

dove abbiamo introdotto le **fasi** $\delta_n \in (-\pi, \pi]$ e le **ampiezze** $C_n \geq 0$. Sviluppando la prima delle due funzioni seno, si ricavano le relazioni che legano i coefficienti reali C_n, δ_n ai coefficienti reali A_n, B_n :

$$C_n \cos \delta_n = A_n, \quad C_n \sin \delta_n = B_n.$$

La corrispondenza tra le coppie $(C_n, \delta_n) \in (0, +\infty) \times (-\pi, \pi]$ e le coppie $(A_n, B_n) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ risulta essere biunivoca⁶.

(3) Il teorema di esistenza provato richiede ipotesi abbastanza forti sulla regolarità delle condizioni iniziali, sicuramente più forti di quelle usate nel precedente teorema di unicità. È però possibile indebolire queste ipotesi usando procedure matematiche più avanzate esattamente come già osservato per il caso del problema con dati al bordo periodici.

6.5.3 Il caso di condizioni al bordo di Dirichlet

Passiamo a considerare brevemente il caso di condizioni di Dirichlet generiche invece che di annullamento e con termine di sorgente. Studieremo il problema dell'esistenza della soluzione nel prossimo capitolo in un ambiente più generale. Ci restringiamo qui a provare un teorema di unicità.

Teorema 6.11. *Si consideri il seguente problema su $\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]$ con $\mu \geq 0$ costante fissata,*

$$\begin{cases} -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \mu^2 \psi = h, & \psi \in C^2(\mathbb{R} \times [-L/2, L/2], \mathbb{C}), \\ \psi(t, L/2) = f(t), \quad \psi(t, -L/2) = g(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ \psi(0, x) = \psi_0(x) \quad \forall x \in [-L/2, L/2], \\ \frac{\partial \psi}{\partial t}(0, x) = \psi_1(x) \quad \forall x \in [-L/2, L/2], \end{cases} \quad (6.76)$$

dove $h \in C^0([-L/2, L/2], \mathbb{C})$, $\psi_0 \in C^2([-L/2, L/2], \mathbb{C})$, $\psi_1 \in C^1([-L/2, L/2], \mathbb{C})$, $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ sono funzioni assegnate che soddisfano le condizioni⁷:

$$\psi_0(-L/2) = f(0), \quad \psi_0(L/2) = g(0),$$

$$\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2}(-L/2) = \frac{1}{c^2} f''(0) + \mu^2 f(0) + h(0, -L/2), \quad \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2}(L/2) = \frac{1}{c^2} g''(0) + \mu^2 g(0) + h(0, L/2) \quad (6.77)$$

e

$$\psi_1(L/2) = f'(0), \quad \psi_1(-L/2) = g'(0). \quad (6.78)$$

Se esiste una soluzione al problema posto, essa è unica. In particolare, se i dati iniziali ψ_0, ψ_1, h e f, g sono funzioni a valori reali, la soluzione ψ , se esiste, è a valori reali. \diamond

⁶Non è altro che la corrispondenza che associa coordinate polari piane e coordinate cartesiane piane.

⁷La seconda riga delle condizioni in (6.77) deve essere imposta a causa delle condizioni al bordo di ψ scritte sopra e della forma dell'equazione differenziale stessa valutata a $t = 0$.

Dimostrazione. È la stessa data per il teorema 6.9, dato che la differenza di due soluzioni del problema considerato è una funzione che risolve il problema con condizioni al bordo di annullamento e in assenza di sorgente. \square .

Per quanto riguarda l'esistenza delle soluzioni proviamo che la questione può essere riportata al problema con dati al bordo nulli, a parità di tutte le altre condizioni. Vale infatti la seguente proposizione.

Proposizione 6.4. *Si consideri il problema su $\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]$ con condizioni di Dirichlet dato dalla (6.76) assumendo le condizioni (6.77) e (6.78). ψ è una soluzione di tale problema se e solo se la funzione:*

$$\varphi(t, x) := \psi(t, x) - \frac{L-2x}{2L}f(t) - \frac{L+2x}{2L}g(t)$$

soddisfa il problema con condizioni di annullamento al bordo dato dalla

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \mu^2 \varphi = k, \quad \varphi \in C^2(\mathbb{R} \times [-L/2, L/2], \mathbb{C}), \\ \varphi(t, -L/2) = \varphi(t, L/2) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ \varphi(0, x) = \phi_0(x) \quad \forall x \in [-L/2, L/2], \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, x) = \phi_1(x) \quad \forall x \in [-L/2, L/2], \end{array} \right. \quad (6.79)$$

dove $\phi_0 \in C^2([-L/2, L/2], \mathbb{C})$ e $\phi_1 \in C^1([-L/2, L/2], \mathbb{C})$ sono funzioni assegnate che soddisfano le condizioni di annullamento al bordo e con condizioni iniziali:

$$\phi_0(x) = \psi_0(x) - \frac{L-2x}{2L}f(0) - \frac{L+2x}{L}g(0), \quad \phi_1(x) = \psi_1(x) - \frac{L-2x}{2L}f'(0) - \frac{L+2x}{L}g'(0),$$

e termine di sorgente:

$$k(t, x) = h(t, x) - \frac{1}{c^2} \left[\frac{L-2x}{2L}f''(t) + \frac{L+2x}{2L}g''(t) \right] - \mu^2 \left[\frac{L-2x}{2L}f(t) + \frac{L+2x}{2L}g(t) \right].$$

Dimostrazione. La dimostrazione si esegue immediatamente per verifica diretta. \square

Capitolo 7

Introduzione ai metodi dell'analisi spettrale e qualche applicazione all'acustica musicale.

In questo capitolo introdurremo alcune idee base delle procedure di soluzione dell'equazione di D'Alembert basate sulla teoria spettrale dell'operatore di Laplace. Alla fine useremo alcuni dei risultati trovati in questo e nel precedente capitolo per introdurre, molto generalmente, qualche elemento di acustica fisica. In particolare discuteremo, in modo un po' idealizzato, il funzionamento di alcuni strumenti musicali.

7.1 Generalizzazione della procedura di soluzione con la serie di Fourier su domini più generali.

Consideriamo il caso in cui si voglia studiare l'equazione di D'Alembert per una funzione $u = u(t, \mathbf{x})$ di classe $C^2(\mathbb{R} \times \overline{D})$, in generale con sorgente $S = S(t, \mathbf{x})$ assegnata di classe $C^0(\mathbb{R} \times \overline{D})$:

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta_{\mathbf{x}} u = S(t, \mathbf{x}), \quad (7.1)$$

dove $D \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme aperto connesso a chiusura compatta con bordo dato da una superficie $n-1$ dimensionale $C^{\infty 1}$, orientabile, richiedendo che le soluzioni soddisfino condizioni di Dirichlet di annullamento su ∂D :

$$u|_{\partial D}(t, \mathbf{x}) = 0 \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}. \quad (7.2)$$

Tale richiesta implica che debba valere la condizione di compatibilità $S|_{\partial D}(t, \mathbf{x}) = 0$. Supporremo infine che valgano condizioni iniziali $u_0 \in C^2(\overline{D})$ e $u_1 \in C^1(\overline{D})$ compatibili con le condizioni

¹Quasi tutto quello che diremo funziona anche se tale superficie è C^∞ a tratti come vedremo nel caso particolare in cui $D \subset \mathbb{R}^2$ è un rettangolo (e ∂D è una curva). Dato il carattere elementare di questo corso non entreremo in questo genere di dettagli matematici.

di annullamento al bordo:

$$u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, \mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x}) \quad \text{per ogni } \mathbf{x} \in \overline{D}. \quad (7.3)$$

Anche se ci limiteremo alla situazione sopra esposta, si potrebbero fare considerazioni analoghe per altri tipi di condizioni al bordo; quanto diremo si può inoltre estendere facilmente al caso dell'equazione di Klein-Gordon.

Nella casistica che considereremo ricade in particolare la teoria della corda vibrante ad estremi fissi discussa nel capitolo precedente; in tal caso $\overline{D} = [0, L]$ e u rappresenta la (piccola) deformazione trasversale della corda. La teoria che considereremo include anche il caso di una membrana (di estensione limitata) vibrante a bordo fissato (vedi la sezione 5.1). In tal caso $D \subset \mathbb{R}^2$ è la proiezione sul piano orizzontale della membrana e u misura la (piccola) deformazione verticale (trasversale) della membrana. Il bordo della membrana è tenuto fermo, cioè u si annulla su ∂D . Nel seguito ci occuperemo di descrivere una procedura che porta a costruire esplicitamente una soluzione della (7.1) per assegnati dati iniziali (7.3) e quando siano soddisfatte le condizioni al bordo (7.2). Tuttavia non potremo entrare in tutti i dettagli matematici necessari, dato che ciò richiederebbe tecniche avanzate di analisi funzionale ed in particolare di *teoria spettrale* [Mo18]. In ogni caso le idee che esporremo saranno sufficienti per descrivere il fenomeno fisico della *risonanza* che ha importanti conseguenze in fisica.

7.1.1 Autofunzioni del laplaciano con condizioni di Dirichlet e serie di Fourier generalizzata.

Assumendo che l'insieme $D \subset \mathbb{R}^n$ sia scelto come precisato sopra, definiamo il dominio per l'operatore di Laplace in modo da tenere automaticamente conto delle condizioni di annullamento al bordo (estendendo la teoria al caso di funzioni a valori complessi):

$$\mathcal{D} := \{f \in C^1(\overline{D}; \mathbb{C}) \cap C^2(D; \mathbb{C}) \mid f|_{\partial D} = 0, \Delta f \in \mathcal{L}^2(\overline{D}, d^n x)\} \quad (7.4)$$

Questo insieme è evidentemente uno spazio vettoriale complesso.

Consideriamo l'operatore di Laplace $\Delta : \mathcal{D} \rightarrow C^0(\overline{D}; \mathbb{C})$. Su questo dominio l'operatore Δ è **hermitiano** rispetto al prodotto scalare di $L^2(\overline{D}; d^n x)$, cioè vale:

$$(f|\Delta g) = (\Delta f|g) \quad \text{se } f, g \in \mathcal{D}, \quad (7.5)$$

dato che ciò equivale a scrivere:

$$\int_D \overline{f} \Delta g \, d^n x = \int_D \overline{\Delta f} g \, d^n x \quad \text{se } f, g \in \mathcal{D}, \quad (7.6)$$

che, a sua volta, segue immediatamente dalla definizione di \mathcal{D} e dalla seconda identità di Green del teorema 2.7 dato che²

$$\int_D \overline{f} \Delta g \, d^n x - \int_D \overline{\Delta f} g \, d^n x = \oint_{+\partial D} (\overline{f} \nabla g - g \nabla \overline{f}) \cdot n \, dS = 0 \quad \text{essendo } f = g = 0 \text{ su } \partial D.$$

²Notare che $\overline{\Delta f} g$ e $\overline{f} \Delta g$ sono in $\mathcal{L}^1(\overline{D}, d^n x)$ dato che $\Delta f, \Delta g \in \mathcal{L}^2(\overline{D}, d^n x)$ per ipotesi e $f, g \in \mathcal{L}^2(\overline{D}, d^n x)$ essendo funzioni continue su un compatto.

Un'**autofunzione** ϕ_λ di Δ con il dominio detto è una funzione in \mathcal{D} (a valori complessi quindi) non identicamente nulla tale che valga l'identità:

$$\Delta\phi_\lambda = \lambda\phi_\lambda, \quad (7.7)$$

per qualche $\lambda \in \mathbb{C}$, detto **autovalore** di ϕ_λ .

Si osservi che se ϕ_λ è autofunzione associata a λ , ogni altra funzione $c\phi_\lambda$, con $c \in \mathbb{C}$ e $c \neq 0$ è ancora autofunzione dello stesso autovalore. Tuttavia tutte queste autofunzioni sono *linearmente dipendenti* per costruzione quando viste come vettori nello spazio vettoriale complesso \mathcal{D} . Comunque, in generale, può capitare di avere più autofunzioni *linearmente indipendenti* associate allo stesso autovalore. Il sottospazio vettoriale di \mathcal{D} generato dalle autofunzioni di un fissato autovalore si dice **autospazio** di quell'autovalore.

Proposizione 7.1. *Coseguentemente alle ipotesi fatte su D ed alla definizione di \mathcal{D} valgono i seguenti fatti:*

- (a) *gli autovalori di Δ sono reali,*
- (b) *gli autovalori di Δ sono strettamente negativi,*
- (c) *le autofunzioni corrispondenti ad autovalori differenti sono ortogonali.*
- (d) *le autofunzioni sono funzioni $C^\infty(D)$ (più fortemente sono funzioni analitiche su tale insieme aperto). \diamond*

Dimostrazione. Per quanto riguarda la prova di (a) e (b) abbiamo che:

$$\begin{aligned} \lambda(\phi_\lambda|\phi_\lambda) &= (\phi_\lambda|\Delta\phi_\lambda) = \int_D \overline{\phi_\lambda} \Delta\phi_\lambda \, d^n x = \int_D \nabla \cdot (\overline{\phi_\lambda} \nabla\phi_\lambda) \, d^n x - \int_D \nabla\overline{\phi_\lambda} \cdot \nabla\phi_\lambda \, d^n x \\ &= - \int_D \overline{\nabla\phi_\lambda} \cdot \nabla\phi_\lambda \, d^n x, \end{aligned}$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo trascurato un integrale dato che è nullo come banale conseguenza del teorema della divergenza e del fatto che ϕ_λ si annulla su ∂D . Abbiamo ottenuto:

$$\lambda \int_D |\phi_\lambda|^2 \, d^n x = - \int_D \|\nabla\phi_\lambda\|^2 \, d^n x.$$

Si osservi che l'integrale a primo membro è strettamente positivo, dato che, per ipotesi ϕ_λ non è ovunque nulla (che equivale a dire che non è quasi ovunque nulla dato che è continua). Ne segue che $-\lambda \geq 0$. Se fosse $\lambda = 0$, la stessa identità trovata sopra proverebbe che $\nabla\phi_\lambda = 0$ quasi ovunque e quindi ovunque, dato che $\phi_\lambda \in C^1(\overline{D}; \mathbb{C})$. Di conseguenza avremmo che ϕ_λ sarebbe costante sull'aperto connesso D . Il fatto che ϕ_λ si annulli sul bordo insieme all'ipotesi di continuità su tutto \overline{D} implicherebbero che $\phi_\lambda = 0$ ovunque, cosa impossibile.

Per provare (c) basta osservare che, dalla definizione di autofunzione:

$$(\lambda - \lambda') \int_D \overline{\phi_\lambda} \phi_{\lambda'} \, d^n x = \int_D [(\Delta\overline{\phi_\lambda}) \phi_{\lambda'} - \overline{\phi_\lambda} \Delta\phi_{\lambda'}] \, d^n x = 0$$

a causa, come prima, della seconda identità di Green. Se $\lambda \neq \lambda'$, l'identità trovata implica che deve valere necessariamente:

$$(\phi_\lambda | \phi_{\lambda'}) := \int_D \overline{\phi_\lambda(x)} \phi_{\lambda'}(x) d^n x = 0.$$

Riguardo alla prova di (d), possiamo lavorare separatamente con la parte reale ed immaginaria delle autofunzioni dato che gli autovalori λ e i coefficienti di Δ sono reali. Se dunque $\Delta\phi_\lambda - \lambda\phi_\lambda = 0$ (con $\lambda \leq 0$), la funzione $\Phi = \Phi(x, \mathbf{x}) := e^{\sqrt{-\lambda}x} \phi_\lambda(\mathbf{x})$ è armonica in $n + 1$ variabili sull'aperto connesso $\Omega := \mathbb{R} \times D$, come si verifica subito calcolandone il laplaciano in $n + 1$ variabili che risulta essere

$$\Delta_{(x, \mathbf{x})} \Phi(x, \mathbf{x}) = e^{\sqrt{-\lambda}x} (\Delta_{\mathbf{x}} \phi_\lambda - \lambda \phi_\lambda) = 0.$$

Φ è dunque analitica reale su Ω per il Teorema 3.3, in particolare è C^∞ sul suo dominio. La funzione $\phi_\lambda = \phi_\lambda(\mathbf{x}) = e^{-\sqrt{-\lambda}x} \Phi(x, \mathbf{x})$, che è costante nella variabile x , è quindi una funzione C^∞ e analitica su D , in particolare C^∞ . \square

L'insieme degli *autovalori* di Δ costituisce il cosiddetto **spettro puntuale** di Δ , che si indica con $\sigma_p(\Delta)$. Si osservi che gli elementi di tale insieme dipendono strettamente dal dominio che abbiamo scelto per Δ .

Osservazioni 7.1. Nel caso di $D = [0, L]$ e $\Delta = \frac{d^2}{dx^2}$ quanto trovato sopra si riduce a fatti che abbiamo già verificato. In quel caso gli autovalori sono della forma $\lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2$ con $n = 1, 2, \dots$, e corrispondenti autofunzioni con norma unitaria e a due a due ortogonali sono $\phi_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2L}} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$.

Nel caso di $D = [0, L]$ e $\Delta = \frac{d^2}{dx^2}$, le autofunzioni del laplaciano, divise per la loro norma, in modo da definire vettori di norma unitaria, e quozientando lo spazio $\mathcal{L}^2([0, L], dx)$ rispetto alla relazione di equivalenza che identifica funzioni che differiscono su insiemi di misura nulla, risultano individuare una *base hilbertiana* di $L^2([0, L], dx)$. Ci si può chiedere se questo sia un fatto generale. La risposta è positiva: l'insieme degli autovettori ϕ_λ del laplaciano Δ con le ipotesi fatte su D e \mathcal{D} , se pensati come elementi dello spazio di Hilbert $L^2(D; d^n x)$, costituisce una base Hilbertiana di tale spazio. La prova di questo notevole fatto è un caso particolare del teorema di decomposizione spettrale per operatori non limitati densamente definiti [Mo18]. Si prova più precisamente la seguente proposizione, estendibili a contesti molto più generali. Non daremo la dimostrazione di questo risultato che è abbastanza difficile, eccetto l'ultimo punto che è elementare.

Proposizione 7.2. *Se Δ è definito sul dominio \mathcal{D} (quindi con condizioni di annullamento) con $D \subset \mathbb{R}^n$ che rispetta le ipotesi suddette, gli autovalori $\lambda \in \sigma_p(\Delta)$ ed i corrispondenti autovettori ϕ_λ di Δ soddisfano i fatti seguenti.*

(a) *Si possono ordinare in una successione decrescente che diverge a $-\infty$:*

$$0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k \rightarrow -\infty.$$

(b) Per ogni autovalore $\lambda \in \sigma_p(\Delta)$ l'autospazio corrispondente ha dimensione finita d_λ ed ammette una base ortonormale di autovettori $\phi_{\lambda,\alpha}$, $\alpha = 1, \dots, d_\lambda$. Se si definisce:

$$N(\Lambda) := \sum_{|\lambda_k| \leq \Lambda} d_{\lambda_k}$$

allora vale la stima di Weyl:

$$\frac{N(\Lambda)}{\Lambda^{n/2}} \rightarrow \frac{\text{Vol}(B^n) \text{Vol}(D)}{(2\pi)^n} \quad \text{se } \Lambda \rightarrow +\infty,$$

dove $\text{Vol}(M) := \int_M d^n x$ e B^n è la palla unitaria in \mathbb{R}^n . Se rappresentiamo gli autovalori come la successione non crescente

$$0 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \rightarrow -\infty,$$

dove ogni valore appare esattamente un numero di volte pari a d_{λ_k} , allora vale l'ulteriore stima di Weyl

$$\frac{\lambda_k^{n/2}}{k} \rightarrow \frac{(2\pi)^n}{\text{Vol}(B^n) \text{Vol}(D)} \quad \text{se } k \rightarrow +\infty.$$

- (c) L'insieme degli autovettori $\{\phi_{\lambda,\alpha}\}_{\lambda \in \sigma_p(\Delta), \alpha=1, \dots, d_\lambda}$ individua una base hilbertiana di $L^2(D; d^n x)$.
 (d) Possiamo sempre scegliere i vettori $\phi_{\lambda,\alpha}$ come funzioni a valori reali. \diamond

L'ultima affermazione segue dal fatto che, se $\phi_{\lambda,\alpha} \in \mathcal{D}$ soddisfa $\Delta \phi_{\lambda,\alpha} = \lambda \phi_{\lambda,\alpha}$ allora vale anche, essendo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\Delta \overline{\phi_{\lambda,\alpha}} = \lambda \overline{\phi_{\lambda,\alpha}}$. Pertanto un insieme di generatori dell'autospazio finitodimensionale associato a λ , di dimensione d_λ , è sicuramente dato dalle funzioni reali $\{(\phi_{\lambda,\alpha} + \overline{\phi_{\lambda,\alpha}}), i(\phi_{\lambda,\alpha} - \overline{\phi_{\lambda,\alpha}})\}_{\alpha=1, \dots, d_\lambda}$. Si noti l'insieme non è linearmente indipendente dato che contiene $2d_\lambda$ elementi invece che d_λ . Tenuto conto di come è fatto il prodotto scalare, la procedura di ortogonalizzazione di Gramm-Schmidt applicata a questo insieme di generatori costruisce una base ortonormale di funzioni reali dell'autospazio considerato.

Il fatto che l'insieme di autofunzioni ϕ_λ costituisca una base hilbertiana di $L^2(D; d^n x)$ implica che, nel senso della convergenza di tale spazio di Hilbert, se $f \in L^2(D; d^n x)$, abbia senso lo sviluppo di Fourier generalizzato:

$$f = \sum_{\lambda \in \sigma_p(\Delta)} \sum_{\alpha=1}^{d_\lambda} f_{\lambda,\alpha} \phi_{\lambda,\alpha} \quad \text{dove} \quad f_{\lambda,\alpha} := (f_{\lambda,\alpha}|f) = \int_D \overline{\phi_{\lambda,\alpha}(x)} f(x) d^n x. \quad (7.8)$$

I coefficienti $f_{\lambda,\alpha}$ sono i **coefficienti di Fourier** (generalizzati) di f rispetto alla base hilbertiana dei vettori $\phi_{\lambda,\alpha}$.

Osservazioni 7.2.

(1) Sotto opportune ipotesi di regolarità sull'aperto connesso $D \subset \mathbb{R}^n$ nel quale si cercano

le autofunzioni di Δ con condizioni di annullamento al bordo, si riesce a dimostrare che la dimensione dell'autospazio del primo autovalore di Δ è sempre 1 e che ogni autofunzione di tale autospazio non si annulla mai se non su ∂D . Per quanto riguarda le autofunzioni dei rimanenti autospazi, esse si annullano su sottoinsiemi dell'insieme aperto e connesso D che non contengono punti interni, dato che sono funzioni analitiche per (d) del Teorema 7.1 e che vale la proposizione 3.3.

(2) Come nel caso di $D = [0, L]$, se sono soddisfatte ipotesi sui coefficienti $f_{\lambda, \alpha}$ che assicurano la convergenza puntuale della serie in (7.8), la funzione f a primo membro in (7.8) deve soddisfare le condizioni di annullamento al bordo $f|_{\partial D} = 0$ dato che tali condizioni sono soddisfatte da tutte le funzioni $\phi_{\lambda, \alpha}$ che appaiono nella serie.

(3)* Il fatto che $\{\phi_{\lambda, \alpha}\}_{\lambda \in \sigma_p(\Delta), \alpha=1, \dots, d_\lambda} \subset \mathcal{D}$ sia una base hilbertiana di $L^2(D, d^n x)$ implica immediatamente che \mathcal{D} sia denso in $L^2(D, d^n x)$ nella topologia metrica di quest'ultimo. Partendo da questo fatto è possibile provare che Δ definito su \mathcal{D} , pensato come sottospazio denso di $L^2(D, d^n x)$, goda della proprietà di essere *essenzialmente autoaggiunto* [Mo18], che rinforza la proprietà di hermiticità già menzionata.

7.1.2 *Autofunzioni dell'operatore di Laplace-Beltrami su una varietà riemanniana.

Consideriamo ora il caso trattato nella sezione 5.1.3 in cui si lavorava con una funzione $u = u(t, p)$ che descriveva le piccole deformazioni di una superficie chiusa $M \subset \mathbb{R}^3$ rappresentate un tamburo di topologia arbitraria. In tal caso l'operatore laplaciano viene sostituito dall'*operatore di Laplace-Beltrami* associato alla metrica g indotta da quella standard in \mathbb{R}^3 su M .

Più in generale considereremo il caso di una varietà C^∞ connessa e compatta, M , di dimensione n e dotata di una metrica riemanniana g di classe C^∞ . Indicheremo con $\Delta^{(M, g)}$ l'operatore di Laplace-Beltrami costruito con la connessione di Levi-Civita associata a g . In coordinate locali x^1, \dots, x^n , in cui la metrica è individuata dalla matrice di coefficienti $g_{ij}(x^1, \dots, x^n)$ e con inversa la matrice di coefficienti $g^{ij}(x^1, \dots, x^n)$ come ben noto vale:

$$\Delta^{(M, g)} u = \sum_{i, j=1}^n \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(g^{ij} \sqrt{\det g} \frac{\partial}{\partial x^i} u \right), \quad (7.9)$$

dove il determinante è quello della matrice di coefficienti g_{ij} . Definiamo il dominio per l'operatore di Laplace-Beltrami come:

$$\mathcal{D}_M := C^2(M; \mathbb{C}) \quad (7.10)$$

Si noti che non ci sono condizioni al contorno da imporre dato che la varietà M non ha bordo. Questo insieme è evidentemente uno spazio vettoriale complesso.

Su questo dominio l'operatore $\Delta^{(M, g)}$ è **hermitiano** rispetto al prodotto scalare di $L^2(\overline{D}_M; d\nu^{(M, g)})$ dove $\nu^{(M, g)}$ è la misura di Borel associata a g su M , cioè vale:

$$\left(f \left| \Delta^{(M, g)} g \right. \right) = \left(\Delta^{(M, g)} f \left| g \right. \right) \quad \text{se } f, g \in \mathcal{D}_M, \quad (7.11)$$

che segue immediatamente dalla definizione di \mathcal{D}_M e dalla seconda identità di Green rispetto alla derivata covariante di Levi-Civita, tenuto conto del fatto che $\partial M = \emptyset$. Un'**autofunzione** ϕ_λ di $\Delta^{(M,g)}$ con il dominio detto è al solito una funzione in \mathcal{D}_M (a valori complessi quindi) non identicamente nulla tale che valga l'identità:

$$\Delta^{(M,g)}\phi_\lambda = \lambda\phi_\lambda, \quad (7.12)$$

per qualche $\lambda \in \mathbb{C}$, detto al solito **autovalore** di ϕ_λ .

Il sottospazio vettoriale di \mathcal{D}_M generato dalle autofunzioni di un fissato autovalore si dice al solito **autospazio** di quell'autovalore.

Proposizione 7.3. *Coseguentemente alle ipotesi fatte su M ed alla definizione di \mathcal{D}_M valgono i seguenti fatti:*

- (a) *gli autovalori di $\Delta^{(M,g)}$ sono reali,*
- (b) *gli autovalori di $\Delta^{(M,g)}$ sono strettamente negativi eccetto uno che è nullo,*
- (c) *le autofunzioni corrispondenti ad autovalori differenti sono ortogonali. \diamond*

Dimostrazione. La dimostrazione è la stessa che per la proposizione 7.1, usando la derivata covariante invece che quella ordinaria, osservando che in ogni caso esiste sempre un autovalore nullo che ha una qualsiasi funzione costante non nulla su M come autofunzione. \square

L'insieme degli autovalori di $\Delta^{(M,g)}$ costituisce al solito lo **spettro puntuale** di $\Delta^{(M,g)}$, $\sigma_p(\Delta^{(M,g)})$. Come nel caso più elementare discusso precedentemente, l'insieme degli autovettori ϕ_λ di $\Delta^{(M,g)}$ con le ipotesi fatte su M e \mathcal{D}_M , se pensati come elementi dello spazio di Hilbert $L^2(M; d\nu^{(M,g)})$, costituisce una base Hilbertiana di tale spazio. Si prova più precisamente la seguente proposizione.

Proposizione 7.4. *Se $\Delta^{(M,g)}$ è definito sul dominio \mathcal{D}_M con M che rispetta le ipotesi suddette, gli autovalori $\lambda \in \sigma_p(\Delta^{(M,g)})$ ed i corrispondenti autovettori ϕ_λ di $\Delta^{(M,g)}$ soddisfano i fatti seguenti.*

- (a) *Si possono ordinare in una successione decrescente che diverge a $-\infty$:*

$$0 = \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n \rightarrow -\infty.$$

- (b) *Per ogni autovalore $\lambda \in \sigma_p(\Delta^{(M,g)})$ l'autospazio corrispondente ha dimensione finita d_λ ed ammette una base ortonormale di autovettori $\phi_{\lambda,\alpha}$, $\alpha = 1, \dots, d_\lambda$. Se si definisce:*

$$N(\Lambda) := \sum_{|\lambda_n| \leq \Lambda} d_{\lambda_n}$$

allora vale la stima di Weyl:

$$\frac{N(\Lambda)}{\Lambda^{n/2}} \rightarrow \frac{\text{Vol}(B^n) \text{Vol}_g(M)}{(2\pi)^n} \quad \text{se } \Lambda \rightarrow +\infty,$$

dove $\text{Vol}_g(M) := \int_M d\nu^{(g)}$ mentre B^n è la palla unitaria in \mathbb{R}^n . Se rappresentiamo gli autovalori come la successione non crescente

$$0 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \rightarrow -\infty,$$

dove ogni valore appare esattamente un numero di volte pari a d_{λ_k} , allora vale l'ulteriore stima di Weyl

$$\frac{\lambda_k^{n/2}}{k} \rightarrow \frac{(2\pi)^n}{\text{Vol}(B^n) \text{Vol}_g(M)} \quad \text{se } k \rightarrow +\infty.$$

- (c) L'insieme degli autovettori $\{\phi_{\lambda,\alpha}\}_{\lambda \in \sigma_p(\Delta), \alpha=1, \dots, d_\lambda}$ individua una base hilbertiana di $L^2(M; d\nu^{(M,g)})$.
 (d) I vettori $\phi_{\lambda,\alpha}$ in (c) possono sempre essere scelti come funzioni a valori reali. \diamond

Dunque, nel senso della convergenza di tale spazio di Hilbert, se $f \in L^2(D; d^n x)$ vale:

$$f = \sum_{\lambda \in \sigma_p(\Delta)} \sum_{\alpha=1}^{d_\lambda} f_{\lambda,\alpha} \phi_{\lambda,\alpha} \quad \text{dove} \quad f_{\lambda,\alpha} := (f_{\lambda,\alpha} | f) = \int_M \overline{\phi_{\lambda,\alpha}(p)} f(p) d\nu^{(M,g)}(p). \quad (7.13)$$

I coefficienti $f_{\lambda,\alpha}$ sono i **coefficienti di Fourier** (generalizzati) di f rispetto alla base hilbertiana dei vettori $\phi_{\lambda,\alpha}$.

Osservazioni 7.3.

(1) Le autofunzioni $\phi_{\lambda,\alpha}$ con $\lambda \neq 0$ si annullano al più su sottoinsiemi di M che non contengono punti interni come nel caso elementare discusso nella sezione precedente (e la prova è simile se si lavora in coordinate locali).

(2) Il fatto che $\{\phi_{\lambda,\alpha}\}_{\lambda \in \sigma_p(\Delta), \alpha=1, \dots, d_\lambda} \subset \mathcal{D}_M$ sia una base hilbertiana di $L^2(M, d\nu^{(M,g)})$ implica immediatamente che \mathcal{D}_M sia denso in $L^2(M, d\nu^{(M,g)})$ nella topologia metrica di quest'ultimo. Partendo da questo fatto è possibile provare che $\Delta^{(M,g)}$ definito su \mathcal{D}_M , pensato come sottospazio denso di $L^2(M, d\nu^{(M,g)})$, goda della proprietà di essere *essenzialmente autoaggiunto* [Mo18].

(3) Dalla prima parte di (b) segue che le funzioni armoniche complesse su M , cioè le funzioni $\phi \in C^2(M; \mathbb{C})$ che soddisfano $\Delta^{(M,g)}\phi = 0$ ovunque su M formano uno spazio vettoriale di dimensione finita: questo spazio vettoriale coincide con l'autospazio di $\Delta^{(M,g)}$ con autovalore nullo.

(4) Si dimostra facilmente, usando il teorema A.2, che ogni autovettore di $\Delta^{(M,g)}$ è in realtà (rappresentabile da) una funzione $C^\infty(M; \mathbb{C})$ nelle nostre ipotesi su M e g .

7.1.3 Soluzione dell'equazione di D'Alembert con condizioni di Dirichlet tramite l'analisi spettrale: un caso semplificato.

Basandoci su quanto ottenuto nella sezione precedente, vogliamo cercare di scrivere la soluzione della (7.1) per assegnati dati iniziali (7.3) e quando siano soddisfatte le condizioni al bordo (7.2) partendo da uno sviluppo della forma (7.8). Il punto cruciale è che lo sviluppo detto assicura

automaticamente – purchè la serie converga puntualmente – che la soluzione soddisfi le condizioni al bordo di annullamento.

Lavoreremo con le seguenti ipotesi semplificatrici: la funzione sorgente $S \in C^0(\mathbb{R} \times \bar{D}; \mathbb{C})$ in (7.1) e le condizioni iniziali $\phi_0 \in C^2(\bar{D}; \mathbb{C})$ e $\phi_1 \in C^1(\bar{D}; \mathbb{C})$ in (7.3) sono assunte ammettere sviluppi (7.8) che contengono solo un numero finito di addendi, indipendente da t nel caso della funzione sorgente S . Faremo l'ulteriore ipotesi semplificatrice (valida in molti casi noti) che le autofunzioni di Δ siano elementi di $C^2(\bar{D}; \mathbb{C})$.

Teorema 7.1. *Nelle ipotesi fatte inizialmente su D e assumendo che le autofunzioni di Δ siano elementi di $C^2(\bar{D}; \mathbb{C})$, si consideri l'equazione (7.1) per gli assegnati dati iniziali (7.3) e quando siano soddisfatte le condizioni al bordo (7.2). Se la funzione sorgente $S \in C^0(\mathbb{R} \times \bar{D}; \mathbb{C})$ e le condizioni iniziali $\phi_0 \in C^2(\bar{D}; \mathbb{C})$ e $\phi_1 \in C^1(\bar{D}; \mathbb{C})$ ammettono sviluppi di Fourier (7.8) che contengono solo un numero finito di addendi (indipendente da t per la funzione S), allora la soluzione esiste in $C^2(\mathbb{R} \times \bar{D}; \mathbb{C})$ ed è unica.*

Tale soluzione si esprime come:

$$u(t, \mathbf{x}) = \sum_{\lambda, \alpha} u_{\lambda, \alpha}(t) \phi_{\lambda, \alpha}(\mathbf{x}), \quad (7.14)$$

dove le $\phi_{\lambda, \alpha}$ formano una base hilbertiana di autofunzioni di Δ su \mathcal{D} e le funzioni $u_{\lambda, \alpha} = u_{\lambda, \alpha}(t)$ sono le soluzioni dei corrispondenti problemi di Cauchy alle derivate ordinarie:

$$\frac{d^2 u_{\lambda, \alpha}}{dt^2} - v^2 \lambda u_{\lambda, \alpha} = -v^2 S_{\lambda, \alpha}(t), \quad u_{\lambda, \alpha}(0) = u_{\lambda, \alpha}^{(0)}, \quad \frac{du_{\lambda, \alpha}}{dt}(0) = u_{\lambda, \alpha}^{(1)}. \quad (7.15)$$

in cui i coefficienti $u_{\lambda, \alpha}^{(0)}$, $u_{\lambda, \alpha}^{(1)}$ sono i coefficienti di Fourier, rispetto alla base hilbertiana suddetta, delle condizioni iniziali u_0 e u_1 rispettivamente e, analogamente:

$$S_{\lambda, \alpha}(t) = \int_{\bar{D}} \overline{\phi_{\lambda, \alpha}}(\mathbf{x}) S(t, \mathbf{x}) d^n x. \quad (7.16)$$

◇

Dimostrazione. Assumendo che il problema ammetta una soluzione, partiamo dallo sviluppo della soluzione u . Si osservi che dato che $u \in C^0(\bar{D}; \mathbb{C})$ e che \bar{D} ha misura finita di Lebesgue, allora $u \in L^2(D, d^n x)$ e pertanto ha senso uno sviluppo del tipo (7.8), quindi nel senso della topologia hilbertiana, per ogni $t \in \mathbb{R}$:

$$u(t, \mathbf{x}) = \sum_{\lambda, \alpha} u_{\lambda, \alpha}(t) \phi_{\lambda, \alpha}(\mathbf{x}). \quad (7.17)$$

Le condizioni iniziali impongono che, per ogni $\mathbf{x} \in \bar{D}$ valgano:

$$u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) \quad \text{insieme a} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, \mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x}).$$

Ne consegue, in particolare:

$$u_{\lambda,\alpha}(0) = u_{\lambda,\alpha}^{(0)},$$

dove i numeri $u_{\lambda,\alpha}^{(0)}$ sono quelli che appaiono nello sviluppo di Fourier, *finito per ipotesi*, della condizione iniziale u_0 :

$$u_0(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda,\alpha} u_{\lambda,\alpha}^{(0)} \phi_{\lambda,\alpha}(\mathbf{x}). \quad (7.18)$$

Questa identità si deve pensare, in generale, non valida puntualmente, ma nel senso della topologia di L^2

$$\int_D \left| u_0(\mathbf{x}) - \sum_{|\lambda| < N, \alpha=1, \dots, d_\lambda} u_{\lambda,\alpha}^{(0)} \phi_{\lambda,\alpha}(\mathbf{x}) \right|^2 d^n x \rightarrow 0 \quad \text{if } N \rightarrow +\infty$$

Tuttavia in realtà il limite si può omettere scegliendo N abbastanza grande, dato che solo un numero finito di $u_{\lambda,\alpha}^{(0)}$ è non nullo. Infine, dato che l'integrando è continuo, si ottiene subito che l'identità (7.18) vale puntualmente per ogni \mathbf{x} . In tutti gli sviluppi che seguono si può fare lo stesso ragionamento che sottointenderemo. Se assumiamo di poter passare la derivata temporale sotto il segno di serie nello sviluppo di u (7.17), la seconda condizione iniziale ci dice che:

$$\frac{du_{\lambda,\alpha}}{dt}(0) = u_{\lambda,\alpha}^{(1)},$$

dove i numeri $u_{\lambda,\alpha}^{(1)}$ sono quelli che appaiono nello sviluppo di Fourier (finito per ipotesi) della condizione iniziale u_1 :

$$u_1(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda,\alpha} u_{\lambda,\alpha}^{(1)} \phi_{\lambda,\alpha}(\mathbf{x}). \quad (7.19)$$

Consideriamo ora lo sviluppo di Fourier (per ipotesi finito) della sorgente

$$S(t, \mathbf{x}) = \sum_{\lambda,\alpha} S_{\lambda,\alpha}(t) \phi_{\lambda,\alpha}(\mathbf{x}). \quad (7.20)$$

Le funzioni $S_{\lambda,\alpha} = S_{\lambda,\alpha}(t)$ sono funzioni continue. Ciò segue facilmente dal teorema della convergenza dominata, dato che tali funzioni sono ottenute come i coefficienti di Fourier:

$$S_{\lambda,\alpha}(t) = \int_{\overline{D}} \overline{\phi_{\lambda,\alpha}(\mathbf{x})} S(t, \mathbf{x}) d^n x,$$

in cui $S \in C^0(\mathbb{R} \times \overline{D}; \mathbb{C})$, \overline{D} ha misura finita e le funzioni $\overline{\phi_{\lambda,\alpha}}$ sono continue.

Se assumiamo di poter passare tutte le derivate fino al secondo ordine sotto il segno di somma in (7.17), l'equazione (7.1) diventa:

$$\sum_{\lambda,\alpha} \left(-\frac{1}{v^2} \frac{d^2 u_{\lambda,\alpha}}{dt^2} + \lambda u_{\lambda,\alpha} \right) \phi_{\lambda,\alpha} = \sum_{\lambda,\alpha} S_{\lambda,\alpha} \phi_{\lambda,\alpha}$$

e cioè

$$\sum_{\lambda,\alpha} \left(-\frac{1}{v^2} \frac{d^2 u_{\lambda,\alpha}}{dt^2} + \lambda u_{\lambda,\alpha} - S_{\lambda,\alpha} \right) \phi_{\lambda,\alpha} = 0.$$

Consideriamo allora il set infinito di equazioni differenziali:

$$\frac{d^2 u_{\lambda,\alpha}}{dt^2} - v^2 \lambda u_{\lambda,\alpha} = -v^2 S_{\lambda,\alpha}(t), \quad u_{\lambda,\alpha}(0) = u_{\lambda,\alpha}^{(0)}, \quad \frac{du_{\lambda,\alpha}}{dt}(0) = u_{\lambda,\alpha}^{(1)}.$$

Osserviamo che ognuna di queste equazioni ammette una ed una sola soluzione definita su tutto l'asse reale, dato che si tratta di un'equazione lineare del secondo ordine, in forma normale, non omogenea a coefficienti costanti, con termine noto continuo. Inoltre solo un numero *finito* di esse ha soluzione differente dalla funzione identicamente nulla, dato che solo un numero finito di funzioni $S_{\lambda,\alpha}$ e dati iniziali sono non nulli.

Se indichiamo con $U_{\lambda,\alpha} = U_{\lambda,\alpha}(t)$ le soluzioni delle equazioni suddette, la funzione:

$$U(t, x) := \sum_{\lambda,\alpha} U_{\lambda,\alpha}(t) \phi_{\lambda,\alpha}(\mathbf{x}),$$

è ben definita, dato che la somma è finita, soddisfa l'equazione differenziale, le condizioni iniziali e le condizioni al bordo (in particolare perché le ipotesi fatte di poter passare le derivate sotto il segno di somma sono sempre soddisfatte essendo la somma finita). Essa è pertanto una soluzione della (7.1) con gli assegnati dati iniziali (7.3) che rispetta le condizioni al bordo (7.2).

Questa è anche l'unica soluzione del problema posto come ora proviamo (e il risultato di unicità che segue vale anche nel caso si lascino cadere le ipotesi di numero finito di coefficienti di Fourier dei dati iniziali e della sorgente dato che non useremo tali ipotesi). Si deve osservare che le parti reale ReU ed immaginaria ImU della differenza $U = u - u'$ di soluzioni complesse del nostro problema soddisfano la stessa equazione di D'Alembert con sorgente nulla, stesse ipotesi di regolarità ed al contorno e con dati iniziali nulle (perché parti reali ed immaginarie della funzione nulla). Il teorema di unicità 5.1 per soluzioni reali implica che ReU e ImU siano separatamente nulle: la funzione zero è sicuramente una soluzione del problema da loro soddisfatto ed è anche l'unica soluzione per il teorema 5.1. Concludiamo che $0 = U = u - u'$, cioè $u = u'$. \square

Osservazioni 7.4.

(1) Il risultato trovato per la forma della soluzione funziona nelle ipotesi di sviluppi di Fourier contenente un numero finito di termini, per la sorgente e per le condizioni iniziali. Tuttavia, con opportune ipotesi, la procedura può essere estesa al caso generale, anche quando questi sviluppi non sono finiti [V184]. Ad ogni modo questa generalizzazione utilizza strumenti matematici (teoria delle distribuzioni) che escono dalla portata di questo corso elementare.

(2) In realtà abbiamo già trovato lo sviluppo (7.14) studiando il problema di Dirichlet sul segmento. Infatti, lo sviluppo (6.72) della soluzione dell'equazione di D'Alembert sul segmento con condizioni di Dirichlet non è altro che lo sviluppo (7.14) specializzato a tale situazione quando la sorgente S è identicamente nulla. Come già osservato le autofunzioni ϕ_λ sono, in quel caso, date dai sinusoidi $\sin(n\pi x/L)$ moltiplicati per il coefficiente di normalizzazione $1/\sqrt{2L}$. In (6.72),

però, lo sviluppo di Fourier generalizzato sussiste *anche quando il numero di termini nello sviluppo è infinito* come abbiamo visto nel capitolo precedente.

La soluzione generale dell'equazione:

$$\frac{d^2 u_{\lambda,\alpha}}{dt^2} - v^2 \lambda u_{\lambda,\alpha} = -v^2 S_{\lambda,\alpha}(t)$$

è come ben noto data dalla somma della soluzione generale dell'equazione omogenea più una soluzione particolare dell'equazione di sopra. La soluzione generale dell'omogenea che, dal punto di vista fisico, corrisponde all'assenza di sorgente, o più debolmente all'assenza della funzione $S_{\lambda,\alpha}$, ha la forma:

$$u_{\lambda,\alpha}(t) = u_{\lambda,\alpha}^{(+)} e^{i2\pi\nu_\lambda t} + u_{\lambda,\alpha}^{(-)} e^{-i2\pi\nu_\lambda t}, \quad (7.21)$$

dove $u_{\lambda,\alpha}^{(\pm)} \in \mathbb{C}$ sono coefficienti arbitrari e ν_λ i numeri strettamente positivi:

$$\nu_\lambda := \frac{v\sqrt{-\lambda}}{2\pi}, \quad (7.22)$$

sono detti **frequenze di risonanza** o **frequenze proprie** del sistema descritto dall'equazione di D'Alembert. Ad ognuna di tali funzioni corrisponde una soluzione dell'equazione di D'Alembert in $\mathbb{R} \times \overline{D}$, senza sorgente e con condizioni di Dirichlet:

$$u_{\lambda,\alpha}(t, \mathbf{x}) = \left(u_{\lambda,\alpha}^{(+)} e^{iv\sqrt{-\lambda}t} + u_{\lambda,\alpha}^{(-)} e^{-iv\sqrt{-\lambda}t} \right) \phi_{\lambda,\alpha}(\mathbf{x}), \quad (7.23)$$

Queste soluzioni sono dette **modi normali di oscillazione** o **onde stazionarie** del sistema. Dato che possiamo sempre scegliere le $\phi_{\lambda,\alpha}$ come funzioni reali, nel caso in cui stiamo cercando funzioni reali della nostra equazione differenziale iniziale, conviene riscrivere (7.23) come

$$u_{\lambda,\alpha}(t, \mathbf{x}) = \left(A_{\lambda,\alpha} \sin(v\sqrt{-\lambda}t) + B_{\lambda,\alpha} \cos(v\sqrt{-\lambda}t) \right) \phi_{\lambda,\alpha}(\mathbf{x}), \quad (7.24)$$

dove, nel caso si lavori con soluzioni reali, tutte le costanti $A_{\lambda,\alpha}$ e $B_{\lambda,\alpha}$ sono numeri reali. Con la procedura già vista nel caso unidimensionale è possibile riscrivere (sempre nel caso reale) il risultato ottenuto come

$$u_{\lambda,\alpha}(t, \mathbf{x}) = C_{\lambda,\alpha} \sin(v\sqrt{-\lambda}t + \delta_{\lambda,\alpha}) \phi_{\lambda,\alpha}(\mathbf{x}), \quad (7.25)$$

dove $0 \leq C_{\lambda,\alpha} = \sqrt{A_{\lambda,\alpha}^2 + B_{\lambda,\alpha}^2}$ mentre $A_{\lambda,\alpha} = C_{\lambda,\alpha} \cos \delta_{\lambda,\alpha}$ e $B_{\lambda,\alpha} = C_{\lambda,\alpha} \sin \delta_{\lambda,\alpha}$. Nel caso unidimensionale quanto visto permette di interpretare in altro modo il contenuto di Osservazione 6.8 per l'equazione di D'Alembert, per esempio descrivente le (piccole) oscillazioni trasversali di una corda tesa di lunghezza L , cioè $D = (0, L)$. Una base di Hilbert di $L^2([0, L], dx)$ è costituita dalle funzioni

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

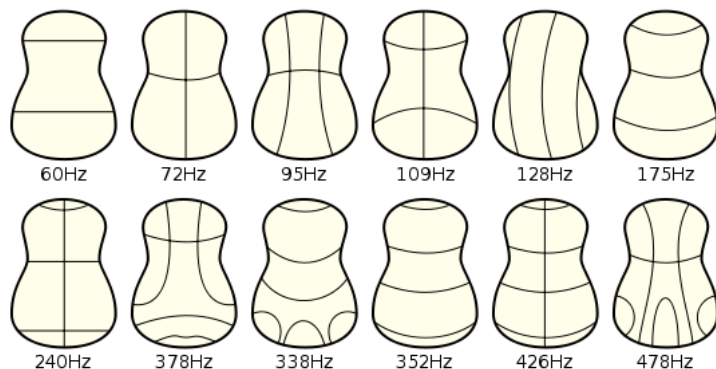


Figura 7.1: Modi di oscillazione di una faccia della chitarra individuati dalle linee nodali. Le frequenze in Hz sono le frequenze di risonanza dei modi normali con le linee nodali disegnate. In questo caso (vedi Osservazione 7.8) l'equazione differenziale che descrive le oscillazioni della faccia è quella di D'Alembert in cui il laplaciano Δ è sostituito da $-\Delta^2$ dato che si lavora con una piastra invece che con una membrana. La trattazione qualitativa delle soluzioni è però essenzialmente identica: in generale è sufficiente rimpiazzare λ con $-\lambda^2$ nelle formule viste.

Queste sono autofunzioni del laplaciano $\frac{d^2}{dx^2}$ con condizioni di annullamento al bordo. I corrispondenti autovalori sono:

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

e le frequenze di risonanza corrispondenti sono

$$\nu_n = \frac{cn}{2L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

La (7.24), nel caso in esame, si riduce alla già nota espressione per le onde stazionarie della corda (6.74), dove la velocità di propagazione v è indicata con c .

Nel caso generale, ogni autofunzione $\phi_{\lambda, \alpha}$ si annulla su superfici di dimensione $n - 1$ dette **superfici nodali**.

Nel caso di una membrana oscillante, tali superfici sono dunque delle curve, le **linee nodali**. Nel caso di una corda vibrante si tratta di singoli punti: i *odi* che abbiamo già visto. Su questi sottoinsiemi di D le onde stazionarie sono sempre nulle. È possibile visualizzare sperimentalmente queste linee nodali nel caso di membrane vibranti o piastre vibranti (vedi Osservazione 7.8) con una procedura elementare ma molto ingegnosa inventata nel XVIII secolo dal fisico tedesco *E.F.F. Chladni* per dimostrare l'esistenza di modi normali di oscillazione in strutture estese, e si parla di *lastre di Chladni*. Riferendosi alle linee nodali si riescono a distinguere, nella pratica sperimentale, i modi di oscillazione di una piastra.

7.1.4 Membrana rettangolare e membrana circolare.

Prendiamo ora in considerazione due situazioni bidimensionali nelle quali possiamo esemplificare la teoria precedentemente sviluppata: l'equazione di D'Alembert per le deformazioni trasversali di una membrana, piana a riposo, rettangolare o circolare, imponendo l'annullarsi della deformazione sul bordo di essa. Dal punto di vista fisico queste due membrane possono pensarsi come

le membrane di tamburi. Diamo esplicitamente la forma delle autofunzioni, degli autovalori dell'operatore di Laplace e delle frequenze di risonanza.

Membrana rettangolare.

Nel caso della membrana rettangolare, di lati L_1 e L_2 , autofunzioni dell'operatore di Laplace sono date dalle funzioni con norma unitaria:

$$\phi_{n,m}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4L_1L_2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right)$$

l'autovalore corrispondente è:

$$\lambda_{n,m} = - \left[\left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2}\right)^2 \right], \quad n, m = 1, 2, 3, \dots$$

La verifica di tali fatti è immediata tenendo conto del fatto che:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Si può provare che questa classe di autofunzioni determina una base hilbertiana dello spazio di Hilbert $L^2([0, L_1] \times [0, L_2], dxdy)$. Dalla teoria spettrale [Mo18], il fatto che le autofunzioni trovate formino una base hilbertiana implica automaticamente che non ci possono essere altri autovalori del laplaciano (con le condizioni al bordo dette) oltre a quelli menzionati sopra.

Le frequenze di risonanza per piccole deformazioni di una membrana rettangolare di lati L_1 e L_2 sono dunque date da:

$$\nu_{n,m} = \frac{v}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2}\right)^2}, \quad n, m = 1, 2, 3, \dots \quad (7.26)$$

Membrana circolare.

Passiamo a considerare il caso di una membrana circolare di raggio $r_0 > 0$. In questo caso conviene lavorare in coordinate polari piane θ, r centrate nel centro della membrana. In queste coordinate l'operatore di Laplace si scrive:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r}. \quad (7.27)$$

Vista la simmetria del sistema, conviene provare a cercare autofunzioni della forma semplificata: $\phi(\theta, r) = \Theta(\theta)R(r)$, dove la funzione di θ deve "chiudersi" dopo un giro completo, cioè deve avere periodo 2π o un multiplo intero di tale numero. L'equazione agli autovalori,

$$\Delta\phi = \lambda\phi,$$

si scrive, tenendo conto della (7.27):

$$R(r) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \Theta(\theta) \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial R(r)}{\partial r} = \lambda \Theta(\theta) R(r),$$

da cui, nei punti in cui $\Theta(\theta)R(r) \neq 0$:

$$\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} = \lambda r^2 - \frac{r}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial R(r)}{\partial r}.$$

Dato che il primo membro è solo funzione di θ mentre il secondo è solo funzione di r , concludiamo che deve essere, per qualche costante μ :

$$\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} = \mu, \quad \lambda r^2 - \frac{r}{R(r)} \frac{d}{dr} r \frac{dR(r)}{dr} = \mu.$$

La prima equazione ammette soluzione:

$$\Theta(\theta) = C e^{\sqrt{\mu}\theta} + C' e^{-\sqrt{\mu}\theta}.$$

Dato che tale funzione deve essere periodica con periodo 2π o un multiplo di esso, concludiamo che deve essere:

$$\mu = -n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

e quindi, possiamo considerare candidati autofunzioni del tipo

$$\phi^{(\pm)}(\theta, r) = e^{\pm in\theta} R_n(r), \quad n \in \mathbb{N},$$

dove la funzione R soddisfa:

$$\lambda r^2 R_n(r) - r \frac{d}{dr} r \frac{dR_n(r)}{dr} = -n^2 R_n(r)$$

cioè, portando tutto a destra dell'uguale,

$$0 = r^2 \frac{d^2 R_n(r)}{dr^2} + r \frac{dR_n(r)}{dr} + (-\lambda r^2 - n^2) R_n(r).$$

Ricordando che $\lambda < 0$ per la proposizione 7.1 e definendo $\rho := \sqrt{-\lambda}r$, concludiamo che la funzione $f(\rho) := R_n(\rho/\sqrt{-\lambda})$ soddisfa l'**equazione di Bessel** di ordine n

$$\rho^2 \frac{d^2 f(\rho)}{d\rho^2} + \rho \frac{df(\rho)}{d\rho} + (\rho^2 - n^2) f(\rho) = 0, \quad \rho \in \mathbb{R}. \quad (7.28)$$

Le soluzioni di questa equazione sono ben note e sono tutte della forma (A_n e B_n costanti arbitrarie complesse):

$$R_n(\rho/\sqrt{-\lambda}) = f(\rho) = A_n J_n(\rho) + B_n Y_n(\rho)$$

dove J_n e Y_n , per $n = 0, 1, 2, \dots$ sono le **funzioni di Bessel** di ordine n di **prima** e **seconda specie**:

$$J_n(\rho) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\tau - \rho \sin \tau) d\tau,$$

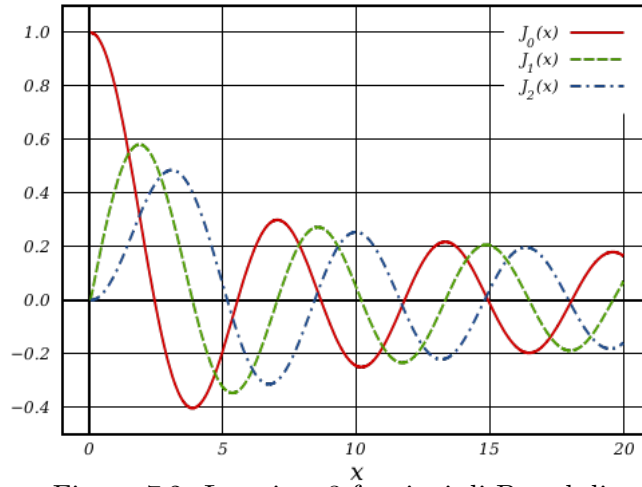


Figura 7.2: Le prime 3 funzioni di Bessel di primo tipo.

$$Y_n(\rho) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(n\tau - \rho \sin \tau) d\tau - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} [e^{n\tau} + (-1)^n e^{-n\tau}] e^{-\rho \sinh \tau} d\tau.$$

Le funzioni Y_n sono singolari per $\rho = 0$ (corrispondente al centro della membrana) dove divergono (per il secondo integrale nella definizione di Y_n), mentre noi cerchiamo funzioni ovunque regolari perchè le autofunzioni devono appartenere a \mathcal{D} . Le funzioni J_n sono invece $C^\infty(\mathbb{R})$ e analitiche reali dato che sono sviluppabili in serie centrata in $\rho = 0$:

$$J_n(\rho) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m+n},$$

e la serie coinverge ovunque in \mathbb{R} . Pertanto, tornando nella variabile $r \in [0, +\infty)$, rimaniamo con l'opzione

$$R_n(r) = A_n J_n(r\sqrt{-\lambda}).$$

Dobbiamo infine imporre che siano soddisfatte le condizioni di annullamento al bordo $\Theta(\theta)R(r_0) = 0$ per le nostre candidate autofunzioni. Dunque, per $n = 0, 1, 2, \dots$ fissato, deve valere:

$$J_n(r_0\sqrt{-\lambda}) = 0 \tag{7.29}$$

La funzione $J_n = J_n(x)$ ha infiniti zeri non nulli in $[0, +\infty)$ (dato che oscilla attorno all'asse x come un sinusoido smorzato). Indichiamo gli zeri che cadono in $(0, +\infty)$ con x_{nm} , dove $m = 1, 2, \dots$ ed abbiamo scelto la loro numerazione in modo tale che $x_{n, m+1} > x_{n, m}$. Per ogni n i valori ammissibili di λ non sono arbitrari, ma deve risultare $r_0\sqrt{-\lambda} = x_{nm}$. In altre parole, deve essere $\lambda = \lambda_{n,m}$ dove

$$\lambda_{n,m} := -\left(\frac{x_{nm}}{r_0}\right)^2, \quad n = 0, 1, \dots \quad m = 1, 2, \dots \tag{7.30}$$

(Si osservi che se accettassimo gli zeri coincidenti con 0 avremmo $\lambda = 0$ che sappiamo essere impossibile, per questo ci interessano solo gli zeri di J_n che cadono in $(0, +\infty)$.) Dato che in numeri x_{nm} sono noti e tabulati, questa identità determina possibili autovalori per il laplaciano

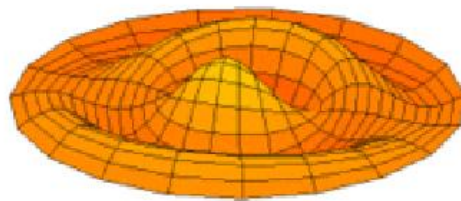


Figura 7.3: Il modo corrispondente alla frequenza di risonanza $\nu_{1,3}$ della membrana circolare vibrante.

con condizioni di annullamento al bordo del disco di raggio r_0 quando si assume che le autofunzioni abbiano la forma di prodotto supposta inizialmente. In definitiva un set di autofunzioni, con corrispondenti autovalori (7.30), è quindi dato da³:

$$\phi_{n,m}^{(\pm)}(\theta, r) = C_{nm} J_n \left(r \sqrt{-\lambda_{n,m}} \right) e^{\pm in\theta}, \quad n = 0, 1, \dots \quad m = 1, 2, \dots \quad (7.31)$$

il valore assoluto di C_{nm} viene fissato imponendo che la norma L^2 dell'autofunzione sia unitaria. È un noto risultato classico che effettivamente l'insieme di autofunzioni trovate, per $n = 0, 1, \dots$ e $m = 1, 2, \dots$, sia una base hilbertiana di $L^2(D, dx dy)$ dove D è il disco di raggio r_0 . Dalla teoria spettrale questo fatto implica automaticamente che non ci possono essere altri autovalori del laplaciano (con le condizioni al bordo dette) oltre a quelli determinati dalla (7.30).

Le frequenze di risonanza di una membrana circolare di raggio r_0 sono dunque date da:

$$\nu_{n,m} = \frac{v}{2\pi} \frac{x_{nm}}{r_0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad m = 1, 2, \dots \quad (7.32)$$

dove x_{nm} è l' m -esimo zero di J_n in $(0, +\infty)$.

Osservazioni 7.5. Le frequenze di risonanza di una corda ad estremi fissati hanno forma $\nu n/(2L)$, per cui sono tutte un multiplo intero della frequenza più bassa $\nu/(2L)$. Per le membrane oscillanti è invece falso che esista una frequenza di valore minimo di cui tutte le altre siano multipli interi di essa. Questo fatto, è ciò che distingue il suono degli strumenti musicali a percussione, come i tamburi, da quelli a corde come il pianoforte, l'arpa, la chitarra, gli strumenti della famiglia del violino. Gli strumenti a fiato hanno comunque un suono con le stesse caratteristiche di quelli a corde in cui tutte le frequenze di risonanza sono in multiplo intero della più bassa. I musicisti dicono per illustrare questo fatto che il suono prodotto da alcuni strumenti a percussione⁴, come il tamburo, non è *armonico* al contrario di quello prodotto dagli strumenti a corde ed a fiato che lo è.

³Passando in coordinate cartesiane si può verificare direttamente con un calcolo laborioso che le funzioni in esame sono C^2 anche in un intorno dell'origine $(x, y) = (0, 0)$, punto in cui le coordinate polari sono singolari.

⁴Tuttavia, alcuni strumenti a percussione come lo xilofono producono suoni armonici.

7.1.5 Fenomeni di smorzamento e risonanza in risuonatori forzati.

Consideriamo il solito sistema oscillante descritto dalla funzione u che soddisfa l'equazione di D'Alembert nel dominio D con condizioni di annullamento al bordo. Nelle situazioni reali le oscillazioni del sistema sono smorzate da fenomeni fisici dissipativi, dovuti ad attriti interni ed esterni. Il modo più semplice di tenerne conto è quello di modificare l'equazione di D'Alembert aggiungendo a primo membro un termine dissipativo $-\gamma \frac{\partial u}{\partial t}$ con $\gamma > 0$ che simula un processo di attrito (viscoso) dovuto all'esterno, dove $\gamma > 0$ è una costante tanto più grande quanto i processi di attrito esterno sono rilevanti. Per tenere conto dei processi di attrito interno al sistema (forze dissipative interne alla corda o alla membrana), nel caso più semplice, bisogna aggiungere un ulteriore termine, sempre a primo membro, della forma $\Gamma \frac{\partial \Delta_{\mathbf{x}} u}{\partial t}$ dove, $\Gamma > 0$ è una costante tanto più grande quanto i processi di attrito interno sono rilevanti.

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta_{\mathbf{x}} u - \gamma \frac{\partial u}{\partial t} + \Gamma \frac{\partial \Delta_{\mathbf{x}} u}{\partial t} = S(t, \mathbf{x}). \quad (7.33)$$

Si osservi che l'equazione è ora del terzo ordine, tuttavia si riesce a dimostrare la seguente proposizione.

Proposizione 7.5. *Se, nelle ipotesi iniziali su $D \subset \mathbb{R}^n$, esiste una soluzione di (7.33) $u \in C^3(\mathbb{R} \times \bar{D}; \mathbb{C})$ con $u(t, \mathbf{x}) = 0$ se $\mathbf{x} \in \partial D$ e $t \geq 0$, allora è unica, per $t \geq 0$, per fissati dati iniziali $u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x})$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(0, \mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x})$ e fissata S , rispettivamente di classe $C^3(\bar{D}; \mathbb{C})$, $C^2(\bar{D}; \mathbb{C})$ e $C^0(\mathbb{R} \times \bar{D}; \mathbb{C})$. \diamond*

Dimostrazione. Consideriamo due soluzioni u, u' e sia $\varphi := u - u'$ la differenza di esse. φ soddisfa la (7.33) in cui si deve omettere il termine di sorgente per costruzione. Definiamo la densità di energia E di tale funzione come in (5.15) (o (5.14) nel caso reale)

$$E(t, \mathbf{x}) := \frac{1}{2} \left[\frac{1}{v^2} \frac{\partial \overline{\varphi(t, \mathbf{x})}}{\partial t} \frac{\partial \varphi(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \nabla \overline{\varphi(t, \mathbf{x})} \cdot \nabla \varphi(t, \mathbf{x}) \right].$$

Tenendo conto della nuova forma dell'equazione differenziale, una dimostrazione analoga a quella che porta alla (5.19) produce ora (vedi sotto):

$$\int_D E(T, \mathbf{x}) d^n x = -\gamma \int_0^T \int_D \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^2 d^n x dt - \Gamma \int_0^T \int_D \left| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^2 d^n x dt, \quad (7.34)$$

dove $T > 0$. Dato che $\gamma, \Gamma > 0$, concludiamo che, se $t \geq 0$:

$$\int_D E(t, \mathbf{x}) d^n x \leq 0.$$

D'altra parte, dato che per la stessa definizione di E vale $E \geq 0$, l'integrale di E su D dovrà essere nullo per ogni $t \geq 0$. Tenendo conto che il termine $\left| \frac{\partial \varphi(t, \mathbf{x})}{\partial t} \right|^2$ che appare nell'integrando

dell'integrale di E su D è continuo, si conclude che $\frac{\partial \varphi(t, \mathbf{x})}{\partial t} = 0$ e dunque $\varphi(t, \mathbf{x}) = \varphi(0, \mathbf{x})$ per ogni $t \in [0, +\infty)$ e ogni $\mathbf{x} \in D$ (il risultato si estende su ∂D per continuità). Dato che $\varphi(0, \mathbf{x}) = 0$ abbiamo che $\varphi = 0$ ovunque in $[0, +\infty)$ e dunque le due soluzioni coincidono.

Per ottenere l'identità (7.34) osserviamo che, come si prova facilmente e già discusso altre volte in casi simili:

$$\frac{d}{dt} \int_D E(t, \mathbf{x}) d^n x = \int_D \frac{\partial}{\partial t} E(t, \mathbf{x}) d^n x.$$

Con banali passaggi, tenendo conto dell'espressione di E :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_D E(t, \mathbf{x}) d^n x &= \int_D \frac{1}{2} \left[\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \overline{\varphi(t, \mathbf{x})}}{\partial t^2} \frac{\partial \varphi(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \nabla \frac{\partial \overline{\varphi(t, \mathbf{x})}}{\partial t} \cdot \nabla \varphi(t, \mathbf{x}) \right] d^n x \\ &+ \int_D \frac{1}{2} \left[\frac{1}{v^2} \frac{\partial \overline{\varphi(t, \mathbf{x})}}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi(t, \mathbf{x})}{\partial t^2} + \nabla \overline{\varphi(t, \mathbf{x})} \cdot \nabla \frac{\partial \varphi(t, \mathbf{x})}{\partial t} \right] d^n x. \end{aligned}$$

Per ipotesi (scriviamo Δ in luogo di $\Delta_{\mathbf{x}}$ per semplicità)

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \Delta \varphi - \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Gamma \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial t}$$

e la stessa equazione è soddisfatta da $\overline{\varphi}$. Inserendo il membro di destra di tale identità (e al suo complesso coniugato) nell'espressione che corrisponde a $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ (e del suo complesso coniugato) nello sviluppo di $\frac{d}{dt} \int_D E(\mathbf{x}, t) d^n x$ sopra, otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_D E(\mathbf{x}, t) d^n x &= \int_D \frac{1}{2} 2(-\gamma) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial t} d^n x + \int_D \frac{1}{2} \Gamma \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \Delta \overline{\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial t} \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial t} \right] d^n x \\ &+ \int_D \frac{1}{2} \left[\Delta \overline{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial t} \Delta \varphi \right] d^n x + \int_D \frac{1}{2} \left[\nabla \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial t} \cdot \nabla \varphi + \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \nabla \overline{\varphi} \right] d^n x \end{aligned}$$

Nel secondo integrale a secondo membro possiamo usare l'identità di facile verifica per funzioni C^3 congiuntamente in tutte le variabili

$$\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial t} \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \Delta \overline{\varphi}}{\partial t} = \Delta \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^2 - 2 \left\| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\|^2$$

Infine il teorema della divergenza ed il fatto che φ (e quindi la sua derivata temporale) sia nulla su ∂D , implicano che:

$$\int_D \Delta \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^2 d^n x = \int_{+\partial D} \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial t} \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS(x) + \int_{+\partial D} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \nabla \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS(x) = 0.$$

Abbiamo in tal modo provato che:

$$\frac{d}{dt} \int_D E(t, \mathbf{x}) d^n x = -\gamma \int_D \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial t} d^n x - \Gamma \int_D \left\| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\|^2 d^n x$$

$$+ \int_D \frac{1}{2} \left[\Delta \bar{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} \Delta \varphi \right] d^n x + \int_D \frac{1}{2} \left[\nabla \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} \cdot \nabla \varphi + \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \nabla \bar{\varphi} \right] d^n x. \quad (7.35)$$

Il penultimo integrale a secondo membro di (7.35) può essere riscritto come:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_D \nabla \cdot \left[\nabla \bar{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \varphi \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} \right] d^n x - \frac{1}{2} \int_D \left[\nabla \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} \cdot \nabla \varphi + \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \nabla \bar{\varphi} \right] d^n x \\ & = 0 - \frac{1}{2} \int_D \left[\nabla \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} \cdot \nabla \varphi + \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \nabla \bar{\varphi} \right] d^n x \end{aligned}$$

dove abbiamo ancora usato il teorema della divergenza ed il fatto che le funzioni φ e le loro derivate temporali si annullano su ∂D e la stessa cosa vale per $\bar{\varphi}$. Possiamo concludere che i due ultimi integrali a secondo membro di (7.35) si annullano reciprocamente. Concludiamo che la (7.35) si riduce a:

$$\frac{d}{dt} \int_D E(t, \mathbf{x}) d^n x = -\gamma \int_D \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| d^n x - \Gamma \int_D \left\| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\|^2 d^n x,$$

che produce la (7.34) immediatamente, dato che il secondo membro è una funzione continua di t , per cui possiamo applicare il secondo teorema fondamentale del calcolo al primo membro, e $E(0, \mathbf{x}) = 0$. \square

Tenuto conto della proposizione precedente, in modo essenzialmente identico a quanto fatto nella dimostrazione del teorema 7.1 riducendosi ad un numero finito di gradi di libertà, si può provare il teorema seguente.

Teorema 7.2. *Nelle ipotesi fatte inizialmente su D ed assumendo che le autofunzioni del laplaciano siano funzioni $C^3(\bar{D}; \mathbb{C})$, si consideri l'equazione (7.33) per $u \in C^3(\mathbb{R} \times \bar{D}; \mathbb{C})$, con $v, \gamma, \Gamma > 0$ costanti note, per gli assegnati dati iniziali (7.3) insieme alla funzione S e quando siano soddisfatte le condizioni al bordo (7.2). Se la funzione sorgente $S \in C^0(\bar{D}; \mathbb{C})$ e le condizioni iniziali $\phi_0 \in C^3(\bar{D}; \mathbb{C})$ e $\phi_1 \in C^2(\bar{D}; \mathbb{C})$ ammettono sviluppi di Fourier (7.8) che contengono solo un numero finito di addendi (indipendente da t per la funzione S), allora la soluzione esiste in $C^3(\mathbb{R} \times \bar{D}; \mathbb{C})$ ed è unica per $t \geq 0$.*

Tale soluzione si esprime come:

$$u(t, \mathbf{x}) = \sum_{\lambda, \alpha} u_{\lambda, \alpha}(t) \phi_{\lambda, \alpha}(\mathbf{x}), \quad (7.36)$$

dove le $\phi_{\lambda, \alpha}$ formano una base hilbertiana di autofunzioni di Δ su \mathcal{D} e le funzioni $u_{\lambda, \alpha} = u_{\lambda, \alpha}(t)$ sono le soluzioni dei corrispondenti problemi di Cauchy alle derivate ordinarie:

$$\frac{d^2 u_{\lambda, \alpha}}{dt^2} - v^2 \lambda u_{\lambda, \alpha} + v^2 \gamma \lambda \frac{du_{\lambda, \alpha}}{dt} = -v^2 S_{\lambda, \alpha}(t), \quad u_{\lambda, \alpha}(0) = u_{\lambda, \alpha}^{(0)}, \quad \frac{du_{\lambda, \alpha}}{dt}(0) = u_{\lambda, \alpha}^{(1)}. \quad (7.37)$$

dove (ricordando che $\Gamma > 0$ e $\lambda < 0$)

$$\gamma \lambda := \gamma - \lambda \Gamma > 0, \quad (7.38)$$

e in cui i coefficienti $u_{\lambda,\alpha}^{(0)}$, $u_{\lambda,\alpha}^{(1)}$ sono i coefficienti di Fourier, rispetto alla base hilbertiana suddetta, delle condizioni iniziali u_0 e u_1 rispettivamente e, analogamente:

$$S_{\lambda,\alpha}(t) = \int_D \overline{\phi_{\lambda,\alpha}(\mathbf{x})} S(t, \mathbf{x}) d^n x . \quad (7.39)$$

◇

In riferimento al teorema 7.2 studiamo il caso in cui la sorgente che forza il sistema oscillante abbia periodo temporale $T = \frac{1}{f}$ per qualche frequenza $f > 0$ e che tale periodo sia indipendente da \mathbf{x} . Per esempio la sorgente può corrispondere alla componente verticale di una densità forza che agisce su una corda orizzontale in oscillazione trasversale, oppure la componente verticale di una densità forza che agisce su una membrana orizzontale in oscillazione trasversale. Possiamo decomporre S usando la teoria della serie di Fourier sviluppata nella Sezione 6.3 (si osservi che ora x è rimpiazzato da t e L da $1/f$ e includiamo nel coefficiente S_k un fattore $\frac{1}{\sqrt{L}} = \sqrt{f}$), a \mathbf{x} fisso:

$$S(t, \mathbf{x}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} S_k(\mathbf{x}) e^{i2\pi k f t} . \quad (7.40)$$

Come sappiamo la convergenza della serie di sopra è, in generale, solo nel senso di $L^2([0, 1/f], dt)$. Tuttavia, se la funzione S è abbastanza regolare, come provato nel capitolo precedente, la convergenza è puntuale. Noi assumeremo ancora più fortemente che si possano trascurare quasi tutti i termini dello sviluppo eccetto una quantità finita, per cui la serie di sopra si deve pensare come una somma su un numero finito di termini: solo un numero finito di funzioni S_k saranno assunte essere non identicamente nulle. In realtà quanto diremo si può ottenere anche lasciando cadere l'ipotesi di un numero finito di termini, purchè la serie converga uniformemente ed abbastanza rapidamente. In molti casi fisicamente realizzabili, le ampiezze S_k si annullano così velocemente al crescere di k che possiamo approssimare la serie con una somma finita. È questo il caso della sollecitazione S , la forza agente sulla cassa armonica di uno strumento a corde, provocata dall'oscillazione delle corde dello strumento. In questo caso S è reale e pertanto nello sviluppo (7.40) accade che⁵ $S_k = \overline{S_{-k}}$ in modo tale che le parti immaginarie dei termini associati a $\pm k$ si annullino reciprocamente nella somma su $k \in \mathbb{Z}$. La serie (7.40), in questo caso si potrebbe scrivere in termini di seni e coseni con coefficienti reali sommando su $k \in \mathbb{N}$ invece che su $k \in \mathbb{Z}$, tuttavia noi continueremo ad usare il formalismo complesso perché è più pratico da adoperare.

Nelle ipotesi del teorema 7.2, vogliamo ora studiare la soluzione l'equazione (7.33) con funzione sorgente, temporalmente periodica, che ammette lo sviluppo di sopra. Tale soluzione si esprime come:

$$u(t, \mathbf{x}) = \sum_{\lambda,\alpha} u_{\lambda,\alpha}(t) \phi_{\lambda\alpha}(\mathbf{x}) ,$$

⁵Infatti dalla (7.40) abbiamo che $S_k(x) = f \int_0^{1/f} e^{-i2\pi k f t} S(t, x) dt$ da cui, se S è reale, prendendo il complesso coniugato dei due membri segue che $\overline{S_k(x)} = S_{-k}(x)$ e quindi, coniugando ancora, $S_k(x) = \overline{S_{-k}(x)}$.

dove le $\phi_{\lambda,\alpha}$ sono la solita base hilbertiana di autofunzioni di Δ su \mathcal{D} e le $u_{\lambda,\alpha}$ sono le soluzioni delle corrispondenti equazioni differenziali:

$$\frac{d^2 u_{\lambda,\alpha}}{dt^2} + v^2 \gamma_\lambda \frac{du_{\lambda,\alpha}}{dt} + (2\pi\nu_\lambda)^2 u_{\lambda,\alpha} = -v^2 S_{\lambda,\alpha}(t), \quad (7.41)$$

dove abbiamo tenuto conto della definizione delle frequenze di risonanza (7.22) per cui vale $(2\pi\nu_\lambda)^2 = -v^2\lambda$. Se definiamo

$$\Omega_\lambda := \frac{1}{2} \sqrt{\gamma_\lambda^2 + \frac{4\lambda}{v^2}}, \quad (7.42)$$

che può essere reale non negativo o immaginario puro dato che $\lambda < 0$, la soluzione generale dell'omogenea associata alla (7.41) è, per ogni scelta dei numeri $U_{\lambda,\alpha}^{(\pm)} \in \mathbb{C}$:

$$e^{-v^2\gamma_\lambda t/2} \left(U_{\lambda,\alpha}^{(+)} e^{v^2\Omega_\lambda t} + U_{\lambda,\alpha}^{(-)} e^{-v^2\Omega_\lambda t} \right). \quad (7.43)$$

Una soluzione particolare della (7.41) si può trovare supponendo euristicamente che abbia la forma, dove i termini della somma non nulli sono assunti essere in numero finito:

$$u_{\lambda,\alpha}(t) = \sum_k U_k^{(\lambda,\alpha)} e^{i2\pi k f t},$$

tenendo conto che, da (7.40),

$$S_{\lambda,\alpha}(t) = \sum_k S_{\lambda,\alpha,k} e^{i2\pi k f t}. \quad (7.44)$$

in cui la somma è in realtà eseguita solo su un numero finito di termini non nulli e:

$$S_{\lambda,\alpha,k} := \int_{\overline{D}} \overline{\phi_{\lambda,\alpha}(\mathbf{x})} S_k(\mathbf{x}) d^n x. \quad (7.45)$$

Inserendo questi sviluppi nella (7.41), tale equazione si può riscrivere, tenendo conto della (7.40):

$$\sum_k \left(-(2\pi k f)^2 + i v^2 \gamma_\lambda 2\pi k f + (2\pi\nu_\lambda)^2 \right) U_k^{(\lambda,\alpha)} + v^2 S_{\lambda,\alpha,k} e^{i2\pi k f t} = 0, \quad (7.46)$$

da cui:

$$U_k^{(\lambda,\alpha)} := \frac{v^2 S_{\lambda,\alpha,k}}{(2\pi k f)^2 - (2\pi\nu_\lambda)^2 - i v^2 \gamma_\lambda 2\pi k f}.$$

Quindi possiamo concludere che la soluzione generale della (7.41) ha la forma:

$$u_{\lambda,\alpha}(t) = e^{-v\gamma_\lambda t/2} \left(U_{\lambda,\alpha}^{(+)} e^{v\Omega_\lambda t} + U_{\lambda,\alpha}^{(-)} e^{-v\Omega_\lambda t} \right) + \sum_k \frac{v^2 S_{\lambda,\alpha,k} e^{i2\pi k f t}}{(2\pi k f)^2 - (2\pi\nu_\lambda)^2 - i v^2 \gamma_\lambda 2\pi k f} \quad (7.47)$$

dove $U_{\lambda,\alpha}^{(\pm)} \in \mathbb{C}$ sono in realtà determinati perché si possono scrivere in funzione delle condizioni iniziali, cioè in funzione dei coefficienti noti $u_{\lambda,\alpha}^{(0)}$ e $u_{\lambda,\alpha}^{(1)}$ imponendo le due ultime richieste in (7.37)

e Ω_λ è definito dalla (7.42). Dalla forma di Ω_λ , essendo $\lambda < 0$, segue subito che $\gamma_\lambda/2 > \Omega_\lambda$ se quest'ultimo è reale non negativo. Pertanto il primo addendo a secondo membro della (7.47) si annulla per $t \rightarrow +\infty$ sia nel caso in cui Ω_λ sia immaginario puro che reale a causa del fattore $e^{-v\gamma_\lambda t/2}$.

Questo significa che, in presenza di dissipazione comunque piccola, dopo un certo tempo di la soluzione si stabilizza nella forma asintotica:

$$u_{\lambda,\alpha}^{(\infty)}(t) = v^2 \sum_k \frac{S_{\lambda,\alpha,k} e^{i2\pi k f t}}{(2\pi k f)^2 - (2\pi\nu_\lambda)^2 - i v^2 \gamma_\lambda 2\pi k f}, \quad (7.48)$$

independentemente dalle condizioni iniziali.

Inserendo la (7.48) nel secondo memebro di (7.36), l'espressione per la funzione u sarà di conseguenza, a grandi tempi (una stima dell'ordine di grandezza di tale tempo è data da $\tau_\lambda := 1/(v\gamma_\lambda)$):

$$u^{(\infty)}(t, \mathbf{x}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} U_k(\mathbf{x}) e^{i2\pi k f t}, \quad (7.49)$$

dove, ovviamente:

$$U_k(\mathbf{x}) := v^2 \sum_{\lambda \in \sigma_p(\Delta)} \frac{\sum_{\alpha=1}^{d_\lambda} S_{\lambda,\alpha,k} \phi_{\lambda,\alpha}(\mathbf{x})}{(2\pi k f)^2 - (2\pi\nu_\lambda)^2 - i 2\pi v^2 \gamma_\lambda k f}. \quad (7.50)$$

Nel caso in cui S sia reale (e avendo scelto le $\phi_{\lambda,\alpha}$ reali dato che come abbiamo visto è sempre possibile farlo) vale $U_{-k}(\mathbf{x}) = \overline{U_k(\mathbf{x})}$ dato che $\overline{S_{\lambda,\alpha,k}} = S_{\lambda,\alpha,-k}$ come già visto, possiamo allora raccogliere i termini relativi a k e $-k$ nell'espressione trovata per $u^{(\infty)}(t, \mathbf{x})$ ottenendo alla fine:

$$u^{(\infty)}(t, \mathbf{x}) = U_0(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{+\infty} B_k(\mathbf{x}) \sin(2\pi k f t + \epsilon_k(\mathbf{x})). \quad (7.51)$$

Per ottenere la formula di sopra partendo da (7.49) scrivamo

$$U_k(\mathbf{x}) = |U_k(\mathbf{x})| e^{i(\epsilon_k(\mathbf{x}) - \pi/2)},$$

dove l'addendo $\pi/2$ è stato inserito per comodità (per ottenere un seno invece che un coseno nella formula di sopra). A questo punto, tenuto conto di $U_{-k}(\mathbf{x}) = \overline{U_k(\mathbf{x})}$, osserviamo che

$$\begin{aligned} & U_k(\mathbf{x}) e^{i2\pi k f t} + U_{-k}(\mathbf{x}) e^{-i2\pi k f t} = U_k(\mathbf{x}) e^{i2\pi k f t} + \overline{U_k(\mathbf{x})} e^{i2\pi k f t} \\ &= |U_k(\mathbf{x})| e^{i(2\pi k f \epsilon_k(\mathbf{x}) - \pi/2)} + |U_k(\mathbf{x})| e^{-i(2\pi k f \epsilon_k(\mathbf{x}) - \pi/2)} = |U_k(\mathbf{x})| \left(e^{i(2\pi k f \epsilon_k(\mathbf{x}) - \pi/2)} + e^{-i(2\pi k f \epsilon_k(\mathbf{x}) - \pi/2)} \right) \\ &= 2|U_k(\mathbf{x})| \cos(2\pi k f t + \epsilon_k(\mathbf{x}) - \pi/2) = 2|U_k(\mathbf{x})| \sin(2\pi k f t + \epsilon_k(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

Pertanto vale (7.51) dove:

$$B_k(\mathbf{x}) := 2|U_k(\mathbf{x})| = 2v^2 \left| \sum_{\lambda \in \sigma_p(\Delta)} \frac{\sum_{\alpha=1}^{d_\lambda} S_{\lambda,\alpha,k} \phi_{\lambda,\alpha}(\mathbf{x})}{(2\pi k f)^2 - (2\pi\nu_\lambda)^2 - i 2\pi v^2 \gamma_\lambda k f} \right|, \quad k = 1, 2, \dots \quad (7.52)$$

Dalle (7.45) e (7.50) vediamo che

$$U_0(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{se} \quad S_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{T} \int_0^T S(t, \mathbf{x}) dt = 0$$

dove $T := 1/f$ e questo accade per sorgenti realistiche come le corde di uno strumento a corde. Al solito, nelle nostre ipotesi generali, solo un numero finito di termini in tutte le somme, apparentemente infinite di sopra, è non nullo.

L'espressione trovata per la soluzione a grandi tempi (in realtà tempi molto brevi in sistemi fisici concreti), mostra che nella soluzione finale si ritrova lo stesso spettro di frequenze della sorgente (fondamentale f ed armoniche kf con $k = 1, 2, \dots$) che forza il sistema e che in tal modo lo "pilota". Nell'andamento temporale a grandi tempi la memoria delle frequenze di risonanza ν_λ del sistema oscillante è completamente cancellata. Tuttavia ne rimane traccia nelle ampiezze dei singoli modi di oscillazione. Consideriamo infatti la (7.50). Se, variando f , una delle frequenze dello spettro della forzante kf tende a coincidere, in valore assoluto, con una delle frequenze di risonanza ν_λ , i corrispondenti termini (al variare di α) nello sviluppo (7.50) di U_k , per il valore di k detto, tendono a raggiungere il loro valore massimo in valore assoluto:

$$\frac{|v^2 S_{\lambda, \alpha, k} \phi_{\lambda, \alpha}(\mathbf{x})|}{\sqrt{[(2\pi kf)^2 - (2\pi \nu_\lambda)^2]^2 + 4\pi^2 v^4 \gamma_\lambda^2 k^2 f^2}} \rightarrow \frac{|v^2 S_{\lambda, \alpha, k} \phi_{\lambda, \alpha}(\mathbf{x})|}{2\pi v^2 \gamma_\lambda |k| f} \quad \text{se } kf \rightarrow \nu_\lambda.$$

Se il parametro di smorzamento γ_λ è piccolo, il secondo membro tende a crescere e, al limite, diverge in assenza di smorzamento.

Concludiamo che (comunque abbiamo fissato le condizioni iniziali del sistema oscillante che ammette frequenze di risonanza ν_λ), quanto più la frequenza f con cui oscilla la forzante esterna S si avvicina ad una delle ν_λ , tanto più l'ampiezza delle oscillazioni di deformazione del sistema tende a diventare grande, ed in modo divergente quanto più il parametro di smorzamento γ_λ è piccolo. La stessa cosa accade se un multiplo intero della frequenza f si avvicina in valore assoluto ad una delle frequenze di risonanza.

Questo fenomeno è detto **risonanza** ed è responsabile di vari disastri accaduti a diverse costruzioni, in particolare ponti sospesi: la tipica situazione è quella di un plotone di militari che attraversa un ponte marciando con un passo, cioè una frequenza f , pari ad una delle frequenze di risonanza ν_λ della struttura, oppure un ponte sospeso investito da raffiche di vento periodiche con frequenza pari ad una frequenza di risonanza della struttura. In tal caso il modello della struttura è più vicino a quello di una lamina invece che una membrana, tuttavia la trattazione teorica è simile (essenzialmente è sufficiente sostituire l'operatore di Laplace con il suo quadrato cambiato di segno nel secondo termine della (7.33) e quindi $-\lambda^2$ ad ogni occorrenza di λ nella discussione di sopra).

Osservazioni 7.6. Tutti i risultati ottenuti si generalizzano immediatamente per risuonatori forzati costruiti da poligoni le cui facce sono un certo numero di membrane D_1, D_2, \dots, D_N . Le saldature sono fatte attraverso porzioni dei bordi delle facce su cui valgono le condizioni di annullamento. Oggetti di questo tipo sono modelli semplificati della cassa armonica di strumenti

musicali. In questo caso, le forzanti saranno in genere differenti per ogni faccia e le indicheremo con $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(N)}$. Tuttavia, dato che queste forzanti sono generate da un comune meccanismo (per esempio le corde dello strumento), ci si aspetta che ammettano tutte uno sviluppo:

$$S^{(j)}(t, \mathbf{x}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} S_k^{(j)}(\mathbf{x}) e^{i2\pi k f t}. \quad (7.53)$$

dove le frequenze kf sono le stesse per ogni $j = 1, \dots, N$. L'argomento \mathbf{x} della forzante $S^{(j)}$ apparterrà alla faccia D_j . Per ogni faccia D_j avremo una funzione di deformazione ortogonale $u_j^{(\infty)}$, a grandi tempi, della forma:

$$u_j^{(\infty)}(t, \mathbf{x}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} U_k^{(j)}(\mathbf{x}) e^{i2\pi k f t}, \quad (7.54)$$

che si può scrivere equivalentemente:

$$u_j^{(\infty)}(t, \mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{+\infty} B_k^{(j)}(\mathbf{x}) \sin(2\pi k f t + \epsilon_k^{(j)}(\mathbf{x})). \quad (7.55)$$

7.1.6 *Il caso del risuonatore o tamburo ideale forzato di topologia arbitraria.

Consideriamo il caso di un tamburo ideale di topologia arbitraria descritto dalla varietà differenziabile bidimensionale orientabile, connessa, compatta, $M \subset \mathbb{R}^3$. La metrica su M indotta da quella standard di \mathbb{R}^3 sarà indicata da g e l'operatore di Laplace-Beltrami definito sul dominio \mathcal{D}_M descritto nella sezione 7.1.2, sarà indicato con $\Delta^{(M,g)}$. Terremo conto di quanto discusso nelle sezioni 5.1.3 e 7.1.2. Ricordiamo che si tratta di un modello *molto poco fisico* come già discusso. Ce ne occupiamo comunque dato che presenta qualche aspetto matematico interessante. Se $u = u(t, p)$ è la deformazione del tamburo in $p \in M$ al tempo t nella direzione normale a M in p stesso, l'equazione del moto è ora, tenendo conto anche degli effetti di attrito:

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta^{(M,g)} u - \gamma \frac{\partial u}{\partial t} + \Gamma \frac{\partial \Delta u}{\partial t} = S(t, p). \quad (7.56)$$

con $\gamma, \Gamma > 0$ costanti note. Abbiamo inserito una forzante S che, come nel caso della membrana piatta, costringerà il tamburo a vibrare a frequenze imposte dall'esterno. Diremo tutto questo sistema un *risuonatore*. Si riesce a dimostrare la seguente proposizione similmente al caso più elementare già discusso.

Proposizione 7.6. *Se, nelle ipotesi iniziali su M e g , esiste una soluzione di (7.56) $u \in C^3(\mathbb{R} \times M; \mathbb{C})$ allora è unica per $t \geq 0$ e per fissati dati iniziali $u(0, p) = u_0(p)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(0, p) = u_1(p)$ e fissata S , rispettivamente di classe $C^2(M; \mathbb{C})$, $C^1(M; \mathbb{C})$ e $C^0(\mathbb{R} \times M; \mathbb{C})$. \diamond*

Dimostrazione. Consideriamo due soluzioni e sia φ la differenza di esse. Definendo la densità di energia E di tale funzione come in (5.15) (o (5.14) nel caso reale) con $\mu = 0$ e $c = v$ e

usando la derivata covariante $\nabla^{(M,g)}$ al posto del solito gradiente di \mathbb{R}^n , una dimostrazione strettamente analoga a quella che porta alla (5.19) produce ora, tenendo conto della nuova forma dell'equazione (7.56), in cui per φ , si deve omettere il termine di sorgente, si ha:

$$\int_M E(T, p) d\nu^{(M,g)} = -\gamma \int_0^T \int_M \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^2 d\nu^{(M,g)} dt - \Gamma \int_0^T \int_M g \left(\nabla^{(M,g)} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t}, \nabla^{(M,g)} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) d\nu^{(M,g)} dt,$$

dove $T > 0$. Sopra abbiamo usato il teorema della divergenza rispetto alla derivata covariante di Levi-Civita $\nabla^{(M,g)}$ tenendo conto dell'assenza di ∂M . Concludiamo che:

$$\int_M E(T, p) d\nu^{(M,g)} \leq 0.$$

D'altra parte, dato che vale $E \geq 0$ l'integrale di sopra dovrà essere nullo per ogni $T > 0$. Come nella dimostrazione del teorema 5.1, questo implica che $\varphi = 0$ ovunque e dunque le due soluzioni coincidono. \square

Tenuto conto della proposizione precedente, in modo essenzialmente identico a quanto fatto nella dimostrazione del teorema (7.1) riducendosi ad un numero finito di gradi di libertà, si può provare il teorema seguente.

Teorema 7.3. *Nelle ipotesi fatte inizialmente su M , si consideri l'equazione (7.56) per $u \in C^3(\mathbb{R} \times M; \mathbb{C})$, con $v, \gamma, \Gamma > 0$ costanti note, per gli assegnati dati iniziali u_0, u_1 insieme alla funzione S . Se la funzione sorgente $S \in C^0(M; \mathbb{C})$ e le condizioni iniziali $\phi_0 \in C^3(M; \mathbb{C})$ e $\phi_1 \in C^1(M; \mathbb{C})$ ammettono sviluppi di Fourier (7.13) che contengono solo un numero finito di addendi (indipendente da t per la funzione S), allora la soluzione esiste in $C^3(\mathbb{R} \times M; \mathbb{C})$ ed è unica.*

Tale soluzione si esprime come:

$$u(t, p) = \sum_{\lambda, \alpha} u_{\lambda, \alpha}(t) \phi_{\lambda, \alpha}(p), \quad (7.57)$$

dove le $\phi_{\lambda, \alpha}$ formano una base hilbertiana di autofunzioni di $\Delta^{(M,g)}$ su \mathcal{D}_M e le funzioni $u_{\lambda, \alpha} = u_{\lambda, \alpha}(t)$ sono le soluzioni dei corrispondenti problemi di Cauchy alle derivate ordinarie:

$$\frac{d^2 u_{\lambda, \alpha}}{dt^2} - v^2 \lambda u_{\lambda, \alpha} + v^2 \gamma \lambda \frac{du_{\lambda, \alpha}}{dt} = -v^2 S_{\lambda, \alpha}(t), \quad u_{\lambda, \alpha}(0) = u_{\lambda, \alpha}^{(0)}, \quad \frac{du_{\lambda, \alpha}}{dt}(0) = u_{\lambda, \alpha}^{(1)}. \quad (7.58)$$

dove

$$\gamma_\lambda := \gamma - \lambda \Gamma > 0, \quad (7.59)$$

e in cui i coefficienti $u_{\lambda, \alpha}^{(0)}, u_{\lambda, \alpha}^{(1)}$ sono i coefficienti di Fourier, rispetto alla base hilbertiana suddetta, delle condizioni iniziali u_0 e u_1 rispettivamente e, analogamente:

$$S_{\lambda, \alpha}(t) = \int_M \overline{\phi_{\lambda, \alpha}(\mathbf{x})} S(t, \mathbf{x}) d\nu^{(M,g)}. \quad (7.60)$$

◇

Possiamo ora ripetere le stesse considerazioni esposte dopo il teorema 7.2, assumendo di decomporre S usando la serie di Fourier, a p fisso:

$$S(t, p) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} S_k(p) e^{i2\pi k f t}, \quad (7.61)$$

dove solo un numero finito di addendi sia non nullo a secondo membro. Per evitare alcune patologie nelle soluzioni, imporremo anche il vincolo che, se ϕ è una funzione armonica su M ,

$$S_0(p) = 0, \quad \text{per ogni } p \in M. \quad (7.62)$$

La richiesta è equivalente a richiedere che in ogni punto p del tamburo, la forza esterna oscilli attorno al valore nullo. Se definiamo, come fatto nel caso della membrana piana,

$$S_{\lambda, \alpha, k} := \int_M \overline{\phi_{\lambda, \alpha}}(p) S_k(p) d\nu^{(M, g)}(p)$$

la richiesta fatta sopra implica che:

$$S_{\lambda, \alpha, 0} = 0, \quad \text{per ogni } \lambda \in \sigma_p(\Delta^{(M, g)}) \text{ e } \alpha = 1, 2, \dots, d_\lambda. \quad (7.63)$$

Come già detto per il caso più elementare discusso precedentemente, quanto diremo si può ottenere anche lasciando cadere l'ipotesi di un numero finito di termini, purchè la serie converga uniformemente ed abbastanza rapidamente. Nelle ipotesi del teorema 7.3 e con l'aggiunta della condizione (7.63) (che serve in particolare ad evitare che il denominatore in (7.64) si annulli per $\lambda = 0$) il moto del tamburo forzato si esprime ancora come somma di due parti. Una delle due parti è una soluzione dell'equazione omogenea e, eccetto per un termine costante, si spegne rapidamente per $t \rightarrow +\infty$ quanto più γ e Γ sono grandi. La seconda parte è una soluzione particolare dell'equazione differenziale completa che sopravviene a grandi tempi e non ha più memoria delle condizioni iniziali eccetto che per la costante detta prima, che può dipendere dalle condizioni iniziali. La soluzione a grandi tempi ha la forma:

$$u^{(\infty)}(t, p) = u_0 + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} U_k(\mathbf{x}) e^{i2\pi k f t},$$

dove, similmente al caso più elementare della membrana piatta oscillante, per $k \neq 0$:

$$U_k(p) := \sum_{\lambda \in \sigma_p(\Delta^{(M, g)}), \alpha=1, \dots, d_\lambda} \frac{S_{\lambda, \alpha, k} \phi_{\lambda, \alpha}(p)}{(2\pi k f)^2 - (2\pi \nu_\lambda)^2 - 2\pi i v^2 \gamma_\lambda k f}, \quad (7.64)$$

dove, al solito, abbiamo definito le frequenze di risonanza del tamburo M , tramite la (7.22) con $\lambda \in \sigma_p(\Delta^{(M, g)})$. Evidentemente la costante u_0 deve essere nulla in tutte le soluzioni fisicamente sensate, perché ci si aspetta che la soluzione oscilli attorno alla configurazione di riposo che

corrisponde a $u = 0$ ovunque.

Nel caso in cui u e S siano reali vale $U_k = \overline{U_{-k}}$, possiamo ancora esprimere questa soluzione come:

$$u^{(\infty)}(t, \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{+\infty} B_k(p) \sin(2\pi k f t + \epsilon_k(p)) , \quad (7.65)$$

dove:

$$B_k(\mathbf{x}) := 2|U_k| = 2 \left| \sum_{\lambda \in \sigma_p(\Delta), \alpha=1, \dots, d_\lambda} \frac{S_{\lambda, \alpha, k} \phi_{\lambda, \alpha}(p)}{(2\pi k f)^2 - (2\pi \nu_\lambda)^2 - 2\pi i v^2 \gamma_\lambda k f} \right| , \quad (7.66)$$

e $\epsilon_k(p)$ è completamente determinato dalle richieste:

$$B_k(p) \sin \epsilon_k(p) = 2 \operatorname{Re} U_k(p) , \quad B_k(p) \cos \epsilon_k(p) = -2 \operatorname{Im} U_k(p) . \quad (7.67)$$

Al solito, nelle nostre ipotesi generali, solo un numero finito di termini in tutte le somme, apparentemente infinite di sopra, è non nullo. L'espressione trovata per la soluzione $u = u(t, p)$ a grandi tempi (in realtà tempi molto brevi in sistemi fisici concreti), mostra nuovamente che nella soluzione finale si ritrova lo stesso spettro di frequenze della sorgente che forza il sistema e che in tal modo lo "pilota". Nell'andamento temporale a grandi tempi la memoria delle frequenze di risonanza ν_λ del sistema oscillante è completamente cancellata. Tuttavia ne rimane traccia nelle ampiezze dei singoli modi di oscillazione esattamente come già discusso per il caso della membrana piana.

7.2 Onde di pressione.

Vogliamo mostrare in questa sezione come l'equazione di D'Alembert descriva le onde di pressione e di densità nei gas isotropi in regime di deformazione adiabatica. Successivamente daremo alcuni risultati generali per tale equazione applicata a sorgenti di onde sonore.

7.2.1 L'equazione di D'Alembert per le onde di pressione.

Le leggi fondamentali che descrivono la dinamica dei gas (dell'aria in particolare) in un sistema di riferimento dotato di coordinate spaziali cartesiane ortonormali indicate con \mathbf{x} e rispetto al tempo t , sono le seguenti. La prima è l'**equazione di continuità (o conservazione) della massa**: se $\mu = \mu(t, \mathbf{x}) > 0$ è la densità di massa del gas o fluido, in funzione della posizione $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ nel riferimento e del tempo t :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mu \mathbf{v}) = 0 , \quad (7.68)$$

dove $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ è il campo di velocità del fluido nel riferimento considerato, cioè la velocità che ha una particella di gas che passa per \mathbf{x} al tempo t . Assumendo le due funzioni di classe C^1 ,

questa equazione, integrata su un volume V (fermo nel riferimento usato) a chiusura compatta con frontiera regolare orientabile, corrisponde all'equazione integrale:

$$\frac{d}{dt} \int_V \mu(t, \mathbf{x}) d^3x = - \oint_{+\partial V} \mu(t, \mathbf{y}) \mathbf{v}(t, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}),$$

dove abbiamo usato il teorema della divergenza. L'identità ottenuta dice, in termini matematici, che la variazione di massa in V , per unità di tempo, è pari alla massa che transita attraverso la frontiera di V per unità di tempo. L'equazione integrale scritta, assunta valida per ogni scelta di V con le caratteristiche dette, è equivalente alla richiesta (7.68).

La seconda equazione è **la seconda legge della dinamica** per il fluido pensato come *isotropo*:

$$\mu \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} \right) = \mu \mathbf{g} - \nabla_{\mathbf{x}} p, \quad (7.69)$$

dove $p = p(t, \mathbf{x}) \geq 0$ è la pressione all'interno del fluido nel punto \mathbf{x} al tempo t e \mathbf{g} è la densità di massa di forza gravitazionale (cioè l'accelerazione gravitazionale!). Il significato fisico di questa equazione è più evidente se si scrive la corrispondente equazione integrale. Se V_t è una porzione di fluido valutata al tempo t e tenendo conto di come essa evolva al variare del tempo – le particelle di fluido che esso contiene sono sempre le stesse che in V_0 , ma la forma di V_t e la sua posizione nel riferimento sarà diversa da V_0 – e se si assume che V_t sia regolare nel senso detto sopra per ogni t , allora l'equazione (7.69) equivale a:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{V_t} \mu \mathbf{v} d^3x \right) = \int_{V_t} \mu \mathbf{g} d^3x - \oint_{+\partial V_t} p(t, \mathbf{y}) \mathbf{n}(t, \mathbf{y}) dS(t, \mathbf{y}). \quad (7.70)$$

Tale equazione dice che la variazione per unità di tempo dell'impulso totale del volume V_t di fluido uguaglia la somma delle forze che agiscono su tale porzione di continuo. Si osservi che V_t dipende dal tempo, per cui l'azione della derivata d/dt non si può banalmente trasferire sotto il segno di integrale, ma dovrà apparire anche un termine dipendente da V_t . Il calcolo non è banale e si rimanda ad un corso di meccanica dei continui. Qui diciamo solo che, tenuto conto dell'equazione di continuità della massa, l'azione della detta derivata su V_t è il responsabile dell'addendo $\mu \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}$ a primo membro della (7.69). Le forze che agiscono sulla porzione di fluido V_t sono dunque di due tipi.

(1) Il primo addendo a secondo membro in (7.70) rappresenta la forza di gravità totale che agisce su tutte le particelle di fluido.

(2) Il secondo addendo rappresenta invece le forze di pressione che il resto di fluido, la parte fuori da V_t , esercita su V_t attraverso la sua superficie ∂V_t . Tale forza si ottiene integrando la **densità di forza superficiale** – detta anche **sforzo** – di espressione $-p(t, \mathbf{y}) \mathbf{n}(t, \mathbf{y})$, dove $\mathbf{n}(t, \mathbf{y})$ è il versore normale uscente da ∂V_t , nel punto \mathbf{y} al tempo t e $p(t, \mathbf{y})$ è la pressione nel fluido in quel punto a quel tempo.

Osservazioni 7.7. Il fatto che il fluido sia *isotropo* significa che la forza che l'esterno di V_t esercita sulla superficie ∂V_t è sempre perpendicolare ad essa, *comunque la superficie sia disposta*,

la nozione di *pressione* ha senso proprio in questa situazione⁶.

Rimane da precisare una terza legge, detta **equazione costitutiva**, che connette μ e p solitamente espressa da una relazione $p = f(\mu)$ ottenuta per via termodinamica.

Se le deformazioni di volumi di fluido avvengono molto rapidamente, e questo accade nelle onde di suono, è ragionevole assumere che la relazione costitutiva suddetta sia quella di una *trasformazione adiabatica* (cioè in assenza di scambi di calore):

$$p(t, \mathbf{x}) = f(p) = p_0 \left(\frac{\mu(t, \mathbf{x})}{\mu_0} \right)^\gamma, \quad (7.71)$$

p_0 è la pressione corrispondente alla densità μ_0 di riferimento, γ è una costante che dipende dal gas (γ è il rapporto tra i calori specifici a pressione e volume costante come dovrebbe essere noto dai corsi di termodinamica, vale circa 1.4 per l'aria.)

Non cercheremo nemmeno di affrontare il complicato problema di risolvere il set delle tre equazioni (7.68), (7.69) e (7.71), ma faremo diverse approssimazioni, che si rivelano funzionanti alla prova dei fatti, descrivendo le perturbazioni di pressione relativamente violente come quelle dei suoni. Trascureremo la presenza di gravità, in modo tale che, nella situazione di equilibrio si possano considerare la densità di massa e la pressione come costanti μ_0, p_0 (in caso contrario si ha una dipendenza dalla quota secondo la legge idrostatica come ben noto). Assumeremo poi che la densità di massa vari di poco rispetto alla situazione di gas in equilibrio. Possiamo scrivere in tal caso:

$$\mu(t, \mathbf{x}) = (1 + s(t, \mathbf{x}))\mu_0,$$

da cui:

$$s(t, \mathbf{x}) := \frac{\mu(t, \mathbf{x})}{\mu_0} - 1, \quad (7.72)$$

dove il numero puro $s(t, \mathbf{x})$, che si dice **condensazione**, soddisfa $|s(t, \mathbf{x})| \ll 1$. Nel caso generale avremo che:

$$p(t, \mathbf{x}) = p_0 + \left. \frac{df}{d\mu} \right|_{\mu_0} (\mu(t, \mathbf{x}) - \mu_0) + O((\mu(t, \mathbf{x}) - \mu_0)^2).$$

Dato che:

$$\left. \frac{df}{d\mu} \right|_{\mu_0} (\mu(t, \mathbf{x}) - \mu_0) = p_0 \gamma \left(\frac{\mu_0}{\mu_0} \right)^{\gamma-1} \frac{1}{\mu_0} (\mu - \mu_0) = p_0 \gamma \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) = p_0 \gamma s,$$

possiamo approssimare la relazione tra p e μ con:

$$p(t, \mathbf{x}) = p_0 + p_0 \gamma s(t, \mathbf{x}) \quad (7.73)$$

⁶Nel caso generale, la forza per unità di superficie che l'esterno di V_t esercita sul suo bordo ∂V_t non è diretta perpendicolarmente ad esso ma, ha una direzione che è una funzione di $\mathbf{n}, \mathbf{y}, t$. Tale funzione è lineare in \mathbf{n} e si descrive attraverso il cosiddetto *tensore degli sforzi di Cauchy*.

e quindi, essendo p_0 una costante:

$$\nabla_{\mathbf{x}} p(t, \mathbf{x}) = p_0 \gamma \nabla_{\mathbf{x}} s(t, \mathbf{x}) . \quad (7.74)$$

Assumeremo di seguito che la velocità \mathbf{v} , il suo gradiente, s ed il suo gradiente siano trascurabili quando appaiono al secondo ordine rispetto a termini del primo'ordine. In tal modo, per esempio s^2 , $s\mathbf{v}$ o $(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v})^2$ si possono trascurare rispetto a, indifferentemente, s o \mathbf{v} o ∇s o altri termini del primo ordine. In questo modo si ha una procedura di *linearizzazione* che produce alla fine equazioni necessariamente lineari.

Se nella (7.69) trascuriamo anche il termine che tiene conto della gravità come già detto, troviamo:

$$\mu \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla_{\mathbf{x}} p . \quad (7.75)$$

Otteniamo infine attraverso (7.74) ed approssimando $1/\mu$ con $1/\mu_0$ (l'errore che si commette è proporzionale a $s\nabla_{\mathbf{x}}s$):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{p_0 \gamma}{\mu_0} \nabla_{\mathbf{x}} s(t, \mathbf{x}) . \quad (7.76)$$

Con la stessa cura, l'equazione (7.68) diventa:

$$\mu_0 \frac{\partial s}{\partial t} + \mu_0 \nabla_{\mathbf{x}} \cdot ((1 + s(t, \mathbf{x}))\mathbf{v}) = 0$$

e quindi:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = 0 , \quad (7.77)$$

Se ora calcoliamo la derivata seconda temporale di s , teniamo conto di (7.77) e (7.76), ammettendo che s sia di classe C^2 , in modo da poter scambiare le derivate temporali e spaziali, otteniamo che:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - \frac{p_0 \gamma}{\mu_0} \Delta_{\mathbf{x}} s(t, \mathbf{x}) = 0 ,$$

cioè l'equazione di D'Alembert:

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + \Delta_{\mathbf{x}} s(t, \mathbf{x}) = 0 \quad \text{con} \quad v := \sqrt{\frac{p_0 \gamma}{\mu_0}} . \quad (7.78)$$

v è la velocità del suono nel fluido considerato. Abbiamo ottenuto che la condensazione s nell'ambito di validità delle approssimazioni fatte, che si rivela sensato studiando la propagazione del suono, soddisfa l'equazione di D'Alembert. Dato che vale la (7.72) e tenendo conto del fatto che le derivate della costante 1 sono sempre nulle, l'equazione (7.78) risulta essere valida sostituendo che sia μ_0 che p_0 sono costanti, possiamo estrarre tali costanti dalle derivate concludendo che, nelle approssimazioni fisiche assunte valide, devono valere anche le equazioni di d'Alembert per le differenze di densità di massa $D\mu = \mu - \mu_0$ e di pressione $Dp = p - p_0$ e quindi per μ e p stesse:

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} + \Delta_{\mathbf{x}} \mu(t, \mathbf{x}) = 0 \quad \text{con} \quad v := \sqrt{\frac{p_0 \gamma}{\mu_0}} \quad (7.79)$$

e

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \Delta_{\mathbf{x}} p(t, \mathbf{x}) = 0 \quad \text{con} \quad v := \sqrt{\frac{p_0 \gamma}{\mu_0}}, \quad (7.80)$$

Si osservi che il rapporto p_0/μ_0 è proporzionale alla temperatura assoluta T_0 del gas secondo un fattore di proporzionalità universale (assumendo che il gas soddisfi l'equazione dei gas perfetti) e pertanto la velocità del suono dipende dalla temperatura del mezzo. Nel modello semplice nel quale lavoriamo, a parità di temperatura due gas hanno differenti velocità di propagazione a seconda delle differenti, rispettive, costanti γ .

7.2.2 Esistenza del potenziale delle velocità.

Nelle ipotesi fatte nella sezione precedente, la validità dell'equazione (7.76) ha un'importante conseguenza. Assumendo che valga tale equazione, e con l'ipotesi aggiuntiva che:

al tempo $t = 0$ (per altro arbitrariamente fissato) il campo di velocità $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ soddisfi:

$$\mathbf{v}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{ovunque in } \mathbf{x},$$

definiamo la grandezza:

$$\phi(t, \mathbf{x}) := -\frac{p_0 \gamma}{\mu_0} \int_0^t s(\tau, \mathbf{x}) d\tau. \quad (7.81)$$

Per costruzione vale allora:

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} \phi(t, \mathbf{x}). \quad (7.82)$$

In altre parole, il campo di velocità ammette un **potenziale**, dato dal campo ϕ .

Nel caso in cui invece non valga la condizione di annullamento di \mathbf{v} al tempo nullo, data la definizione (7.81), la (7.82) cessa di valere e deve essere sostituita, ovviamente, da:

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} \phi(t, \mathbf{x}) + \mathbf{v}(0, \mathbf{x}). \quad (7.83)$$

La funzione ϕ determina in ogni caso anche p e μ . Infatti, dalla definizione di ϕ e tenendo conto di (7.73) e (7.72), troviamo subito che:

$$p = p_0 - \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \mu = \mu_0 - \frac{\mu_0^2}{p_0 \gamma} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (7.84)$$

che valgono, in virtù delle equazioni dette e della sola definizione (7.81) anche se per $t = 0$ il campo di velocità non sia annulla. Integriamo in τ da $\tau = 0$ a $\tau = t$ i due membri dell'equazione per s

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial \tau^2} + \Delta_{\mathbf{x}} s(\tau, \mathbf{x}) = 0.$$

Si ottiene in tal modo con ovvi passaggi (notando in particolare che $\partial_t^2 s$ è continua per ipotesi):

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial s}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + \frac{1}{v^2} \frac{\partial s}{\partial t}(0, \mathbf{x}) - \frac{\mu_0}{p_0 \gamma} \Delta_{\mathbf{x}} \phi(t, \mathbf{x}) = 0.$$

Tenendo conto che $\partial_t s(0, \mathbf{x}) = -\nabla \cdot \mathbf{v}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$ per la (7.77) e per la nostra ipotesi sul valore di \mathbf{v} al tempo $t = 0$, abbiamo infine che l'equazione trovata si riduce a:

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial s}{\partial t} + \Delta_{\mathbf{x}} \phi(t, \mathbf{x}) = 0.$$

Dalla definizione di ϕ , (7.81), quest'equazione significa che:

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \Delta_{\mathbf{x}} \phi(t, \mathbf{x}) = 0. \quad (7.85)$$

Dunque anche il potenziale delle velocità, nelle nostre ipotesi, soddisfa l'equazione di D'Alembert. Nel caso in cui, a $t = 0$ esista un campo di velocità non nullo, l'equazione di sopra deve essere ovviamente sostituita dall'equazione di D'Alembert con sorgente (che in questo caso non dipende dal tempo):

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \Delta_{\mathbf{x}} \phi(t, \mathbf{x}) = -\nabla \cdot \mathbf{v}(0, \mathbf{x}). \quad (7.86)$$

7.2.3 Suono prodotto da risuonatori forzati.

Consideriamo un risuonatore costituito da un poligono chiuso e compatto Ω il cui bordo $\partial\Omega$ sia costituito da N facce piane D_1, D_2, \dots, D_N (che descrivono le solite membrane oscillanti) attaccate tra di loro attraverso porzioni del loro bordo (dato da curve C^∞ a tratti). Su queste curve, che descrivono gli spigoli del poligono, sono imposte le solite condizioni di annullamento della deformazione delle facce. Abbiamo introdotto questi sistemi, che possono costituire un modello elementare della cassa di risonanza di uno strumento, alla

fine della sezione 7.1.5 alla quale rimandiamo per le notazioni che useremo nel resto di questa sezione.

Sul risuonatore agiscono forzanti esterne date dalle solite sorgenti dell'equazione di D'Alembert: S_j per la faccia D_j . Ognuna di queste sorgenti impone alla corrispondente faccia D_j di vibrare con le frequenze kf , come discusso nella sezione 7.1.5. Ricordiamo che le frequenze kf sono assunte essere le stesse per ogni faccia, dato che si presuppone che esista un meccanismo comune forzante, per esempio le corde di uno strumento a corda e, in tal caso, le kf sono le frequenze di risonanza di una corda. La deformazione trasversale della faccia D_j per grandi tempi, come discusso nella sezione 7.1.5, è quella data dalla funzione oscillante (7.54). Equivalentemente dalla (7.55). Ricordiamo che nella sezione 7.1.5 abbiamo, al solito, assunto che solo una quantità finita di addendi nelle serie (7.54) e (7.55) sia non nulla. In altre parole, in (7.54) solo una quantità finita di $U_k^{(j)}$ è non nulla. Nel seguito continueremo ad assumere tale ipotesi anche se se ne potrebbe fare a meno. È ragionevole aspettarsi che, nelle stesse ipotesi che hanno portato a scrivere l'equazione di D'Alembert per le onde di pressione (7.80), le onde sonore prodotte oscillino temporalmente con le stesse frequenze kf . Pertanto, ci aspettiamo che l'onda sonora sia una sovrapposizione di funzioni a frequenza temporale fissata, della forma (dove teniamo conto del fatto che il termine corrispondente a $k = 0$ deve coincidere con la pressione a riposo

p_0 per evidenti motivi fisici):

$$p(t, \mathbf{x}) = p_0 + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} P_k(\mathbf{x}) e^{i2\pi k f t}, \quad (7.87)$$

dove le funzioni P_k sono da determinarsi. Equivalentemente, osservando che p è reale per cui deve essere $P_k(\mathbf{x}) = \overline{P_{-k}(\mathbf{x})}$, possiamo riscrivere la formula precedente come:

$$p(t, \mathbf{x}) = p_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} C'_k(\mathbf{x}) \sin(2\pi k f t + \delta'(\mathbf{x})). \quad (7.88)$$

Per comodità noi continueremo ad usare la (7.87). Inserendo questa forma di soluzione nella (7.80), vediamo che p soddisfa tale equazione se valgono le singole equazioni:

$$\Delta_{\mathbf{x}} P_k(\mathbf{x}) + \left(\frac{2\pi k f}{v}\right)^2 P_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (7.89)$$

L'equazione (7.89), con $\left(\frac{2\pi k f}{v}\right)^2$ sostituito con una costante generica, si chiama **equazione di Helmholtz**. Con opportune condizioni di annullamento all'infinito di P_k e del suo gradiente (in particolare le cosiddette *condizioni di Sommerfeld* di cui non ci occuperemo) e condizioni al contorno, la soluzione della (7.89) è unicamente determinata. Noi ci occuperemo delle sole condizioni al contorno, da imporre su $\partial\Omega$, considerando il problema di determinare P_k in \mathbb{R}^3 all'esterno di Ω .

La condizione al contorno da imporre su P_k deriva dal requisito fisico che la velocità con cui oscilla il bordo del tamburo in ogni punto $q \in \partial\Omega$ ortogonalmente al bordo, e cioè $\partial_t u(t, q)$, sia la stessa dell'aria fuori dal tamburo in quello stesso punto: $\mathbf{n}_q \cdot \mathbf{v}(t, q)$, dove \mathbf{n}_q indica la normale uscente da M in q . In formule⁷:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, q) = \mathbf{n}_p \cdot \mathbf{v}(t, q) \quad \text{per ogni } q \in \partial\Omega.$$

Se deriviamo un'altra volta nel tempo otteniamo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, q) = \mathbf{n}_q \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(t, q).$$

In base alla (7.75) questo significa che:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla p(t, q) = -\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, q). \quad (7.90)$$

Se ora, pensando esplicitamente di lavorare sulla faccia j -esima, e sostituiamo a secondo membro la (7.54) ed a primo membro la (7.88), vediamo che le condizioni suddette sono verificate se (e

⁷A secondo membro l'argomento q dovrebbe essere più correttamente $q + u(t, q)\mathbf{n}_q$. Tuttavia omettiamo $u(t, q)\mathbf{n}_q$ proprio perché lavoriamo nel regime di piccole deformazioni.

solo se), per $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ valgono le condizioni di Neumann per il problema esterno dell'equazione di Helmholtz:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla P_k \upharpoonright_{D_j}(q) = \mu(2\pi kf)^2 U_k^{(j)}(q) \quad \text{per ogni } q \in D_j, \text{ per ogni } j = 1, \dots, N. \quad (7.91)$$

Dove le funzioni $U_k^{(j)}$ sono note. Come già osservato sopra, per ogni k il problema di determinare P_k che risolve l'equazione (7.89) con condizioni al bordo suddette (tenendo conto che $\partial\Omega$ è una superficie C^∞ a tratti per costruzione) e andamento all'infinito fissato ammette un'unica soluzione. In questo modo vediamo che il suono prodotto dal tamburo contiene, facendo l'analisi di Fourier temporale in ogni fissato punto \mathbf{x} dello spazio, le stesse frequenze kf con cui oscilla il risuonatore forzato dalla sollecitazione esterna.

7.2.4 Risuonatore ad aria di Helmholtz.

Discutiamo infine un risuonatore che corrisponde ad un modello molto semplificato di molti strumenti musicali a fiato dovuto ad Helmholtz. In questo risuonatore, ciò che colpisce l'aria esterna producendo l'onda sonora è l'aria stessa contenuta nel risuonatore.

Consideriamo una bottiglia piena d'aria con un corpo molto grande di volume V ed un collo stretto e corto di area trasversale A e altezza h , dove $hA \ll V$. Assumiamo che la bottiglia non abbia tappo. Se in qualche modo premiamo l'aria dentro il collo verso il corpo della bottiglia, l'aria nel corpo si comprime ed esercita una pressione maggiore sul volume d'aria del collo (che si comprime molto meno, dato che la capacità di compressione è proporzionale al volume come calcoleremo tra poco). La forza esercitata sul tappo di aria è proporzionale alla profondità di penetrazione ed è nella direzione opposta ad essa. Si ha in questo modo lo stesso tipo di forza dovuta ad una molla ideale che produrrebbe un moto armonico semplice ad una frequenza propria del sistema che calcoleremo tra poco (la frequenza di risonanza di Helmholtz) se sul cilindro di aria non agissero altre forze. Tuttavia si può anche produrre un'oscillazione forzata (alla frequenza $\nu \neq \nu_H$) esercitando una forza esterna periodica: se una volta che il cilindretto di aria è tornato nella configurazione iniziale viene nuovamente spinto in basso, si può instaurare un moto oscillatorio di esso alla frequenza della forzante (almeno in presenza di fenomeni di attrito che comunque sono sempre presenti). Ovviamente in tutti i casi, si perderà una parte di aria, ma si può tenere conto di queste perdite, con un modello più preciso. Se la frequenza dell'oscillazione è nell'intervallo di percezione del suono, il tappo di aria colpendo con la faccia superiore l'aria esterna alla bottiglia produrrà un suono udibile alla stessa frequenza di oscillazione. Questo è quello che accade quando si soffia radente al collo della bottiglia producendo un suono basso alla frequenza ν_H . In questo caso la forza che spinge in basso il tappo di aria nel collo è quella dovuta all'aria del soffio.

Facciamo una stima della frequenza di risonanza di questo sistema. Partiamo dalla relazione (7.71) che esprime la pressione in un volume d'aria di densità e pressione riposo μ_0 e p_0 rispettivamente, quando è soggetto ad una deformazione molto rapida, supposta adiabatica. Da essa abbiamo:

$$dp = \frac{p_0 \gamma}{\mu_0} \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^{\gamma-1} d\mu.$$

Se lavoriamo a massa di aria M fissata per cui, le variazioni di densità (e pressione) sono dovute a variazioni di volume: $\mu = M/V$, possiamo riscrivere la relazione trovata come:

$$dp = -v^2 \left(\frac{V_0}{V} \right)^{\gamma-1} \frac{M}{V^2} dV = -v^2 \left(\frac{V_0}{V} \right)^{\gamma-1} \mu \frac{dV}{V},$$

dove abbiamo introdotto la velocità del suono v data dalla seconda equazione in (7.78). In prima approssimazione, quindi, per variazioni finite di volume e pressione:

$$\Delta p = -v^2 \left(\frac{V_0}{V} \right)^{\gamma-1} \mu \frac{\Delta V}{V}$$

Dato che $V = V_0 + \Delta V$ e $\mu = M/(V_0 + \Delta V)$, se sviluppiamo con Taylor attorno a $V = V_0$ il fattore $\left(\frac{V_0}{V} \right)^{\gamma-1} \mu$ e ci fermiamo all'ordine più basso possibile, otteniamo la nostra espressione finale:

$$\Delta p = -v^2 \mu_0 \frac{\Delta V}{V} \quad (7.92)$$

La (7.92) esprime la variazione della pressione Δp nella massa di aria M , quando il suo volume varia di ΔV . La pressione p è supposta essere uniforme nel volume, ed in particolare alla frontiera di esso. Se immaginiamo la massa di aria M come quella contenuta sotto il tappo di aria nel collo della bottiglia, e immaginiamo che la massa nel collo della bottiglia (pari a $Al\mu_0$) penetri di un'altezza z dentro il volume, comprimendo quindi di un volume $\Delta V = Az\mu_0$ la massa M , la forza che quest'ultima eserciterà sulla massa nel collo della bottiglia è: $A\Delta p = Av^2\mu_0 \frac{\Delta V}{V}$ in direzione opposta a quella di penetrazione. In definitiva l'equazione del moto della massa nel collo della bottiglia (ammettendo che tale massa non esca dal collo e che non ci siano altre forze nella direzione considerata) è, nella direzione parallela al collo:

$$Al\mu_0 \frac{d^2z}{dt^2} = -Av^2\mu_0 \frac{Az\mu_0}{V}.$$

Semplificando:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -(2\pi\nu_H)^2 z, \quad \nu_H := \frac{v}{2\pi} \sqrt{\frac{A}{Vl}}. \quad (7.93)$$

Abbiamo trovato l'equazione di un oscillatore armonico con frequenza di risonanza ν_H data dalla formula di sopra, che è detta **frequenza di risonanza di Helmholtz**. Si osservi che le caratteristiche del gas sono solo contenute nella velocità del suono nel gas v , il resto dipende dalla geometria.

Se aggiungiamo una forza ulteriore esterna che agisce sul tappo di aria e che oscilla con una frequenza ν , si ha un oscillatore forzato. Tenendo infine conto di termini dissipativi analogamente a quanto visto nella sezione 7.37 si arriva ad un'equazione della forma solita:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + (2\pi\nu_H)^2 z + \gamma \frac{dz}{dt} = S(t), \quad (7.94)$$

del tutto analoga alla prima equazione in (7.37) (con $\Gamma = 0$) su cui si possono fare analoghe considerazioni riguardo ai fenomeni di risonanza quando ν si avvicina a ν_H .

7.3 Un po' di fisica matematica del suono e della musica.

Ci occuperemo ora, in modo molto sommario e idealizzato, della descrizione del funzionamento degli strumenti musicali, in particolare quelli a corde, tenendo conto della presenza della cassa di risonanza o cassa armonica e dell'aria. Fare uso dei risultati ottenuti nelle sezioni precedenti di questo capitolo e del precedente.

7.3.1 Strumenti musicali a corda.

Le corde degli strumenti musicali “a corda” (chitarra, di un pianoforte, violino...) vibrano trasversalmente soddisfacendo l'equazione di D'Alembert con condizioni di annullamento al bordo. Può esserci anche un ulteriore termine di forzamento dell'oscillazione che corrisponde ad una sorgente nell'equazione di D'Alembert dato dalla componente perpendicolare alla corda di una densità lineare di forza che agisce sulla corda stessa. Dal punto di vista pratico questo termine forzante può in particolare essere l'archetto degli strumenti musicali della famiglia del violino. Si osservi che la forma funzionale di questo tipo di forzante è molto difficile da descrivere matematicamente (ne esiste un modello matematico ancora oggi valido dovuto a Helmholtz) ed è tale che il moto della corda che si ottiene a regime (cioè superata la fase transiente che decade esponenzialmente) sia una sovrapposizione di moti armonici con le frequenze proprie della corda *libera*.

Bisogna anche tener presente il fatto che l'equazione di D'Alembert (anche con sorgente) è evidentemente una fortissima idealizzazione, dato che le corde reali sono soggette anche forze interne d'attrito che smorzano le oscillazioni e le fanno decadere nel tempo in tempi relativamente brevi, come è evidente dall'osservazione sperimentale. L'archetto degli strumenti della famiglia del violino serve proprio a sostenere nel tempo le oscillazioni fornendo l'energia dissipata dalle forze d'attrito. Inoltre, il moto di una corda reale, che ha un diametro finito, è anche soggetto ad oscillazioni di torsione ed ad oscillazioni longitudinali (di compressione) di cui non terremo conto, ma che devono essere considerate in uno strumento musicale reale. La corda comunque non è completamente libera di oscillare anche perchè è immersa nell'aria. Il moto della corda viene trasmesso all'aria che è colpita violentemente dalla corda. L'accoppiamento con l'aria è un ulteriore processo che spegne l'oscillazione della corda sottraendone energia. L'accoppiamento diretto della corda con l'aria è comunque molto debole e per produrre un suono udibile a distanza è necessario adoperare una *cassa armonica* o *cassa di risonanza* che trasforma le onde della corda in onde meccaniche della cassa (ancora una volta sottraendo energia alla corda e smorzandone le oscillazioni). A loro volta, queste onde meccaniche delle pareti della cassa armonica spingono in modo efficace l'aria (perché la superficie di contatto con l'aria è molto maggiore di quella della corda), creando le tipiche onde sonore emesse dagli strumenti a corda. Dunque le oscillazioni della corda si tramettono direttamente alla cassa per via meccanica. La cassa si può pensare come costituita da membrane oscillanti che, nel nostro modello semplificato per descrivere i fenomeni di smorzamento dovuti all'attrito ed all'interazione con l'esterno, seguono l'equazione (7.33), in cui u rappresenta la deformazione trasversale (perpendicolare rispetto alle membrane a riposo) delle membrane stesse. In generale non tutte le pareti della cassa armonica oscillano

sensibilmente: nella famiglia di strumenti musicali del violino oscillano quella superiore detta *tavola armonica* e quella inferiore. Il termine forzante della sorgente S in (7.33) è ora dovuto alla corda oscillante (la trasmissione della forza avviene in modo complesso tramite strutture di accoppiamento tra cassa e corda. Negli strumenti a corda come il violino, questa struttura include il *ponticello* su cui passano le corde, che appoggia vicino all'*anima* (il cilindro di legno incastrato tra le due facce del violino che tramette il moto della tavola armonica alla faccia posteriore dello strumento⁸) ed è attaccato alla *catena* (un robusto listello di legno fissato nella direzione delle corde alla tavola armonica, al di sotto delle corde). La forma della funzione S sarà complicata, ma si potrà sempre decomporre come in (7.40), dove ora le frequenze $kf = ck/(2L)$ saranno proprio le frequenze di risonanza della corda di lunghezza L .

La cassa armonica deve avere un tempo di smorzamento delle oscillazioni molto più rapido di quello delle corde, in modo tale che, come visto nella sezione 7.1.5, la corda possa pilotare la cassa tramite il termine di sorgente S nell'equazione (7.33). Sono le oscillazioni della cassa che, alla fine, producono in modo efficace, facendo oscillare l'aria, un'onda acustica. In definitiva le parti della cassa armonica sono pilotate ad oscillare alle frequenze che impongono le corde. Per questo il sistema di trasmissione dell'oscillazione deve essere tale che, malgrado l'oscillazione della cassa, la lunghezza delle corde rimanga fissa (altrimenti le frequenze di risonanza delle corde non sono fissate) e venga trasmessa una grande forza alle pareti della cassa.

Fuori dalla corda e fuori dalle pareti della cassa armonica l'aria è libera, ma viene attraversata da una *perturbazione di pressione* dovuta all'urto con le pareti della cassa armonica. L'equazione per queste onde di pressione è dunque la (7.80) con condizioni al bordo dove è presente la struttura della cassa di risonanza. Se ci mettiamo in un punto fissato dello spazio \mathbf{x} fuori dallo strumento musicale e misuriamo, al variare del tempo, il valore della pressione dell'aria $p = p(t, \mathbf{x})$, scopriamo che si tratta di un fenomeno periodico (per tutto il tempo in cui la regione è attraversata dalla perturbazione di pressione) esattamente come accade osservando un punto della corda al variare del tempo.

Possiamo precisare quantitativamente quanto abbiamo appena detto, tenendo conto dei risultati delle sezioni precedenti.

Supponiamo che la corda oscilli con un'onda trasversale (nel seguito $y(t, x)$ denota la deformazione longitudinale della corda e c indica la velocità di propagazione, precedentemente indicata con v) che *contiene più frequenze*:

$$y(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \sin\left(\frac{c\pi n}{L}t + \delta_n\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) . \quad (7.95)$$

L'*Hertz* – indicato con Hz – è l'unità di misura delle oscillazioni nel tempo ed è pari ad un'oscillazione al secondo. Le frequenze fondamentali $c/(2L)$ variano dai $40Hz$ ai $3000Hz$ considerando

⁸In alcuni casi viene incollata, ma questo va a scapito del suono, in quanto l'onda viene smorzata dalla colla e diventa impossibile la cosiddetta "registrazione", cioè lo spostamento dell'anima. Al fine di migliorare il suono è infatti possibile che un liutaio, per mezzo di uno strumento specifico simile a un piede di porco, dia dei piccoli colpetti all'anima per spostarla e rendere più chiaro il timbro dello strumento. L'autore è grato a Cristina Chinaglia per questa spiegazione.

tutti gli strumenti a corda della famiglia del violino (dal contrabbasso al violino). Al solito possiamo pensare che la serie scritta sopra sia in realtà una somma finita, dato che le ampiezze C_n diventano molto piccole, negli strumenti musicali a corde per $n > 14 - 15$. L'oscillazione della corda viene trasferita meccanicamente alla cassa tramite apposite strutture. Le pareti oscillanti della cassa (tipicamente due) saranno forzate ad oscillare come membrane oscillanti.

Osservazioni 7.8. In realtà, assumere che le facce oscillanti di un violino o di una chitarra siano membrane, che dunque oscillano solo trasversalmente, è una rozza approssimazione perché trascura completamente il fatto che le pareti della cassa armonica non sono membrane tenute in tensione da un telaio rigido (come accade nel tamburo), ma sono strutture con tensioni interne già in condizioni di riposo, come accade in una lamina di materiale plastico o metallico. La presenza di tensioni interne nella situazione di riposo produce una differente equazione differenziale lineare che descrive le onde di deformazione di simili strutture piane. Nel caso di piastra omogenea ed isotropa l'equazione nella versione più elementare di equazione differenziale che descrive le piccole oscillazioni verticali della faccia piana orizzontale è quella di D'Alembert, in cui il laplaciano Δ è sostituito da $-\Delta^2$ dove

$$\Delta^2 = \Delta\Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

La trattazione quantitativa delle soluzioni è però essenzialmente identica: in generale è sufficiente rimpiazzare l'autovalore generico λ di $-\Delta$ (che sappiamo essere reale negativo) con l'autovalore $-\lambda^2$ di $-\Delta^2$ nelle formule viste. Si osservi infatti che le autofunzioni di Δ (con autovalori λ) sono anche autofunzioni di $-\Delta^2$ (con autovalori $-\lambda^2$) e continuano a costituire una base Hilbertiana di $L^2(\bar{D}, dx dy)$. In particolare continuano quindi ad esistere le *linee nodali* delle piastre oscillanti rappresentate per esempio nella figura 7.4.

Rimanendo nella descrizione approssimata della cassa armonica in termini di membrane oscillanti, consideriamo una di queste membrane oscillanti adattando delle coordinate x, y ad essa e misurando la deformazione lungo z con la funzione $u(t, x, y)$. Per un punto che ha coordinate (x, y) in quiete su una parete della cassa armonica, a "grandi tempi" t (che in realtà significa istantaneamente se la cassa è costruita bene in modo da smorzare rapidamente la fase transiente) ha la struttura prevista dalla (7.55):

$$u(t, x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n(x, y) \sin\left(\frac{c\pi n}{L}t + \epsilon_n(x, y)\right), \quad (7.96)$$

come abbiamo visto nella sezione 7.1.5. Le membrane oscillanti colpiranno l'aria (e tutto questo processo avviene *fuori dalla cassa armonica*) producendo un'onda sonora di pressione. La pressione p , rispetto alla pressione dell'aria a riposo, nel punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ attraversato dell'onda acustica creata dalle oscillazioni della cassa, ha un andamento temporale del tipo:

$$p(t, \mathbf{x}) = p_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C'_n(\mathbf{x}) \sin\left(\frac{c\pi n}{L}t + \delta'_n(\mathbf{x})\right). \quad (7.97)$$

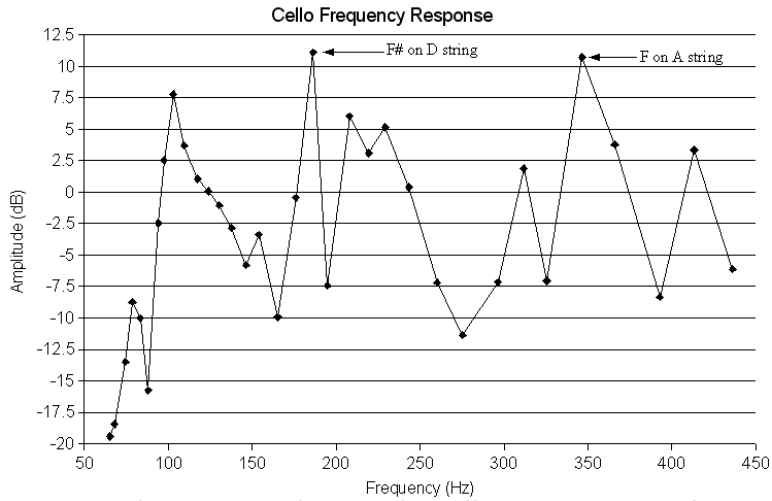


Figura 7.4: Frequenze di risonanza di un violoncello rappresentate dai picchi in figura: in ascissa si vede la frequenza della corda oscillante in Hz , in ordinata, in dB , appare la potenza del suono prodotto alla fine da tutta la struttura nel punto di rilevamento del suono. Il picco intorno ai $95Hz$, è la risonanza di Helmholtz dovuta all'aria ed ai fori ad "effe", le rimanenti sono dovute ai modi normali delle pareti della cassa armonica. I due picchi indicati corrispondono a due wolf tones: il Fa diesis suonato sulla corda del Re e il Fa suonato sulla corda del La .

Osservazioni 7.9.

(1) Si osservi che le frequenze:

$$\nu_n = \frac{cn}{2L},$$

che appaiono negli sviluppi dell'oscillazione della cassa e dell'aria sono esattamente le stesse di quelle delle corde. Le corde dunque pilotano il sistema. Si osservi che le dette frequenze sono privilegiate per le corde perché corrispondono alle *frequenze proprie* delle corde. Viceversa non rappresentano, in generale, nulla di particolare per la cassa e per l'aria.

(2) Nello sviluppo (7.95) l'onda sinusoidale con $n = 1$ viene detta **fondamentale**, mentre le rimanenti, associate ai numeri $n = 2, 3, 4$ sono dette **armoniche**. Le frequenze temporali della perturbazione di pressione,

$$\nu_n = \frac{cn}{2L},$$

che appaiono nello sviluppo (7.97) sono quindi esattamente le stesse che appaiono nello sviluppo della perturbazione trasversale della corda (7.95).

(3) Il passaggio dalla funzione y che esprime l'oscillazione della corda, alla funzione Δp tiene conto di tutti i fenomeni di risonanza della cassa che modificano le ampiezze delle varie frequenze (nell'analisi temporale) con cui si decompone la vibrazione y , pur mantenendo nell'oscillazione di pressione finale le stesse frequenze iniziali. Queste informazioni sulle risonanze sono inglobate nelle funzioni coefficienti $C'_n(\mathbf{x})$ e prima di essi nelle funzioni $B_n(x, y)$ come descritto precedentemente. Le risonanze sono in massima parte dovute alla struttura della cassa che produce i suoni principalmente all'esterno di essa (come un pistone che mette in moto l'aria esterna alla cassa), ma non solo. C'è una risonanza in più non dovuta alla cassa armonica, ma dovuta all'aria stessa che oscilla come un *risuonatore di Helmholtz* dentro la cassa uscendo dai fori appositi (le fessure a "effe" per violino viola e violoncello) di cui bisogna tenere conto nel calcolo dei

coefficienti $C'_n(\mathbf{x})$. La figura⁹ illustra le ampiezze, dovute alle varie risonanze della cassa, che si ottengono facendo vibrare le corde del violoncello alle frequenze indicate in ascissa, assumendo che l'ampiezza dell'oscillazione delle corde sia la stessa al variare della frequenza. Come si vede la cassa risponde in modo molto differente a seconda della frequenza imposta dalle corde. Un meccanismo del tipo di quello della *risonanza di Helmholtz* è responsabile dell'amplificazione delle frequenze più basse, quelle ottenute facendo vibrare la corda del Do. La nota Sol suonata su tale corda ha una frequenza vicina al picco intorno a 95 Hz della risonanza di Helmholtz. Le altre frequenze sono amplificate da risonanze della cassa. In particolare della *tavola armonica*: la faccia superiore della cassa.

Per quanto riguarda la risonanza di Helmholtz, quello che accade è che, in riferimento alla sezione 7.2.4, invece di oscillare l'aria nel collo della bottiglia (qui rappresentato da ciascun buco delle fessure ad “effe”), oscilla forzatamente il volume della bottiglia, facendo oscillare l'aria nel collo della bottiglia e producendo suono con volume rilevante intorno alla frequenza di risonanza di Helmholtz. Esiste una formula empirica (dovuta a Itokawa e Kumagai) che predice il valore della frequenza di risonanza di Helmholtz ν_H per un violoncello in funzione dei suoi parametri:

$$\nu_H = \frac{0.27vA^{1/4}}{\sqrt{V}},$$

dove A è l'area delle fessure ad “effe”, V il volume della cassa armonica e v la velocità del suono nell'aria (circa $340m/s$).

(4) Le frequenze di risonanza ν_λ della cassa di risonanza sono differenti dalle frequenze $\nu_k = kf$ delle corde. Quando risultano essere troppo vicine (e questo succede abbastanza spesso nel violoncello) si instaurano i pericolosi fenomeni di risonanza descritti nella sezione precedente tra corde e cassa e il suono non è ben controllabile dal musicista: si hanno i cosiddetti *wolf tones* o *note del lupo*.

(5) La particolare forma della cassa degli strumenti a corde (suonati con l'arco) è dovuta al fatto che tale forma assicura che le frequenze di risonanza della cassa (delle due facce) cadano “nei punti giusti” rispetto alle frequenze di risonanza delle corde per ottenere il timbro particolare di tali strumenti. I liutai che costruiscono gli strumenti sanno per esperienza come costruire la cassa.

7.3.2 Il suono prodotto dagli strumenti musicali a corde.

La musica utilizza un tipo di onde di pressione che cadono sotto il nome di “suoni”. Si tratta di una caratterizzazione psicofisica più che puramente fisica. Se la frequenza dell'onda di pressione (più in generale se le frequenze nello sviluppo di Δp in (7.97) con coefficienti $C'_n(\mathbf{x})$ abbastanza grandi) è abbastanza elevata ma non eccessivamente, tra $12Hz$ e $12000Hz$, il nostro orecchio la percepisce come un *suono* e non percepisce l'alternarsi delle oscillazioni di pressione come accade per frequenze più basse di circa $12Hz$. Sopra circa $12000Hz$, il nostro orecchio non riesce

⁹Renzo Vitale: “Caratteristiche generali del timbro e sue peculiarità nel suono del violoncello”, Report per i corsi di: Acustica e Psicoacustica Elaborazione Numerica del Segnale A.A. 2004-2005.

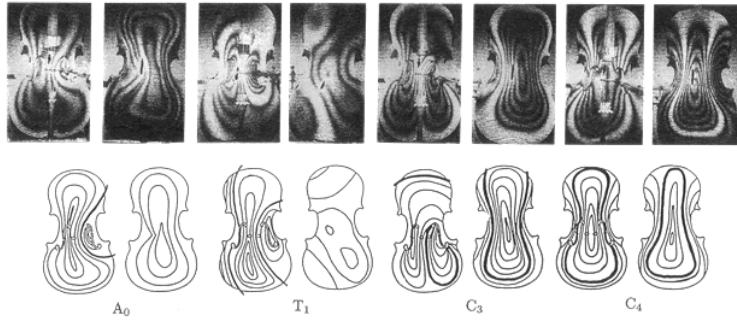


Figura 7.5: Oscillazione della cassa di risonanza di un violoncello visti sulla tavola armonica. La risonanza di Helmholtz è A_0 . La risonanza C_3 si incontra a $226Hz$, la C_4 appare a $194Hz$ entrambe sono dovute ad oscillazioni della cassa. T_1 è data da un'oscillazione per la maggior parte dovuta solo alla tavola armonica.

a percepire nulla in generale. $1Hz$ corrisponde, in un fenomeno periodico, ad 1 oscillazione al secondo. Il suono di un *diapason* che emette la *nota pura La* di riferimento (vedi sotto), corrisponde ad un'onda di pressione costituita da un unico sinusoid¹⁰:

$$p(t, \mathbf{x}) = p_0 + C'(\mathbf{x}) \sin(2\pi\nu t + \delta(\mathbf{x})),$$

con una frequenza di $\nu = 440Hz$. In un suono più complesso, prodotto da una corda vibrante, le frequenze temporali ν_n che appaiono in (7.95) e (7.97) sono tutte *multipli interi* della frequenza della fondamentale e tale frequenza fondamentale si ricava come la differenza delle frequenze di due armoniche successive:

$$\nu_1 = \nu_{n+1} - \nu_n.$$

Come già osservato precedentemente, e calcolato nel caso delle membrane vibranti circolari e rettangolari, quando si considerano strumenti musicali differenti da una corda o da uno strumento a fiato – per esempio la membrana di un tamburo – la deformazione si può comunque decomporre in una somma infinita di oscillazioni elementari dotate di frequenze (temporale) proprie ν_λ . La differenza con quanto accade nelle perturbazioni ondose di una corda ad estremi fissi e negli strumenti a fiato è che, nel caso della perturbazione di pressione $p = p(t, \mathbf{x})$ prodotta da membrane vibranti liberamente oscillanti, le varie frequenze ν_λ *non* risultano essere più multipli interi di una frequenza fondamentale. Si osservi che ciò implica, in generale, che la funzione $t \mapsto p(t, \mathbf{x})$ a \mathbf{x} fissato, non sia più una funzione periodica, almeno quando i rapporti tra le frequenze ν_λ non sono numeri razionali. Queste particolarità si ritrovano nelle onde di suono prodotte da tali strumenti che si dice *non essere armonico*. Questa è la ragione fisica per cui il suono degli strumenti a percussione ci appare intrinsecamente differente da quello degli strumenti ad arco: il cervello non riesce a determinare una frequenza fondamentale.

Torniamo ora agli strumenti musicali che emettono suoni *armonici*, cioè per i quali vale la decomposizione in armoniche descritta dalla (7.95) ovvero dalla (7.97) in cui tutte le frequenze

¹⁰In realtà questa è un'approssimazione dato che, nella pratica sperimentale, il suono inizia ad un certo istante finito e termina ad un altro istante finito.

che appaiono nella decomposizione sono multipli interi di una frequenza fondamentale. Considerando uno strumento a corde, le singole componenti sinusoidali delle due decomposizioni dette, come detto, oscillano temporalmente con frequenza $\nu_n = cn/(2L)$. Tenendo conto della (5.6) che esprime la velocità di propagazione della perturbazione sulla corda in funzione della densità di massa λ e della tensione τ abbiamo che:

$$\nu_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{\tau}{\lambda}} \quad (7.98)$$

La lunghezza d'onda spaziale, lungo la corda, è ancora data da:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}. \quad (7.99)$$

Si osservi che non abbiamo introdotto una nozione corrispondente alla lunghezza d'onda spaziale per le onde di pressione, anche se si potrebbe fare. Pertanto la lunghezza d'onda spaziale sarà solo riferita alle onde sulla corda. La lunghezza d'onda delle onde di deformazione della corda è legata alla frequenza temporale delle stesse onde della corda che è la stessa che appare per le corrispondenti onde sonore di pressione. Modificando la lunghezza d'onda delle onde di deformazione della corda, si modifica la frequenza temporale delle onde di pressione del suono. Questa è la tecnica che si usa suonando la chitarra oppure il violino: la corda viene fatta oscillare con una lunghezza d'onda scelta dal musicista. La scelta è conseguenza del fatto che, l'esecutore preme la corda in determinati punti con le dita, producendo "artificialmente" dei punti nodali per la corda in tali punti. In questo modo lo sviluppo dell'onda di deformazione della corda in armoniche può avere solo quelle lunghezze d'onda compatibili con il punto nodale imposto. Tra poco ritorneremo su questa tecnica discutendo come il nostro cervello individua la frequenza fondamentale in un suono.

7.3.3 Le note musicali pure e note con timbro.

Le singole oscillazioni sinusoidali ad n fissato di una corda che produce suono, trasformate in onde di pressione (purché le frequenze stiano nel range prima indicato) vengono avvertite dal nostro orecchio come *toni puri* di suono cioè *note pure*. Come accennato sopra un diapason emette una nota pura chiamata *La* di riferimento la cui frequenza è di 440Hz .

Si osservi che per ottenere uno stesso tono puro alla frequenza, diciamo, ν_1 , possiamo usare corde di lunghezza diversa, variandone la densità di massa e la tensione. Si vede dalla (7.98), che, a parità degli altri valori, più è alta la tensione maggiore sarà la frequenza della nota.

In realtà l'orecchio umano eccetto che quello di persone particolarmente dotate è incapace di distinguere le singole frequenze separatamente (chi è abile a farlo si dice che possiede l'"orecchio assoluto"). Il nostro orecchio (cioè il nostro cervello) è in realtà capace di distinguere solo i rapporti tra varie frequenze suonate contemporaneamente o a breve distanza temporale: riesce a dare il nome ad una nota ascoltata se è noto il nome di una nota precedentemente o contemporaneamente ascoltata. Per esempio il rapporto di *un'ottava* è quello di due frequenze una di valore doppio dell'altra: un musicista riconosce subito quando l'intervallo di due note, cioè il rapporto

tra le frequenze, è un'ottava.

Bisogna precisare che è difficilissimo, con strumenti meccanici (non elettronici) produrre toni puri. Infatti, il suono che si ottiene pizzicando una corda (clavicembalo, chitarra, contrabbasso) oppure percuotendola (pianoforte), oppure strofinandola con un archetto (violino, viola, violoncello), corrisponde ad una soluzione dell'equazione di D'Alembert con condizioni di annullamento al bordo, la cui forma e decomposizione in armoniche sinusoidali dipende dalle condizioni iniziali, cioè dalla procedura con la quale è stata fatta oscillare la corda. Il suono prodotto è sempre composto da molte armoniche secondo una certa distribuzione con coefficienti C_n e fasi δ_n – come nella (7.95) e nella corrispondente onda di pressione (7.97) – che dipendono dalla procedura usata per mettere la corda in oscillazione. Il numero $C'_n(\mathbf{x})^2$ è legato all'intensità (o energia trasportata) del suono nel punto \mathbf{x} , più precisamente all'intensità dell'armonica n -esima. Le fasi $\delta'_n(\mathbf{x})$ non sono invece molto importanti ai fini del riconoscimento del suono, sembra che il nostro orecchio e il nostro cervello distinguano i suoni guardando alle ampiezze $C'_n(\mathbf{x})$ piuttosto che alle fasi $\delta'_n(\mathbf{x})$. Quando si cerca di suonare una precisa nota mettendo in oscillazione una certa corda in un certo modo, in realtà si produce una certa soluzione delle equazioni di D'Alembert tale che, scomponendola in armoniche, è composta da varie armoniche con frequenze multiple di una frequenza fondamentale ν_1 . Il nostro cervello individua tale frequenza fondamentale (facendo la differenza delle frequenze delle armoniche successive) e questa definisce la nota associata al suono. Solitamente, ma non sempre¹¹, la fondamentale possiede l'ampiezza C_1 più grande di tutte le altre. Si osservi che non è detto che la fondamentale corrisponda a $n = 1$: dipende da come mettiamo in oscillazione la corda. Facciamo un esempio. Se blocchiamo una corda di lunghezza L (per es. premendo con un dito) nel punto $L/2$, cioè a metà della sua lunghezza, e la mettiamo in oscillazione in qualche modo mantenendo fissi gli estremi, le frequenze che compongono la forma d'onda saranno vincolate ad avere un nodo a metà della corda: sarà ammissibile la frequenza $\nu_2 = c2/(2L)$, ma anche ogni frequenza ν_n per cui vale $k/n = 1/2$ per qualche $k = 1, 2, \dots, n$, in modo da avere un nodo in $L/2$. In pratica tutte le frequenze $\nu_{2k} = c2k/(2L)$ per ogni $k = 1, 2, \dots$ saranno presenti anche se con ampiezze che dipendono da come abbiamo messo in oscillazione la corda. Quando analizziamo il suono risultante, cioè l'onda sonora emessa dalla corda, senza guardare la corda che lo ha prodotto, possiamo ricostruire la fondamentale di questa sequenza di armoniche come la differenza tra due frequenze di due armoniche successive che rileviamo nell'onda sonora. In questo caso abbiamo:

$$\nu_{2(n+1)} - \nu_{2n} = \nu_2$$

e non ν_1 ! Il suono prodotto da questa corda vibrante, in cui imponiamo un nodo alla sua metà, avrà frequenza doppia (un'ottava sopra) di quello prodotto dalla stessa corda senza porre il dito a bloccarne la metà. Se suonassimo la stessa nota di sopra, invece di mettere il dito a $L/2$, tenendo la corda libera (sempre fissata agli estremi), ma dimezzando la lunghezza della corda

¹¹In certi casi l'ampiezza massima si ha sulla prima armonica dopo la fondamentale, come in certi strumenti a fiato. Da studi sperimentali risulta anche che, cancellano completamente la componente fondamentale di un suono, ma lasciando le altre armoniche anche solo dalla 4^a in poi, abbastanza inaspettatamente il nostro cervello riesce comunque a ricostruire la fondamentale assegnando al suono la nota corrispondente alla frequenza (fondamentale) in realtà assente.

o quadruplicandone la tensione, otterremo la stessa frequenza (ora data dalla fondamentale), ma la distribuzione di ampiezze sulle armoniche successive alla fondamentale potrebbe essere diversa e quindi il suono potrebbe risultare differente (anche se la nota è percepita come la stessa). La differenza è nel *timbro*, nozione che andiamo a discutere. Partiamo con l'osservazione sperimentale che, in realtà, le armoniche udibili nel suono prodotto da uno strumento musicale sono al più circa una decina, le rimanenti hanno solitamente ampiezza troppo bassa per essere udite. Per esempio, approssimativamente parlando, l'ampiezza C_n delle armoniche decresce come $1/n$ negli strumenti ad arco e come $1/n^2$ nel pianoforte (tuttavia, come già detto, le ampiezze associate dell'onda di pressione $C'_n(\mathbf{x})$ non decrescono necessariamente nello stesso modo, perché bisogna tenere conto della presenza della cassa armonica che amplifica, fa risuonare e smorza diversamente le varie frequenze). Le rimanenti armoniche della decomposizione di un suono oltre alla fondamentale, sempre presenti e con intensità che dipendono dal tipo di strumento, producono il caratteristico *timbro* dello strumento, per il quale una stessa nota, suonata da un violino oppure da un pianoforte (oppure, come detto sopra, prodotte da uno stesso violino, ma con due procedure differenti) viene avvertita dal nostro orecchio come differente. Il timbro dipende da due fattori: la procedura con cui la corda è messa in eccitazione e come è costituita la cassa armonica (includendo la struttura meccanica che trasmette la vibrazione dalle corde alla cassa, per esempio il cosiddetto *ponticello* per violino, viola e violoncello).

7.3.4 Scale e temperamenti

Nel Medioevo i teorici della musica teorizzarono ed usarono un tipo di scala musicale attribuita a Pitagora: la *scala Pitagorica*. A tale matematico si attribuisce tradizionalmente l'osservazione che gli "intervalli musicali", cioè i rapporti tra frequenze dei suoni usati come base per comporre la musica corrispondono a rapporti numerici tra numeri interi relativamente piccoli. I reciproci di tali rapporti, dato che $\lambda_n \nu_n = c$, corrispondono a rapporti tra le lunghezze d'onda cioè tra le lunghezze delle corde che producono tali suoni, quando queste oscillano presentando lo stesso numero di nodi (cioè lo stesso valore n). La scala pitagorica infinita è costituita dalla successione di infinite sequenze fondamentali di sette note che chiameremo convenzionalmente *Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si*, ordinata nel senso della frequenza (o "altezza") crescente, i rapporti detti "quinte" e "quarte" corrispondono esattamente alle frazioni $2/3$ e $3/4$, rispettivamente, mentre l'"intervallo di tono" corrisponde a $8/9$ e l'"intervallo di semitono" a $243/256$. Due note successive tra sette note *Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si* hanno rapporti di frequenze di un tono ($8/9$) eccetto *Mi/Fa* che corrisponde ad un semitono ($243/256$). Il *Do* iniziale (indicato con *Do'*) della sequenza successiva alla scala di sette note di cui sopra, ha esattamente frequenza doppia de *Do* iniziale: il rapporto delle frequenze tra i due *Do* è detto essere "un ottava". Accade lo stesso per il *Do* della sequenza precedente, che ha frequenza dimezzata... e così via all'infinito nelle due direzioni. All'interno di una fissata sequenza fondamentale di 7 note, nello schema pitagorico, i rapporti più interessanti tra le frequenze delle note sono quasi tutti di quarta o di quinta (es. $Re/Sol = Do/Fa = 3/4$ mentre $Re/La = Do/Sol = 2/3$) che, nella teoria pitagorica sono pensati come particolarmente "consonanti" (cioè belli da sentire). Più avanti, sempre nel Medioevo, venne introdotta la *scala pitagorica cromatica* in cui vengono aggiunte altre 5 note

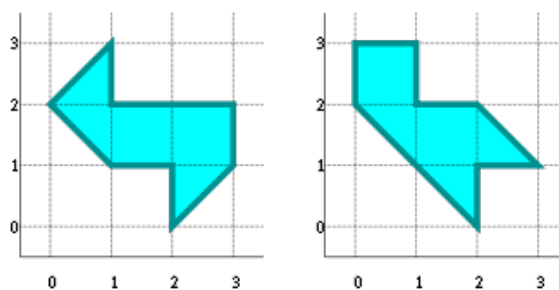


Figura 7.6: Le due regioni di \mathbb{R}^2 esibite da Gordon, Webb e Wolpert che, benchè non isometriche, producono gli stessi autovalori per l'operatore di Laplace con condizioni di Dirichlet.

alle 7 fondamentali (i “diesis” e i “bemolle”) dividendo, rozzamente parlando, i toni in due semitoni¹² in modo tale che tra le 12 note ottenute in questo modo, tra una nota e la successiva ci fosse sempre un rapporto razionale di frequenze con “numeri piccoli” a numeratore e denominatore. Nasce il problema che, con questa procedura, non accade più che la tredicesima nota abbia frequenza pari a due volte quella della prima, cioè non si riesce ad ottenere l'intervallo di ottava. Un miglioramento viene fatto da *Zarlino* nel 1558 che introduce nuovi rapporti ammissibili di frequenze oltre alle quarte e le quinte: i rapporti $4/5$ e $5/6$, “terza maggiore” e “terza minore”. Nella scala di *Zarlino* o *scala naturale* compaiono due diversi intervalli di tono, cioè tra le note successive che non siano $Mi - Fa$ (che ora è $15/16$ invece di $243/256$): il “tono maggiore” $8/9$ e il “tono minore” $9/10$. Il discepolo di *Zarlino*, *Vincenzo Galilei* (padre di *Galileo*) propose l'adozione di un semitono corrispondente a $17/18$ reintroducendo ulteriori 5 note. Anche queste proposte hanno inconvenienti oltre che pregi.

Nella teoria musicale basata sul “temperamento equabile” (dal XX secolo praticamente adottata da tutti) il rapporto tra due note consecutive delle 12 di un'ottava è $2^{-1/12}$: è questo il rapporto di frequenze tra le note di due tasti consecutivi in un pianoforte, *includendo nell'ordine sia i tasti bianchi che quelli neri* (che sono appunto, $7 + 5 = 12$ in tutto per ogni ottava). A differenza delle teorie precedenti e delle idee pitagoriche basate su rapporti di numeri interi, ora i rapporti tra le note sono *numeri irrazionali* eccetto che per le ottave ed i multipli delle ottave in cui si trovano potenze di 2; ciò che si guadagna è che i rapporti tra le note successive sono tutti uguali. Il temperamento equabile era già stato preso in considerazione da *Vincenzo Galilei* e dal matematico *Simone Stevino* alla fine del secolo XVI, ma come detto venne adottato su vasta scala solo all'inizio del secolo XX sia per motivi di carattere estetico (l'abbandono dei rapporti razionali) sia per ragioni di natura tecnologica (la difficoltà pratica di accordare strumenti con rapporti irrazionali in modo preciso).

7.3.5 Possiamo udire la forma di un tamburo?

Consideriamo un tamburo la cui membrana oscillante è un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ il cui bordo è una curva C^∞ a tratti. Le deformazioni verticali $u = u(t, \mathbf{x})$ della membrana si possono decomporre come sovrapposizioni di soluzioni elementari del tipo (7.25)

$$u_{\lambda,\alpha}(t, \mathbf{x}) = C_{\lambda,\alpha} \sin(v\sqrt{-\lambda}t + \delta_{\lambda,\alpha})\phi_{\lambda,\alpha}(\mathbf{x}), \quad (7.100)$$

dove λ è il generico autovalore del laplaciano sulla superficie rappresentata dalla membrana non deformata. La deformazione effettiva conterrà in generale una somma infinita di deformazioni elementari come quelle scritte sopra, includendo tutti i valori $\lambda \in \sigma_p(\Delta)$ e la convergenza della serie deve essere interpretata nella topologia opportuna, cosa di cui non ci occupiamo. Il suono (rumore) prodotto da questa membrana a causa delle onde di pressione che essa produce frustando l'aria, similmente a quanto detto per gli strumenti a corda, si ottiene sostituendo la membrana alle corde nella discussione della sezione 7.3.1. Si conclude che le onde sonore emesse dal tamburo saranno delle sovrapposizioni di onde di pressione, le cui frequenze temporali sono le frequenze di risonanza della membrana.

$$p(t, \mathbf{x}) = p_0 + \sum_{\lambda \in \sigma_p(\Delta), \alpha=1, \dots, d_\lambda} C'_{\lambda,\alpha}(\mathbf{x}) \sin(v\sqrt{-\lambda}t + \delta'_{\lambda,\alpha}(\mathbf{x})). \quad (7.101)$$

Ci si può chiedere se, una volta rilevate queste frequenze $v\sqrt{-\lambda}$ con qualche strumento di analisi del suono, cioè una volta noti gli autovalori λ dell'operatore di Laplace su Ω con condizioni di Dirichlet, sia possibile risalire alla forma stessa di Ω . Si osservi a tal fine che, per esempio, gli autovalori del laplaciano sulla membrana rettangolare oppure circolare sono profondamente differenti, come visto nella sezione 7.1.4.

La questione è stata posta per la prima volta da M. Kac nel 1966¹³ ed è stata generalizzata al caso di "membrane" date da varietà (in generale compatte e senza bordo) di dimensione arbitraria. Il problema (nella forma originale data da Kac) è rimasto aperto fino al 1992 quando Gordon, Webb e Wolpert¹⁴ hanno esibito un controesempio che corrisponde alla figura, in cui si vedono due membrane di forma differente che, come gli autori hanno dimostrato, hanno comunque gli stessi valori per gli autovalori dell'operatore di Laplace con condizioni di Dirichlet. Molti aspetti di questo intrigante problema, specialmente nelle versioni in dimensione superiore a $n = 2$, sono tuttora aperti.

Se si considerano restrizioni della classe di sottovarietà in cui si lavora la risposta al quesito di Kac può essere positiva. Si può infatti dimostrare che se, nel caso regioni piane $D \subset \mathbb{R}^2$ aperte, connesse, convesse e limitate, se si richiede che il bordo ∂D sia analitico (cioè descritto localmente da una curva della forma $y = g(x)$ oppure $x = h(y)$), dove g e h sono funzioni

¹²Le precedenti 7 le possiamo pensare come i tasti bianchi in un ottava del pianoforte, queste ulteriori 5 corrispondono ai tasti neri anche se la questione è più complessa in realtà.

¹³Kac, Mark (1966), "Can one hear the shape of a drum?", American Mathematical Monthly 73 (4, part 2): 1-23.

¹⁴Gordon, C.; Webb, D.; Wolpert, S. (1992), "Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds", Inventiones mathematicae 110 (1): 1-22.

analitiche reali), allora lo spettro del laplaciano in D con condizioni di annullamento su ∂D individua univocamente D nella classe detta.

Capitolo 8

Equazioni paraboliche: l'equazione del calore e le sue proprietà elementari.

In questo capitolo ci occuperemo di studiare le proprietà elementari delle equazioni alle derivate parziali di tipo parabolico, usando come modello la famosa *equazione del calore*.

8.1 L'equazione del calore dalla termodinamica dei continui.

Il calore è una modalità attraverso la quale i corpi fisici macroscopici si trasferiscono energia senza cedere impulso e momento angolare macroscopico. I corpi, ricevendo o perdendo calore, alternano localmente le loro proprietà secondo ben precise leggi termodinamiche connesse alle temperature locali in gioco. L'*equazione del calore*, malgrado il nome, è un'equazione per la temperatura pensata come funzione del tempo e del posto in un *mezzo continuo* (cioè modellizzabile come un insieme aperto connesso di \mathbb{R}^3 eventualmente dotato di bordo) in grado di trasportare calore al suo interno. Tale equazione è ottenuta tenendo conto delle varie proprietà termodinamiche del calore. Nel seguito considereremo tutte le funzioni che appariranno almeno di classe C^0 e, dove necessario, anche differenziabili con continuità.

Consideriamo un corpo continuo descritto nello spazio di quiete, identificato con \mathbb{R}^3 , di un sistema riferimento, al variare del tempo $t \in \mathbb{R}$. Indichiamo con $\mu = \mu(t, \mathbf{x}) \geq 0$ la densità di massa del continuo e con $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t, \mathbf{x})$ in flusso di calore che attraversa il continuo, pensato come una funzione a valori vettoriali.

Il calore si propaga dentro i corpi, ed in particolare nel continuo che stiamo considerando, con una ben precisa legge che lo collega al gradiente di temperatura (assoluta) $T = T(t, \mathbf{x}) \geq 0$ che incontra nel mezzo, punto per punto ed istante per istante. Infatti il flusso di calore soddisfa l'**equazione di Fourier**:

$$\mathbf{c}(t, \mathbf{x}) = -k(t, \mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} T(t, \mathbf{x}), \quad (8.1)$$

dove $k > 0$ è una proprietà nota del mezzo detta **conduttività termica**. La legge fisica scritta sopra dice che il calore si propaga dalle regioni a più alta temperatura verso quelle a più bassa temperatura, il coefficiente k precisa come tale propagazione dipenda dal mezzo.

Se consideriamo una porzione di continuo V (un insieme aperto a chiusura compatta) la quantità di calore $Q_V(t)$ che esso riceve può arrivare: (i) da una sorgente contenuta nel volume stesso oppure (ii) fluire attraverso la superficie ∂V , che noi supporremo essere regolare ed orientabile. Vale infatti l'equazione di bilancio (n è il versore normale uscente come al solito):

$$\frac{dQ_V(t)}{dt} = \int_V \mu(t, \mathbf{x}) q(t, \mathbf{x}) d^3x - \oint_{+\partial V} \mathbf{c}(t, \mathbf{y}) \cdot n dS(\mathbf{y}), \quad (8.2)$$

dove q è la sorgente di calore per unità di massa. L'equazione di sopra collega il calore ricevuto dal continuo alle "sorgenti di calore" in senso generico (pensando la frontiera del continuo come una sorgente). Tuttavia esiste un legame fenomenologico che lega il calore ricevuto per unità di tempo da una porzione di continuo, *in quiete*¹ nel sistema di riferimento considerato, alla variazione di temperatura per unità di tempo del continuo stesso, prescindendo da *come* tale calore ci sia arrivato. Infatti, se è noto il *calore specifico* per unità di massa $c(t, \mathbf{x}) > 0$ del nostro mezzo continuo, possiamo scrivere l'ulteriore relazione:

$$\frac{dQ_V(t)}{dt} = \int_V \mu(t, \mathbf{x}) c(t, \mathbf{x}) \frac{\partial T}{\partial t} d^3x. \quad (8.3)$$

Mettendo insieme le ultime due equazioni, usando il teorema della divergenza nella prima, abbiamo che deve valere:

$$\int_V \left(\mu c(t, \mathbf{x}) \frac{\partial T}{\partial t} - \mu q + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{c} \right) d^3x = 0.$$

Questa equazione deve valere per ogni aperto a chiusura compatta con bordo regolare orientabile V . Se l'integrando è una funzione continua, l'arbitrarietà di V implica che deve valere, punto per punto nel volume di continuo ed istante per istante, l'equazione:

$$\mu(t, \mathbf{x}) c(t, \mathbf{x}) \frac{\partial T(t, \mathbf{x})}{\partial t} - \mu(t, \mathbf{x}) q(t, \mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{c}(t, \mathbf{x}) = 0. \quad (8.4)$$

Se ora ricordiamo che, nel continuo, il flusso di calore soddisfa anche l'equazione di Fourier 8.1, troviamo un'equazione per la sola temperatura:

$$\frac{\partial T(t, \mathbf{x})}{\partial t} - \frac{1}{\mu(t, \mathbf{x}) c(t, \mathbf{x})} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (k(t, \mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} T(t, \mathbf{x})) = \frac{q(t, \mathbf{x})}{c(t, \mathbf{x})}. \quad (8.5)$$

che può essere riscritta come l'**equazione del calore** nella sua forma generale (per un mezzo in quiete):

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\nabla_{\mathbf{x}} k \cdot \nabla_{\mathbf{x}} T}{\mu c} - \frac{k}{\mu c} \Delta_{\mathbf{x}} T = \frac{q}{c}. \quad (8.6)$$

¹In caso contrario è necessario sostituire la derivata parziale temporale della temperatura che appare sotto con la cosiddetta *derivata materiale*, per tenere conto del campo di velocità del continuo.

Deve essere chiaro che si tratta di un'equazione di tipo parabolico normale, secondo la classificazione vista nella sezione 1.3.2. Nel caso in cui la conduttività termica del mezzo, k , sia costante al variare di \mathbf{x} , l'equazione di sopra si riduce alla forma standard che considereremo d'ora in poi:

$$\frac{\partial T(t, \mathbf{x})}{\partial t} - a(t, \mathbf{x})\Delta_{\mathbf{x}}T(t, \mathbf{x}) = q(t, \mathbf{x}), \quad (8.7)$$

dove $a > 0$ e q (ridefinita inglobando in essa la funzione $1/c$ rispetto alla situazione generale) sono funzioni note.

8.2 Condizioni iniziali ed al contorno, frontiera parabolica.

Nel seguito, come al solito, scriveremo Δ invece di $\Delta_{\mathbf{x}}$ e ∇ invece di ∇_x nei casi in cui ciò non è fonte di fraintendimenti. Inoltre, scrivere che $f \in C^{k_{x^1} \dots k_{x^n}}(\Omega)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, significa che la funzione f ammette le derivate nelle variabili x^1, \dots, x^n fino ai rispettivi ordini k_{x^1}, \dots, k_{x^n} e le derivate dette sono funzioni continue congiuntamente in tutte le variabili. Nel caso in cui Ω sia l'unione di un aperto Ω_0 e tutto o parte di $\partial\Omega_0$ si assume che esistano anche i limiti delle derivate dall'interno verso i punti di $\partial\Omega_0$ che cadono in Ω e che le funzioni derivate siano congiuntamente continue su Ω .

Consideriamo le equazioni differenziali paraboliche ottenute sopra:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{b}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla \varphi - a(t, \mathbf{x})\Delta \varphi = q(t, \mathbf{x}). \quad (8.8)$$

con $a > 0$, \mathbf{b}, q funzioni assegnate, oppure

$$\frac{\partial \varphi(t, \mathbf{x})}{\partial t} - a(t, \mathbf{x})\Delta_{\mathbf{x}}\varphi(t, \mathbf{x}) = q(t, \mathbf{x}), \quad (8.9)$$

con q e $a > 0$ funzioni assegnate.

I problemi tipici che si incontrano lavorando con equazioni paraboliche come (8.8) e (8.9), interpretate con $t \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, sono generalmente del seguente tipo.

$D \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto non vuoto \overline{D} compatto. Si cerca $\varphi \in C^{1+2\mathbf{x}}((0, T) \times D) \cap C^0([0, T] \times \overline{D})$ che, in $(0, T) \times D$, soddisfi (8.8) oppure (8.9) per $a \geq 0$, $\mathbf{b}, q \in C^0((0, T) \times D)$ funzioni assegnate, ovvero $a, q \in C^0((0, T) \times D)$ con $a > 0$, nel caso dell'equazione (8.9).

Si può anche considerare il caso del *problema esterno* in cui si lavora in $[0, T] \times (\mathbb{R}^n \setminus \overline{D})$. Il fatto di lavorare in D con \overline{D} compatto si dice *problema interno*. Restringendoci a considerare il solo problema interno, vengono quindi assegnate *condizioni iniziali* e *condizioni al bordo* sulla funzione φ .

Le **condizioni iniziali** corrispondono alla richiesta:

$$\varphi(0, \mathbf{x}) = \varphi_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{D}, \text{ con } \varphi_0 \in C^0(\overline{D}) \text{ assegnata.} \quad (8.10)$$

Le **condizioni al bordo**, riferite all'insieme $S := (0, T] \times \partial D$ (notare che i punti a quota $t = T$ sono inclusi) con vettore normale uscente \mathbf{n} , possono essere di tre tipi distinti:

(i) (*condizioni di Dirichlet*) $\varphi|_S = \psi$ con $\psi \in C^0(S)$ funzione assegnata;

(ii) (*condizioni di Neumann*) se ∂D è regolare orientabile ed assumendo ulteriormente che $\varphi \in C^{1,\mathbf{x}}((0, T] \times \overline{D})$, si richiede che $\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi|_S = \psi$ con $\psi \in C^0(S)$ funzione assegnata;

(iii) (*condizioni di Robin*) se ∂D è regolare orientabile ed assumendo ulteriormente che $\varphi \in C^{1,\mathbf{x}}((0, T] \times \overline{D})$, si richiede che $a\varphi|_S + b\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi|_S = \psi$ con $a, b \in \mathbb{R}$ costanti assegnate tali che $ab \neq 0$ e $\psi \in C^0(S)$ funzione assegnata.

L'insieme chiuso $\partial_p D_T := \overline{D} \cup S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ si dice la **frontiera parabolica** del problema e giocherà un certo ruolo nel seguito.

Osservazioni 8.1.

(1) Dal punto di vista fisico le condizioni di Neumann corrispondono ad assegnare la componente normale a $\partial\Omega$ del flusso di calore uscente dal bordo della regione nella quale si vuole studiare la temperatura.

(2) Differentemente dalle equazioni delle onde, se $\varphi = \varphi(t, \mathbf{x})$ risolve l'equazione del calore, $\varphi' = \varphi(-t, \mathbf{x})$ generalmente *non* la risolve. Questo è dovuto al fatto che il tempo appaia in una derivata prima e non seconda e riflette l'*irreversibilità* fisica dei processi termodinamici di propagazione del calore.

(3) Differentemente dal caso delle equazioni iperboliche, siamo stati molto attenti a separare nettamente i dati che devono valere sul bordo S e condizioni che devono valere a $t = 0$. Il punto è che nelle equazioni paraboliche il passaggio da $t > 0$ a $t = 0$ è molto drastico e le soluzioni perdono regolarità, per esempio passando da funzioni analitiche a funzioni al più continue! In generale è impossibile richiedere più della sola continuità per raccordare le soluzioni con il dato a $t = 0$, mentre sul bordo laterale S si può chiedere molto di più. In ultima analisi cioè è dovuto al fatto che le superfici a $t = 0$ sono superfici caratteristiche delle equazioni paraboliche (8.8) e (8.9), come osservato nel capitolo iniziale.

Vedremo più avanti (teorema 8.10) che è possibile costruire soluzioni dell'equazione del calore le cui condizione iniziale non è nemmeno continua, ma misurabile con qualche proprietà di integrabilità (vedremo il caso \mathcal{L}^2). In questo caso la soluzione non è C^0 fino al bordo a $t = 0$ e il "raccordo" della soluzione con il dato iniziale è descritto rispetto ad opportune topologie, proprie della classe di funzioni alla quale appartiene il dato iniziale.

(4) Si possono considerare casi in cui D non è limitato e sono assegnate condizioni iniziali. In questo caso le condizioni al contorno, che sono importanti per i teoremi di esistenza ed unicità sono, in generale, rimpiazzate da condizioni sull'andamento all'infinito spaziale (cioè per $|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty$ a t fissato) per il campo φ incognito. Anche nel caso di D illimitato può comunque esistere ∂D . Si devono in tal caso anche assegnare condizioni al bordo su $(0, T] \times \partial D$ per ottenere teoremi di esistenza ed unicità. Vedremo questo più avanti.

(5) Nel caso di D a chiusura compatta consideriamo l'equazione (8.9) in cui le condizioni al bordo di Dirichlet, il termine di sorgente q , la funzione a siano funzioni costanti nel tempo. Ci si aspetta dalla fisica, che la soluzione del problema con condizione di Dirichlet a grandi tempi ($t \rightarrow +\infty$) si assesti ad una funzione costante nel tempo imposta dalle sole condizioni al bordo e dal termine di sorgente (e dalla funzione a che è assegnata), perdendo memoria delle condizioni iniziali.

Tale soluzione asintotica φ_∞ dovrebbe quindi soddisfare l'equazione del calore e contemporaneamente essere costante nel tempo cioè l'equazione di Poisson:

$$\Delta_{\mathbf{x}}\varphi_\infty(\mathbf{x}) = -\frac{q(\mathbf{x})}{a(\mathbf{x})}.$$

Sotto opportune ipotesi, lo studio matematico delle soluzioni del problema di Dirichlet per l'equazione del calore a grandi tempi prova che questo fatto è corretto.

8.3 Un problema atipico, ma storicamente importante: il problema della cantina di Fourier

La serie di Fourier è stata introdotta da Fourier per risolvere problemi di matematica applicata legati all'equazione del calore del tipo di quello che andiamo a studiare. Si tratta di determinare l'andamento della temperatura nel sottosuolo ad ogni quota al variare del tempo quando è noto l'andamento della temperatura come funzione del tempo al livello del suolo, descritto da una funzione periodica del tempo con periodo di un anno solare. Il fine ultimo è quello di determinare la profondità alla quale costruire una cantina in cui conservare cibo con una variazione termica annuale sufficientemente piccola, conoscendo la variazione termica a livello del suolo e i parametri termometrici dello stesso. L'importanza storica del tipo di idee euristiche introdotte da Fourier per risolvere il tipo di problemi che stiamo per introdurre sta nel fatto che hanno portato alla nascita della teoria della serie di Fourier (J.B.J. Fourier “Sulla propagazione del calore nei corpi solidi” 1808 e “Teoria analitica del calore” 1822).

Tratteremo il problema nel solo caso unidimensionalmente mentre una trattazione più realistica richiederebbe di sostituire la derivata seconda spaziale con il laplaciano. Di fatto cercheremo una funzione temperatura $u = u(t, x)$, con $t \in \mathbb{R}$ e $x \in [0, +\infty)$, dove x rappresenta la distanza dal suolo sottoterra per cui l'asse x è diretto verso il basso e la quota $x = 0$ corrisponde al suolo. La semplificazione dell'uso della derivata seconda nella sola variabile x , omettendo quelle nelle variabili y e z che appaiono in $\Delta_{\mathbf{x}}$, è giustificata quando si assuma che la temperatura nei piani descritti dalle coordinate y, z paralleli al terreno di profondità x sia costante. Tale assunzione è ragionevole dal punto di vista fisico se il materiale di cui è composto il terreno è omogeneo ed il terreno è piano. La funzione u soddisfa quindi l'equazione del calore in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{8.11}$$

per una costante positiva $a > 0$ che tiene conto dei parametri termometrici del suolo, assumendo che a non dipenda dal posto, come già detto, e dal tempo. È naturale assumere *almeno* che

$$u \in C^{1+2x}(\mathbb{R} \times (0, +\infty)) \cap C^0(\mathbb{R} \times [0, +\infty)),$$

poi preciseremo meglio le richieste sulla regolarità ai bordi del dominio, e che sia periodica nel tempo di un certo periodo $T > 0$ (un anno nella situazione concreta):

$$u(t + T, x) = u(t, x) \quad \text{per ogni } (t, x) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty). \quad (8.12)$$

Infine, come detto, si deve avere una condizione iniziale

$$u(t, 0) = u_0(t) \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R} \quad (8.13)$$

dove u_0 è una funzione periodica di periodo T almeno $C^0(\mathbb{R})$, che rappresenta la temperatura a livello del terreno come funzione nota del tempo.

La formulazione del problema è atipica dal punto di vista della tipologia dei problemi con dati iniziali e condizioni al contorno, perché le condizioni al contorno sono date su un bordo “temporale”: il problema potrebbe essere formulato nella banda $[0, T] \times [0, +\infty)$ imponendo condizioni di periodicità in $t = 0$ e $t = T$ cosa che infatti faremo sotto. La condizione iniziale è corrispondentemente data sul bordo temporale $t = 0$ invece che spaziale. Si tratta quindi di un tipo di problema che *non* rientra tra quelli introdotti nella Sezione 8.2 e che quindi affronteremo con metodi specifici.

Differentemente da Fourier assumeremo che u sia in generale a valori complessi evitando in tal modo l’uso della serie di Fourier in seni e coseni, ma sfruttando la più agile versione in termini di esponenziali complessi. In questi termini l’osservazione cruciale di Fourier fu che, assumendo che una soluzione di (8.11) abbia la forma di un prodotto: $u(t, x) = f(t)g(x)$, l’equazione (8.11) produce “separando le variabili” (come abbiamo fatto per l’equazione di KG e D’Alembert sul segmento nella Sezione 6.2),

$$\frac{1}{f} \frac{df}{dt} = E = \frac{a}{g} \frac{d^2g}{dx^2},$$

per qualche costante E (dato che al solito i due membri sono funzioni di variabili differenti) e dove abbiamo ignorato problemi di annullamento di denominatori e di regolarità, dato il tipo di ragionamento del tutto euristico. L’equazione

$$\frac{df}{dt} = Ef$$

ha come soluzione generale $f(t) = Ce^{Et}$ e soddisfa le condizioni (8.12) solo se $E = i\frac{2\pi n}{T}$ con $n \in \mathbb{Z}$. La soluzione avrà quindi una forma:

$$u_n(t, n) = C_n(x)e^{i\frac{2\pi nt}{T}},$$

dove C_n soddisfa

$$\frac{d^2C_n}{dx^2} = i\frac{2\pi n}{aT}C_n(x).$$

Osserviamo che l'equazione (8.11) è lineare e quindi la combinazione lineare di soluzioni è ancora soluzione. Inoltre le condizioni di periodicità continuano ad essere soddisfatte se sono soddisfatte dagli addendi della combinazione. Tenendo conto di ciò, la seconda idea cruciale di Fourier fu quella di pensare che la soluzione del problema posto si potesse cercare nella classe di funzioni sviluppabili come:

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(x) e^{i \frac{2\pi n}{T} t}.$$

Tutto ciò seguito da un opportuno studio della convergenza e della possibilità di passare le derivate sotto il segno di serie (questioni che, ai tempi di Fourier, non potevano ancora essere trattate in modo rigoroso e Fourier stesso fu addirittura tacciato di poco rigore matematico da Laplace e Lagrange nella costruzione teorica della serie omonima benché fu premiato per il suo lavoro che nel 1811 vinse una competizione internazionale sulla teoria matematica della propagazione del calore). In realtà Fourier scrisse l'identità di sopra in termini di seni e coseni e quindi come:

$$u(t, x) = C_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n(x) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + B_n(x) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right).$$

Possiamo enunciare e provare un teorema di esistenza ed unicità per il problema posto precisando condizioni di regolarità e richiedendo condizioni di limitatezza della soluzione.

Teorema 8.1. *Si consideri il problema di determinare una funzione*

$$u \in C^{1_t 2_x}([0, T] \times [0, +\infty); \mathbb{C})$$

che soddisfi l'equazione del calore (dove $a > 0$ è una costante nota):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

in $[0, T] \times [0, +\infty)$, le condizioni di periodicità temporale²:

$$u(0, x) = u(T, x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \frac{\partial u}{\partial t}(T, x) \quad \text{per ogni } x \in [0, +\infty),$$

la condizione iniziale spaziale:

$$u(t, 0) = u_0(t) \quad \text{per ogni } t \in [0, T].$$

Si assuma infine che:

(i) *la funzione incognita $u = u(t, x)$ sia limitata sul suo dominio $[0, T] \times [0, +\infty)$,*

²La condizione sulle derivate prime temporali è conseguenza della richiesta di periodicità temporale sulla funzione e dell'equazione differenziale stessa.

(ii) la condizione iniziale u_0 sia di classe $C^1([0, T]; \mathbb{C})$ e C^2 a tratti e, in conformità con le analoghe richieste su u , soddisfi condizioni di periodicità con la sua derivata prima: $u_0(0) = u_0(T)$ e $u_0'(0) = u_0'(T)$.

Valgono allora i seguenti fatti.

(a) Esiste una ed una sola soluzione al problema posto ed è la somma della serie convergente assolutamente ed uniformemente:

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{C_n}{\sqrt{T}} e^{-\sqrt{\frac{\pi|n|}{aT}} x} e^{i\left(\frac{2\pi n}{T}t - \text{sign}(n)\sqrt{\frac{\pi|n|}{aT}} x\right)} \quad \text{per } (t, x) \in [0, T] \times [0, +\infty),$$

dove i C_n sono i coefficienti di Fourier del dato iniziale:

$$C_n := \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T e^{-i\frac{2\pi n}{T}t} u_0(t) dt.$$

(b) Nel caso in cui u_0 sia reale allora: $C_n = \overline{C_{-n}}$, la stessa soluzione u è reale e può alternativamente scriversi come somma della serie convergente assolutamente ed uniformemente:

$$u(t, x) = \frac{C_0}{\sqrt{T}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{\frac{\pi n}{aT}} x}}{\sqrt{T}} \left[A_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t - \sqrt{\frac{\pi n}{aT}} x\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t - \sqrt{\frac{\pi n}{aT}} x\right) \right], \quad (8.14)$$

dove $A_n := 2\text{Re } C_n$ e $B_n := -2\text{Im } C_n$ per $n = 1, 2, \dots$

(c) Per ogni fissato $t \in [0, T]$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(t, x) = \frac{1}{T} \int_0^T u_0(\tau) d\tau.$$

Dimostrazione. (a) Supponiamo che esista una soluzione $u = u(t, x)$ al problema detto e mostriamo che deve avere la forma precisata in (a) dove i coefficienti C_n sono determinati dal dato iniziale. Ciò dimostra che, se esiste, la soluzione è unica. Consideriamo le funzioni:

$$C_n(x) := \int_0^T \frac{e^{-i\frac{2\pi n}{T}t}}{\sqrt{T}} u(t, x) dt, \quad (t, x) \in [0, T] \times [0, +\infty). \quad (8.15)$$

Per ogni fissato $x \in [0, +\infty)$, il numero $C_n(x)$, che è ben definito dato che si integra una funzione continua $[0, T] \ni t \mapsto u(t, x)$ su un intervallo di misura finita, non è altro che il *coefficiente di Fourier* n -esimo della funzione $[0, T] \ni t \mapsto u(t, x)$ sulla base degli esponenziali complessi in $[0, T]$. Tenuto ancora conto del fatto che $[0, T]$ ha misura finita, le ipotesi di continuità di $u = u(t, x)$ e delle sue derivate fino alla seconda in x consentono facilmente di applicare il teorema di passaggio della derivata sotto i segno di integrale (teorema B.5): basta osservare che in $[0, T] \times [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ con $\delta > 0$ abbastanza piccolo esiste una costante $K \geq 0$ che maggiore

in tale insieme il valore assoluto di u , delle sue derivate prime e della derivata seconda in x . La funzione $[0, T] \ni t \mapsto K$ è assolutamente integrabile perché $[0, T]$ ha misura finita. In tal modo:

$$\frac{d^2 C_n}{dx^2} = \int_0^T \frac{e^{-i\frac{2n\pi}{T}t}}{\sqrt{T}} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} dt = \int_0^T \frac{e^{-i\frac{2n\pi}{T}t}}{a\sqrt{T}} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} dt,$$

dove abbiamo anche fatto uso dell'equazione differenziale. Integrando per parti, tenendo conto che le funzioni sono periodiche di periodo T per cui i termini di bordo producono contributo nullo, si trova subito che:

$$\frac{d^2 C_n}{dx^2} = \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e^{-i\frac{2n\pi}{T}t}}{\sqrt{T}} u(t, x) \right) dt - \left(-i\frac{2\pi n}{aT} \int_0^T \frac{e^{-i\frac{2n\pi}{T}t}}{\sqrt{T}} u(t, x) dt \right) = i\frac{2\pi n}{aT} \int_0^T \frac{e^{-i\frac{2n\pi}{T}t}}{\sqrt{T}} u(t, x) dt,$$

cioè

$$\frac{d^2 C_n}{dx^2} = i\frac{2\pi n}{aT} C_n(x). \quad (8.16)$$

Eccetto il caso $n = 0$ che è banale e produce $C_0(x) = C_0 + D_0 x$ per costanti arbitrarie $C_0, D_0 \in \mathbb{C}$, l'equazione di annullamento del polinomio caratteristico:

$$\chi^2 = i\frac{2\pi n}{aT},$$

per $n \neq 0$, ha soluzioni:

$$\chi_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{2\pi|n|}{aT}} e^{\text{sign}(n)i\pi/4} = \pm \sqrt{\frac{2\pi|n|}{aT}} \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \text{sign}(n)i),$$

dove $\text{sign}(n) := 1$ se $n > 0$, $\text{sign}(n) = -1$ se $n < 0$ e $\text{sign}(0) := 0$, cioè

$$\chi_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{\pi|n|}{aT}} (1 + \text{sign}(n)i).$$

Abbiamo quindi le soluzioni generali dell'equazione differenziale considerata per ogni $n \in \mathbb{Z}$ e per costanti arbitrarie $C_n, D_n \in \mathbb{C}$:

$$C_0(x) = C_0 + D_0 x, \quad C_n(x) = D_n e^{\sqrt{\frac{\pi|n|}{aT}}(1+\text{sign}(n)i)x} + C_n e^{-\sqrt{\frac{\pi|n|}{aT}}(1+\text{sign}(n)i)x} \quad n \neq 0.$$

La funzione $[0, +\infty) \ni x \mapsto C_n(x)$ deve essere limitata essendo u limitata per ipotesi e

$$|C_n(x)| \leq \int_0^T \left| \frac{e^{-i\frac{2n\pi}{T}t}}{\sqrt{T}} \right| |u(t, x)| dt \leq \frac{T}{\sqrt{T}} \|u\|_{\infty} < +\infty.$$

Di conseguenza dobbiamo avere che $D_n = 0$ per $n \in \mathbb{Z}$ affinché le funzioni $C_n = C_n(x)$ risultino limitate quando $x \rightarrow +\infty$. Abbiamo trovato che, se esiste una soluzione u al problema posto, le funzioni $C_n = C_n(x)$ associate a tale soluzione devono essere della forma

$$C_n(x) := C_n e^{-\sqrt{\frac{\pi|n|}{aT}}(1+\text{sign}(n)i)x} \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (8.17)$$

Possiamo ancora dire che le costanti C_n coincidono con i coefficienti di Fourier della condizione iniziale u_0 . Infatti, ricordando che $u(t, 0) = u_0(t)$ abbiamo da (8.17),

$$C_n = C_n(0) = \int_0^T \frac{e^{-i\frac{2n\pi}{T}t}}{\sqrt{T}} u(t, 0) dt = \int_0^T \frac{e^{-i\frac{2n\pi}{T}t}}{\sqrt{T}} u_0(t) dt .$$

Per ogni fissato x la funzione $[0, T] \ni t \mapsto u(t, x)$ è misurabile (perché continua) e in $L^2([0, T], dt)$ (perché limitata e avendo il dominio $[0, T]$ misura di Lebesgue dt finita) e quindi ammette sviluppo di Fourier con coefficienti di Fourier dati dai numeri $C_n(x)$. Vale quindi l'identità nel senso dello sviluppo sulla base hilbertiana di $L^2([0, T], dt)$ data dagli esponenziali normalizzati $\frac{e^{i\frac{2\pi n}{T}t}}{\sqrt{T}}$:

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n e^{-\sqrt{\frac{\pi|n|}{aT}}(1+\text{sign}(n))ix} \frac{e^{i\frac{2\pi n}{T}t}}{\sqrt{T}} \quad \text{per ogni fissato } x \in [0, +\infty), \quad (8.18)$$

dove i C_n sono i coefficienti di Fourier della condizione iniziale u_0 . In realtà la serie a secondo membro in (8.18) converge anche puntualmente, assolutamente ed uniformemente ad una funzione *continua* per il teorema 1.3, dato che le funzioni della serie sono continue e la convergenza è uniforme. La convergenza è assoluta ed uniforme per il teorema 1.1 di Weierstrass sulla convergenza totale, dato che, nelle ipotesi su u_0 , per la proposizione 6.2, i suoi coefficienti di Fourier soddisfano

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^k |C_n| < +\infty \quad k = 0, 1, \quad (8.19)$$

e quindi la serie di funzioni a secondo membro in (8.18) è dominata dalla serie convergente di costanti $|C_n|$ valendo, per $(t, x) \in [0, T] \times [0, +\infty)$

$$\left| C_n e^{-\sqrt{\frac{\pi|n|}{aT}}x} e^{i\left(\frac{2\pi n}{T}t - \text{sign}(n)\sqrt{\frac{\pi|n|}{aT}}x\right)} \right| \leq |C_n|. \quad (8.20)$$

A x fissato, le due funzioni di t ai due membri dell'identità (8.18) hanno gli stessi coefficienti di Fourier (sfruttando lo stesso argomento che abbiamo usato per provare la proposizione 6.3), ma allora devono coincidere esattamente come nella dimostrazione della proposizione 6.3 dato che sono funzioni continue di t . Per ogni $x \in [0, +\infty)$ fissato, l'identità (8.18) non è quindi solo nel senso della convergenza in L^2 , ma vale più fortemente nel senso dell'identità punto per punto di due funzioni definite su $[0, T]$. In definitiva l'identità (8.18) vale in senso usuale per ogni $(t, x) \in [0, T] \times [0, +\infty)$.

Concludendo, se esiste una soluzione al problema essa è data dalla (8.18). Tutto questo prova l'unicità della soluzione: se esiste deve coincidere con il secondo membro di (8.18).

Per quanto riguarda l'esistenza è sufficiente osservare che nelle ipotesi di regolarità su u_0 che garantiscono la validità della stima (8.19), la serie a secondo membro in (8.18) non solo converge ad una funzione di (t, x) continua su $[0, T] \times [0, +\infty)$, ma tale funzione può anche essere derivata sotto il segno di serie una volta in t e fino a due volte in x , dato che le serie delle derivate

prime in x e t e seconde in x convergono uniformemente (a funzioni continue), come si dimostra subito usando il teorema della convergenza totale di Weierstrass e ancora le stime (8.19) e (8.20). Possiamo dare qualche dettaglio. La serie delle derivate prime in t è infatti

$$i \frac{2\pi}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n n e^{-\sqrt{\frac{\pi|n|}{aT}}(1+\text{sign}(n) i)x} \frac{e^{i \frac{2\pi n}{T} t}}{\sqrt{T}}$$

il cui termine generico in valore assoluto è maggiorato dalla costante (si osservi in particolare che $0 \leq e^{-\sqrt{\frac{\pi|n|}{aT}}x} \leq 1$ se $x \in [0, +\infty)$):

$$\frac{2\pi}{T^{3/2}} |n| |C_n|.$$

La serie di queste costanti non negative converge a causa della stima (8.19) con $k = 1$. Quindi possiamo applicare il teorema di Weierstrass ottenendo che la serie delle derivate temporali converge uniformemente e quindi la somma della (8.18) può essere derivata sotto il segno di serie in t , producendo una funzione continua (in x e t congiuntamente) perché limite uniforme di funzioni continue. La serie delle derivate prime in x è invece:

$$-\sqrt{\frac{\pi}{aT^2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n \sqrt{|n|} (1 + \text{sign}(n) i) e^{-\sqrt{\frac{\pi|n|}{aT}}(1+\text{sign}(n) i)x} e^{i \frac{2\pi n}{T} t}$$

il cui termine generico in valore assoluto è similmente a prima maggiorato dalla costante:

$$\sqrt{\frac{\pi}{aT^2}} \sqrt{|n|} \sqrt{2} |C_n|,$$

che, essendo $\sqrt{|n|} \leq |n|$, è a sua volta maggiorata da

$$\sqrt{\frac{2\pi}{aT^2}} |n| |C_n|.$$

La serie di queste costanti non negative converge a causa della stima (8.19) ancora con $k = 1$. Possiamo allora applicare il teorema di Weierstrass ottenendo che la serie delle derivate spaziali converge uniformemente e quindi la somma della (8.18) può essere derivata sotto il segno di serie in x , producendo una funzione continua (in x e t congiuntamente) perché limite uniforme di funzioni continue. La serie delle derivate seconde in x :

$$\frac{\pi}{aT^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n |n| (1 + \text{sign}(n) i)^2 e^{-\sqrt{\frac{\pi|n|}{aT}}(1+\text{sign}(n) i)x} e^{i \frac{2\pi n}{T} t},$$

si tratta analogamente e viene nuovamente trattata facendo uso della della stima (8.19) ancora con $k = 1$.

La funzione a secondo membro di (8.18) risulta dunque essere una funzione $C^{1_t 2_x}([0, T] \times [0, +\infty))$

che è periodica in t con periodo T dato che è somma di funzioni con tale periodo e la stessa cosa si può dire della sua derivata prima temporale per analoghi motivi. La funzione u si raccorda anche alla condizione iniziale u_0 per costruzione. La funzione a secondo membro di (8.18) soddisfa inoltre l'equazione differenziale. Quest'ultimo fatto si verifica passando le derivate sotto il segno di somma ed usando il fatto che, per come abbiamo definito le funzioni $C_n = C_n(x)$, la condizione (8.16) soddisfatta da tali coefficienti si può riscrivere

$$\frac{\partial C_n(x)e^{i2\pi nt/T}}{\partial t} - a \frac{\partial^2 C_n(x)e^{i2\pi nt/T}}{\partial x^2} = -a \left(\frac{d^2 C_n}{dx^2} - i \frac{2\pi n}{aT} C_n(x) \right) e^{i2\pi nt/T} = 0$$

e pertanto

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\partial C_n(x)e^{i2\pi nt/T}}{\partial t} - a \frac{\partial^2 C_n(x)e^{i2\pi nt/T}}{\partial x^2} \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 0 = 0.$$

Il secondo membro di (8.18) è infine una funzione limitata, come richiesto nelle ipotesi, dato che, se $(t, x) \in [0, T] \times [0, +\infty)$,

$$|u(t, x)| = \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{C_n}{\sqrt{T}} e^{-\sqrt{\frac{\pi|n|}{aT}} x} e^{i\left(\frac{2\pi n}{T}t - \text{sign}(n)\sqrt{\frac{\pi|n|}{aT}} x\right)} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |C_n| \leq +\infty,$$

e dunque il secondo membro di (8.18) è una soluzione del problema.

(b) L'identità $C_n = \overline{C_{-n}}$ è di immediata verifica da $C_n := T^{-2} \int_0^T e^{-i2\pi nt/T} u_0(t) dt$ per u_0 reale. Lo sviluppo in seni e coseni di u si ottiene come segue. Riordinando la serie sommandone insieme i termini $\pm n$ senza comunque alterare la somma, dato che la serie converge uniformemente, e tenendo conto che $C_{-n} = \overline{C_n}$, abbiamo che

$$u(t, x) = \frac{C_0}{\sqrt{T}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_n}{\sqrt{T}} e^{-\sqrt{\frac{\pi|n|}{aT}} x} e^{i\left(\frac{2\pi n}{T}t - \text{sign}(n)\sqrt{\frac{\pi|n|}{aT}} x\right)} + \frac{\overline{C_n}}{\sqrt{T}} e^{-\sqrt{\frac{\pi|n|}{aT}} x} e^{-i\left(\frac{2\pi n}{T}t - \text{sign}(n)\sqrt{\frac{\pi|n|}{aT}} x\right)}$$

cioè

$$u(t, x) = \frac{C_0}{\sqrt{T}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{\frac{\pi|n|}{aT}} x}}{\sqrt{T}} 2\text{Re} \left[C_n e^{i\left(\frac{2\pi n}{T}t - \text{sign}(n)\sqrt{\frac{\pi|n|}{aT}} x\right)} \right].$$

Dato che tutti i valori di n sono non negativi:

$$u(t, x) = \frac{C_0}{\sqrt{T}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{\frac{\pi n}{aT}} x}}{\sqrt{T}} 2\text{Re} \left[C_n e^{i\left(\frac{2\pi n}{T}t - \sqrt{\frac{\pi n}{aT}} x\right)} \right].$$

Se ora definiamo $A_n = 2\text{Re}C_n$ e $B_n = -2\text{Im}C_n$ abbiamo che

$$2\text{Re} \left[C_n e^{i\left(\frac{2\pi n}{T}t - \sqrt{\frac{\pi n}{aT}} x\right)} \right] = A_n \cos \left(\frac{2\pi n}{T}t - \sqrt{\frac{\pi n}{aT}} x \right) + B_n \sin \left(\frac{2\pi n}{T}t - \sqrt{\frac{\pi n}{aT}} x \right)$$

che fornisce la (8.14). Lo sviluppo della soluzione u (8.14) per u_0 reale, dove quindi tutti i coefficienti C_0 , A_n e B_n sono reali, prova anche che la soluzione u è reale se la condizione iniziale u_0 è reale.

(c) Segue immediatamente passando il limite sotto il simbolo di serie in (8.18) applicando la proposizione (B.1) ed osservando che, nel limite, sopravvive solo il termine di ordine $n = 0$. \square

Un commento di carattere fisico è alla fine necessario, dato che il problema partiva da una ben posta questione di natura fisica. Per valori realistici di a si trova $\sqrt{\frac{\pi}{aT}} \simeq \frac{2\pi}{900} \text{ cm}^{-1}$ e quindi, alla profondità di $x = 450 \text{ cm}$ dal livello del suolo, $e^{-\sqrt{\frac{\pi}{aT}} x} = e^{-\pi} \simeq 1/16$. Questo significa che, se al livello del suolo la differenza tra la temperatura massima annuale e quella minima annuale è di 40 gradi centigradi, alla profondità detta nel sottosuolo tale differenza è in prima approssimazione smorzata di un fattore $1/16$ (la stima vale per $n = 1$, per i valori di $n > 1$ lo smorzamento è ancora maggiore) ed è quindi di soli circa 2 gradi centigradi. Un altro effetto è lo sfasamento della variazione periodica della temperatura di $-\sqrt{\frac{\pi n}{aT}} x$ rispetto alla variazione periodica al livello del suolo. Con i valori detti, per la componente con $n = 1$ in (8.14), che in genere ha il peso maggiore nello sviluppo (8.14), tale sfasamento è di π e pertanto, alla profondità di 450 cm si ha un ritardo (o un anticipo) di circa 6 mesi del ciclo termico rispetto al suolo.

8.4 Principio del massimo parabolico e teoremi di unicità.

8.4.1 Principio del massimo parabolico in regioni limitate.

Uno strumento fondamentale per provare un teorema di unicità per il problema di Dirichlet ma anche per altri fini, è il teorema noto come *principio del massimo parabolico*, che ha un enunciato simile a quello per le funzioni armoniche, con l'importante differenza che ora la frontiera su cui la funzione raggiunge il massimo è la frontiera parabolica menzionata sopra e che definiremo formalmente sotto.

Enunciamo e proviamo tale teorema sotto. L'aggettivo “debole” è dovuto al fatto che si può rafforzare la tesi provando che il massimo non può essere raggiunto nell'interno del dominio se non per le funzioni costanti.

Definizione 8.1. Se $D \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto non vuoto e $T > 0$, si definisce il **dominio parabolico** associato a D e T come:

$$D_T := (0, T) \times D$$

e la **frontiera parabolica** di D_T come:

$$\partial_p D_T := (\{0\} \times \overline{D}) \cup ((0, T] \times \partial D).$$

◇

Teorema 8.2. (Principio del massimo parabolico debole in regioni limitate). Sia $D \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto non vuoto con \overline{D} compatto e $T > 0$ e si consideri $\varphi \in C^{1+2\alpha}(D_T) \cap C^0(\overline{D_T})$

che soddisfi

$$\frac{\partial \varphi(t, \mathbf{x})}{\partial t} - a(t, \mathbf{x}) \Delta \varphi(t, \mathbf{x}) = q(t, \mathbf{x}) \leq 0 \quad \text{se } (t, \mathbf{x}) \in D_T, \quad (8.21)$$

per qualche coppia di funzioni a, q definite sul dominio parabolico D_T con $a(t, x) > 0$ su tale dominio.

Allora il massimo di φ su $\overline{D_T}$ è raggiunto sulla frontiera parabolica $\partial_p D_T$:

$$\max_{\overline{D_T}} \varphi = \max_{\partial_p D_T} \varphi. \quad (8.22)$$

Se la condizione $q(t, \mathbf{x}) \leq 0$ in (8.21) è sostituita da $q(t, \mathbf{x}) \geq 0$, a parità delle altre ipotesi, al posto di (8.22) vale:

$$\min_{\overline{D_T}} \varphi = \min_{\partial_p D_T} \varphi. \quad (8.23)$$

◇

Osservazioni 8.2. Se a parità di tutte le altre ipotesi, la funzione q non è assegnata, ma è noto che, a parità di tutte le altre ipotesi, la condizione (8.21) su φ è rimpiazzata da:

$$\frac{\partial \varphi(t, \mathbf{x})}{\partial t} - a(t, x) \Delta \varphi(t, \mathbf{x}) \leq 0 \quad \text{se } (t, \mathbf{x}) \in D_T, \quad (8.24)$$

il teorema si applica ugualmente, ovviamente *definendo* q come il primo membro di (8.24).

Dimostrazione del teorema 8.2. Dimostriamo solo la tesi per il caso $q(t, \mathbf{x}) \leq 0$, dato che l'altro caso si tratta analogamente considerando la funzione $-\varphi$. Assumiamo dunque $q(t, \mathbf{x}) \leq 0$. Proveremo che se $(t, \mathbf{x}) \in D_{T-\epsilon}$, dove $\epsilon > 0$ è un qualsiasi numero che soddisfa $T - \epsilon > 0$, allora:

$$\varphi(t, \mathbf{x}) \leq \max_{\partial_p D_T} \varphi + \epsilon T. \quad (8.25)$$

Ciò è sufficiente per provare il teorema, dato che (8.25) implica (8.22). Infatti, per un fissato $(t, \mathbf{x}) \in D_T$, $\epsilon > 0$ può essere preso piccolo a piacere in (8.25), per cui $\varphi(t, \mathbf{x}) \leq \max_{\partial_p D_T} \varphi$. La continuità di φ estende questa disuguaglianza a ogni $(t, \mathbf{x}) \in \overline{D_T}$ ed in particolare ad ogni punto di massimo di φ (che esiste perché $\overline{D_T}$ è compatto) provando (8.22) con \leq in luogo di $=$, tuttavia la maggiorazione inversa, $\max_{\overline{D_T}} \varphi \geq \max_{\partial_p D_T} \varphi$, è ovvia essendo $\overline{D_T} \supset \partial_p D_T$.

Osserviamo infine che (8.25) è implicata da:

$$\max_{\overline{D_{T-\epsilon}}} \varphi \leq \max_{\partial_p D_T} \varphi + \epsilon T \quad \text{per ogni } \epsilon > 0 \text{ con } T - \epsilon > 0. \quad (8.26)$$

Proviamo (8.26) concludendo la dimostrazione.

Per $\epsilon > 0$ fissato tale che $T - \epsilon > 0$, introduciamo la funzione ausiliaria $u := \varphi - \epsilon t$. Tale funzione soddisfa ovviamente:

$$\frac{\partial u(t, \mathbf{x})}{\partial t} - a \Delta u(t, \mathbf{x}) = q(t, \mathbf{x}) - \epsilon < 0. \quad (8.27)$$

Mostriamo ora che il massimo di u in $\overline{D_{T-\epsilon}}$ è raggiunto su $\partial_p D_{T-\epsilon}$. Se così non fosse ci sarebbe un punto $(t_0, \mathbf{x}_0) \in D_{T-\epsilon} \cup (\{T-\epsilon\} \times D)$ di massimo assoluto. Se il punto è interno (cioè $t_0 < T-\epsilon$), il gradiente di u si annulla in tale punto e la matrice hessiana delle derivate seconde di u rispetto alle componenti di \mathbf{x} della funzione $\mathbf{x} \mapsto \varphi(t_0, \mathbf{x})$ deve essere semidefinita negativa per $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. In particolare, dato che il laplaciano (rispetto alle coordinate \mathbf{x}) di u valutato in (t_0, \mathbf{x}_0) non è altro che la traccia della matrice Hessiana valutata in tal punto che, a sua volta, è la somma degli autovalori: che sono numeri reali non positivi nel caso in esame, $\Delta_{\mathbf{x}} u|_{(t_0, \mathbf{x}_0)} \leq 0$. Questo è impossibile perchè implicherebbe, diversamente da (8.27):

$$\frac{\partial u(t, \mathbf{x})}{\partial t}|_{(t_0, \mathbf{x}_0)} - a \Delta_{\mathbf{x}} u(t, \mathbf{x})|_{(t_0, \mathbf{x}_0)} \geq 0.$$

Se invece $t_0 = T-\epsilon$, le derivate in \mathbf{x} di u si annullano ancora in (t_0, \mathbf{x}_0) , vale ancora $\Delta_{\mathbf{x}} u|_{(t_0, \mathbf{x}_0)} \leq 0$, ma $\frac{\partial u(t, \mathbf{x})}{\partial t}|_{(t_0, \mathbf{x})} \geq 0$ in generale. Anche in questo caso si ottiene il risultato in contrasto con (8.27):

$$\frac{\partial u(t, \mathbf{x})}{\partial t}|_{(t_0, \mathbf{x}_0)} - a \Delta_{\mathbf{x}} u(t, \mathbf{x})|_{(t_0, \mathbf{x}_0)} \geq 0.$$

Abbiamo provato che il massimo di u in $\overline{D_{T-\epsilon}}$ è raggiunto su $\partial_p D_{T-\epsilon}$:

$$\max_{D_{T-\epsilon}} u = \max_{\partial_p D_{T-\epsilon}} u, \quad (8.28)$$

Essendo $\varphi = u + \epsilon t \leq u + \epsilon T$ abbiamo

$$\max_{D_{T-\epsilon}} \varphi \leq \max_{D_{T-\epsilon}} u + \epsilon T = \max_{\partial_p D_{T-\epsilon}} u + \epsilon T \leq \max_{\partial_p D_T} \varphi + \epsilon T,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato $u \leq \varphi$ e $\partial_p D_{T-\epsilon} \subset \partial_p D_T$. Abbiamo in definitiva ottenuto la (8.26):

$$\max_{D_{T-\epsilon}} \varphi \leq \max_{\partial_p D_T} \varphi + \epsilon T,$$

concludendo la dimostrazione \square .

Segue immediatamente il seguente corollario.

Corollario. *Se $D \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto non vuoto con \overline{D} compatto e $T > 0$, usando le stesse notazioni del teorema precedente, si consideri $\varphi \in C^{1t2\mathbf{x}}(D_T) \cap C^0(\overline{D_T})$ che soddisfi*

$$\frac{\partial \varphi(t, \mathbf{x})}{\partial t} - a(t, \mathbf{x}) \Delta \varphi(t, \mathbf{x}) = 0 \quad \text{se } (t, \mathbf{x}) \in D_T, \quad (8.29)$$

per qualche funzione $a > 0$ definita in D_T .

Allora:

$$\min_{\partial_p D_T} \varphi \leq \varphi(t, \mathbf{x}) \leq \max_{\partial_p D_T} \varphi \quad \text{se } (t, \mathbf{x}) \in \overline{D_T}, \quad (8.30)$$

ed in particolare:

$$|\varphi(t, \mathbf{x})| \leq \max_{\partial_p D_T} |\varphi| \quad \text{se } (t, \mathbf{x}) \in \overline{D_T}. \quad (8.31)$$

◇

Dimostrazione. L'unica cosa da provare è la (8.31). Nel caso generale, per una funzione che ammette massimo e minimo (come la funzione continua φ sul compatto $\overline{D_T}$ o ristretta al compatto $\partial_p D_T$), vale: $\max |f| = \max(|\min f|, |\max f|)$. Allora il teorema precedente implica che:

$$\max_{\overline{D_T}} |\varphi| = \max(|\min_{\overline{D_T}} \varphi|, |\max_{\overline{D_T}} \varphi|) = \max(|\min_{\partial_p D_T} \varphi|, |\max_{\partial_p D_T} \varphi|) = \max_{\partial_p D_T} |\varphi|.$$

Dunque:

$$\max_{\overline{D_T}} |\varphi| = \max_{\partial_p D_T} |\varphi|,$$

che equivale a (8.31). □

8.4.2 Teorema di unicità per condizioni al bordo di Dirichlet.

Il teorema ed il corollario appena dimostrati permettono di provare un teorema di unicità per il problema con condizioni al bordo di Dirichlet e dimostrare anche che il problema è ben posto nel senso di Hadamard.

Teorema 8.3. (Unicità e ben posizione del problema parabolico con dati di Dirichlet del massimo parabolico debole). *Se $D \subset \mathbb{R}^n$ è aperto non vuoto, \overline{D} compatto e $T > 0$, definiti D_T e $\partial_p D_T$ seguendo la definizione 8.1, si considerino $\varphi_1, \varphi_2 \in C^{1+2x}(D_T) \cap C^0(\overline{D_T})$ che soddisfino:*

$$\frac{\partial \varphi_i(t, \mathbf{x})}{\partial t} - a(t, \mathbf{x}) \Delta \varphi_i(t, \mathbf{x}) = q(t, \mathbf{x}) \quad \text{se } (t, \mathbf{x}) \in D_T, \text{ per } i = 1, 2, \quad (8.32)$$

per funzioni $a > 0, q$ definite in D_T .

Valgono allora i fatti seguenti.

(a) Se vale $\varphi_1 \geq \varphi_2$ sulla frontiera parabolica $\partial_p D_T$, allora

$$\varphi_1(t, \mathbf{x}) \geq \varphi_2(t, \mathbf{x}) \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in \overline{D_T}. \quad (8.33)$$

(b) Vale l'identità in $\overline{D_T}$:

$$\max_{\overline{D_T}} |\varphi_1 - \varphi_2| = \max_{\partial_p D_T} |\varphi_1 - \varphi_2|. \quad (8.34)$$

(c) Il problema, con $a > 0, q$ funzioni assegnate su D_T , per funzioni $\varphi \in C^{1+2x}(D_T) \cap C^0(\overline{D_T})$ tali che:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi(t, \mathbf{x})}{\partial t} - a(t, \mathbf{x}) \Delta \varphi(t, \mathbf{x}) = q(t, \mathbf{x}) & \text{se } (t, \mathbf{x}) \in D_T, \\ \varphi(0, \mathbf{x}) = \varphi_0(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \overline{D}, \\ \varphi|_{[0, T] \times \partial D} = \psi, \end{cases} \quad (8.35)$$

per assegnati dato iniziale $\varphi_0 \in C^0(\overline{D})$ e dato al bordo $\psi \in C^0([0, T] \times \partial D)$, con $\varphi_0|_{\partial D} = \psi|_{t=0}$, ammette al più una soluzione. Infine la soluzione in \overline{D}_T , se esiste, dipende con continuità, nella norma $\|\cdot\|_\infty$, dalla funzione definita sulla frontiera parabolica e costruita con il dato iniziale e il dato al bordo. \diamond

Dimostrazione. Per provare (a) basta considerare $\varphi := \varphi_1 - \varphi_2$ che soddisfa l'equazione omogenea $\frac{\partial \varphi(t, \mathbf{x})}{\partial t} - a \Delta \varphi(t, \mathbf{x}) = 0$ e poi osservare che $\varphi \geq \min_{\partial_p D_T} \varphi$ per il corollario precedente. (b) segue immediatamente dal corollario precedente e (c) si ha da (b), osservando che se due soluzioni hanno gli stessi dati iniziali su \overline{D} e gli stessi dati al bordo $(0, T] \times \partial D$ allora la loro differenza è nulla sulla frontiera parabolica ed è quindi ovunque nulla per (b). L'ultima affermazione segue immediatamente da (b). \square

8.4.3 Principio del massimo parabolico in regioni spaziali illimitate.

Passiamo a considerare il caso di una regione D illimitata enunciando e provando la corrispondente versione del principio del massimo parabolico. Si osservi che se D è illimitato ∂D può essere l'insieme vuoto oppure contenere qualche punto. In ogni caso $\partial_p D_T \supset \{0\} \times \overline{D} \neq \emptyset$.

Teorema 8.4. (Principio del massimo parabolico debole in regioni spaziali illimitate). *Se $D \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto illimitato e $T > 0$, definiti D_T e $\partial_p D_T$ seguendo la definizione 8.1, si consideri una funzione $\varphi \in C^{1,2 \times}(D_T) \cap C^0(\overline{D}_T)$, limitata su \overline{D}_T e che soddisfi*

$$\frac{\partial \varphi(t, \mathbf{x})}{\partial t} - a(t, \mathbf{x}) \Delta \varphi(t, \mathbf{x}) = q(t, \mathbf{x}) \leq 0 \quad \text{se } (t, \mathbf{x}) \in D_T, \quad (8.36)$$

per qualche coppia di funzioni $a > 0, q$ definite in D_T con a limitata.

Vale allora:

$$\sup_{\overline{D}_T} \varphi = \sup_{\partial_p D_T} \varphi. \quad (8.37)$$

Se la condizione $q(t, \mathbf{x}) \leq 0$ in (8.36) è sostituita da $q(t, \mathbf{x}) \geq 0$, a parità delle altre ipotesi, al posto di (8.37) vale:

$$\inf_{\overline{D}_T} \varphi = \inf_{\partial_p D_T} \varphi. \quad (8.38)$$

\diamond

Dimostrazione. Dimostriamo solo la tesi per il caso $q(t, \mathbf{x}) \leq 0$, dato che l'altro caso si tratta analogamente considerando la funzione $-\varphi$. Assumiamo dunque $q(t, \mathbf{x}) \leq 0$. Se $\sup_{\partial_p D_T} \varphi = +\infty$ non c'è nulla da provare essendo $\partial_p D_T \subset \overline{D}_T$. Nel caso in cui tale estremo superiore sia finito, possiamo sempre ridurci a considerare il caso in cui $\sup_{\partial_p D_T} \varphi = 0$ (semplicemente ridefinendo la φ iniziale come $\varphi - \sup_{\partial_p D_T} \varphi$). In questo caso la tesi si riduce banalmente a provare che se $\varphi|_{\partial_p D_T} \leq 0$ allora $\varphi(t, \mathbf{x}) \leq 0$ per ogni $(t, \mathbf{x}) \in D_T$ (e quindi $(t, \mathbf{x}) \in \overline{D}_T$ per continuità). Dimostriamo che ciò è vero. Definiamo la funzione ausiliaria:

$$w_0(t, \mathbf{x}) := e^{\lambda t} (\cosh x^1) \cdots (\cosh x^n).$$

Se $\lambda > 0$ è abbastanza grande allora, ovunque su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$:

$$\frac{\partial w_0}{\partial t} - a\Delta w_0 \geq 0.$$

Infatti il calcolo diretto prova che:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_0}{\partial t} - a\Delta w_0 &= e^{\lambda t} (\lambda(\cosh x^1) \cdots (\cosh x^n) - a\Delta(\cosh x^1) \cdots (\cosh x^n)) \\ &= e^{\lambda t} (\lambda(\cosh x^1) \cdots (\cosh x^n) - na(\cosh x^1) \cdots (\cosh x^n)) \\ &= e^{\lambda t} ((\lambda - an)(\cosh x^1) \cdots (\cosh x^n)) \geq 0, \end{aligned}$$

dove abbiamo scelto $\lambda > n \sup_{D_T} a$, dato che a è limitato per ipotesi. Definiamo poi $D^{(L)} := ((-L, L)^n) \cap D$ per ogni $L > 0$, dove $(-L, L)^n = (-L, L) \times \cdots \times (-L, L)$ e dove il prodotto cartesiano è eseguito n volte. La funzione:

$$w(t, \mathbf{x}) := \varphi - w_0(t, \mathbf{x}) \frac{\sup_{\overline{D_T}} |\varphi|}{\cosh^n L}$$

soddisfa su $D_T^{(L)} := (0, T) \times D^{(L)}$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - a\Delta w = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - a\Delta \varphi - \frac{\sup_{\overline{D_T}} |\varphi|}{\cosh^n L} \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} - a\Delta w_0 \right) \leq 0$$

per costruzione. Infine, sempre per costruzione vale:

$$w \upharpoonright_{\partial_p D_T^{(L)}} \leq 0.$$

Infatti se $(t, \mathbf{x}) \in \partial_p D_T^{(L)}$ allora deve essere $t = 0$ e in questo caso la disuguaglianza è banalmente soddisfatta perchè $\varphi(0, \mathbf{x}) \leq 0$ per ipotesi (dato che, in tal caso, $(0, \mathbf{x}) \in \partial_p D_T$), oppure $\mathbf{x} \in \partial D$ e/o \mathbf{x} cade sul bordo di $[-L, L]^n$. Nel primo caso $\varphi(t, \mathbf{x}) \leq 0$ e quindi $w \upharpoonright_{\partial_p D_T^{(L)}} \leq 0$ perchè è comunque $w_0(t, \mathbf{x}) \frac{\sup_{\overline{D_T}} |\varphi|}{\cosh^n L} \geq 0$ per costruzione. Nel secondo caso:

$$w_0(t, \mathbf{x}) \frac{1}{\cosh^n L} = e^{\lambda t} \geq 1$$

e dunque, ancora:

$$w(t, \mathbf{x}) = \varphi(t, \mathbf{x}) - w_0(t, \mathbf{x}) \frac{\sup_{\overline{D_T}} |\varphi|}{\cosh^n L} \leq 0 \quad (t, \mathbf{x}) \in \partial_p D_T^{(L)}.$$

Dato che $D^{(L)}$ è limitato, possiamo applicare il principio del massimo parabolico per domini limitati per la funzione w , ottenendo che:

$$\max_{D_T^{(L)}} w \leq \max_{\partial_p D_T^{(L)}} w \leq 0$$

e quindi in particolare $w(t, \mathbf{x}) \leq 0$ se $(t, \mathbf{x}) \in D_T^{(L)}$, che significa:

$$\varphi(t, \mathbf{x}) \leq w_0(t, \mathbf{x}) \frac{\sup_{\overline{D_T}} |\varphi|}{\cosh^n L}.$$

Si osservi ora che se $(t, \mathbf{x}) \in D_T$, possiamo trovare un $L > 0$ tanto grande per cui $(t, \mathbf{x}) \in D_T^{(L)}$. Allora, se, per ogni fissato $(t, \mathbf{x}) \in D_T$ prendiamo il limite per $L \rightarrow +\infty$ della disuguaglianza scritta sopra, troviamo:

$$\varphi(t, \mathbf{x}) \leq 0 \quad \text{se } (t, \mathbf{x}) \in D_T.$$

Questo è quanto volevamo provare. \square .

Segue immediatamente il seguente corollario.

Corollario. *Se $D \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto non vuoto e $T > 0$, con le stesse notazioni del teorema precedente, si consideri $\varphi \in C^{1+2\mathbf{x}}(D_T) \cap C^0(\overline{D_T})$ limitata su $\overline{D_T}$ che soddisfi*

$$\frac{\partial \varphi(t, \mathbf{x})}{\partial t} - a \Delta \varphi(t, \mathbf{x}) = 0 \quad \text{se } (t, \mathbf{x}) \in D_T, \quad (8.39)$$

per qualche funzione $a > 0$, limitata e definita in D_T .

Vale allora:

$$\inf_{\partial_p D_T} \varphi \leq \varphi(t, \mathbf{x}) \leq \sup_{\partial_p D_T} \varphi \quad \text{se } (t, \mathbf{x}) \in \overline{D_T}, \quad (8.40)$$

ed in particolare:

$$|\varphi(t, \mathbf{x})| \leq \sup_{\partial_p D_T} |\varphi| \quad \text{se } (t, \mathbf{x}) \in \overline{D_T}. \quad (8.41)$$

◇

Dimostrazione. L'unica cosa da provare è la (8.41). Nel caso generale, per una funzione che ammette estremo superiore ed inferiore vale: $\sup |f| = \sup(|\inf f|, |\sup f|)$. Allora la dimostrazione procede come nel caso di dominio limitato. \square

8.4.4 Teorema di unicità per condizioni al bordo di Dirichlet con domini spaziali illimitati.

Il teorema ed il corollario appena dimostrati permettono di provare un teorema di unicità per il problema con condizioni al bordo di Dirichlet, nel caso di domini illimitati, e dimostrare anche che il problema è ben posto nel senso di Hadamard.

Teorema 8.5. (Unicità e ben posizione del problema parabolico con dati di Dirichlet su dominio spaziale illimitato). *Se $D \subset \mathbb{R}^n$ è aperto non vuoto e $T > 0$, definendo*

D_T e $\partial_p D_T$ secondo la definizione 8.1, si considerino $\varphi_1, \varphi_2 \in C^{1t2\mathbf{x}}(D_T) \cap C^0(\overline{D_T})$ limitate, che soddisfino:

$$\frac{\partial \varphi_i(t, \mathbf{x})}{\partial t} - a \Delta \varphi_i(t, \mathbf{x}) = q \quad \text{se } (t, \mathbf{x}) \in D_T, \text{ per } i = 1, 2, \quad (8.42)$$

per funzioni $a > 0, q$ definite in D_T con a limitata.

Valgono allora i fatti seguenti.

(a) Se vale $\varphi_1 \geq \varphi_2$ sulla frontiera parabolica $\partial_p D_T$, allora

$$\varphi_1(t, \mathbf{x}) \geq \varphi_2(t, \mathbf{x}) \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in \overline{D_T}. \quad (8.43)$$

(b) Vale l'identità in $\overline{D_T}$:

$$\sup_{\overline{D_T}} |\varphi_1 - \varphi_2| = \sup_{\partial_p D_T} |\varphi_1 - \varphi_2|. \quad (8.44)$$

(c) Il problema, con $a > 0, q$ funzioni assegnate su $\overline{D_T}$, per funzioni $\varphi \in C^{1t2\mathbf{x}}(D_T) \cap C^0(\overline{D_T})$ limitate,

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi(t, \mathbf{x})}{\partial t} - a \Delta \varphi(t, \mathbf{x}) = q & \text{se } (t, \mathbf{x}) \in D_T, \\ \varphi(0, \mathbf{x}) = \varphi_0(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \overline{D}, \\ \varphi \upharpoonright_{(0, T] \times \partial D} = \psi. \end{cases} \quad (8.45)$$

per assegnati dati iniziali $\varphi_0 \in C^0(\overline{D})$ e dati al bordo $\psi \in C^0((0, T] \times \partial D)$ ammette al più una soluzione.

Infine la soluzione in $\overline{D_T}$, se esiste, dipende con continuità, nella norma $\| \cdot \|_\infty$ dai dati iniziali e da quelli al bordo. \diamond

Dimostrazione. La dimostrazione è la stessa che nel caso di D limitato, usando i corrispondenti teoremi per il caso illimitato. \square

8.5 Equazione del calore su \mathbb{R}^{n+1} e trasformata di Fourier

In questa sezione ci occuperemo di costruire esplicitamente le soluzioni dell'equazione del calore a coefficienti costanti quando il problema è posto in tutto lo spazio \mathbb{R}^n . Per costruire soluzioni esplicite faremo uso della tecnologia della trasformata di Fourier che sarà approfondita in altri corsi. Ci limitiamo nel seguito ed enunciare i risultati tecnici dei quali faremo uso.

Nel seguito lavorando con funzioni $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, dove $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto, un **multi indice** α è una n -pla di numeri naturali $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ (si noti dunque che $\alpha_k = 0$ è un valore ammesso). $|\alpha| = \sum_{k=1}^n \alpha_k$ e

$$\partial_x^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{1\alpha_1} \dots \partial x^{n\alpha_n}}.$$

Useremo anche la notazione, se $z = (z^1, \dots, z^n) \in \mathbb{C}^n$:

$$z^\alpha := (z^1)^{\alpha_1} \dots (z^n)^{\alpha_n}.$$

8.5.1 La trasformata di Fourier

Ricordiamo che lo **spazio di Schwartz**, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, è lo spazio vettoriale complesso delle funzioni $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ di classe C^∞ e tali che, per ogni multiindice α e per ogni $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ esiste una costante $C_{f,\alpha,m}$ per cui:

$$|\partial_x^\alpha f(x)| \leq \frac{C_{f,\alpha,m}}{1 + \|x\|^m}. \quad (8.46)$$

In altre parole, le funzione di Schwartz decrescono all'infinito più rapidamente di ogni potenza inversa di $|x|$ insieme a tutte le loro derivate.

La **trasformata di Fourier** è l'operatore lineare:

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$$

definita da:

$$\widehat{f}(k) := \mathcal{F}(f)(k) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik \cdot x} f(x) d^n x. \quad (8.47)$$

\widehat{f} è detta **trasformata di Fourier** della funzione f .

Si noti che in realtà $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ come si prova facilmente dall'identità (che si prova con il teorema della convergenza dominata, passando le derivate sotto il segno di integrale e usando l'integrazione per parti):

$$k^\beta \partial_k^\alpha \widehat{f}(k) = (-i)^{|\alpha|+|\beta|} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik \cdot x} \partial_x^\beta (x^\alpha f(x)) d^n x. \quad (8.48)$$

Il fatto che l'integrale a secondo membro sia sempre ben definito a causa delle maggiorazioni (8.46), assicura che la funzione di k a primo membro soddisfi a sua volta una stima del tipo (8.46). Infatti, dalla (8.48) si ha, se $m = 0, 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} (2\pi)^{n/2} (1 + \|k\|^{2m}) \left| \partial_k^\alpha \widehat{f}(k) \right| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik \cdot x} (1 + \Delta_x^m) (x^\alpha f(x)) d^n x \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |(1 + \Delta_x^m) (x^\alpha f(x))| d^n x =: (2\pi)^{n/2} C_{f,\alpha,2m} \end{aligned}$$

cioè:

$$\left| \partial_k^\alpha \widehat{f}(k) \right| \leq \frac{C_{f,\alpha,2m}}{1 + \|k\|^{2m}} \quad \text{se } k \in \mathbb{R}^n.$$

Questa disuguaglianza implica subito che vale (8.46) dato che, se $m = 0, 1, 2, \dots$, allora per qualche $A_m > 0$:

$$\frac{1}{1 + \|k\|^m} \leq \frac{A_m}{1 + \|k\|^{2m}} \quad \text{se } k \in \mathbb{R}^n,$$

e dunque $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Pertanto ha senso pensare $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, restringendo il codominio iniziale.

Si dimostra che \mathcal{F} è iniettiva esibendone un'inversa sinistra che ha la forma seguente:

$$\tilde{\mathcal{F}} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$$

dove:

$$\tilde{\mathcal{F}}(f)(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{+ik \cdot x} f(k) d^n x . \quad (8.49)$$

Con la stessa dimostrazione per provare che il secondo membro di (8.49) è un'inversa sinistra di \mathcal{F} si prova che \mathcal{F} è a sua volta un'inversa sinistra di $\tilde{\mathcal{F}}$ definito sopra, e pertanto:

$$\mathcal{F} \circ \tilde{\mathcal{F}} = id_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} = \tilde{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} .$$

$\tilde{\mathcal{F}}$ risulta dunque essere sia inversa destra che inversa sinistra di \mathcal{F} quando si lavora su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e quindi $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è un *isomorfismo di spazi vettoriali* e $\tilde{\mathcal{F}} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è l'isomorfismo inverso.

L'uso delle due differenti variabili x e k è comodo, ma non riveste alcun ruolo importante, dato che il dominio ed in codominio di \mathcal{F} sono lo stesso spazio.

Vale il seguente fondamentale risultato di Plancherel:

Teorema 8.6. *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ allora:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(f)(x)|^2 d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{\mathcal{F}}(f)(x)|^2 d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 d^n x .$$

In altri termini, se $\|\cdot\|_2$ indica la seminorma naturale di $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$, allora:

$$\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|\tilde{\mathcal{F}}(f)\|_2 = \|f\|_2 \quad \text{se } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) .$$

◇

Ricordando che $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$, dove il primo spazio è denso nel secondo rispetto alla topologia naturale di quest'ultimo, il teorema citato sopra implica che \mathcal{F} e $\tilde{\mathcal{F}}$ si estendano per continuità ad un'operatori lineari ed isometrici che risultano qancora essere uno l'inverso dell'altro. A loro volta, quozientando rispetto agli insiemi di misura nulla, \mathcal{F} e $\tilde{\mathcal{F}}$ si estendano per continuità ad un'operatori lineari ed isometrici che risultano ancora essere uno l'inverso dell'altro sullo spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$. Si osservi che gli operatori estesi in questo modo, non conservano solo la norma dello spazio di Hilbert, ma ne conservano anche il prodotto scalare (come segue dall'identità di polarizzazione).

Di fatto l'estensione detta si definisce come segue, se $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$. Esiste sicuramente una successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tale che $f_n \rightarrow f$ nel senso della norma $\|\cdot\|_2$. Di conseguenza si definisce, dove il limite è riferito ancora a $\|\cdot\|_2$:

$$\mathcal{F}(f) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(f_n), \quad \tilde{\mathcal{F}}(f) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\mathcal{F}}(f_n) .$$

Si verifica subito che la definizione non dipende dalla scelta della successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ma solo da f : se $g_n \rightarrow f$ dove $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è un'altra successione che converge a f in L^2 , allora $f_n - g_n \rightarrow 0$ nella stessa topologia. Per il teorema precedente si ha allora che: $\|\mathcal{F}(f_n) - \mathcal{F}(g_n)\|_2 = \|\mathcal{F}(f_n - g_n)\|_2 = \|f_n - g_n\|_2 \rightarrow 0$ e anche che vale la stessa cosa rimpiazzando \mathcal{F} con $\tilde{\mathcal{F}}$.

Definizione 8.2. L'operatore che estende per continuità \mathcal{F} allo spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$ è chiamato **trasformata di Fourier-Plancherel**. \diamond

Abbiamo la semplice, ma fondamentale proprietà sancita dal seguente teorema.

Teorema 8.7. *La trasformata di Fourier-Plancherel (e quindi anche la sua inversa) è una trasformazione lineare, isometrica, suriettiva da $L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$ a $L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$ e dunque, in particolare, è continua rispetto alla topologia di $L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$.* \diamond

Dimostrazione. La linearità è ovvia per definizione, dato che la procedura di limite usata per definire la trasformata di Fourier-Plancherel dalla trasformata di Fourier, che è lineare, ne preserva la linearità. Per definizione di trasformata di Fourier-Plancherel, abbiamo ancora che, dall'analoga proprietà della trasformata di Fourier, che:

$$\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|\tilde{\mathcal{F}}(f)\|_2 = \|f\|_2 \quad \text{se } f \in L^2(\mathbb{R}^n, d^n x).$$

Pertanto \mathcal{F} e $\tilde{\mathcal{F}}$ estese per continuità su L^2 sono isometriche e quindi continue. Il fatto che siano anche trasformazioni suriettive, segue dal fatto che le estensioni suddette continuano ad essere una l'inversa dell'altra, dato che le identità su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: $\mathcal{F} \circ \tilde{\mathcal{F}} = \tilde{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = I$ si estendono a $L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$ per continuità. \square

Si può osservare che le definizioni (8.47) e (8.48) sono sensate anche quando $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, d^n x)$. Se f appartiene contemporaneamente a $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, d^n x)$ e $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$ ci sono allora *due modi* per calcolarne la trasformata di Fourier: uno attraverso la (8.47) e l'altro attraverso l'estensione per continuità su $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$ vista sopra. Le due procedure portano alla stessa funzione? In effetti vale il seguente teorema.

Teorema 8.8. *Se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, d^n x) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$ allora il calcolo diretto della trasformata di Fourier secondo (8.47), oppure quello tramite la procedura di estensione in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$ per continuità, producono lo stesso risultato. (La stessa cosa vale per la trasformata di Fourier inversa).* \diamond

Un altro utile risultato è il seguente, noto come **lemma di Riemann-Lebesgue** che afferma in un modo preciso che la trasformata di Fourier di una funzione \mathcal{L}^1 tende a zero all'infinito.

Teorema 8.9. Se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, d^n x)$ allora, per ogni $\epsilon > 0$ esiste un compatto K_ϵ , tale che

$$|\mathcal{F}(f)(k)| < \epsilon \quad \text{se } k \notin K_\epsilon.$$

(lo stesso risultato vale per $\tilde{\mathcal{F}}$). \diamond

Un modo intuitivo di interpretare questo risultato è che, per grandissimi k , le violente oscillazioni dell'esponenziale nell'integrando a secondo membro nella (8.47) (più in generale con $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, d^n x)$) cancellano tutti i contributi di f e l'integrale tende a zero.

8.5.2 Il nucleo del calore su \mathbb{R}^n

Usando la solita notazione $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, passiamo ora a considerare formalmente l'equazione del calore (senza sorgente) su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi(t, \mathbf{x})}{\partial t} - a\Delta u(t, \mathbf{x}) = 0, & u \in C^0([0, T] \times \mathbb{R}^n) \cap C^{1,2}((0, T) \times \mathbb{R}^n), \\ u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \\ u \text{ limitata su } [0, T] \times \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (8.50)$$

dove assumiamo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sia nota e che $a > 0$ sia una costante assegnata.

Passiamo, senza farci problemi di rigore per il momento, alla trasformata di Fourier di u , nella sola variabile \mathbf{x} , eseguita ad ogni istante di tempo t :

$$u(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(t, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^n k.$$

In termini di \hat{u} l'equazione del calore in (8.50) si scrive:

$$0 = \frac{\partial \varphi(t, \mathbf{x})}{\partial t} - a\Delta u(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + a\mathbf{k}^2 \hat{u} \right] e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^n k.$$

da cui, sempre ragionando formalmente, si arriva alla richiesta:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + a\mathbf{k}^2 \hat{u} = 0$$

che implica:

$$\hat{u}(t, \mathbf{k}) = \hat{u}(\mathbf{k}) e^{-a\mathbf{k}^2 t}.$$

In definitiva abbiamo trovato che:

$$u(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - a\mathbf{k}^2 t} d^n k.$$

La condizione iniziale $u(t, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$ è banalmente verificata se:

$$\widehat{u}(\mathbf{k}) = \widehat{\varphi}(\mathbf{k}) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^x .$$

In definitiva ci aspettiamo che, sotto opportune ipotesi che giustifichino i passaggi che abbiamo fatto, una soluzione sia della forma:

$$u(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - a\mathbf{k}^2 t} d^n k . \quad (8.51)$$

Osserviamo che, se $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, allora anche la sua trasformata di Fourier $\widehat{\varphi}$ appartiene allo stesso spazio e quindi l'integrale a secondo membro della formula di sopra è ben definito per $t \in [0, +\infty)$, dato che tale integrando appartiene ancora a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ per tali valori di t . Ulteriormente il teorema della convergenza dominata di Lebesgue e il teorema di Lagrange provano, nel solito modo, che possiamo passare le derivate di qualsiasi ordine, in t e x^k sotto il segno di integrale nella formula scritta sopra. Ciò mostra che $u \in C^\infty([0, +\infty) \times \mathbb{R}^n; \mathbb{C})$. La stessa definizione di u mostra immediatamente che $u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$.

Riguardo alla regolarità di u , in realtà si riesce a provare molto di più: se facciamo assumere a t e \mathbf{x} valori complessi: $t + it'$ e $\mathbf{x} + i\mathbf{x}'$ (con $t \in [0, +\infty)$, si vede facilmente che il secondo membro della (8.51) è ancora ben definito. Passando le derivate sotto il segno di integrale, si verifica subito che nell'aperto di \mathbb{C}^{n+1} individuato da $Re t \in (0, +\infty)$ e $Re \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, valgono le condizioni di Cauchy-Riemann in ogni singola variabile complessa, perché la funzione integranda essendo olomorfa su tale insieme soddisfa tali condizioni. Ne concludiamo che $u = u(t, \mathbf{x})$ è una funzione analitica reale su $(t, \mathbf{x}) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ dato che è la restrizione di una funzione analitica complessa a tale insieme. Ulteriormente u è una funzione limitata su $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$, infatti, dalla (8.51) per $t \geq 0$ (ricordando che $a > 0$):

$$(2\pi)^{n/2} |u(t, \mathbf{x})| \leq \int_{\mathbb{R}^n} e^{-a\mathbf{k}^2 t} |\widehat{\varphi}(\mathbf{k})| d^n k \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\varphi}(\mathbf{k})| d^n k \leq \|\widehat{\varphi}\|_{L^1} .$$

L'ultima norma è sicuramente finita dato che $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Il fatto di poter portare le derivate seconde sotto il segno di integrale in (8.51), seguendo a ritroso il percorso fatto che ha portato a scrivere tale equazione, prova anche che u sia una soluzione dell'equazione del calore in (8.50) che soddisfa anche la condizione iniziale assegnata. La limitatezza implica anche che sia l'unica soluzione con tale proprietà a causa del teorema 8.5. Risulta in questo modo dimostrata la seguente proposizione.

Proposizione 8.1. *Si consideri il problema di Cauchy, con $a > 0$ e $T > 0$ fissati:*

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi(t, \mathbf{x})}{\partial t} - a\Delta u(t, \mathbf{x}) = 0, & u \in C^0([0, T] \times \mathbb{R}^n) \cap C^{1;2_{\mathbf{x}}}((0, T) \times \mathbb{R}^n), \\ u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \\ u \text{ limitata su } [0, T] \times \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (8.52)$$

dove $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è una funzione assegnata.

Esiste ed è unica la soluzione a tale problema, è data dalla formula (8.51), in cui $\widehat{\varphi}$ è la trasformata di Fourier di φ ed inoltre soddisfa le seguenti due proprietà:

(i) $u \in C^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{C})$;

(ii) u è una funzione analitica reale in $(0, T) \times \mathbb{R}^n$.

◇

L'importanza della proposizione è più che altro tecnica, perché permette di introdurre un utile strumento. Dall'espressione (8.51), vediamo che la soluzione del problema di Cauchy considerato può essere scritta come, ricordando la definizione di $\widehat{\varphi}$:

$$u(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - a\mathbf{k}^2 t} \frac{1}{(2\pi)^n} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}} \varphi(\mathbf{y}) d^n y d^n k.$$

Dato che, per $t \geq 0$ la funzione

$$(\mathbf{y}, \mathbf{k}) \mapsto e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) - a\mathbf{k}^2 t} \varphi(\mathbf{y})$$

è integrabile nella misura prodotto $d^n y \otimes d^n k$, applicando il teorema di Fubini-Tonelli, possiamo scrivere l'espressione di u come:

$$u(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - a\mathbf{k}^2 t} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}} d^n k \right) \varphi(\mathbf{y}) d^n y.$$

L'integrale interno si calcola facilmente completando il quadrato:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - a\mathbf{k}^2 t} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}} d^n k = \frac{1}{(4\pi at)^{n/2}} e^{-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{4at}}.$$

Definizione 8.3. Il nucleo del calore in \mathbb{R}^n è la funzione:

$$H(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{1}{(4\pi at)^{n/2}} e^{-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{4at}} \quad (8.53)$$

dove $t > 0$ e $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Il **dominio del nucleo del calore** è lo spazio vettoriale complesso \mathcal{D}_H delle funzioni $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ misurabili e tali che le funzioni:

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto e^{-\alpha \|\mathbf{x}\|^2} |f(\mathbf{x})|$$

siano in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, d^n x)$ per ogni scelta di $\alpha > 0$.

◇

Usando il nucleo del calore, in base al calcolo fatto sopra, la soluzione del problema di Cauchy (8.52) si può allora scrivere, in funzione del dato iniziale, come:

$$u(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} H(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) d^n y.$$

Nel seguito ci occuperemo di estendere questa forma di soluzione al caso in cui φ appartenga ad altre classi di funzioni.

Per computo diretto si verifica subito che H soddisfa le seguenti tre proprietà:

- (1) $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = H(t, \mathbf{y}, \mathbf{x}) > 0$ per $t > 0$ e $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$,
- (2) $(\frac{\partial}{\partial t} - a\Delta_{\mathbf{x}}) H(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ per $t > 0$ e $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$,
- (3) $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto H(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ è una funzione analitica reale.

Vediamo qualche proprietà di \mathcal{D}_H . Valgono le seguenti inclusioni di verifica ovvia:

- (1) $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, d^n x) \subset \mathcal{D}_H$;
- (2) $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, d^n x) \subset \mathcal{D}_H$;
- (3) $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n, d^n x) \subset \mathcal{D}_H$.

Per provare la prima basta tener conto del fatto che le funzioni $\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto e^{-\alpha\|\mathbf{x}\|^2}$ sono limitate se $\alpha > 0$. Per provare la seconda, si osservi che se ogni funzione $\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto e^{-\alpha\|\mathbf{x}\|^2}$ è un elemento di $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$, se $\alpha > 0$, ed il prodotto di due funzioni di tale spazio è in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, d^n x)$ come ben noto. L'ultima segue subito dal fatto che le funzioni $\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto e^{-\alpha\|\mathbf{x}\|^2}$ sono in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, d^n x)$ se $\alpha > 0$. Per concludere questa sezione possiamo enunciare e provare un importante risultato tecnico.

Proposizione 8.2. *Se $\varphi \in \mathcal{D}_H$ allora la funzione:*

$$u_\varphi(t, \mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^n} H(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) d^n y, \quad (8.54)$$

è ben definita per $(t, \mathbf{x}) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$, le sue parti reali ed immaginaria sono funzioni analitiche reali definite sull'insieme $(t, \mathbf{x}) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$. Infine possiamo derivare l'identità (8.54) passando sotto il segno di integrale, nel secondo membro, le derivate fino all'ordine 2 in ogni variabile. \diamond

Dimostrazione. Prima di tutto osserviamo che, tenendo conto che $a > 0$ è costante, per ogni compatto $K \subset ((0, +\infty) + i\mathbb{R}) \times (\mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n)$ possiamo trovare $C_K \geq 0$ abbastanza grande e $\alpha_K > 0$ abbastanza piccolo, in modo tale che:

$$\left| e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|^2}{4at}} \right| \leq C_K e^{-\alpha_K \|\mathbf{y}\|^2} \quad \text{per ogni } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \text{ e } (t, \mathbf{x}) \in K. \quad (8.55)$$

Di conseguenza, se $\varphi \in \mathcal{D}_H$ e $(t, \mathbf{x}) \in K$ allora

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{y} \mapsto H(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})\varphi(\mathbf{y}) = \frac{1}{(4\pi at)^{n/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4at}} \varphi(\mathbf{y})$$

è in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, d^n y)$ e quindi l'integrale a secondo membro di (8.54) è ben definito e lo è anche per valori complessi di t e \mathbf{x} : $(t, \mathbf{x}) \in ((0, +\infty) + i\mathbb{R}) \times (\mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n)$ e individua una funzione u_φ definita in tale dominio. Fissiamo ora $(t_0, \mathbf{x}_0) \in ((0, +\infty) + i\mathbb{R}) \times (\mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n)$ e quindi prendiamo un intorno di tale punto la cui chiusura è un compatto K per cui vale la (8.55). Il teorema della convergenza dominata e la stima uniforme in (t, \mathbf{x}) sull'intorno detto

$$\left| e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|^2}{4at}} \varphi(\mathbf{y}) \right| \leq C_K e^{-\alpha_K \|\mathbf{y}\|^2} |\varphi(\mathbf{y})| \quad \text{per ogni } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \text{ e } (t, \mathbf{x}) \in K,$$

che segue da (8.55), dove il secondo membro è una funzione di $L^1(\mathbb{R}^n, d^n y)$, assicurano che

$$\lim_{(t, \mathbf{x}) \rightarrow (t_0, \mathbf{x}_0)} \int_{\mathbb{R}^n} H(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})\varphi(\mathbf{y})d^n y = \int_{\mathbb{R}^n} H(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y})\varphi(\mathbf{y})d^n y$$

e pertanto u_φ è continua come funzione definita su $((0, +\infty) + i\mathbb{R}) \times (\mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n)$. Per provare che le parti reali ed immaginaria di $u_\varphi = u_\varphi(t, \mathbf{x})$ con $(t, \mathbf{x}) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ sono analitiche reali è sufficiente dimostrare che la funzione u_φ è la restrizione su un ndominio reale di una funzione analitica complessa di più variabili. Per provare quest'ultimo fatto è sufficiente mostrare che u_φ , definita su $((0, +\infty) + i\mathbb{R}) \times (\mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n)$ è una funzione C^1 ed ulteriormente soddisfa le identità di Cauchy-Schwarz separatamente in ogni coordinata t, x^1, \dots, x^n pensate come variabili complesse. La funzione $((0, +\infty) + i\mathbb{R}) \times (\mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n) \ni (t, \mathbf{x}) \mapsto H(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ soddisfa è analitica complessa e pertanto è una funzione C^1 ed ulteriormente soddisfa le identità di Cauchy-Schwarz separatamente in ogni coordinata t, x^1, \dots, x^n pensate come variabili complesse. Di conseguenza, per provare le stesse proprietà per u_φ è sufficiente mostrare che si possono passare sotto il segno di integrale le derivate prime parziali in tutte le variabili, nella (8.54), quando $(t, \mathbf{x}) \in ((0, +\infty) + i\mathbb{R}) \times (\mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n)$ e che in tal modo le derivate della funzione u_φ risultano essere funzioni continue. Si prova facilmente che, se D indica la derivata parziale prima o seconda (anche mista in questo caso) rispetto alle componenti reali o immaginarie variabili t, x^1, \dots, x^n per ogni compatto $K \subset ((0, +\infty) + i\mathbb{R}) \times (\mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n)$ possiamo ancora trovare $C_K \geq 0$ abbastanza grande e $\alpha_K > 0$ abbastanza piccolo, in modo tale che:

$$\left| D e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|^2}{4at}} \right| \leq C_K e^{-\alpha_K \|\mathbf{y}\|^2} \quad \text{per ogni } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \text{ e } (t, \mathbf{x}) \in K.$$

e quindi, analogamente a prima, abbiamo al stima, uniforme in \mathbf{x} :

$$\left| D e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|^2}{4at}} \varphi(\mathbf{y}) \right| \leq C_K e^{-\alpha_K \|\mathbf{y}\|^2} |\varphi(\mathbf{y})| \quad \text{per ogni } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \text{ e } (t, \mathbf{x}) \in K \quad (8.56)$$

A questo punto se fissiamo $(t_0, \mathbf{x}_0) \in ((0, +\infty) + i\mathbb{R}) \times (\mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n)$ e quindi prendiamo un intorno di tale punto la cui chiusura è un compatto K il teorema della convergenza dominata ed il

teorema di Lagrange mostrano facilmente che possiamo derivare passando le derivate sotto il segno di integrale l'identità (8.54):

$$Du_\varphi(t, \mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^n} DH(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})\varphi(\mathbf{y})d^n y .$$

Considerando le sole derivate prime, la validità delle condizioni di Cauchy-Riemann per le coordinate dell'argomento della funzione $(t, \mathbf{x}) \ni \mapsto H(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ implica allora la validità delle analoghe condizioni per le coordinate della funzione $(t, \mathbf{x}) \mapsto u_\varphi(t, \mathbf{x})$. La stima uniforme in (t, \mathbf{x}) data in (8.56), attraverso il teorema della convergenza dominata mostra anche che:

$$\lim_{(t, \mathbf{x}) \rightarrow (t_0, \mathbf{x}_0)} D \int_{\mathbb{R}^n} H(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})\varphi(\mathbf{y})d^n y = \int_{\mathbb{R}^n} DH(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y})\varphi(\mathbf{y})d^n y .$$

Per cui u_φ è una funzione C^2 sul suo dominio complesso. Pertanto quest'ultima funzione è una funzione analitica complessa e si restringe ad una funzione analitica reale quando $(t, \mathbf{x}) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$. Quanto detto dimostra anche l'ultima affermazione nella tesi. \square

8.5.3 Soluzioni dell'equazione del calore costruite con il nucleo del calore su \mathbb{R}^n

La teoria sviluppata nella sezione precedente, l'ultima proposizione in particolare, consente di provare il seguente importante teorema sulle soluzioni dell'equazione del calore interpretando il problema di Cauchy, in particolare la richiesta di validità delle condizioni iniziali, in modo anche più generale di quanto fatto fino ad ora. Il teorema implica come corollario che vedremo di seguito, un teorema di unicità per il problema di Cauchy interpretato in senso standard.

Teorema 8.10. *Se $\varphi \in \mathcal{D}_H$ si definisca la funzione:*

$$u_\varphi(t, \mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^n} H(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})\varphi(\mathbf{y})d^n y , \tag{8.57}$$

per $t > 0$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Sono veri i fatti seguenti.

(1) $(0, t) \times \mathbb{R}^n \ni (t, \mathbf{x}) \mapsto u_\varphi(t, \mathbf{x})$ è una funzione C^∞ a valori complessi, la cui parte immaginaria e reale sono funzioni analitiche reali. Inoltre u_φ soddisfa l'equazione del calore:

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} - a\Delta u_\varphi = 0 ,$$

in $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$. Infine:

$$u_\varphi(t, \mathbf{x}) \geq 0 \text{ per } t > 0 \text{ se } \varphi \geq 0 \text{ quasi ovunque,}$$

in particolare:

$$u_\varphi(t, \mathbf{x}) > 0 \text{ per } t > 0 \text{ se } \varphi > 0 \text{ quasi ovunque.}$$

(2) Valgono i fatti seguenti.

(a) Se $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$ allora $u_\varphi(t, \cdot) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$ per ogni $t > 0$ e vale:

$$u_\varphi(t, \cdot) = \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-a(\cdot)^2 t} \mathcal{F}(\varphi)(\cdot) \right) (\cdot). \quad (8.58)$$

dove le trasformate di Fourier sono quelle di Fourier-Plancherel. Infine: $u_\varphi(t, \cdot) \rightarrow \varphi$ nel senso di L^2 per $t \rightarrow 0^+$.

(b) Se $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, d^n x)$ allora $u_\varphi(t, \cdot) \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n, d^n x)$ e inoltre $u_\varphi(t, \cdot) \rightarrow 0$ nel senso di $\|\cdot\|_\infty$ per $t \rightarrow +\infty$.

(3) Se $\varphi \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n, d^n x) \cap C^0(\mathbb{R}^n)$, allora:

(a) estendendo u_φ su $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ assumendo che $u_\varphi(0, \mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow 0^+} u_\varphi(t, \mathbf{x})$, allora si ha che $u_\varphi \in C^0([0, +\infty) \times \mathbb{R}^n)$ ed ulteriormente:

$$\|u_\varphi\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty,$$

(b) se $K \subset \mathbb{R}^n$ è compatto allora $u_\varphi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \varphi(\mathbf{x})$ uniformemente in $\mathbf{x} \in K$ per $t \rightarrow 0^+$. \diamond

Dimostrazione. Il punto (1) è già stato provato nella proposizione precedente eccetto per la positività di u_φ segue immediatamente dal fatto che $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) > 0$ per $t > 0$. Passiamo ora al punto (2). Cominciamo da (a). Se $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, d^n y)$:

$$u_\varphi(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} H(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) d^n y = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} e^{-a\mathbf{k}^2 t} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}} d^n k \right) \varphi(\mathbf{y}) d^n y.$$

Non possiamo scambiare i due integrali nell'ultimo membro nel caso generale. Tuttavia, se χ_m è una funzione C^∞ su \mathbb{R}^n a valori in $[0, 1]$ che vale 1 nella palla centrata nell'origine e di raggio m e si annulla fuori dall'analoga palla di raggio $m + 1$, allora $\chi_m \varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, d^n y) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, d^n y)$ e possiamo scrivere, dal teorema della convergenza dominata, per ogni $t > 0$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$u_\varphi(t, \mathbf{x}) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} H(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \chi_m(\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) d^n y.$$

Ora la funzione $(\mathbf{k}, \mathbf{y}) \mapsto e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} e^{-a\mathbf{k}^2 t} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}} d^n k \chi_m(\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y})$ è \mathcal{L}^1 nella misura prodotto $d^n k \otimes d^n y$ per cui possiamo scambiare gli integrali detti sopra ottenendo:

$$\begin{aligned} u_\varphi(t, \mathbf{x}) &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} H(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \chi_m(\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) d^n y \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{(2\pi)^{n/2}} e^{-a\mathbf{k}^2 t} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}}}{(2\pi)^{n/2}} \chi_m(\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) d^n y \right) d^n k = \lim_{m \rightarrow +\infty} \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-a(\cdot)^2 t} \widehat{\chi_m \varphi}(\cdot) \right) (\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto che, puntualmente in \mathbf{x} e per ogni $t > 0$ fissato:

$$u_\varphi(t, \mathbf{x}) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-a(\cdot)^2 t} \widehat{\chi_m \varphi}(\cdot) \right) (\mathbf{x}). \quad (8.59)$$

Si osservi ora che $\chi_m \varphi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, d^n y)$ e che $\chi_m \varphi \rightarrow \varphi$ e $e^{-ak^2 t} \widehat{\chi_m \varphi} \rightarrow e^{-ak^2 t} \widehat{\varphi}$ nel senso di L^2 come segue immediatamente dal teorema della convergenza dominata (notare che $|e^{-ak^2 t}| = e^{-ak^2 t} \leq 1$ se $t > 0$) e dal fatto che la trasformata di Fourier Plancherel è L^2 continua. Essendo sia \mathcal{F} che \mathcal{F}^{-1} continue nel senso di L^2 , se ne conclude che deve esistere anche una funzione $f_t \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$ tale che, dove il limite è nel senso di L^2 :

$$f_t = \lim_{m \rightarrow +\infty} \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-a(\cdot)^2 t} \widehat{\chi_m \varphi}(\cdot) \right)$$

Per noti teoremi la convergenza della successione di sopra varrà anche quasi ovunque puntualmente restringendosi a lavorare con una sottosuccessione di funzioni, $\chi_{m_k} \varphi$, etichettata da numeri $\{m_k\}_{k=1,2,\dots}$. Dalto che la (8.59) deve valere anche per tale sottosuccessione:

$$u_\varphi(t, \mathbf{x}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-a(\cdot)^2 t} \widehat{\chi_{m_k} \varphi}(\cdot) \right) (\mathbf{x})$$

concludiamo che $f_t(\mathbf{x}) = u_\varphi(t, \mathbf{x})$ quasi ovunque in \mathbf{x} per ogni $t > 0$. In particolare allora possiamo dire che $u_\varphi(t, \cdot) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$ e che (8.59) è valida anche nel senso di L^2 . Data la continuità della trasformata di Fourier-Plancherel, possiamo allora riscrivere tale identità, se $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, d^n y)$, come:

$$u_\varphi(t, \cdot) = \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-a(\cdot)^2 t} \mathcal{F}(\varphi)(\cdot) \right) (\cdot). \quad (8.60)$$

dove le trasformate di Fourier sono quelle di Fourier-Plancherel.

Per dimostrare la seconda parte di (a) facendo uso della (8.60), consideriamo ancora $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, d^n y)$. Tendo conto che puntualmente vale $e^{-ak^2 t} \widehat{\varphi}(\mathbf{k}) \rightarrow \widehat{\varphi}(\mathbf{k})$ se $t \rightarrow 0^+$, il teorema della convergenza dominata mostra subito che $e^{-ak^2 t} \widehat{\varphi}(\mathbf{k}) \rightarrow \widehat{\varphi}(\mathbf{k})$ nel senso di L^2 se $t \rightarrow 0^+$ per la stima, uniforme in $t > 0$

$$|e^{-ak^2 t} \widehat{\varphi}(\mathbf{k}) - \widehat{\varphi}(\mathbf{k})|^2 \leq e^{-2ak^2 t} |\widehat{\varphi}(\mathbf{k})|^2 + |\widehat{\varphi}(\mathbf{k})|^2 - 2e^{-ak^2 t} |\widehat{\varphi}(\mathbf{k})|^2 \leq 2|\widehat{\varphi}(\mathbf{k})|^2.$$

Usando ancora il fatto che \mathcal{F}^{-1} è continua in L^2 abbiamo allora da (8.59) che:

$$u_\varphi(t, \cdot) = \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-a(\cdot)^2 t} \widehat{\varphi} \right) \rightarrow \mathcal{F}^{-1}(\widehat{\varphi}) = \varphi.$$

La dimostrazione di (a) è conclusa. Passiamo al punto (b) di (1). Fissato $T > 0$, abbiamo che, se $t > T$ costante, per qualche $c_T > 0$ costante:

$$|u_\varphi(t, \mathbf{x})| = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4ta}} |\varphi(\mathbf{y})| d^n y \leq \frac{c_T}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(\mathbf{y})| dy = \frac{c_T}{t^{n/2}} \|\varphi\|_1 \rightarrow 0, \quad \text{se } t \rightarrow +\infty,$$

da cui la tesi dato che l'ultima maggiorazione è uniforme in \mathbf{x} . La dimostrazione mostra che $u_\varphi(t, \cdot) \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n, d^n x)$ se $t > 0$.

Passiamo a provare (3). È sufficiente provare (a), dato che (b) è un'immediata conseguenza in quanto una funzione continua su un compatto è ivi uniformemente continua. Per provare la prima parte di (a), mostriamo che, nelle ipotesi su φ , se $(0, \mathbf{x}_0)$ è un punto di continuità di φ , allora

$$\lim_{(t, \mathbf{x}) \rightarrow (0, \mathbf{x}_0)} u_\varphi(t, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}_0).$$

Abbiamo, per $c, k > 0$:

$$u_\varphi(t, \mathbf{x}) = \frac{c}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{k\|\mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2\|^2}{t}} \varphi(\mathbf{y}) d^n \mathbf{y} = c \int_{\mathbb{R}^n} e^{-k\mathbf{u}^2} \varphi(\sqrt{t}\mathbf{u} + \mathbf{x}) d^n \mathbf{u}.$$

Dato che φ è continua in $(0, \mathbf{x}_0)$ abbiamo che

$$e^{-k\mathbf{u}^2} \varphi(\sqrt{t}\mathbf{u} + \mathbf{x}_0) \rightarrow \varphi(\mathbf{x}_0) \quad \text{se } t \rightarrow 0^+$$

Dato che φ è limitata per ipotesi da qualche $M < +\infty$, abbiamo anche che, uniformemente in $(t, \mathbf{x}) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$:

$$\left| e^{-k\mathbf{u}^2} \varphi(\sqrt{t}\mathbf{u} + \mathbf{x}_0) \right| \leq M e^{-k\mathbf{u}^2}.$$

L'ultima funzione è sicuramente in $L^1(\mathbb{R}^n, d^n x)$. Dal teorema della convergenza dominata:

$$\begin{aligned} \lim_{(t, \mathbf{x}) \rightarrow (0, \mathbf{x}_0)} u_\varphi(t, \mathbf{x}) &= \lim_{(t, \mathbf{x}) \rightarrow (0, \mathbf{x}_0)} c \int_{\mathbb{R}^n} e^{-k\mathbf{u}^2} \varphi(\sqrt{t}\mathbf{u} + \mathbf{x}) d^n \mathbf{u} \\ &= c \int_{\mathbb{R}^n} e^{-k\mathbf{u}^2} \lim_{(t, \mathbf{x}) \rightarrow (0, \mathbf{x}_0)} \varphi(\sqrt{t}\mathbf{u} + \mathbf{x}) d^n \mathbf{u} = \varphi(\mathbf{x}_0) c \int_{\mathbb{R}^n} e^{-k\mathbf{u}^2} d^n x = \varphi(\mathbf{x}_0), \end{aligned}$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che:

$$\frac{1}{(4\pi a)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\mathbf{u}^2}{4a}} d^n \mathbf{u} = 1. \quad (8.61)$$

Per concludere, osserviamo che la limitatezza di u_φ segue da quella di φ :

$$|u_\varphi(t, \mathbf{x})| \leq c \int_{\mathbb{R}^n} e^{-k\mathbf{u}^2} |\varphi(\sqrt{t}\mathbf{u} + \mathbf{x})| d^n \mathbf{u} \leq \|\varphi\|_\infty c \int_{\mathbb{R}^n} e^{-k\mathbf{u}^2} d^n x \leq \|\varphi\|_\infty$$

dove, ancora una volta, abbiamo usato (8.61). \square

L'ultima dimostrazione in realtà prova un fatto più generale di (b) in (3) che enunciamo separatamente.

Proposizione 8.3. *Se $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^n, d^n x)$ è continua in \mathbf{x}_0 , allora:*

$$\lim_{(t, \mathbf{x}) \rightarrow (0, \mathbf{x}_0)} \int_{\mathbb{R}^n} H(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) d^n \mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x}_0).$$

◇

Come corollario del teorema dimostrato, abbiamo un teorema di esistenza ed unicità per il problema di Cauchy con l'equazione del calore su \mathbb{R}^{n+1} .

Teorema 8.11. *Se $T > 0$, esiste una ed una sola soluzione limitata su $[0, T] \times \mathbb{R}^n$*

$$u \in C^0([0, T] \times \mathbb{R}^n) \cap C^{1,2}((0, T) \times \mathbb{R}^n)$$

per l'equazione del calore:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta_{\mathbf{x}}u = 0 \quad \text{dove } (t, \mathbf{x}) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$$

che verifica la condizione iniziale, per $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^n, d^n x) \cap C^0(\mathbb{R}^n)$ assegnata:

$$u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) \quad \text{dove } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Tale soluzione, per $t > 0$, si esprime come:

$$u_\varphi(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} H(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) d^n y. \quad (8.62)$$

◇

Dimostrazione. Se u_1 e u_2 soddisfano entrambe il problema di Cauchy di sopra e sono limitate, la differenza $u := u_1 - u_2$ è limitata su ogni insieme $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ e soddisfa l'analogo problema di Cauchy con dati iniziali nulli. La soluzione nulla risolve anch'essa lo stesso problema per cui u è la soluzione nulla per il teorema 8.5. Ne consegue che $u_1 = u_2$. Passiamo all'esistenza della soluzione. Dal teorema precedente (punti (1) e (3)) sappiamo che, nelle ipotesi fatte,

$$u_\varphi(t, \mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^n} H(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) d^n y \quad \text{dove } (t, \mathbf{x}) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n,$$

estesa per continuità in $t = 0$, è di classe $C^0([0, +\infty) \times \mathbb{R}^n) \cap C^{1,2}((0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$, soddisfa l'equazione differenziale della tesi, si raccorda al dato iniziale φ per $t = 0$ ed è limitata su $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$, per cui è una soluzione del problema di Cauchy posto quando ristretta a $[0, T] \times \mathbb{R}^n$. □

Osservazioni 8.3. A titolo di esempio consideriamo, su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ il dato iniziale limitato ma discontinuo in un punto, dato da $\varphi(x) = 0$ se $x < 0$ e $\varphi(x) = 1$ se $x \geq 0$. La funzione u_φ che si ottiene tramite il nucleo del calore e che quindi risolve l'equazione del calore per $t > 0$ è:

$$u_\varphi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4ta}} \varphi(y) dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4ta}} \varphi(y) dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-x/\sqrt{4ta}}^{+\infty} e^{-z^2} dz.$$

La funzione u_φ è sicuramente analitica per $t > 0$, è non negativa e soddisfa le seguenti condizioni per $t \rightarrow 0^+$ come si verifica immediatamente:

$$u_\varphi(t, x) \rightarrow 1 \quad \text{per } x > 0, \quad u_\varphi(t, x) \rightarrow 1/2 \quad \text{per } x = 0, \quad u_\varphi(t, x) \rightarrow 0 \quad \text{per } x < 0.$$

Da questo risultato è chiaro che per $x \neq 0$ si applica, come deve essere, la proposizione 8.3. Per quanto riguarda il limite per $t \rightarrow +\infty$, dato che φ non è in $L^1(\mathbb{R}, dx)$, non possiamo applicare (b) in (2) del teorema 8.10. Infatti, per computo diretto troviamo subito che, se $t \rightarrow +\infty$:

$$u_\varphi(t, x) \rightarrow 0 \quad \text{per } x > 0, \quad u_\varphi(t, x) \rightarrow 1/2 \quad \text{per } x = 0, \quad u_\varphi(t, x) \rightarrow 1 \quad \text{per } x < 0.$$

Si può infine provare un teorema che include un termine di sorgente.

Teorema 8.12. *Se $f \in C^{1t0\mathbf{x}}([0, +\infty) \times \mathbb{R}^n) \cap L^\infty([0, +\infty) \times \mathbb{R}^n, d^n x)$ è assegnata, esiste una ed una sola soluzione limitata su ogni insieme $[0, T] \times \mathbb{R}^n$, per ogni $T > 0$,*

$$u \in C^0([0, +\infty) \times \mathbb{R}^n) \cap C^{1t2\mathbf{x}}((0, +\infty) \times \mathbb{R}^n)$$

per l'equazione del calore con sorgente

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta_{\mathbf{x}}u = f \quad \text{dove } (t, \mathbf{x}) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$$

che verifica la condizione iniziale, per $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^n, d^n x) \cap C^0(\mathbb{R}^n)$ assegnata:

$$u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) \quad \text{dove } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Tale soluzione, per $t > 0$, si esprime come:

$$u(t, \mathbf{x}) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} H(\tau, \mathbf{x}, \mathbf{y}) f(t - \tau, \mathbf{y}) d^n y d\tau + \int_{\mathbb{R}^n} H(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) d^n y. \quad (8.63)$$

◇

Idea della dimostrazione. Se u_1 e u_2 soddisfano entrambe il problema di Cauchy di sopra e sono limitate, la differenza $u := u_1 - u_2$ è limitata su ogni insieme $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ e soddisfa l'analogo problema di Cauchy senza sorgente e con dati iniziali nulli. Ne consegue che $u_1 = u_2$ per il teorema precedente. Passiamo all'esistenza della soluzione. Dal teorema precedente (punti (1) e (3)) sappiamo che, nelle ipotesi fatte,

$$u_\varphi(t, \mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^n} H(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) d^n y$$

estesa per continuità fino a $t = 0$, soddisfa il problema di Cauchy della tesi con $f = 0$, in particolare è limitata sugli insiemi considerati ed ha le proprietà di regolarità richieste. Per concludere la dimostrazione è allora sufficiente mostrare che:

$$u'(t, \mathbf{x}) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} H(\tau, \mathbf{x}, \mathbf{y}) f(t - \tau, \mathbf{y}) d^n y d\tau,$$

estesa per continuità fino a $t = 0$, è limitata su ogni insieme $[0, T] \times \mathbb{R}^n$, è di classe $C^0([0, +\infty) \times \mathbb{R}^n) \cap C^{1t2x}((0, +\infty) \times \mathbb{R}^n)$ e soddisfa il problema di Cauchy della tesi con dato iniziale nullo. La prova di ciò è lasciata per esercizio. \square

8.5.4 Il semigruppato ad un parametro generato da Δ in $L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$

Il punto (2)(a) del teorema 8.10 ha un'importante conseguenza teorica. Se consideriamo, per $t > 0$ l'applicazione lineare, ben definita per il teorema detto:

$$S_t : L^2(\mathbb{R}^n, d^n x) \ni \varphi \mapsto u_\varphi(t, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$$

e la estendiamo a $S_0 = I$ operatore identità, sempre in conformità con Il punto (2)(a) del teorema 8.10, tale classe di operatori lineari gode di importanti proprietà che elenchiamo nel teorema che segue.

Teorema 8.13. *Si consideri la classe ad un parametro di operatori lineari su $L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$, $\{S_t\}_{t \in [0, +\infty)}$ definiti da, in relazione alla definizione (8.57)*

$$S_t : L^2(\mathbb{R}^n, d^n x) \ni \varphi \mapsto u_\varphi(t, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}^n, d^n x) \quad \text{se } t > 0, \quad (8.64)$$

$$S_0 := I : L^2(\mathbb{R}^n, d^n x) \ni \varphi \mapsto \varphi \in L^2(\mathbb{R}^n, d^n x). \quad (8.65)$$

Valgono i seguenti fatti.

(a) $\{S_t\}_{t \in [0, +\infty)}$ è un **semigruppato ad un parametro** di operatori, in altre parole vale:

$$S_0 = I \quad \text{e} \quad S_t S_{t'} = S_{t+t'} \quad \text{se } t, t' \geq 0.$$

(b) Ogni operatore S_t è continuo nella topologia di $L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$.

(c) Ogni operatore S_t è **autoaggiunto** sullo spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$. In altre parole, se

$$(f|g) := \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)} g(x) d^n x$$

denota il prodotto scalare di tale spazio di Hilbert, allora:

$$(g|S_t f) = (S_t g|f) \quad \text{per } f, g \in L^2(\mathbb{R}^n, d^n x) \text{ e } t > 0.$$

(d) Il semigruppato è (**fortemente**) **continuo** nel parametro $t \in [0, +\infty)$ cioè:

$$S_t \varphi \rightarrow S_{t_0} \varphi \quad \text{nel senso di } L^2(\mathbb{R}^n, d^n x) \text{ quando } t \rightarrow t_0 \text{ per ogni fissata } \varphi \in L^2(\mathbb{R}^n, d^n x).$$

(e) Se con $S_t \varphi$ si intende l'unico rappresentante continuo della classe di equivalenza di funzioni indicata nello stesso modo elemento di $L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$, allora $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \ni (t, \mathbf{x}) \mapsto (S_t \varphi)(\mathbf{x})$ è una funzione in $C^\infty((0, +\infty) \times \mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ la cui parte reale ed immaginaria sono funzioni analitiche reali e ulteriormente:

$$\Delta_{\mathbf{x}}(S_t \varphi)(\mathbf{x}) = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} (S_t \varphi)(\mathbf{x}) \quad \text{se } t > 0 \text{ e } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Dimostrazione. Se $t = 0$ oppure $t' = 0$ la relazione di semigruppato $S_t S_{t'} = S_{t+t'}$ risulta essere valida banalmente dalla definizione $S_0 := I$. La dimostrazione di (a) negli altri casi segue immediatamente esplicitando $S_t S_{t'} \varphi$ tramite la formula (8.58). La dimostrazione di (b) segue dalla stessa formula, usando il fatto che la trasformata di Fourier-Plancherel, la sua inversa e l'operazione di moltiplicazione per la funzione e^{-akt} sono continue rispetto alla topologia di L^2 come già osservato in precedenti dimostrazioni. La dimostrazione di (c) segue dal teorema di Fubini-Tonelli come andiamo a provare. Se $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$ e $t > 0$ allora

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\overline{g(x)} H(t, x, y) f(y)| d^n y \right) d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} H(t, x, y) |f(y)| d^n y \right) d^n x < +\infty,$$

dove abbiamo usato il fatto che: $H(t, x, y) > 0$, $|f|, |g| \in L^2(\mathbb{R}^n, d^n y)$ e dunque, in particolare, $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} H(t, x, y) |f(y)| d^n y$ è una funzione di $L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$ per (2) (a) del teorema 8.10. Il teorema di Fubini-Tonelli implica allora che $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (x, y) \mapsto \overline{g(x)} H(t, x, y) f(y)$ è integrabile nella misura prodotto $d^n x \otimes d^n y$ e:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \overline{g(x)} H(t, x, y) f(y) d^n y \right) d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \overline{g(x)} H(t, x, y) f(y) d^n x \right) d^n y.$$

Tenendo conto del fatto che $H(t, x, y) = H(t, y, x) > 0$, quest'identità si può riscrivere:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \overline{g(x)} H(t, x, y) f(y) d^n y \right) d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \overline{H(t, y, x) g(x)} f(y) d^n x \right) d^n y.$$

Cioè:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \overline{g(x)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} H(t, x, y) f(y) d^n y \right) d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \overline{H(t, y, x) g(x)} d^n x \right) f(y) d^n y,$$

che è la tesi:

$$(g|S_t f) = (S_t g|f).$$

La dimostrazione di (d) si ha con un'immediata generalizzazione della dimostrazione della proposizione finale in (a) in (2) del teorema 8.10, che, nel formalismo appena introdotto si scrive $S_t \varphi \rightarrow S_0 \varphi$. La dimostrazione di (e) non è altro che una trascrizione della prima parte di (1) nel teorema 8.10. \square

Il semigruppato $\{S_t\}$ è detto **semigruppato ad un parametro generato all'operatore di Laplace**. Si tratta di un importante strumento matematico, generalizzabile in varie dimensioni (per esempio su varietà riemanniane) che appare in vari rami della matematica pura ed applicata, inclusi argomenti di teoria quantistica dei campi³.

³Vedi per esempio il libro: A. Bytsenko, G. Cognola, E. Elizalde, V. Moretti and S. Zerbini: *Analytic Aspects of Quantum Fields*. World Scientific Publishing, 2003.

Appendice A

Un accenno all'approccio moderno per il problema ellittico: soluzioni in senso debole e teoremi di regolarità ellittica.

In questa appendice tutti gli integrali che appaiono sono riferiti alla misura di Lebesgue e le funzioni considerate sono a valori complessi.

Tutto l'approccio moderno allo studio delle soluzioni dell'equazione di Laplace e Poisson si basa sulla seguente definizione.

Definizione A.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto e sia $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ assegnata. Una funzione $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ con $\varphi \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ è detta risolvere l'equazione di Poisson:

$$\Delta\varphi = f$$

in senso debole se vale l'identità :

$$\int_{\Omega} \varphi \Delta g \, d^n x = \int_{\Omega} f g \, d^n x, \quad \text{per ogni funzione } g \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{C}). \quad (\text{A.1})$$

◇

Chiariamo subito il significato di questa definizione. Prima di tutto vediamo perché si parla di soluzioni *in senso debole*. Supponiamo che $\varphi \in C^2(\Omega; \mathbb{C})$ risolva l'equazione di Poisson $\Delta\varphi = f$ in senso proprio. Usando l'integrazione per parti, se $g \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{C})$, si ha immediatamente che:

$$\int_{\Omega} f g \, d^n x = \int_{\Omega} (\Delta\varphi) g \, d^n x = \int_{\Omega} \nabla \cdot [(\nabla\varphi)g] \, d^n x - \int_{\Omega} (\nabla\varphi) \cdot \nabla g \, d^n x$$

$$= \int_{\Omega} \nabla \cdot [(\nabla \varphi)g] d^n x - \int_{\Omega} \nabla \cdot [\varphi \nabla g] d^n x + \int_{\Omega} \varphi \Delta g d^n x .$$

Tenendo conto che g si annulla (con tutte le derivate) fuori da un compatto incluso nell'aperto Ω , i primi due integrali nell'ultima riga risultano essere nulli (per il secondo teorema fondamentale del calcolo oppure il teorema della divergenza). Pertanto rimane:

$$\int_{\Omega} fg d^n x = \int_{\Omega} \varphi \Delta g d^n x .$$

Abbiamo in tal modo provato che: *le soluzioni in senso proprio sono anche soluzioni in senso debole.*

Non ci aspettiamo che valga il contrario per un motivo elementare: se φ soddisfa l'identità (A.1), quest'ultima varrà anche se la funzione φ viene ridefinita in modo da non essere più differenziabile su un insieme di misura nulla secondo Lebesgue, per esempio l'insieme dei punti di coordinate razionali in Ω .

Tuttavia, se sappiamo che la soluzione in senso debole φ di $\Delta \varphi = f$, con $f \in C^0(\Omega; \mathbb{C})$, è una funzione di classe $C^2(\Omega; \mathbb{C})$, allora possiamo concludere che φ è anche una soluzione in senso proprio. La dimostrazione è abbastanza semplice. Partendo dalla (A.1) e tenendo conto che $\varphi \in C^2(\Omega; \mathbb{C})$ si ha immediatamente procedendo in senso inverso a quanto fatto sopra:

$$\int_{\Omega} (\Delta \varphi - f)g d^n x = 0, \quad \text{per ogni } g \in C_0^\infty(\Omega) \quad (\text{A.2})$$

Se fosse $\Delta_x \phi - f(x) \neq 0$ nel punto $x \in \Omega$, per continuità, il segno di tale funzione dovrebbe mantenersi costante in un intorno di x . Supponiamo il segno sia positivo (l'altro caso si studia analogamente) sulla palla aperta $B(x)$ a chiusura compatta con $\overline{B(x)} \subset \Omega$. Stringendo tale palla se necessario, si avrebbe $\min_{\overline{B(x)}} (\Delta \phi - f) \geq k > 0$. Se ora $g \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ è tale che $\text{supp } g \subset \overline{B(x)}$, $g \geq 0$ e $\int_{\mathbb{R}^n} g d^n x = 1$ (si possono costruire facilmente tali funzioni), allora si avrebbe l'assurdo:

$$0 = \int_{\Omega} (\Delta \phi - f)g d^n x = \int_{\overline{B(x)}} (\Delta \phi - f)g d^n x \geq \int_{\overline{B(x)}} kg d^n x \geq k > 0 .$$

La nozione di soluzione debole è legata ad una nozione più generale: quella di *derivata in senso debole o distribuzionale*.

Definizione A.2. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto non vuoto, si dice che $h \in \mathcal{L}_{loc}^1(\Omega)$ è la **derivata** di ordine $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ **in senso debole o distribuzionale**, della funzione assegnata $f \in \mathcal{L}_{loc}^1(\Omega)$ e si scrive:

$$h = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} f}{\partial x^{1\alpha_1} \dots \partial x^{n\alpha_n}} \quad \text{in senso debole,}$$

se e vale:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} g}{\partial x^{1\alpha_1} \dots \partial x^{n\alpha_n}} f d^n x = (-1)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \int_{\Omega} gh d^n x, \quad \text{per ogni } g \in C_0^\infty(\Omega) .$$

◇

Osservazioni A.1. Procedendo come per il laplaciano, si verifica che se h è una la derivata (in generale mista) in senso proprio di ordine $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$ di $f \in C^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}(\Omega; \mathbb{C})$ allora è una derivata in senso debole di f .

Viceversa se h è la derivata in senso debole di ordine detto di $f \in C^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}(\Omega; \mathbb{C})$ allora h coincide quasi ovunque con la derivata in senso proprio dell'ordine detto di f (ed coincide ovunque se h è continua).

Esempi A.1. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come $f(x) := 0$ se $x \leq 0$ e $f(x) := x$ se $x > 0$. Questa funzione ammette derivata distribuzionale data dalla funzione $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come $h(x) := 0$ se $x \leq 0$ e $h(x) = 1$ se $x > 0$. Infatti, entrambe le funzioni sono localmente integrabili e inoltre, se $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ per cui $\text{supp}(g) \subset [-a, a]$ per qualche $a > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}} g'(x)f(x)dx = \int_{-a}^0 g'(x)f(x)dx + \int_0^a g'(x)f(x)dx.$$

Integrando per parti, tenendo conto che i due integrandi sono C^∞ sui due intervalli chiusi considerati (le derivate di f agli estremi di tali intervalli sono da intendersi come le derivate destre e sinistre corrispondenti, stessa cosa per i valori assunti da f e h in tali estremi):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} g'(x)f(x)dx &= - \int_{-a}^0 g(x)f'(x)dx - \int_0^a g(x)f'(x)dx \\ &\quad + (g(a)f(a) - g(0)f(0)) + (g(0)f(0) - g(-a)f(-a)) \\ &= - \int_{-a}^0 g(x)h(x)dx - \int_0^a g(x)h(x)dx + (0a - g(0)0) + (g(0)0 - g(-a)0) = - \int_{\mathbb{R}} g(x)h(x)dx. \end{aligned}$$

Ci si può chiedere se h ammetta a sua volta una funzione localmente integrabile come derivata debole. La risposta è negativa. Esiste in realtà una nozione di derivata per h e si tratta di una *funzione generalizzata*: una *distribuzione a supporto compatto* indicata con $\delta(x)$, la famosa *delta di Dirac*. Esiste infatti una nozione ancora più debole di derivata, in cui una funzione ammette derivata data da una distribuzione che non sia una funzione localmente integrabile.

Le soluzioni in senso debole di $\Delta\varphi = f$ non sono altro che le soluzioni di tale equazione quando le derivate presenti nel laplaciano sono intese in senso debole come appena visto.

La procedura moderna per risolvere l'equazione di Poisson (aggiungendo dati al bordo se assegnati) è decomposta in due passi:

- (i) cercare, se esiste, una soluzione *in senso debole* dell'equazione considerata,
- (ii) dimostrare, se possibile, che tale soluzione o una sua ri-definizione su insiemi di misura nulla, è soluzione anche in senso ordinario. Cioè, nella terminologia moderna, è soluzione in *senso classico*.

L'insieme delle soluzioni in senso debole di un'equazione differenziale è sicuramente più grande di quello delle soluzioni in senso proprio come già osservato perché siamo liberi di alterare le soluzioni in senso proprio, se ne esistono, su insiemi di misura nulla senza alterare la natura di soluzione in senso debole. Un esempio ovvio in cui non ci siano soluzioni in senso standard si ha subito considerando l'equazione per la funzione f

$$f'(x) = h(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

dove, come sopra, $h(x) := 0$ se $x \leq 0$ e $h(x) = 1$ se $x > 0$. In senso proprio, richiedendo che la derivata a primo membro sia intesa in senso standard, questa equazione non ha soluzioni. In senso debole si ha la soluzione già vista $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come $f(x) := 0$ se $x \leq 0$ e $f(x) := x$ se $x > 0$. In questo caso il problema è dovuto alla non regolarità del termine noto dell'equazione. In ogni caso risulta spesso più facile determinare soluzioni in senso debole piuttosto che soluzioni in senso proprio, anche perché la tecnologia matematica per determinare le soluzioni in senso debole (o più in generale soluzioni date da distribuzioni che non sono funzioni localmente integrabili) di una qualsiasi equazione differenziale a derivate parziali, non necessariamente quella di Poisson, è stata enormemente sviluppata e costituisce un ramo importantissimo dell'analisi funzionale moderna. Tale tecnologia si basa principalmente sulla sull'uso delle proprietà di funzioni localmente integrabili che appartengono ad opportuni spazi funzionali di Banach, ma specialmente di Hilbert, detti *spazi di Sobolev* [Ru91], sui quali si rimanda a corsi più avanzati [Ta96]. Diamo solo la seguente definizione che fornisce un'idea del tipo di spazi funzionali che si usano.

Definizione A.3. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto non vuoto e $k = 0, 1, 2, \dots$ è fissato, lo **spazio di Sobolev** $W^k(\Omega)$ è costituito dalle funzioni $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ per le quali esistono le derivate in senso debole fino all'ordine k , sono funzioni misurabili, e soddisfano:

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} f}{\partial x^{1\alpha_1} \dots \partial x^{n\alpha_n}} \right|^2 d^n x < +\infty \quad \text{per } \alpha_i = 0, 1, \dots, \text{ con } i = 1, \dots, n \text{ tali che } \sum_i \alpha_i = k.$$

◇

Nel caso specifico di equazioni lineari di tipo ellittico, esistono teoremi di regolarità che stabiliscono ipotesi sufficienti affinché soluzioni deboli siano anche soluzioni in senso proprio: sono i *teoremi di regolarità ellittica*. Tali teoremi sono stati estesi anche a casi più generali (equazioni ipoellittiche) in particolare dal matematico L. Hörmander.

I teoremi fondamentali sono due: Il *Lemma di Sobolev* [Ru91] ed il *teorema di regolarità ellittica di Friedrichs* [RS75]. Il primo, nella versione più elementare afferma quanto segue. (Ricordiamo che $g \in \mathcal{L}_{loc}^2(\Omega)$ quando $g\chi_A \in \mathcal{L}^2(A)$ per ogni aperto limitato $A \subset \Omega$ e dove χ_A è la funzione caratteristica di A .)

Teorema A.1. (**Lemma di Sobolev.**) *Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto e $r \geq 0$ intero. Se, per $0 \leq k \leq r$, f ammette derivate in senso debole, $\frac{\partial^k f}{\partial (x^i)^k} \in \mathcal{L}_{loc}^2(\Omega)$, separatamente*

in ogni variabile x^i con $i = 1, 2, \dots, n$, allora f differisce su un insieme di misura di Lebesgue nulla da una funzione $f_p \in C^p(\Omega; \mathbb{C})$, per ogni intero $p \geq 0$ tale che:

$$r > p + \frac{n}{2}.$$

(In particolare quindi $f \in C^p(\Omega; \mathbb{C})$ se f è anche continua.) \diamond

Osservazioni A.2. Si noti che non è richiesto nella tesi che esistano le *derivate miste* (in senso debole).

Un esempio dell'uso pratico di tale teorema è il seguente.

Corollario. Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto, è una funzione continua ed ammette derivate parziali $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$ e $\frac{\partial^n f}{\partial y^n}$ per ogni $n = 0, 1, 2, \dots$ che siano funzioni continue a loro volta, allora $f \in C^\infty(\Omega)$ (malgrado non sia stata data alcuna informazione sulle derivate miste $\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}$).

Dimostrazione. Le derivate in senso standard sono derivate in senso debole e le funzioni continue sono localmente integrabili. Possiamo dunque prendere p nella tesi del teorema di Sobolev arbitrariamente grande ottenendo una successione di funzioni $f_p \in C^p(\Omega)$ con $p = 1, 2, \dots$. Osserviamo che tutte queste funzioni sono continue e quindi la funzione continua $f_{p+1} - f_p$ è nulla quasi ovunque dato che le due funzioni differiscono al più sull'unione dei due insiemi su cui f_p e f_{p+1} differiscono rispettivamente da f e, a sua volta, tale insieme ha misura nulla perché è unione di due insiemi di misura nulla. Concludiamo che $f_{p+1} - f_p = 0$ ovunque e quindi $f_1 = f_2 = f_3 = \dots$. Pertanto $f_1 \in C^\infty(\Omega)$. Infine la funzione continua $f - f_1$ è diversa da zero su insieme di misura nulla e tale insieme è l'insieme vuoto perché appunto la funzione $f - f_1$ è continua. \square

Il secondo teorema, nella versione più semplice (si generalizza infatti ad operatori ellittici di ordine superiore al secondo) si enuncia come segue.

Teorema A.2. (**Teorema di regolarità ellittica di Friedrichs.**) Sia $P\varphi = f$ un'equazione differenziale alle derivate parziali, lineare del secondo ordine su $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto, a coefficienti dati da funzioni di classe $C^2(\Omega; \mathbb{C})$, dove:

$$P\varphi = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \left(A^{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x^j} \varphi \right),$$

ed è anche definito l'operatore P^t :

$$P^t\varphi = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \left(A^{ji}(x) \frac{\partial}{\partial x^j} \varphi \right),$$

Si supponga che la matrice caratteristica del sistema $A = A(x)$ associata all'operatore P soddisfi la condizione di **forte ellitticità**, per qualche $C > 0$:

$$\sum_{i,j=1}^n A^{ij}(x)y_i y_j \geq C\|y\|^2, \quad \text{per ogni } x \in \Omega \text{ e ogni } y \in \mathbb{R}^n.$$

Se $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ localmente integrabile su Ω risolve in senso debole l'equazione $P\varphi = f$, cioè :

$$\int_{\Omega} \varphi P^t g \, d^n x = \int_{\Omega} f g \, d^n x, \quad \text{per ogni } g \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{C})$$

e $f \in W^k(\Omega)$ per qualche $k = 0, 1, \dots$ fissato, allora $\varphi \in W^{k+2}(\Omega)$. \diamond

A titolo di esempio, supponiamo che $f \in C^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ e che $\varphi \in W^k(\Omega)$, per qualche $k = 0, 1, \dots$ fissato, sia soluzione in senso debole di $P\varphi = f$. Se le ipotesi del teorema di Friedrichs sono valide, allora $\varphi \in W^\infty(\Omega) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} W^k(\Omega)$. A sua volta però il Lemma di Sobolev prova che, più fortemente, modificando φ su un insieme di misura nulla ed ottenendo φ' , si ha che $\varphi' \in C^\infty(\Omega; \mathbb{C})$. Mostriamo che questa nuova funzione φ' è in realtà una *soluzione in senso classico* dell'equazione $P\varphi = f$. Infatti, per ipotesi vale:

$$\int_{\Omega} \varphi P^t g \, d^n x = \int_{\Omega} f g \, d^n x$$

per ogni $g \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{C})$. La ridefinizione di φ in φ' non altera l'identità scritta sopra visto che le due funzioni differiscono su un insieme di misura nulla. Possiamo allora usare la derivazione per parti ottenendo che:

$$\int_{\Omega} (P\varphi')g \, d^n x = \int_{\Omega} f g \, d^n x$$

per ogni $g \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{C})$. Procedendo come mostrato sopra, l'arbitrarietà di $g \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ implica che $P\varphi' = f$ sia valida in senso classico su Ω . Per cui la funzione φ , ridefinita come una funzione $\varphi' \in C^\infty(\Omega; \mathbb{C})$, grazie al Lemma di Sobolev, soddisfa in senso classico l'equazione differenziale.

Appendice B

Limite e derivazione sotto il segno integrale e di serie dalla teoria della misura.

In questa appendice dimostreremo alcuni teoremi che consentono di scambiare il simbolo di integrale e di serie con quello di derivata, facendo uso essenzialmente del teorema della convergenza dominata di Lebesgue. Il caso della serie sarà visto come sottocaso del caso integrale, in riferimento alla misura che conta i punti su \mathbb{N} . I teoremi che daremo sono quindi, nel caso dell'integrale, riferiti ad una generica misura positiva assegnata su uno spazio misurabile.

Note.

(1) Nel seguito, quando ci riferiremo a serie *assolutamente convergenti* (cioè la serie dei valori assoluti converge ad un numero finito) indicheremo a volte la somma con

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n,$$

dove non è specificato l'ordine con cui si esegue la somma. Ciò non è scorretto dato che le serie assolutamente convergenti possono essere riordinate a piacimento senza alterarne la somma per il teorema 1.2.

(2) La misura dell'integrale di Lebesgue sarà ancora indicata con $d^n x$, che è lo stesso simbolo usato nell'integrale di Riemann. Questa notazione non genererà confusione in quanto nelle situazioni in cui compariranno entrambi gli integrali essi coincideranno in valore.

B.1 Teoremi della convergenza monotona e dominata.

Se (X, Σ, μ) è uno spazio misurabile, dove X è l'insieme ambiente, Σ una σ -algebra su X e $\mu : \Sigma \rightarrow [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ una misura positiva su X , lo strumento fondamentale per ottenere i teoremi di scambio tra simbolo di integrale e quello di limite/derivata è il ben noto *teorema della*

convergenza dominata di Lebesgue [Ru82]. Per completezza prima citiamo anche il cosiddetto teorema della convergenza monotona [Ru82] dato che lo abbiamo usato nelle dispense. Nel seguito $\mathcal{L}^1(X, \Sigma, \mu)$ indicherà lo spazio delle funzioni misurabili su X integrabili rispetto a μ . Nel caso in cui $X = A \subset \mathbb{R}^n$ è Lebesgue-misurabile (cioè appartiene alla σ -algebra di Lebesgue) e μ è la misura di Lebesgue $d^n x$ su \mathbb{R}^n , scriveremo semplicemente $\mathcal{L}^1(A)$.

Teorema B.1. (Convergenza monotona.) *In riferimento allo spazio misurabile (X, Σ, μ) , sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni definite su X che siano Σ -misurabili ed μ -integrabili. Se valgono le due condizioni:*

- (i) $f_n(x) \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
 - (ii) $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ quasi ovunque su X e per ogni $n \in \mathbb{N}$,
- allora, posto $f(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$, vale

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu.$$

◇

Passiamo al teorema della convergenza dominata.

Teorema B.2. (Convergenza dominata.) *In riferimento allo spazio misurabile (X, Σ, μ) , sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni definite su X che siano Σ -misurabili ed μ -integrabili. Se valgono le due condizioni:*

- (i) esiste $f(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \in \mathbb{C}$ quasi ovunque rispetto a μ su X ,
- (ii) esiste $g \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ con $g \geq 0$ quasi ovunque su X e tale che:

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad \text{quasi ovunque su } X, \text{ per ogni } n \in \mathbb{N},$$

allora valgono i seguenti fatti definendo $f(x) := 0$ per i punti $x \in X$ per cui $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ non esiste in \mathbb{C} .

- (a) $f \in \mathcal{L}^1(X, \Sigma, \mu)$,
- (b) $\int_X |f| d\mu \leq \int_X g d\mu$,
- (c) $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$,
- (d) $\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu$ per $n \rightarrow +\infty$ ovvero, in altre parole:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right) d\mu. \quad (\text{B.1})$$

◇

Osservazioni B.1.

(1) Il controesempio classico per il teorema della convergenza dominata è quello in cui si lavora in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ con le gaussiane di centro $n \in \mathbb{N}$: $f_n(x) := e^{-(x-n)^2}$. Vale, a causa dell'invarianza per

traslazioni della misura di Lebesgue:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-n)^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Pertanto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \sqrt{\pi}.$$

D'altra parte, se $x \in \mathbb{R}$ è fissato, si ha immediatamente che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-(x-n)^2} = 0.$$

Concludiamo che la (B.1) non può valere, dato che il primo membro varrebbe $\sqrt{\pi}$ nel caso in esame, mentre il secondo membro varrebbe 0.

La spiegazione del fatto che non si possa applicare il teorema della convergenza dominata è evidente. Non può esistere una funzione g che soddisfa le ipotesi: in ciascun punto dovrebbe maggiorare ogni gaussiana traslata arbitrariamente verso destra. Si può dimostrare che questo implica che g non possa essere integrabile. In realtà l'inesistenza di g segue immediatamente dal fatto che non vale (B.1) come abbiamo direttamente appurato.

(2) La non esistenza di una funzione g che soddisfi le ipotesi del teorema della convergenza dominata, *non* implica automaticamente che non valga la (B.1), visto che il teorema della convergenza dominata fornisce condizioni *sufficienti*, ma non necessarie affinché valga la (B.1).

(3) Il teorema della convergenza dominata di Lebesgue include il caso in cui si esaminano delle serie. In questo caso (X, Σ, μ) è costruito in questo modo: $X = \mathbb{N}$, Σ è $\mathcal{P}(\mathbb{N})$: l'insieme delle parti di \mathbb{N} , e $\mu = \delta$, la *misura che conta i punti*: $\delta(N) =$ numero di elementi di $N \subset \mathbb{N}$. Le funzioni misurabili sono le successioni $\{a(m)\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$. Infine le funzioni integrabili sono le successioni tali che

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} |a(m)| < +\infty.$$

In altre parole le funzioni integrabili non sono altro che le successioni che producono serie assolutamente convergenti. Si osservi che in tal caso, come ben noto, la somma della serie $\sum_{m \in \mathbb{N}} a(m)$ *non* dipende dall'ordinamento con cui si esegue la somma.

In questo caso, il teorema di Lebesgue fornisce condizioni sufficienti per poter scambiare il simbolo di somma con quello di limite,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{m \in \mathbb{N}} a_n(m) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n(m) \right),$$

quando si ha *una classe* di successioni $\{\{a_n(m)\}_{m \in \mathbb{N}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ per cui $a_n(m) \rightarrow a(m)$ se $n \rightarrow +\infty$.

(4) Il teorema della convergenza dominata benché molto più generale (vale con ogni tipo di misura e lavora anche su domini di misura infinita), fornisce una dimostrazione alternativa del classico teorema riferito all'integrale di Riemann enunciato alla fine di (a) nel teorema seguente.

Teorema B.3. *Si consideri una classe di funzioni a valori in \mathbb{R} , $\{f_t\}_{t \in A}$, definite sul compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ e dove $A \subset \mathbb{R}$ è un intervallo aperto. Se valgono le condizioni seguenti:*

- (i) $K \ni x \mapsto f_t(x)$ è continua sul compatto K per ogni $t \in I$,
(ii) esiste

$$A \times K \ni (t, x) \mapsto \frac{\partial f_t(x)}{\partial t}$$

ed è continua (congiuntamente nelle due variabili), allora la funzione (tutti gli integrali sono indifferentemente intesi nel senso di Riemann o Lebesgue):

$$I \ni t \mapsto \int_K f_t(x) d^n x$$

è di classe $C^1(I)$ e vale l'identità :

$$\frac{d}{dt} \int_K f_t(x) d^n x = \int_K \frac{\partial f_t(x)}{\partial t} d^n x. \quad (\text{B.2})$$

◇

(5) Il teorema della convergenza dominata permette di dare una dimostrazione alternativa delle seconde parti di (a) e (b) nel teorema 1.3 come mostriamo ora provando (a) ((b) segue nello stesso modo). Essendo le funzioni f_n continue su un compatto, l'integrale di esse secondo Riemann coincide con quello di Lebesgue [Ru82]. Dato che la successione di funzioni continue converge uniformemente, il limite di tali funzioni sarà ancora una funzione continua $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ (per cui integrabile secondo Riemann e Lebesgue e i due integrali coincideranno nuovamente). Sia $M = \max_K |f(x)|$, che esiste finito in virtù del fatto che K è compatto e f continua. In virtù della convergenza uniforme, se $\epsilon > 0$ esisterà $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che, se $n > N_\epsilon$

$$\max_K |f_n - f| \leq \epsilon.$$

Quindi in particolare:

$$-\epsilon - M < f(x) - \epsilon < f_n(x) < f(x) + \epsilon < M + \epsilon, \quad \text{per ogni } x \in K.$$

In particolare, per $n > N_\epsilon$:

$$|f_n(x)| < M + \epsilon, \quad \text{per ogni } x \in K.$$

Possiamo allora applicare il teorema convergenza dominata con $g(x) := M + \epsilon$ costantemente su K , provando la (B.1) che coincide con la nostra tesi. Si noti che g è per costruzione in $\mathcal{L}^1(K)$ dato che $\int_K |g| d^n x = (M + \epsilon) \text{Vol}(K)$ dove $\text{Vol}(K)$ è la misura di Lebesgue (coincidente con quella di Peano-Jordan-Riemann) di K che esiste ed è finita essendo K un compatto.

Per studiare il problema di scambiare il simbolo di derivata con quello di integrale e di serie abbiamo bisogno di una formulazione leggermente modificata del teorema della convergenza dominata.

Teorema B.4. (Convergenza dominata 2.) *Se si generalizzano le ipotesi del teorema B.2 rimpiazzando la successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con una famiglia di funzioni $\{f_t\}_{t \in A} \subset \mathcal{L}^1(X, \mu)$ dove $A \subset \mathbb{R}$ è un intorno aperto di $t_0 \in \mathbb{R}$, in modo tale che:*

- (i) esiste $f(x) := \lim_{t \rightarrow t_0} f_t(x) \in \mathbb{C}$ quasi ovunque rispetto a μ su X ,
(ii) esiste $g \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ con $g \geq 0$ quasi ovunque su X e tale che:

$$|f_t(x)| \leq g(x) \quad \text{per ogni fissato } t \in A, \text{ quasi ovunque su } X^1,$$

gli enunciati (a), (b), (c) e (d) del teorema B.2 sono ancora validi sostituendo ovunque $\lim_{n \rightarrow +\infty}$ con $\lim_{t \rightarrow t_0}$. \diamond

Dimostrazione. La tesi è immediata conseguenza del teorema della convergenza dominata e del noto risultato di analisi che afferma che: *una funzione tra due spazi metrici $f : X_1 \rightarrow X_2$ ammette limite $y \in X_2$ per $x \rightarrow x_0 \in X_1$ se e solo se ammette tale limite per successioni, ovvero, per ogni successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X_1$ vale*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = y.$$

Nel caso in esame $X_1 = A \subset \mathbb{R}^m$ e $X_2 = \mathbb{C}$ dotati delle distanze standard. \square

Questa formulazione del teorema della convergenza dominata ha diverse conseguenze immediate sulle serie di funzioni. A titolo di esempio citiamo il seguente corollario che si dimostra subito lavorando sullo spazio con misura $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \delta)$ già visto in un precedente esempio.

Proposizione B.1. *Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni a valori in \mathbb{C} (o \mathbb{R}) definite sull'insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ tale che, per ogni $t \in A$ valga*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n(t)| < +\infty.$$

e, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste finito

$$f_n = \lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t)$$

dove t_0 è un punto di accumulazione di A (includendo valori infiniti come casi limite). Se esiste $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $g_n \geq 0$ e $\sum_{n \in \mathbb{N}} g_n < +\infty$ tale che:

$$|f_n(t)| \leq g_n, \quad \text{per ogni } t \in A,$$

allora, per ogni $t_0 \in A$:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \quad \text{e} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n| < +\infty.$$

\diamond

¹l'insieme di misura nulla su cui non vale la disuguaglianza è supposto non dipendere da t .

B.2 Derivazione sotto il segno di integrale e di serie.

Possiamo allora enunciare e provare il teorema fondamentale riguardante la derivazione sotto il segno di integrale per una misura positiva generale.

Teorema B.5. (Derivazione sotto il segno di integrale.) *In riferimento allo spazio misurabile (X, Σ, μ) , si consideri una famiglia di funzioni $\{f_t\}_{t \in A} \subset \mathcal{L}^1(X, \mu)$ dove $A \subset \mathbb{R}^m$ è un insieme aperto e $t = (t^1, \dots, t^m)$. Se valgono le seguenti due condizioni:*

(i) *per un certo valore k in $\{1, 2, \dots, n\}$ esistono le derivate:*

$$\frac{\partial h_t(x)}{\partial t^k}, \quad \text{per ogni } x \in X \text{ e } t \in A$$

(ii) *esiste $g \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ con $g \geq 0$ quasi ovunque su X e tale che:*

$$\left| \frac{\partial h_t(x)}{\partial t^k} \right| \leq g(x) \quad \text{per ogni } t \in A, \text{ quasi ovunque su } X^2,$$

allora valgono i seguenti fatti.

(a) $X \ni x \mapsto \frac{\partial h_t}{\partial t^k} \in \mathcal{L}^1(X, \Sigma, \mu)$, per ogni $t \in A$,

(b) *si possono scambiare i simboli di integrale con quello di derivata per ogni $t \in A$:*

$$\frac{\partial}{\partial t^k} \int_X h_t(x) d\mu(x) = \int_X \frac{\partial h_t(x)}{\partial t^k} d\mu(x). \quad (\text{B.3})$$

Se infine:

(iii) *per una fissata g la condizione in (ii) vale contemporaneamente per tutti i valori di $k = 1, 2, \dots, m$, quasi ovunque in $x \in X$ e tutte le funzioni :*

$$A \ni t \mapsto \frac{\partial h_t(x)}{\partial t^k}$$

sono continue per ogni $x \in X$ fissato, allora

(c) *la funzione:*

$$A \ni t \mapsto \int_X h_t(x) d\mu(x)$$

è in $C^1(A)$. \diamond

Dimostrazione. Notiamo che, per ogni $t \in A$, le funzioni $X \ni x \mapsto \frac{\partial h_t}{\partial t^k}$ sono sicuramente misurabili essendo limite (usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale) di funzioni misurabili. Inoltre sono μ -integrabili dato che sono maggiorate, in valore assoluto, da una funzione integrabile per l'ipotesi (ii). Fissiamo $t_0 \in A$. Considerando

²l'insieme di misura nulla su cui non vale la disuguaglianza è supposto non dipendere da t .

il rapporto incrementale si ha, dove scriviamo, un po' impropriamente, $t_0 + \tau^k$ al posto di $(t_0^1, \dots, t_0^{k-1}, t_0^k + \tau^k, t_0^{k+1}, \dots, t_0^m)$:

$$\left. \frac{\partial}{\partial t^k} \right|_{t_0} \int_X h_t(x) d\mu(x) = \lim_{\tau^k \rightarrow 0} \int_X \frac{h_{t_0 + \tau^k}(x) - h_{t_0}(x)}{\tau^k} d\mu(x).$$

D'altra parte, per il teorema di Lagrange (restringendosi a lavorare in un intorno aperto e convesso di t_0) e tenendo conto dell'ipotesi (ii) abbiamo:

$$\left| \frac{h_{t_0 + \tau^k}(x) - h_{t_0}(x)}{\tau^k} \right| = \left| \frac{\partial h_t(x)}{\partial t} \right|_{t(\tau^k, x)} \leq g(x),$$

dove $t(\tau^k, x)$ è un punto che si trova tra t_0 e $(t_0^1, \dots, t_0^{k-1}, t_0^k + \tau^k, t_0^{k+1}, \dots, t_0^m)$ sul segmento che unisce tale coppia di punti. Possiamo allora applicare il teorema B.4 per:

$$f_{\tau^k}(x) := \frac{h_{t_0 + \tau^k}(x) - h_{t_0}(x)}{\tau^k},$$

ottendo che esiste il limite

$$\lim_{\tau^k \rightarrow 0} \int_X \frac{h_{t_0 + \tau^k}(x) - h_{t_0}(x)}{\tau^k} d\mu(x) =: \left. \frac{\partial}{\partial t^k} \right|_{t_0} \int_X h_t(x) d\mu(x),$$

e vale:

$$\int_X \lim_{\tau^k \rightarrow 0} \frac{h_{t_0 + \tau^k}(x) - h_{t_0}(x)}{\tau^k} d\mu(x) =: \int_X \left. \frac{\partial h_t(x)}{\partial t^k} \right|_{t_0} d\mu(x).$$

La tesi è stata provata per quanto riguarda (a) e (b). La dimostrazione di (c) è immediata: dal teorema B.4 tenendo conto dell'ipotesi (ii) si ha che ogni funzione, per $k = 1, \dots, m$,

$$A \ni t \mapsto \left. \frac{\partial}{\partial t^k} \int_X h_t(x) d\mu(x) \right|_{t_0}$$

è continua, da cui la tesi. \square

Osservazioni B.2. Nell'ipotesi di validità di (c) la funzione

$$A \ni t \mapsto \int_X h_t(x) d\mu(x)$$

risulta essere $C^1(A)$ e quindi differenziabile su A come funzione di più variabili.

Il teorema B.5 riproduce, come sottocaso il teorema classico B.3. È però fondamentale notare che il teorema B.5 ha validità molto più generale, in quanto lavora con l'integrale di Lebesgue o qualsiasi altra misura positiva, non richiede la continuità delle derivate nelle variabili congiuntamente: lo spazio X su cui si integra nel teorema B.5 potrebbe non essere uno spazio topologico

e può anche avere misura infinita.

Dimostrazione del Teorema B.3. Dato che si integra su un compatto, la richiesta di continuità in x di f e della sua derivata assicura che gli integrali di Riemann considerati esistano e coincidano con quelli di Lebesgue. Per ogni $t_0 \in A$ e sia $A_0 \subset A$ un intervallo aperto a chiusura compatta, con $t_0 \in A_0$. La dimostrazione è un'immediata conseguenza del fatto che la funzione

$$\overline{A_0} \times K \ni (t, x) \mapsto \frac{\partial f_t(x)}{\partial t}$$

essendo continua sarà limitata, in valore assoluto, da qualche costante $M > 0$. Pertanto possiamo applicare il teorema B.5 usando come funzione g quella che vale costantemente M su K . \square

Infine, per quanto riguarda le serie di funzioni, il teorema B.5 si specializza alla seguente proposizione lavorando sullo spazio con misura $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \delta)$.

Proposizione B.2. *Si consideri una successione di funzioni $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dove $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, con $A \subset \mathbb{R}^m$ insieme aperto, $t = (t^1, \dots, t^m)$ e si assuma che valga la convergenza assoluta della serie associata alle f_n :*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n(t)| < +\infty, \quad \text{per ogni } t \in A,$$

per cui in particolare anche la serie delle f_n (senza valore assoluto) converge per ogni valore di t . Se sono verificate le seguenti due condizioni:

(i) per un certo valore k in $\{1, 2, \dots, n\}$ esiste la derivata:

$$\frac{\partial f_n(t)}{\partial t^k}, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ e } t \in A$$

(ii) esiste una successione $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $0 \leq g_n$ costante, con $\sum_{n \in \mathbb{N}} g_n < +\infty$, e tale che:

$$\left| \frac{\partial f_n(t)}{\partial t^k} \right| \leq g_n, \quad \text{per ogni } t \in A \text{ e } n \in \mathbb{N},$$

allora valgono i seguenti fatti.

(a) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{\partial f_n(t)}{\partial t^k} \right| < +\infty$, per cui in particolare anche la serie delle derivate f_n rispetto a t^k (senza valore assoluto) converge per ogni valore di t ,

(b) si possono scambiare i simboli di integrale con quello di somma per ogni $t \in A$:

$$\frac{\partial}{\partial t^k} \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\partial f_n(t)}{\partial t^k}. \quad (\text{B.4})$$

Se infine:

(iii) per una fissata successione di costanti $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la condizione in (ii) vale contemporaneamente per tutti i valori di $k = 1, 2, \dots, m$, e tutte le funzioni (per ogni $t \in A$ fissato):

$$A \ni t \mapsto \frac{\partial f_n(t)}{\partial t^k}$$

sono continue, allora

(c) la funzione:

$$A \ni t \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(t)$$

è in $C^1(A)$. \diamond

Diversamente dal teorema classico 1.4 di derivazione sotto il segno di serie, questo teorema non richiede (eccetto che per la validità dell'ultimo punto) che le derivate delle funzioni nella serie siano funzioni continue. Non è nemmeno richiesta la convergenza uniforme della serie delle funzioni non derivate. La condizione (ii) in ogni caso assicura tra l'altro la convergenza uniforme della serie delle derivate per il teorema 1.1.

Appendice C

Relazioni di ortogonalità tra funzioni trigonometriche utili nella teoria della serie di Fourier.

Nel seguito dimostreremo alcune relazioni di ortogonalità per funzioni trigonometriche o esponenziali immaginarie definite, nei primi due casi, sull'intervallo $J := [a, b]$ con $b - a = L$ (possiamo pensare in particolare che $b = L$ e $a = 0$, oppure che $b = L/2$ e $a = -L/2$). Nell'ultimo caso faremo invece esplicito riferimento all'intervallo $J = [0, L]$. La nozione di ortogonalità è quella riferita al prodotto scalare standard di $L^2(J, dx)$.

C.1 Esponenziali immaginari periodici su $J = [a, a + L]$.

Cominciamo con le relazioni di ortogonalità per le funzioni esponenziali complesse periodiche, di periodo L/m (se $m \neq 0$) sull'intervallo J di lunghezza L e della forma: $J \ni x \mapsto e^{i\frac{2\pi m}{L}x}$ con $m \in \mathbb{Z}$. Queste funzioni sono autofunzioni dell'operatore $-\frac{d^2}{dx^2}$, periodiche su J , con autovalori rispettivamente $(\frac{2\pi m}{L})^2$. Vogliamo provare le relazioni di ortogonalità:

$$\int_J e^{-i\frac{2\pi n}{L}x} e^{i\frac{2\pi m}{L}x} dx = L\delta_{nm}. \quad (\text{C.1})$$

Si osservi che le relazioni di ortogonalità scritte sopra dicono che il sistema di funzioni complesse:

$$\frac{e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in J,$$

definisce un sistema ortonormale nello spazio di Hilbert $L^2(J, dx)$. Questo sistema risulta anche essere completo, cioè definisce una base hilbertiana dello spazio di Hilbert $L^2(J, dx)$.

Passiamo a provare (C.1). Nel caso in cui $n = m$, l'integrale si riduce all'integrale della funzione

costante 1 sull'intervallo di misura L , per cui la (C.1) è evidente in tal caso. Non resta che provare tale identità per $n \neq m$, che significa, definendo $k := m - n$:

$$\int_J e^{i\frac{2\pi k}{L}x} dx = 0 \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (\text{C.2})$$

Tenendo conto del fatto che $e^{i\frac{2\pi k}{L}x} = \cos\left(\frac{2\pi k}{L}x\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{L}x\right)$ abbiamo:

$$\int_J e^{i\frac{2\pi k}{L}x} dx = \int_J \cos\left(\frac{2\pi k}{L}x\right) dx + i \int_J \sin\left(\frac{2\pi k}{L}x\right) dx.$$

Cambiando variabile di integrazione e passando a $\theta := \frac{2\pi k}{L}x$ abbiamo che:

$$\int_J e^{i\frac{2\pi k}{L}x} dx = \frac{L}{2\pi k} \int_{\Theta_k} \cos \theta d\theta + i \frac{L}{2\pi k} \int_{\Theta_k} \sin \theta d\theta,$$

dove Θ_k è un segmento di lunghezza $2k\pi$ (per esempio $[0, 2k\pi]$ se $I = [0, L]$). Dato che la funzione seno e la funzione coseno sono periodiche di periodo 2π , abbiamo alla fine che:

$$\int_J e^{i\frac{2\pi k}{L}x} dx = \frac{L}{2\pi} \int_{\Theta_1} \cos \theta d\theta + i \frac{L}{2\pi} \int_{\Theta_1} \sin \theta d\theta = 0,$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che l'integrale della funzione seno e quello della funzione coseno, eseguito su un segmento di lunghezza 2π è

sempre nullo, come si calcola immediatamente tenendo anche conto della periodicità di 2π di tali funzioni. La (C.1) risulta essere completamente provata.

C.2 Funzioni seni e coseni periodiche su $J = [a, a + L]$.

Consideriamo ora le funzioni seno e coseno definite sull'intervallo J di lunghezza L e di periodicità ancora L/n con $n = 1, 2, \dots$, cioè:

$$J \ni x \mapsto \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

e

$$J \ni x \mapsto \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Tutte queste funzioni sono autofunzioni reali dell'operatore $-\frac{d^2}{dx^2}$, periodiche su J , con autovalori rispettivamente $\left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2$. Vogliamo provare le relazioni di ortogonalità:

$$\int_J \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx = \frac{L\delta_{nm}}{2}, \quad \int_J \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \sin\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx = \frac{L\delta_{nm}}{2}, \quad (\text{C.3})$$

$$\int_J \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \sin\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx = 0, \quad n, m = 1, 2, \dots \quad (\text{C.4})$$

Si osservi che queste relazioni dicono che il sistema di funzioni reali:

$$\frac{1}{\sqrt{L}}, \quad \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right), \quad \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots, x \in J$$

definisce un sistema ortonormale nello spazio di Hilbert complesso $L^2(J, dx)$. Questo sistema risulta anche essere completo, cioè definisce una base hilbertiana dello spazio di Hilbert $L^2(J, dx)$. Passiamo a provare le relazioni di ortogonalità scritte sopra. Cominciamo dalla prima nel caso $n = m$. In tal caso essa si scrive:

$$\int_J \cos^2\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx = \frac{L}{2}.$$

Per dimostrare questa identità osserviamo che, se

$$I := \int_J \cos^2\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx$$

allora, procedendo come per l'esponenziale immaginario, dove Θ_1 è un intervallo di lunghezza 2π (per esempio $[0, 2k\pi]$ se $I = [0, L]$) con un semplice cambio di variabile si ha:

$$I = \frac{L}{2\pi} \int_{\Theta_1} \cos^2 \theta d\theta.$$

Usando la relazione trigonometrica fondamentale $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, abbiamo che:

$$I = L - \frac{L}{2\pi} \int_{\Theta_1} \sin^2 \theta d\theta.$$

Tenendo conto che $\sin^2 \theta$, periodica di periodo π , non è altro che la funzione $\cos^2 \theta$, che ha lo stesso periodo, traslata di un semiperiodo $\pi/2$ e che l'integrale è calcolato su un doppio periodo, abbiamo che:

$$\int_{\Theta_1} \sin^2 \theta d\theta = \int_{\Theta_1} \cos^2 \theta d\theta.$$

Pertanto:

$$I = L - I$$

e quindi $I = L/2$ che quanto volevamo provare. La seconda in (C.3) per $n = m$ si prova nello stesso modo. Dimostriamo la validità della prima e della seconda in (C.3) per $n \neq m$. Eseguiamo la prova per il caso del coseno. Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \int_J \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx &= \frac{L}{2\pi m} \int_J \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \frac{d}{dx} \sin\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx \\ &= \frac{L}{2\pi m} \int_J \frac{d}{dx} \left(\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \sin\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) \right) dx - \frac{L}{2\pi m} \int_J \left(\frac{d}{dx} \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \right) \sin\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx. \end{aligned}$$

Il primo integrale nella seconda riga è nullo, dato che la funzione dentro la derivata è periodica sul dominio di integrazione. Eseguendo l'ultima derivata otteniamo che:

$$\int_J \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx = \frac{n}{m} \int_J \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \sin\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx. \quad (\text{C.5})$$

Possiamo ripetere la procedura notando che:

$$\sin\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) = -\frac{L}{2\pi m} \frac{d}{dx} \cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right),$$

ottenendo alla fine:

$$\int_J \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx = \left(\frac{n}{m}\right)^2 \int_J \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx.$$

e quindi:

$$\left[1 - \left(\frac{n}{m}\right)^2\right] \int_J \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx = 0.$$

Dato che è $n \neq m$, l'unica possibilità è che:

$$\int_J \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx = 0,$$

come volevamo. Osserviamo anche che la (C.5) prova di conseguenza anche la seconda in (C.3) per $n \neq m$.

Per finire e provare la (C.4), osserviamo che, con la solita procedura di integrazione per parti eseguita due volte, si verifica subito che:

$$\int_J \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \sin\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx = -\left(\frac{n}{m}\right)^2 \int_J \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \sin\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx,$$

e quindi:

$$\left[1 + \left(\frac{n}{m}\right)^2\right] \int_J \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \sin\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx = 0,$$

da cui segue che, anche se $n = m$, l'integrale a fattore nel secondo membro deve annullarsi.

C.3 Seni e coseni su $[0, L]$ con condizioni di annullamento, o di annullamento della derivata, ai bordi.

Consideriamo ora le funzioni seno e coseno definite sull'intervallo $J = [0, L]$:

$$J \ni x \mapsto \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

e

$$J \ni x \mapsto \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

La prima classe di funzioni è costituita da autofunzioni reali dell'operatore $-\frac{d^2}{dx^2}$, con derivate prime che si annullano al bordo dell'intervallo, con autovalori rispettivamente $(\frac{\pi n}{L})^2$. La seconda classe di funzioni è costituita da autofunzioni reali dell'operatore $-\frac{d^2}{dx^2}$ che si annullano al bordo dell'intervallo, con autovalori rispettivamente $(\frac{\pi n}{L})^2$.

Vogliamo provare le relazioni di ortogonalità, separatamente per le due classi di funzioni:

$$\int_0^L \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \cos\left(\frac{\pi m}{L}x\right) dx = \frac{L\delta_{nm}}{2}, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{C.6})$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right) dx = \frac{L\delta_{nm}}{2}, \quad n, m = 1, 2, \dots \quad (\text{C.7})$$

Si osservi che queste relazioni dicono che ciascuno dei due sistemi di funzioni considerato sopra con un opportuno coefficiente di normalizzazione:

$$\sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad x \in [0, L]$$

e

$$\sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right), \quad n = 1, 2, \dots \quad x \in [0, L],$$

definisce, separatamente, un sistema ortonormale nello spazio di Hilbert complesso $L^2([0, L], dx)$. Ciascuno dei due sistemi risulta anche essere completo, cioè definisce una base hilbertiana dello spazio di Hilbert complesso $L^2([0, L], dx)$.

Facciamo solo la dimostrazione di (C.7), dato che quella di (C.6) è del tutto analoga. Per cominciare consideriamo il caso $n = m$. Abbiamo allora che:

$$\int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi n}{L}x\right) dx = \frac{L}{\pi n} \int_0^{n\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{L}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \frac{L}{\pi} \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) d\theta.$$

Abbiamo trovato che:

$$\int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi n}{L}x\right) dx = L - \frac{L}{\pi} \int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta.$$

Dato che $\sin^2 \theta$ non è altro che $\cos^2 \theta$ traslata di $\pi/2$ e che l'integrale avviene su di un intervallo lungo come il periodo, pari a π , di entrambe le funzioni, concludiamo che:

$$\int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta = \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta$$

e quindi:

$$\int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi n}{L}x\right) dx = L - \int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi n}{L}x\right) dx.$$

Concludiamo che:

$$\int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi n}{L}x\right) dx = \frac{L}{2},$$

come voluto. Per finire proviamo la (C.7) se $n \neq m$. Vale:

$$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right) dx = -\frac{L}{\pi m} \int_0^L \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \frac{d}{dx} \cos\left(\frac{\pi m}{L}x\right) dx.$$

Integrando per parti troviamo che:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right) dx \\ &= -\frac{L}{\pi m} \int_0^L \frac{d}{dx} \left(\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \cos\left(\frac{\pi m}{L}x\right) \right) dx + \frac{L}{\pi m} \int_0^L \left(\frac{d}{dx} \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \right) \cos\left(\frac{\pi m}{L}x\right) dx. \end{aligned}$$

Il primo integrale a secondo membro è nullo dato che la funzione seno si annulla in 0 e L . Calcolando la derivata nell'ultimo integrale, si conclude che:

$$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right) dx = \frac{n}{m} \int_0^L \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \cos\left(\frac{\pi m}{L}x\right) dx,$$

e quindi:

$$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right) dx = \frac{n}{m} \frac{L}{\pi m} \int_0^L \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \frac{d}{dx} \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right) dx.$$

Integrando nuovamente per parti nell'integrale a secondo membro, tenendo conto del fatto che la funzione seno si annulla agli estremi di integrazione, troviamo che:

$$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right) dx = \frac{n}{m} \frac{n}{m} \int_0^L \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right) dx.$$

Dunque:

$$\left(1 - \left(\frac{n}{m}\right)^2\right) \int_0^L \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right) dx = 0.$$

Dato che è $m \neq n$ per ipotesi, l'integrale a fattore deve essere nullo e ciò conclude la dimostrazione di (C.7).

Appendice D

Teoremi del Dini e applicazioni

Richiamiamo qui due formulazioni elementari del teorema del Dini riguardante funzione inversa e funzione implicita [Gi03] ed alcune ovvie applicazioni. Spesso per “Teorema del Dini” si intende solo quello che sotto chiamiamo “Teorema della funzione implicita”.

D.1 Teoremi della funzione inversa e della funzione implicita

Teorema D.1. (Teorema della funzione inversa in \mathbb{R}^n .) Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e

$$f : \Omega \ni (x^1, \dots, x^n) \mapsto (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n$$

una funzione di classe C^k con $k > 1$.

Se per $p \in \Omega$ il determinante della matrice Jacobiana di coefficienti $\left. \frac{\partial y^k}{\partial x^k} \right|_p$ è non nullo, allora:

(a) esiste un intorno aperto $A \ni p$ con $A \subset \Omega$ tale che $f(A)$ è aperto;

(b) $f|_A : A \rightarrow f(A)$ è biettiva con inversa di classe C^k .

Un immediato corollario del teorema enunciato è il seguente dove, lo ricordiamo, un'applicazione $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ con $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ aperti è detta essere un **diffeomorfismo di classe C^k** (dove $k \geq 1$) quando f è di classe C^k , biettiva con inversa di classe C^k .

Proposizione D.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e

$$f : \Omega \ni (x^1, \dots, x^n) \mapsto (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n$$

una funzione di classe C^k con $k > 1$.

Se per ogni $p \in \Omega$ il determinante della matrice Jacobiana di coefficienti $\left. \frac{\partial y^k}{\partial x^k} \right|_p$ è non nullo, allora:

(a) $f(\Omega)$ è aperto in \mathbb{R}^n ;

(b) f è una funzione aperta (cioè trasforma insiemi aperti in insiemi aperti);

(c) Se f è iniettiva allora $f : \Omega \rightarrow f(\Omega)$ è un diffeomorfismo di classe C^k .

Dimostrazione. La dimostrazione di (a) e (b) segue immediatamente dal teorema D.1 osservando che ogni aperto $A \subset \Omega$ (eventualmente $A = \Omega$) risulta essere l'unione di intorni aperti $O_x \subset A$ per $x \in A$ tali che $f(O_x)$ è aperto in \mathbb{R}^n e pertanto $f(A) = \cup_{x \in A} f(O_x)$ è sempre aperto. A questo punto la prova di (c) è ovvia. \square .

Possiamo ora enunciare la versione più elementare del teorema della funzione implicita in \mathbb{R}^n .

Teorema D.2. (Teorema della funzione implicita in \mathbb{R}^n .) Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e

$$f : \Omega \ni (x^1, \dots, x^n) \mapsto f(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}$$

una funzione di classe C^k con $k > 1$ e si supponga che per $p = (x_0^1, \dots, x_0^n) \in \Omega$ valga $\frac{\partial f}{\partial x^1} \Big|_p \neq 0$.

Posto $c = f(x_0^1, \dots, x_0^n)$, esistono:

(a) un aperto $A \subset \mathbb{R}$ con $A \ni x_0^1$,

(b) un aperto $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ con $B \ni (x_0^2, \dots, x_0^n)$, e tale che $A \times B \subset \Omega$,

(c) un'unica funzione $g : B \rightarrow A$ di classe C^k tale che

$$\{(g(x^2, \dots, x^n), x^2, \dots, x^n) \mid (x^2, \dots, x^n) \in B\} = \{(x^1, x^2, \dots, x^n) \in A \times B \mid f(x^1, x^2, \dots, x^n) = c\}.$$

Evidentemente c può sempre essere preso $c = 0$ con una banale ridefinizione di f .

D.2 Coordinate normali Riemanniane attorno ad un punto su una superficie regolare di dimensione $n - 1$ in \mathbb{R}^n

Consideriamo una superficie regolare Σ di dimensione $n-1$ in \mathbb{R}^n ed un punto $p \in \Sigma$. Supponiamo che tale superficie attorno a p sia descritta dal luogo dei punti che annullano la funzione $S = S(x^1, \dots, x^n)$ di classe $k \geq 2$ dove $\nabla S \neq 0$ su tale porzione di Σ e ci siamo riferiti alle coordinate cartesiane canoniche (x^1, \dots, x^n) di \mathbb{R}^n . Come noto, $\nabla S|_p$ individua il vettore normale a Σ in p a meno di un fattore non nullo. Possiamo inoltre sempre rototraslare le coordinate cartesiane canoniche, passando ad un altro sistema di coordinate cartesiane su \mathbb{R}^n in modo tale che $\nabla S|_p$ sia parallelo all'asse x^1 e p coincida con l'origine degli assi. Nel seguito assumeremo sempre ciò. In

base al teorema della funzione implicita, tenendo conto che $\frac{\partial S}{\partial x^1} \Big|_p \neq 0$, possiamo determinare un intorno aperto di p della forma $A \times B$ con $x^1 \in A \subset \mathbb{R}$ insieme aperto e $(x^2, \dots, x^n) \in B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ per cui l'insieme $\Sigma \cap (A \times B)$ è descritto dalla funzione C^k della forma $x^1 = x^1(x^2, \dots, x^n)$. In questo senso possiamo pensare $(\xi^2, \dots, \xi^n) = (x^2, \dots, x^n) \in B$ come coordinate su $\Sigma \cap (A \times B)$. Vogliamo introdurre delle nuove coordinate (t, ξ^2, \dots, ξ^n) dette *coordinate riemanniane normali* a Σ definite in un intorno aperto $B_p \subset \mathbb{R}^n$ di p , eventualmente più piccolo di $A \times B$ se letto in coordinate x^1, \dots, x^n , su cui

$$\Sigma \cap B_p \equiv \{(t, \xi^2, \dots, \xi^n) \in A' \times B' \mid t = 0\}.$$

A tal fine, per ogni punto $q \in \Sigma \cap (A \times B)$ tracciamo la retta normale a Σ e passante per q . Sia $t \in \mathbb{R}$ la lunghezza d'arco su tale retta ponendo come origine di essa il punto q in cui la retta interseca Σ . Se r è abbastanza vicino a p , allora ci aspettiamo che esista un'unica retta normale a Σ che passa per r . Le coordinate di r nel nuovo sistema di coordinate sarebbero in tal modo definite come: la lunghezza t (con segno) del segmento che unisce r a Σ e le coordinate (ξ^2, \dots, ξ^n) del punto $q_r \in \Sigma$ da cui parte tale segmento. È evidente che se in questo modo abbiamo definito un sistema di coordinate in un intorno B_p allora deve valere:

$$\Sigma \cap B_p = \{(t, \xi^2, \dots, \xi^n) \in A' \times B' \mid t = 0\}.$$

L'unica cosa che dobbiamo provare, per dimostrare che il sistema di coordinate è ben definito, è che la trasformazione dalle coordinate (t, ξ^2, \dots, ξ^n) alle iniziali coordinate (x^1, x^2, \dots, x^n) è differenziabile (all'ordine $k - 1$ come vedremo) biettiva da un aperto che contiene le coordinate Riemanniane di p in un aperto che contiene le coordinate cartesiane di p . La prova si basa sull'applicazione diretta del teorema della funzione inversa (Teorema D.1), una volta che avremo stabilito, cosa che andiamo a fare, che la trasformazione di coordinate $f : (t, \xi^2, \dots, \xi^n) \rightarrow (x^1, x^2, \dots, x^n)$ definita in un intorno di p , è di classe C^{k-1} ed ha determinante della matrice Jacobiana non nullo in p .

La retta che esce normalmente da $\Sigma \cap (A \times B)$ nel punto $q \in \Sigma$ di coordinate (ξ^2, \dots, ξ^n) ha equazione cartesiana:

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto (x_1(\xi^2, \dots, \xi^n) + n_q^1 t, \xi^2 + n_q^2 t, \dots, \xi^n + n_q^n t)$$

dove $n_q = (n_q^1, \dots, n_q^n)$ è il versore normale a Σ uscente da q . Esso è dato dal vettore colonna

$$n_q = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{\partial x^1}{\partial \xi^k}\right)^2}} \left(1, \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2}, \dots, \frac{\partial x^1}{\partial \xi^n}\right)^t.$$

Questa espressione si ha osservando che nell'intorno $A \times B$ la superficie Σ è descritta dagli zeri della funzione $g(x^1, \xi^2, \dots, \xi^n) := x^1 - x^1(\xi^2, \dots, \xi^n)$ e pertanto un vettore normale (mai nullo) è sicuramente

$$\nabla g = \left(1, \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2}, \dots, \frac{\partial x^1}{\partial \xi^n}\right)^t.$$

Normalizzando tale vettore si ottiene n sùddetto. Abbiamo in questo modo definito una funzione

$$f : (t, \xi^2, \dots, \xi^n) \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{\partial x^1}{\partial \xi^k}\right)^2}} \left(x^1(\xi^2, \dots, \xi^n) + t, \xi^2 + \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} t, \dots, \xi^n + \frac{\partial x^1}{\partial \xi^n} t \right)$$

che è di classe C^{k-1} in un insieme aperto $A'_0 \times B$ di \mathbb{R}^n la cui immagine include l'intorno $A \times B$ eventualmente restringendo un qualsiasi dominio iniziale aperto di f (dato che è una funzione continua). Non ci resta che provare che la matrice Jacobiana di f calcolata per le coordinate corrispondenti a p ha determinante non nullo. Ricordiamo che per scelta delle coordinate cartesiane p corrisponde a $(t, \xi^2, \dots, \xi^n) = (0, 0, \dots, 0)$. Inoltre il fatto che l'asse x^1 sia parallelo a $\nabla S|_p$ che è un vettore normale a Σ in p , significa che $\frac{\partial x^1}{\partial \xi^k}|_p = 0$ dato che $\nabla S|_p$ (con $S = S(x^1, \dots, x^n)$) deve avere solo componente lungo x^1 e simultaneamente essere parallelo a $\nabla g|_p$.

Tenendo conto di ciò si trova subito per computo diretto che la matrice Jacobiana di f calcolata in p è

$$J_p := \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2}|_p & & & \\ \vdots & & I & \\ \frac{\partial x^1}{\partial \xi^n}|_p & & & \end{array} \right] = I,$$

perché le derivate sulla prima colonna, escludendo la prima riga, sono tutte nulle per ipotesi. Il determinante è dunque $\det J_p = 1$ come volevamo. Il teorema della funzione inversa implica allora che in un intorno di p , che possiamo sempre pensare della forma $A' \times B'$ in coordinate normali riemanniane t, ξ^1, \dots, ξ^n , tali coordinate siano un buon sistema di coordinate locali attorno a p dato che sono connesse alle coordinate cartesiane (x^1, \dots, x^n) da una trasformazione di classe C^{k-1} biettiva con inversa C^{k-1} in un intorno di p . Si osservi che il risultato trovato continua a valere anche se usiamo il sistema di coordinate cartesiane canoniche di \mathbb{R}^n , dato che queste sono connesse alle coordinate cartesiane x^1, \dots, x^n adattate a p tramite una rototraslazione che è una trasformazione di classe C^∞ con inversa di classe C^∞ .

Bibliografia

- [Gi03] E. Giusti, *Analisi Matematica*, vol 1 e 2, Bollati-Boringhieri, Torino (2003).
- [RS75] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, vol. II, Academic Press, New York, (1975).
- [Mo18] V. Moretti, *Spectral Theory and Quantum Mechanics, Mathematical Structure of Quantum Theories, Symmetries and introduction to the Algebraic Formulation* (2nd revised and enlarged edition), Springer, Milano Berlin (2018).
- [Ru82] W. Rudin, *Analisi reale e complessa*, Bollati-Boringhieri, Torino (1982)
- [Ru91] W. Rudin, *Functional Analysis*, Mc Graw Hill, Boston (1991).
- [Ta96] M. E. Taylor, *Partial Differential Equations*, vol. I, II and III, New York, Springer-Verlag (1996).
- [Sa10] S. Salsa, *Equazioni alle derivate parziali. Metodi, modelli e applicazioni*, seconda edizione, Springer, Milano (2010).
- [ST84] A.G. Svesnokov e A.N. Tichonov, *Teoria delle funzioni di una variabile complessa*, Editori Riuniti, Roma (1984).
- [Vl84] V. S. Vladimirov, *Equations of Mathematical Physics*, Mir, Moscow (1984).