

**Valter Moretti**  
Dipartimento di Matematica  
Università di Trento

## **Esercizi svolti di Meccanica Analitica**

Illustrazioni di **Antonio Lorenzin**

Corsi di *Fondamenti di Fisica Matematica* per la Laurea Triennale in Matematica e  
*Meccanica Analitica* per la Laurea Triennale in Fisica.  
Università di Trento

Dispense scritte da Valter Moretti, liberamente scaricabili dal sito  
<https://moretti.maths.unitn.it/dispense.html> protette dal Creative Commons  
Attribuzione-Non commerciale-Non opere derivate 2.5 Italia License.

**Nessuno è autorizzato a vendere queste dispense**

# Capitolo 1

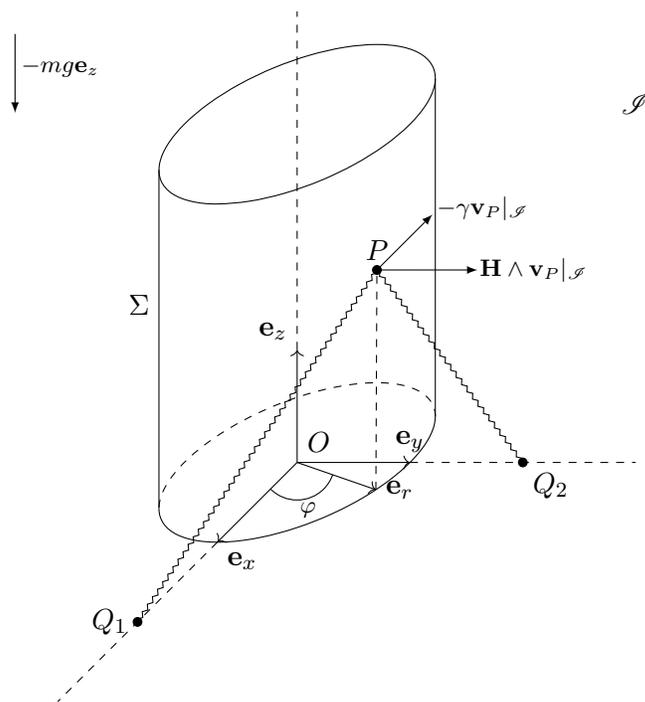
## Alcuni esercizi d'esame svolti.

I seguenti esercizi sono simili agli scritti assegnati negli esami dei corsi di Meccanica Analitica e Fisica Matematica I (docente Valter Moretti), alcuni di essi sono stati effettivamente assegnati in prove scritte. Il tempo a disposizione che viene solitamente dato per risolvere ciascuno di essi è di *3 ore*.

Il testo di riferimento è *Meccanica Analitica* di Valter Moretti pubblicato da Springer 2020

### ESERCIZIO 1

Nel sistema di riferimento inerziale  $\mathcal{R}$  si fissino coordinate  $x, y, z$  solidali definenti un sistema di coordinate cartesiane ortonormali di origine  $O$  e assi  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ . Nello spazio di quiete di  $\mathcal{R}$ , si consideri la superficie cilindrica  $\Sigma$  definita da  $x^2 + y^2 = R^2$  con  $R > 0$ . Un punto materiale  $P$



di massa  $m > 0$  è vincolato a muoversi su  $\Sigma$ , pensata come superficie *liscia*, ed è sottoposto alle seguenti ulteriori forze in aggiunta alla reazione vincolare  $\phi$ :

- (i) forza di gravità  $-mg \mathbf{e}_z$ ;
- (ii) una forza di forma  $\mathbf{H} \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}}$ , dove  $\mathbf{H} = H \mathbf{e}_r$  con  $H \geq 0$  ed essendo  $\mathbf{e}_r$  il versore radiale rispetto al sistema di coordinate cilindriche  $r, \varphi, z$  associato alle coordinate  $x, y, z$  in modo standard;
- (iii) La forza dovuta a due molle di costante elastica  $\kappa$  e lunghezza nulla a riposo, una con un estremo (quello non attaccato a  $P$ ) fissato in  $Q_1 = O + 2R \mathbf{e}_x$  e l'altra con un estremo (quello non attaccato a  $P$ ) fissato a  $Q_2 = O + 2R \mathbf{e}_y$ ;
- (iv) Una forza viscosa  $-\gamma \mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}}$  con  $\gamma \geq 0$ .

Si risponda ai questi seguenti in riferimento al sistema di coordinate cilindriche  $r, \varphi, z$ .

- (1). Si determinino le equazioni pure di movimento per il punto  $P$  e l'equazione che determina la reazione vincolare al variare del tempo quando è assegnato un moto del sistema.
- (2). Si scriva l'espressione dell'energia meccanica totale  $\mathcal{E}|_{\mathcal{R}}$  del punto  $P$  nel riferimento  $\mathcal{R}$  e si

dimostri che è conservata su ogni moto del sistema se  $\gamma = 0$ . Si provi che, se  $\gamma \neq 0$ , vale invece:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt}|_{\mathcal{R}} = -\gamma \left( R^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right)$$

su ogni moto del sistema.

(3). Si determinino le configurazioni di equilibrio del punto materiale  $P$  e se ne studi la stabilità usando il teorema di Liapunov ed il punto (2).

(4). Mostrare che se  $H = 0$  e  $\gamma = 0$  allora si ha anche l'integrale primo:

$$\Lambda(\varphi, \dot{\varphi}) := \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^2 - 2\kappa R^2 (\sin \varphi + \cos \varphi).$$

Usando tale risultato, esprimere la componente della reazione vincolare  $\phi$  rispetto a  $\mathbf{e}_r$  come una funzione di  $\varphi$  sul moto di condizioni iniziali  $\dot{\varphi}(0) = 0$  e  $\varphi(0) = \pi/2$ .

**Soluzione.**

(1) L'equazione del moto del punto  $P$  è

$$m \mathbf{a}_P|_{\mathcal{R}} = \phi - mg \mathbf{e}_z - \kappa(P - Q_1) - \kappa(P - Q_2) + \mathbf{H} \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} - \gamma \mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}}. \quad (1.1)$$

Scriviamo questa equazione in coordinate cilindriche. Teniamo conto delle relazioni:

$$\mathbf{e}_r = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y, \quad (1.2)$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y, \quad (1.3)$$

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \quad (1.4)$$

che si invertono in:

$$\mathbf{e}_x = \cos \varphi \mathbf{e}_r - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi, \quad (1.5)$$

$$\mathbf{e}_y = \sin \varphi \mathbf{e}_r + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi, \quad (1.6)$$

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \quad (1.7)$$

per cui, tendo conto che è  $P - O = r \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z$ , si ha:

$$P - Q_1 = R \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z - 2R \cos \varphi \mathbf{e}_r + 2R \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi,$$

e

$$P - Q_2 = R \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z - 2R \sin \varphi \mathbf{e}_r - 2R \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi.$$

Infine

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} = R \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{e}_\varphi + \frac{dz}{dt} \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{a}_P|_{\mathcal{R}} = R \frac{d^2\varphi}{dt^2} \mathbf{e}_\varphi - R \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \mathbf{e}_r + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{e}_z.$$

Mettendo tutto insieme e tenendo conto che  $\phi = \phi \mathbf{e}_r$  per il fatto che il vincolo è liscio, l'equazione (1.1) si scrive

$$mR \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \mathbf{e}_\varphi - mR \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \mathbf{e}_r + m \frac{d^2 z}{dt^2} \mathbf{e}_z = \phi \mathbf{e}_r - mg \mathbf{e}_z - \gamma \left( R \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{e}_\varphi + \frac{dz}{dt} \mathbf{e}_z \right) + H \left( R \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{e}_z - \frac{dz}{dt} \mathbf{e}_\varphi \right) - \kappa (2R \mathbf{e}_r + 2z \mathbf{e}_z - 2R(\cos \varphi + \sin \varphi) \mathbf{e}_r + 2R(\sin \varphi - \cos \varphi) \mathbf{e}_\varphi) .$$

Raccogliendo i fattori complessivi dei tre versori abbiamo le tre equazioni:

$$mR \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\gamma R \frac{d\varphi}{dt} - H \frac{dz}{dt} - \kappa 2R(\sin \varphi - \cos \varphi) , \quad (1.8)$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg - \gamma \frac{dz}{dt} + HR \frac{d\varphi}{dt} - \kappa 2z , \quad (1.9)$$

$$\phi = -mR \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + 2R\kappa (1 - \cos \varphi - \sin \varphi) . \quad (1.10)$$

Il sistema (1.8)-(1.9) è evidentemente riscrivibile in forma normale ed il secondo membro è di classe  $C^\infty$ . Pertanto esso determina il moto del sistema una volta assegnate condizioni iniziali in  $\varphi$  e  $z$  (i valori di tali coordinate e delle loro derivate prime al tempo 0). Tale sistema costituisce il sistema delle equazioni pure di movimento. La reazione vincolare viene determinata, una volta determinato un moto, dall'equazione (1.10).

(2) Le forze conservative che agiscono sul sistema sono quelle dovute alla due molle e quella dovuta alla forza di gravità. Di conseguenza

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{R}}(P) = mgz + \frac{\kappa}{2}(P - Q_1)^2 + \frac{\kappa}{2}(P - Q_2)^2 .$$

Usando le espressioni precedentemente trovate per  $P - Q_1$  e  $P - Q_2$  si trova esplicitamente che:

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{R}}(\varphi, z) = mgz + 2\kappa R^2 \left( \frac{z^2}{2R^2} - \sin \varphi - \cos \varphi + 5 \right) . \quad (1.11)$$

Possiamo omettere la costante 5 dentro la parentesi tonda, dato che l'energia potenziale è definibile a meno di costanti. Pertanto, l'energia meccanica totale è

$$\mathcal{E}|_{\mathcal{R}} = \frac{m}{2} R^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{m}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + mgz + 2\kappa R^2 \left( \frac{z^2}{2R^2} - \sin \varphi - \cos \varphi \right) .$$

Passiamo a provare la conservazione dell'energia. Moltiplicando (1.8) per  $Rd\varphi/dt$  e (1.9) per  $dz/dt$  e sommando membro a membro il risultato, otteniamo l'identità, valida su ogni moto del sistema:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{m}{2} R^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{m}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right] = \frac{d}{dt} \left[ mgz + 2\kappa R^2 \left( \frac{z^2}{2R^2} - \sin \varphi - \cos \varphi \right) \right] - \gamma \left( R^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right) .$$

Questa identità può essere riscritta come:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{m}{2} R^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{m}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + mgz + 2\kappa R^2 \left( \frac{z^2}{2R^2} - \sin \varphi - \cos \varphi \right) \right] = -\gamma \left( R^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right),$$

cioé :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}|_{\mathcal{R}} = -\gamma \left( R^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right)$$

In altre parole, l'energia meccanica si conserva sui moti del sistema se  $\gamma = 0$ .

**(3)** Passiamo a determinare le configurazioni di equilibrio. Prima di tutto scriviamo il sistema delle equazioni pure di movimento come sistema del prim'ordine:

$$mR \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = -\gamma R \dot{\varphi} - H \dot{z} - \kappa 2R (\sin \varphi - \cos \varphi), \quad (1.12)$$

$$m \frac{d\dot{z}}{dt} = -mg - \gamma \dot{z} + HR \dot{\varphi} - \kappa 2z, \quad (1.13)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \quad (1.14)$$

$$\frac{dz}{dt} = \dot{z}. \quad (1.15)$$

Le configurazioni di equilibrio  $(\phi_0, z_0)$  del sistema del *secondo ordine* (1.8)-(1.9), sono per definizione individuate dalla richiesta che:

$$(\phi_0, z_0, \dot{\phi}_0 = 0, \dot{z}_0 = 0)$$

sia un punto singolare del problema del *prim'ordine* (1.12)-(1.13), (1.14)-(1.15), cioè che il secondo membro di (1.12)-(1.13), (1.14)-(1.15) sia nullo nel punto  $(\phi_0, z_0, \dot{\phi}_0 = 0, \dot{z}_0 = 0)$ . Imponendo ciò, si trovano le equazioni

$$\sin \varphi_0 - \cos \varphi_0 = 0, \quad (1.16)$$

$$mg + 2\kappa z = 0, \quad (1.17)$$

che produce come soluzioni le configurazioni di equilibrio:  $(\pi/4, -mg/2\kappa)$  e  $(5\pi/4, -mg/2\kappa)$ . Passiamo a studiarne la stabilità. La funzione di Liapunov da considerare è l'energia meccanica.

$$\mathcal{E}|_{\mathcal{R}} = \frac{m}{2} R^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2} \dot{z}^2 + \mathcal{U}(\varphi, z).$$

Sappiamo che

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}|_{\mathcal{R}} \leq 0$$

valendo:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}|_{\mathcal{R}} = -\gamma \left( R^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right)$$

In altre parole:

$$\dot{\mathcal{E}}(\phi, z, \dot{\phi}, \dot{z}) \leq 0.$$

Nei punti singolari in cui in cui essa ha un minimo stretto si ha equilibrio stabile nel futuro. In effetti  $\mathcal{E}$ , per costruzione, almeno nella parte concernente le variabili puntate ha un minimo stretto in  $\dot{\phi}_0 = 0, \dot{z}_0 = 0$ . Andiamo a controllare la matrice hessiana di  $\mathcal{U}$  nelle configurazioni di equilibrio (nelle quali il gradiente di  $\mathcal{U}$  si annulla). Se gli autovalori sono tutti positivi si ha un minimo stretto per  $\mathcal{U}$  che corrisponde ad un minimo stretto di  $\mathcal{E}$  in  $(\phi_0, z_0, \dot{\phi}_0 = 0, \dot{z}_0 = 0)$ . In tal caso il punto singolare  $(\phi_0, z_0, \dot{\phi}_0 = 0, \dot{z}_0 = 0)$  ovvero, equivalentemente la configurazione di equilibrio  $(\phi_0, z_0)$ , è stabile nel futuro. La matrice hessiana di  $\mathcal{U}$  vale:

$$H(\varphi, z) = \text{diag} ( 2\kappa R^2(\sin \varphi + \cos \varphi), 2\kappa ).$$

Di conseguenza:

$$H(\pi/4, -mg/2\kappa) = \text{diag} ( 2\kappa R^2\sqrt{2}, 2\kappa ),$$

e questo significa che la configurazione  $(-mg/2\kappa, \pi/4)$  è stabile nel futuro. Notiamo ulteriormente che se  $\gamma = 0$  allora l'energia meccanica si conserva sui moti del sistema:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}|_{\mathcal{R}} = 0.$$

In tal caso vale anche:

$$\dot{\mathcal{E}}(\phi, z, \dot{\phi}, \dot{z}) = 0.$$

In questo caso il teorema di Liapunov prova che vale anche la stabilità nel passato se si ha un minimo stretto di  $\mathcal{E}$ . Concludiamo che, se  $\gamma = 0$ , la configurazione di equilibrio  $(\pi/4, -mg/2\kappa)$  è stabile nel passato e nel futuro. Passiamo a studiare l'altra configurazione. In questo caso si ha un autovalore negativo ed uno positivo:

$$H(5\pi/4, -mg/2\kappa) = \text{diag} ( -2\kappa R^2\sqrt{2}, 2\kappa ).$$

Dal teorema di Liapunov non possiamo concludere nulla. Possiamo dire qualcosa nel caso in cui  $H = 0$  e  $\gamma = 0$ . In questo caso il punto materiale è sottoposto a sole forze conservative, se escludiamo la reazione vincolare. Le equazioni del moto diventano:

$$mR \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathcal{U}(\varphi, z), \tag{1.18}$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{U}(\varphi, z). \tag{1.19}$$

Tenendo conto dell'osservazione ??, possiamo applicare la proposizione ?? (pensando  $M := mR^2$  come la massa di un punto e  $m$  quella dell'altro, per una coppia di punti che vivono in spazi unidimensionali). Dato che l'hessiana di  $\mathcal{U}$  ha un autovalore negativo nella configurazione di equilibrio  $(5\pi/4, -mg/2\kappa)$  concludiamo che la configurazione di equilibrio  $(5\pi/4, -mg/2\kappa)$  è instabile nel passato e nel futuro.

(4) Nel caso  $H = 0$  e  $\gamma = 0$ , moltiplicando ambo i membri di (1.8) per  $Rd\varphi/dt$  si arriva immediatamente all'equazione, valida sui moti del sistema:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} m R^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - 2\kappa R^2 (\sin \varphi + \cos \varphi) \right] = 0,$$

che equivale alla conservazione di  $\Lambda$ . Dato che  $\Lambda$  si conserva sul moto, abbiamo che

$$\frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}(t)^2 - 2\kappa R^2 (\sin \varphi(t) + \cos \varphi(t)) = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}(0)^2 - 2\kappa R^2 (\sin \varphi(0) + \cos \varphi(0)).$$

In particolare, sulla soluzione determinata dalle condizioni  $\dot{\varphi}(0) = 0$  e  $\varphi(0) = \pi/2$ , vale

$$\frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}(t)^2 - 2\kappa R^2 (\sin \varphi(t) + \cos \varphi(t)) = -2\kappa R^2,$$

da cui:

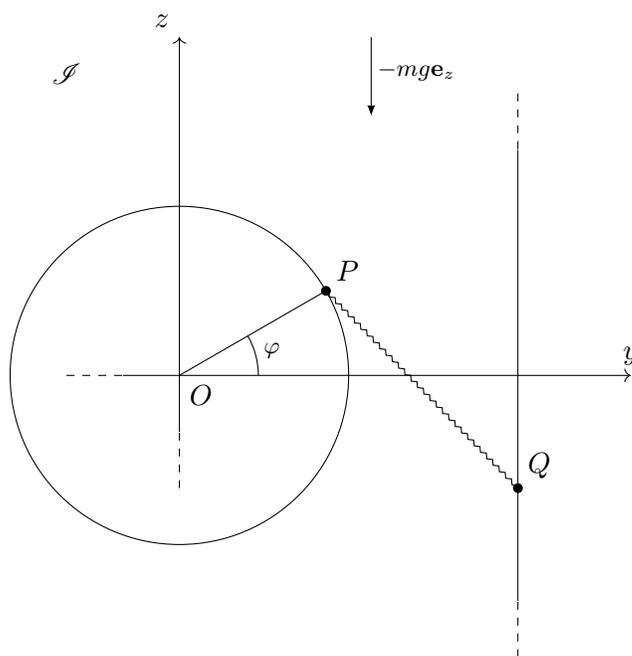
$$\dot{\varphi}(t)^2 = \frac{4\kappa}{m} (\sin \varphi(t) + \cos \varphi(t) - 1).$$

Inserendo nell'equazione (1.10) troviamo la relazione cercata:

$$\phi = 6\kappa R (1 - \sin \varphi - \cos \varphi).$$

## ESERCIZIO 2

Nel riferimento inerziale  $\mathcal{R}$ , rispetto a coordinate cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{R}$ ,  $x, y, z$  di origine  $O$ , un punto materiale  $P$  di massa  $m > 0$  è vincolato a giacere sulla circonferenza  $z^2 + y^2 = R^2$ ,  $x = 0$ . Un secondo punto materiale  $Q$  di massa  $m > 0$  è vincolato ad appartene-



re alla retta parallela a  $\mathbf{e}_z$  e passante per  $(0, 2R, 0)$ . Entrambi i vincoli sono supposti lisci ed entrambi i punti sono sottoposti alla forza di gravità  $-mg \mathbf{e}_z$  (con  $g \geq 0$ ). Infine i punti sono connessi l'un l'altro da una molla di costante elastica  $\kappa > 0$  e lunghezza nulla a riposo. Si risolvano i seguenti quesiti.

- (1). Scrivere le equazioni pure di movimento del sistema e le equazioni che determinano le reazioni vincolari. Si determini la posizione del punto  $P$  tramite l'angolo  $\varphi$  che  $P - O$  descrive rispetto all'asse  $y$ , con orientazione positiva rispetto a  $\mathbf{e}_x$ . Si determini la posizione del punto  $Q$  tramite la sua coordinata  $z$ .
- (2). Si scriva esplicitamente l'energia meccanica totale del sistema e si provi che si conserva sui moti del sistema.
- (3). Si scrivano le equazioni che determinano le configurazioni di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità nella situazione  $g = 0$  (conservando la richiesta  $\kappa > 0$ ).

**Soluzione.**

- (1). Le equazioni del moto dei due punti sono (non scriviamo esplicitamente  $|\mathcal{R}$  in quanto

lavoriamo solo con un riferimento)

$$m\mathbf{a}_P = -mg\mathbf{e}_z - \kappa(P - Q) + \phi_P, \quad (1.20)$$

$$m\mathbf{a}_Q = -mg\mathbf{e}_z - \kappa(Q - P) + \phi_Q. \quad (1.21)$$

Definiamo il solito sistema di coordinate polari piane  $r, \varphi$  adattato alla circonferenza in cui l'angolo  $\varphi$  individua  $P-O$  rispetto all'asse  $y$ , con orientazione positiva rispetto a  $\mathbf{e}_x$ . Esprimiamo le equazioni del moto usando, per ciascun punto, le coordinate suggerite nel testo. Le relazioni tra i versori  $\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  e quelli associati alle coordinate polari sono, al solito:

$$\mathbf{e}_r = \cos \varphi \mathbf{e}_y + \sin \varphi \mathbf{e}_z, \quad (1.22)$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \varphi \mathbf{e}_z, \quad (1.23)$$

che si invertono in (prendendo la trasposta della corrispondente trasformazione lineare):

$$\mathbf{e}_y = \cos \varphi \mathbf{e}_r - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi, \quad (1.24)$$

$$\mathbf{e}_z = \sin \varphi \mathbf{e}_r + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi. \quad (1.25)$$

Di conseguenza:

$$P - Q = (R \cos \varphi - 2R) \mathbf{e}_y + (R \sin \varphi - z) \mathbf{e}_z, \quad (1.26)$$

può anche essere scritto come

$$P - Q = (R \cos \varphi - 2R)(\cos \varphi \mathbf{e}_r - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi) + (R \sin \varphi - z)(\sin \varphi \mathbf{e}_r + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi),$$

ossia:

$$P - Q = (R - 2R \cos \varphi - z \sin \varphi) \mathbf{e}_r + (2R \sin \varphi - z \cos \varphi) \mathbf{e}_\varphi. \quad (1.27)$$

Tenendo conto del fatto che

$$\mathbf{a}_Q = \frac{d^2 z}{dt^2} \mathbf{e}_z,$$

l'equazione (1.21) usando (1.26), può decomporre, sulla base  $\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_x$  nelle tre equazioni con ovvie notazioni:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 z}{dt^2} &= -mg + \kappa(R \sin \varphi - z), \\ 0 &= \kappa(R \cos \varphi - 2R) + \phi_Q^y, \\ 0 &= \phi_Q^x. \end{aligned}$$

Tenendo conto del fatto che:

$$\mathbf{a}_P = R \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \mathbf{e}_\varphi - R \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \mathbf{e}_r,$$

con una analoga procedura, usando l'equazione (1.27), l'equazione del moto (1.20) si decompone nelle tre equazioni sulla base  $\mathbf{e}_\varphi$ ,  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_x$ :

$$\begin{aligned} mR \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= -mg \cos \varphi - \kappa(2R \sin \varphi - z \cos \varphi), \\ -mR \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 &= -mg \sin \varphi - \kappa(R - 2R \cos \varphi - z \sin \varphi) + \phi_P^r, \\ 0 &= \phi_P^x. \end{aligned}$$

Abbiamo dunque un sistema di equazioni differenziali corrispondente alle equazioni pure di movimento (infatti tale sistema è scrivibile in forma normale ed il secondo membro è  $C^\infty$ ):

$$mR \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg \cos \varphi - \kappa(2R \sin \varphi - z \cos \varphi), \quad (1.28)$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = -mg + \kappa(R \sin \varphi - z), \quad (1.29)$$

ed equazioni che, una volta noto un moto del sistema, determinano tutte le componenti delle reazioni vincolari:

$$\begin{aligned} \phi_P^r &= -mR \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + mg \sin \varphi + \kappa(R - 2R \cos \varphi - z \sin \varphi), \\ \phi_P^x &= 0, \\ \phi_Q^y &= -\kappa(R \cos \varphi - 2R), \\ \phi_Q^x &= 0. \end{aligned}$$

(2). L'energia meccanica del sistema è la somma dell'energia cinetica

$$\mathcal{T} := \frac{m}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{m}{2} R^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2,$$

e delle energie potenziali dovute alla forza della molla ed alla gravità (attenzione che l'energia della molla è contata *una volta sola*):

$$\mathcal{U} = \frac{\kappa}{2}(P - Q)^2 + mgR \sin \varphi + mgz.$$

Usando (1.26) si trova esplicitamente, trascurando una inessenziale costante additiva:

$$\mathcal{U}(\varphi, z) := \frac{\kappa z^2}{2} - \kappa R(2R \cos \varphi + z \sin \varphi) + mgR \sin \varphi + mgz. \quad (1.30)$$

Sommando tutto:

$$\mathcal{E} = \frac{m}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{m}{2} R^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{\kappa z^2}{2} - \kappa R(2R \cos \varphi + z \sin \varphi) + mgR \sin \varphi + mgz. \quad (1.31)$$

Per provare che  $\mathcal{E}$  è conservata sui moti del sistema è sufficiente procedere come segue. Si moltiplicano ambo membri di (1.28) per  $Rd\varphi/dt$  e ambo membri di (1.29) per  $dz/dt$ , quindi si sommano membro a membro i risultati ottenendo:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{m}{2} R^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( -\frac{\kappa z^2}{2} + \kappa R(2R \cos \varphi - z \sin \varphi) - mgR \sin \varphi - mgz \right),$$

che può essere riscritta semplicemente come, supponendo verificate le equazioni (1.28) e (1.29):

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0.$$

**(3).** Le configurazioni  $(\varphi_0, z_0)$  di equilibrio per il sistema del *secondo ordine* (1.28)-(1.29) si ottengono, ragionando come per l'esercizio precedente, imponendo che per  $(\varphi, z) = (\varphi_0, z_0)$  i secondi membri di (1.28) e (1.29) siano nulli quando valgono le ulteriori condizioni  $d\varphi/dt = 0$  e  $dz/dt = 0$ . Questa procedura porta immediatamente alle equazioni che determinano le configurazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} \kappa R \sin \varphi_0 &= \kappa z_0 + mg, \\ (\kappa z_0 - mg) \cos \varphi_0 &= 2(\kappa z_0 + mg). \end{aligned}$$

Nel caso in cui  $g = 0$  e  $\kappa > 0$ , il sistema si riduce a

$$\begin{aligned} R \sin \varphi_0 &= z_0, \\ z_0 \cos \varphi_0 &= 2z_0. \end{aligned}$$

Evidentemente le uniche soluzioni possibili sono  $z_0 = 0$  e  $\varphi_0$  tale che  $\sin \varphi_0 = 0$ . Quindi abbiamo due configurazioni di equilibrio  $(\varphi_0, z_0)$ :  $(0, 0)$  e  $(\pi, 0)$ . Passiamo allo studio della stabilità di esse. Al solito l'idea è di usare l'energia meccanica come funzione di Liapunov dato che, essendo conservata vale  $\dot{\mathcal{E}} = 0$ . Dall'espressione di  $\mathcal{E}$  in (1.31), vediamo che si ha un minimo stretto nella parte riguardate le velocità  $d\varphi/dt$ ,  $dz/dt$  attorno alla configurazione di velocità nulle. Se l'energia potenziale ha un minimo stretto in una delle due configurazioni di equilibrio, l'energia totale, pensata come funzione di Liapunov, soddisfa le ipotesi del teorema di Liapunov e si ha stabilità nel futuro e anche nel passato valendo  $\dot{\mathcal{E}} = 0$  e non solo  $\dot{\mathcal{E}} \leq 0$ . Viceversa se la matrice hessiana dell'energia potenziale in una delle due configurazioni ha un autovalore negativo, applicando la proposizione ?? (tenendo conto dell'osservazione ??) notando che le equazioni pure di movimento si possono riscrivere come:

$$\begin{aligned} mR^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= -\frac{\mathcal{U}(\varphi, z)}{\partial \varphi}, \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{\mathcal{U}(\varphi, z)}{\partial z}, \end{aligned}$$

concludiamo che la configurazione di equilibrio è instabile nel passato e nel futuro. Il calcolo della matrice hessiana di  $\mathcal{U}$  con  $g = 0$ :

$$\mathcal{U}(\varphi, z) := \frac{\kappa z^2}{2} - \kappa R(2R \cos \varphi + z \sin \varphi),$$

fornisce direttamente

$$H(\varphi_0, z_0) = \kappa \begin{bmatrix} 1 & -R \cos \varphi_0 \\ -R \cos \varphi_0 & 2R^2 \cos \varphi_0 + z_0 R \sin \varphi_0 \end{bmatrix}.$$

Ne consegue che:

$$H(0, 0) = \kappa \begin{bmatrix} 1 & -R \\ -R & 2R^2 \end{bmatrix}.$$

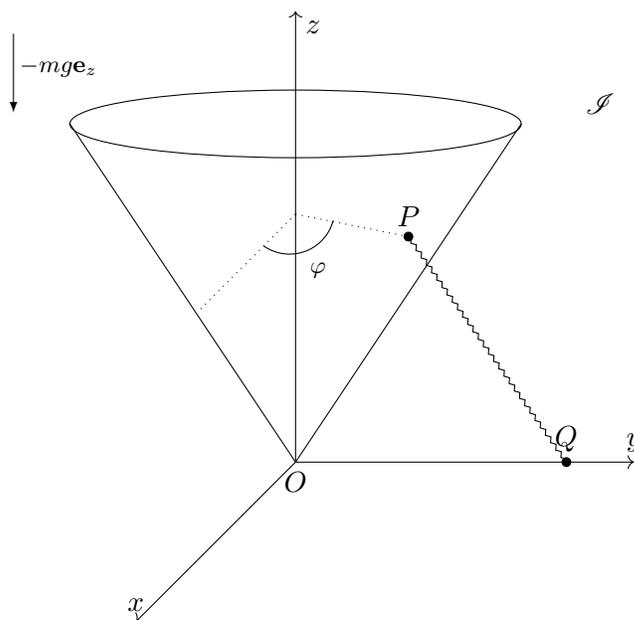
Avendo questa matrice traccia  $\kappa(1 + 2R^2)$  e determinante  $\kappa^2 R^2$  positivi, concludiamo che i suoi autovalori (la cui somma è la traccia della matrice ed il cui prodotto ne è il determinante) sono strettamente positivi. Segue immediatamente che la configurazione di equilibrio considerata è un minimo stretto dell'energia potenziale.  $\varphi_0 = 0, z_0 = 0$  è quindi una configurazione di equilibrio stabile nel futuro e nel passato. Considerando l'altra configurazione si trova invece:

$$H(\pi, 0) = \kappa \begin{bmatrix} 1 & R \\ R & -2R^2 \end{bmatrix}.$$

Dato che il determinante della matrice è negativo (pari a  $-3\kappa^4 R^2$ ) e che esso deve coincidere con il prodotto degli autovalori della matrice considerata, uno degli autovalori deve essere negativo (e l'altro positivo). Conseguentemente la configurazione di equilibrio  $\varphi_0 = \pi, z_0 = 0$  è instabile nel passato e nel futuro.

### ESERCIZIO 3

Si consideri la porzione di cono  $S$  di equazioni  $0 < z = \sqrt{x^2 + y^2}$  riferita a coordinate cartesiane ortonormali  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  con origine  $O$ , nello spazio di quiete di un riferimento inerziale  $\mathcal{R}$ . Un



punto materiale  $P$  di massa  $m > 0$  è vincolato a muoversi su  $S$  pensato come superficie liscia.  $P$  è sottoposto alla forza di gravità  $-mg \mathbf{e}_z$ , alla forza di una molla di costante elastica  $\kappa > 0$  e di lunghezza nulla a riposo, connessa a  $P$  ed al punto fisso  $Q = (0, h, 0)$  dove  $h > 0$ .

Si descriva la posizione del punto  $P$  su  $S$  tramite le coordinate:  $\varphi \in (-\pi, \pi)$ , angolo polare della proiezione di  $P$  sul piano  $z = 0$  (riferito a sono coordinate polari standard riferite agli assi  $x, y$ ) e coordinata  $\zeta := \|P - O\| \in (0, +\infty)$ . Si indichino con  $\mathbf{e}_\varphi$  e  $\mathbf{e}_\zeta$  i versori (tra di loro ortonormali) associati a tali coordinate e con  $\mathbf{n} := \mathbf{e}_\varphi \wedge \mathbf{e}_\zeta$  il versore normale in ogni punto alla superficie del cono.

Si risolvano i seguenti quesiti.

- (1). Si scrivano le equazioni pure di movimento per il punto  $P$  e l'equazione che determina la reazione vincolare  $\phi$ .
- (2). Si scriva la forma esplicita dell'energia meccanica totale  $\mathcal{E}$  del punto  $P$  nelle coordinate suddette e si provi che è conservata nel tempo sui moti del sistema.
- (3). Si determinino le configurazioni di equilibrio in funzione dei valori assunti dai parametri  $m, \kappa, g$  e se ne discuta la stabilità. Infine si calcoli la reazione vincolare  $\phi$  nelle eventuali configurazioni di equilibrio stabile.

Per facilitare lo svolgimento dell'esercizio precisiamo che valgono le seguenti relazioni:

$$\dot{\mathbf{e}}_\zeta = \dot{\varphi} \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_\varphi, \quad (1.32)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_\zeta + \dot{\varphi} \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{n}, \quad (1.33)$$

$$\dot{\mathbf{n}} = -\dot{\varphi} \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_\varphi. \quad (1.34)$$

**Soluzione.**

(1). L'equazione del moto del punto  $P$  è data da (omettiamo in tutto il seguito  $P|_{\mathcal{R}}$  visto che lavoriamo in un fissato riferimento inerziale e per un unico punto materiale):

$$m\mathbf{a} = -mg \mathbf{e}_z - \kappa(P - Q) + \phi. \quad (1.35)$$

Vogliamo esprimere questa equazione nella base  $\mathbf{e}_\zeta, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{n}$ .

Se  $P - O = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$ , vale la relazione  $\zeta := \sqrt{(x^2 + y^2) + z(x, y)^2}$  e quindi:

$$\zeta = \sqrt{2} \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (1.36)$$

ed inoltre:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \zeta \cos \varphi, \quad (1.37)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \zeta \sin \varphi, \quad (1.38)$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} \zeta \quad (1.39)$$

I versori  $\mathbf{e}_\zeta$  e  $\mathbf{e}_\varphi$  tangenti alle curve coordinate  $\zeta$  e  $\varphi$  (diretti nella direzione in cui crescono tali coordinate), ed il loro prodotto vettore  $\mathbf{n} := \mathbf{e}_\zeta \wedge \mathbf{e}_\varphi$  normale a  $S$ , sono scrivibili rispetto alla base cartesiana come:

$$\mathbf{e}_\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \varphi \mathbf{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi \mathbf{e}_y + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_z, \quad (1.40)$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y, \quad (1.41)$$

$$\mathbf{n} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \varphi \mathbf{e}_x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi \mathbf{e}_y + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_z. \quad (1.42)$$

Queste relazioni si invertono (prendendo la trasposta della matrice di trasformazione) in

$$\mathbf{e}_x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \varphi \mathbf{e}_\zeta - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \varphi \mathbf{n}, \quad (1.43)$$

$$\mathbf{e}_y = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi \mathbf{e}_\zeta + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi \mathbf{n}, \quad (1.44)$$

$$\mathbf{e}_z = \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_\zeta + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{n}. \quad (1.45)$$

Tornando alla (1.35) come conseguenza delle relazioni trovate abbiamo che:

$$-mg \mathbf{e}_z = -mg \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_\zeta - mg \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{n} \quad (1.46)$$

e, essendo  $-\kappa(P - Q) = -\kappa(\zeta \mathbf{e}_\zeta - h \mathbf{e}_y)$ , vale anche:

$$-\kappa(P - Q) = -\kappa \left( \zeta - h \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi \right) \mathbf{e}_\zeta + \kappa h \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi - \kappa h \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi \mathbf{n}. \quad (1.47)$$

Passiamo ora ad esprimere l'accelerazione usando le coordinate  $\zeta, \varphi$  ed i versori ad essi associati. Assumiamo quindi che  $\zeta = \zeta(t), \varphi = \varphi(t)$  descrivano l'evoluzione del punto  $P(t)$  su  $S$ . La posizione di  $P(t)$  è individuata dal vettore posizione:  $P(t) - O = \zeta(t) \mathbf{e}_\zeta(t)$ . La derivata nel tempo di esso definisce la velocità del punto nel riferimento  $\mathcal{R}$  in cui il cono  $C$  è immobile. Bisogna tenere conto del fatto che  $\mathbf{e}_\zeta$  varia nel tempo. Indicando con il punto la derivata temporale si ha:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\zeta}(t) \mathbf{e}_\zeta(t) + \zeta(t) \dot{\mathbf{e}}_\zeta(t).$$

La derivata temporale dei versori si ottiene derivando il secondo membro di (1.40)-(1.42) (assumendo  $\zeta = \zeta(t), \phi = \varphi(t)$ ) e quindi usando (1.43)-(1.45) nel risultato. Il calcolo fornisce:

$$\dot{\mathbf{e}}_\zeta = \dot{\varphi} \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_\varphi, \quad (1.48)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_\zeta + \dot{\varphi} \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{n}, \quad (1.49)$$

$$\dot{\mathbf{n}} = -\dot{\varphi} \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_\varphi, \quad (1.50)$$

come già scritto nel suggerimento dato alla fine del testo dell'esercizio.

Da queste relazioni si ha l'espressione esplicita della velocità di  $P$  nel riferimento  $\mathcal{R}$ :

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\zeta}(t) \mathbf{e}_\zeta(t) + \dot{\varphi}(t) \zeta(t) \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_\varphi(t). \quad (1.51)$$

Abbiamo espresso la velocità sulla base associata alla superficie su cui il punto è vincolato. Derivando (1.51) nel tempo

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{\zeta}(t) \mathbf{e}_\zeta(t) + \dot{\zeta}(t) \dot{\mathbf{e}}_\zeta(t) + \dot{\varphi}(t) \dot{\zeta}(t) \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_\varphi(t) + \ddot{\varphi}(t) \zeta(t) \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_\varphi + \dot{\varphi}(t) \zeta(t) \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\mathbf{e}}_\varphi(t),$$

e procedendo come sopra (usando le espressioni ottenute per le derivate dei versori), si ottiene infine l'espressione dell'accelerazione rispetto a  $\mathcal{R}$ , decomposta in parte normale e parte tangente alla superficie conica:

$$\mathbf{a}(t) = \left( \ddot{\zeta}(t) - \frac{1}{2} \dot{\varphi}(t)^2 \zeta(t) \right) \mathbf{e}_\zeta(t) + \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \ddot{\varphi}(t) \zeta(t) + 2 \dot{\varphi}(t) \dot{\zeta}(t) \right) \mathbf{e}_\varphi(t) + \frac{\dot{\varphi}(t)^2 \zeta(t)}{2} \mathbf{n}(t). \quad (1.52)$$

L'equazione (1.35) si riscrive pertanto usando (1.52), (1.46), (1.47) e tendo conto del fatto che  $\phi = \phi \mathbf{n}$ :

$$\begin{aligned} & m \left( \ddot{\zeta}(t) - \frac{1}{2} \dot{\varphi}(t)^2 \zeta(t) \right) \mathbf{e}_\zeta + \frac{\sqrt{2}}{2} m \left( \ddot{\varphi}(t) \zeta(t) + 2 \dot{\varphi}(t) \dot{\zeta}(t) \right) \mathbf{e}_\varphi + m \frac{\dot{\varphi}(t)^2 \zeta(t)}{2} \mathbf{n} \\ &= \phi \mathbf{n} - mg \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_\zeta - mg \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{n} - \kappa \left( \zeta - h \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi \right) \mathbf{e}_\zeta + \kappa h \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi - \kappa h \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Raccogliendo le varie componenti abbiamo le equazioni, corrispondenti agli assi  $\mathbf{e}_\varphi$  e  $\mathbf{e}_\zeta$  rispettivamente:

$$m \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = m \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \zeta(t) - mg \frac{\sqrt{2}}{2} - \kappa \left( \zeta - h \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi(t) \right), \quad (1.53)$$

$$m \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -2m \zeta(t)^{-1} \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\zeta}{dt} + \zeta(t)^{-1} \kappa h \sqrt{2} \cos \varphi(t) \quad (1.54)$$

che costituiscono le equazioni pure di movimento, dato che sono banalmente riscrivibili in forma normale e il secondo membro è di classe  $C^\infty$  (notare che la singolarità per  $\zeta = 0$  è fuori dal dominio delle coordinate). Si ha infine, in corrispondenza dell'asse  $\mathbf{n}$ , l'equazione che determina la reazione vincolare quando è assegnato un moto del sistema:

$$\phi(t) = m \frac{\zeta(t)}{2} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + mg \frac{\sqrt{2}}{2} + \kappa h \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi(t). \quad (1.55)$$

(2). Le forze, eccetto quella dovuta al vincolo, sono tutte conservative. Tenendo conto di (1.51), l'energia meccanica totale del sistema si può scrivere:

$$\mathcal{E} = \frac{m}{2} \dot{\zeta}^2 + \frac{m}{4} \dot{\varphi}^2 \zeta(t)^2 + \mathcal{U},$$

dove l'energia potenziale vale:

$$\mathcal{U} := mgz + \frac{\kappa}{2} (P - Q)^2.$$

Usando anche  $z = \frac{\sqrt{2}}{2} \zeta$  e (1.47) si trova che (omettendo la costante additiva  $\kappa h^2/4$ ):

$$\mathcal{E} = \frac{m}{2} \dot{\zeta}^2 + \frac{m}{4} \dot{\varphi}^2 \zeta(t)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} mg \zeta + \frac{\kappa}{2} \left( \zeta^2 - \sqrt{2} h \zeta \sin \varphi \right). \quad (1.56)$$

L'energia meccanica è conservata, dato che l'unica forza non conservativa,  $\phi$ , ha potenza nulla valendo  $\phi \cdot \mathbf{v} = 0$ , in quanto:  $\phi$  è normale alla superficie  $S$  mentre  $\mathbf{v}$  è tangente a tale superficie. Alternativamente si può procedere partendo dalle equazioni pure di movimento (1.53) e (1.54), moltiplicando la prima per  $d\zeta/dt$  e la seconda per  $(\zeta^2/2)d\varphi/dt$  e quindi sommando membro a membro le identità ottenute in questo modo. Con qualche passaggio si ottiene:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{m}{2} \dot{\zeta}^2 + \frac{m}{4} \dot{\varphi}^2 \zeta(t)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} mg \zeta + \frac{\kappa}{2} \left( \zeta^2 - \sqrt{2} h \zeta \sin \varphi \right) \right] = 0.$$

**(3).** Le configurazioni di equilibrio  $(\phi_0, \zeta_0)$  si ottengono dalle equazioni pure di movimento (1.53) e (1.54) imponendo che per  $(\varphi, \zeta) = (\phi_0, \zeta_0)$  si annullino i secondi membri di (1.53) e (1.54), quando si richiede anche che  $d\phi/dt = 0$  e  $d\zeta/dt = 0$ . In tal modo si perviene alle equazioni:

$$mg \frac{\sqrt{2}}{2} + \kappa \left( \zeta_0 - h \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi_0 \right) = 0, \quad (1.57)$$

$$\cos \varphi_0 = 0. \quad (1.58)$$

Ci sono quindi, a priori, due configurazioni di equilibrio:

$$\left( \pi/2, \frac{\sqrt{2}}{2}(h - mg/\kappa) \right) \quad \text{e} \quad \left( -\pi/2, \frac{\sqrt{2}}{2}(-h - mg/\kappa) \right)$$

In realtà, *dato che deve essere*  $\zeta_0 > 0$ , la configurazione corrispondente a  $\phi_0 = -\pi/2$  e  $\zeta_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(h + mg/\kappa)$  non è accettabile in quanto  $h > 0$  per ipotesi per cui  $\zeta_0 < 0$ . La configurazione  $\phi_0 = \pi/2$  e  $\zeta_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(h - mg/\kappa)$  ha senso solo se  $h > mg/\kappa$ . Studiamo la stabilità di questa configurazione. Possiamo usare  $\mathcal{E}$  come candidata funzione di Liapunov: essa soddisfa  $\dot{\mathcal{E}} = 0$ , essendo conservata sui moti del sistema, ed ha un minimo stretto nella parte dell'energia cinetica in corrispondenza di  $d\phi/dt = 0$  e  $d\zeta/dt = 0$ . In questa situazione e come già visto negli altri esercizi, in base al teorema di Liapunov, si ha equilibrio stabile nel passato e nel futuro se l'energia potenziale ha matrice hessiana con autovalori tutti positivi.

La matrice hessiana di  $\mathcal{U}$  vale

$$H(\varphi, \zeta) = \kappa \begin{bmatrix} \zeta \frac{\sqrt{2}}{2} h \sin \varphi & -\frac{\sqrt{2}}{2} h \cos \varphi \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} h \cos \varphi & 1 \end{bmatrix}.$$

Se  $\zeta_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(h - mg/\kappa) > 0$ , troviamo in particolare:

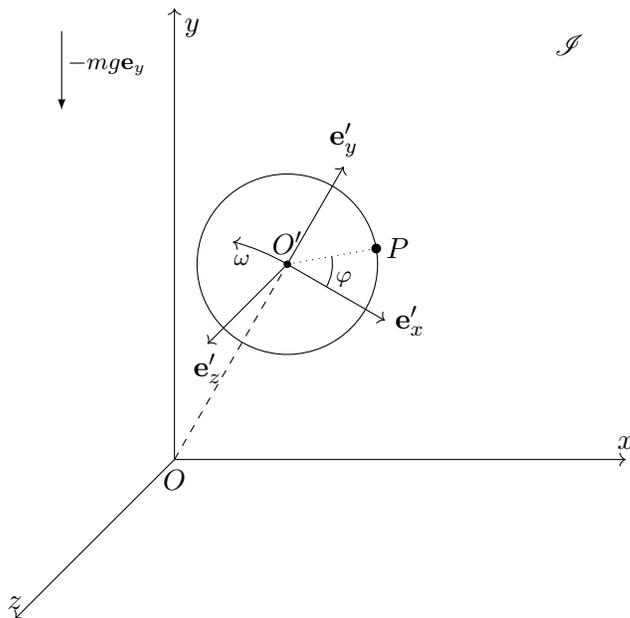
$$H(\pi/2, \zeta_0) = \kappa \begin{bmatrix} \zeta_0 \frac{\sqrt{2}}{2} h & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

che ha entrambi gli autovalori positivi e pertanto l'equilibrio è stabile nel passato e nel futuro. In questa configurazione di equilibrio, la (1.55) fornisce:

$$\boldsymbol{\phi} = \frac{\sqrt{2}}{2} (mg + \kappa h) \mathbf{n} = \frac{1}{2} (mg + \kappa h) (-\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z).$$

#### ESERCIZIO 4

Si consideri un sistema di coordinate cartesiane ortonormali destrorse  $x, y, z$ , solidali con il riferimento inerziale  $\mathcal{R}$ , di origine  $O$  e assi  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ . L'asse  $\mathbf{e}_y$  è verticale in direzione opposta



all'accelerazione di gravità  $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_y$  (con  $g \geq 0$ ). Un punto geometrico  $O'$ , distante  $R > 0$  da  $O$ , ruota nel piano  $xy$  con velocità angolare  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$ , essendo  $\omega > 0$  costante nel tempo. Sia  $\mathcal{R}'$  un nuovo sistema di riferimento (non inerziale) che ammette un sistema di coordinate cartesiane destrorse ortonormali  $x', y', z'$  solidali con  $\mathcal{R}'$ , di origine  $O'$  e assi  $\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z$  con  $\mathbf{e}'_z = \mathbf{e}_z$  e  $\mathbf{e}'_y$  dato dal versore di  $O' - O$ . Si supponga che  $\mathbf{e}'_y = \mathbf{e}_y$  per  $t = 0$ .

Nel piano  $x'y'$ , in quiete con  $\mathcal{R}'$ , si trova una circonferenza  $\Gamma$  di centro  $O'$  e raggio  $r > 0$  con  $r < R$ . Un punto materiale  $P$  di massa  $m > 0$ , sottoposto alla forza di gravità è vincolato a muoversi su  $\Gamma$  pensata come vincolo *liscio*. Si indichi con  $\phi$  la reazione vincolare agente su  $P$  dovuta al vincolo.

(1). Si determini l'equazione pura di movimento del punto  $P$  nel riferimento  $\mathcal{R}'$ , usando come coordinata del punto l'angolo  $\varphi$  che  $P - O'$  individua rispetto a  $\mathbf{e}'_x$ , orientato positivamente rispetto a  $\mathbf{e}'_z$ .

(2). Si ricavi il valore della reazione vincolare  $\phi$  al tempo  $t = 0$  quando valgono le condizioni iniziali  $\varphi(0) = \pi/2, \dot{\varphi}(0) = 0$ . Esprimere tale reazione vincolare rispetto agli assi del riferimento  $\mathcal{R}$ .

(3). Assumendo  $g = 0$ , si dimostri che la grandezza

$$\mathcal{E}(\varphi, \dot{\varphi}) := \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - m\omega^2 Rr \sin \varphi$$

è conservata nel tempo su ogni moto di  $P$ . *Facoltativo*: si spieghi quale sia il significato fisico di  $\mathcal{E}$ .

(4). Assumendo  $g = 0$ , si determinino le configurazioni di equilibrio di  $P$  nel riferimento  $\mathcal{R}'$  e se ne discuta la stabilità.

**Soluzione.**

(1). Convieni scrivere l'equazione del moto inizialmente in  $\mathcal{R}$  e poi passare a  $\mathcal{R}'$  esprimendo le varie quantità cinematiche  $P$  riferite a  $\mathcal{R}$  in funzione delle analoghe in  $\mathcal{R}'$ .

Nel riferimento  $\mathcal{R}$ , le equazioni del moto sono semplicemente:

$$m\mathbf{a}_P|_{\mathcal{R}} = -mg \mathbf{e}_y + \phi. \quad (1.59)$$

Esprimiamo  $\mathbf{a}_P|_{\mathcal{R}}$  in funzione dell'accelerazione in  $\mathcal{R}'$ , tenendo conto che  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'|_{\mathcal{R}}}$  è costante nel tempo, ma  $O'$  è in movimento rispetto a  $\mathcal{R}$ :

$$\mathbf{a}_P|_{\mathcal{R}} = \mathbf{a}_P|_{\mathcal{R}'} + \mathbf{a}_{O'}|_{\mathcal{R}} + 2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'|_{\mathcal{R}}} \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}'} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'|_{\mathcal{R}}} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'|_{\mathcal{R}}} \wedge (P - O')).$$

L'accelerazione di  $O'$  rispetto a  $\mathcal{R}$  si determina come una pura accelerazione centripeta:

$$\mathbf{a}_{O'}|_{\mathcal{R}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'|_{\mathcal{R}}} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'|_{\mathcal{R}}} \wedge (O' - O)) = -\omega^2(O' - O) = -\omega^2 R \mathbf{e}'_y.$$

Posto  $P(t) - O' = \mathbf{x}'(t) = x'(t) \mathbf{e}'_x + y'(t) \mathbf{e}'_y$  abbiamo dunque che:

$$\mathbf{a}_P|_{\mathcal{R}} = \frac{d^2 \mathbf{x}'}{dt^2} - \omega^2 R \mathbf{e}'_y + 2\omega \mathbf{e}'_z \wedge \frac{d\mathbf{x}'}{dt} + \omega^2 \mathbf{e}'_z \wedge (\mathbf{e}'_z \wedge \mathbf{x}').$$

Tenendo infine conto che:

$$\mathbf{e}_y = (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}'_x) \mathbf{e}'_x + (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}'_y) \mathbf{e}'_y = \sin(\omega t) \mathbf{e}'_x + \cos(\omega t) \mathbf{e}'_y,$$

si ricava:

$$-mg \mathbf{e}_y = -mg (\sin(\omega t) \mathbf{e}'_x + \cos(\omega t) \mathbf{e}'_y).$$

Mettendo tutto insieme abbiamo che (1.59) si riscrive, usando le quantità cinematiche di  $\mathcal{R}'$ :

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}'}{dt^2} = \phi - mg (\sin(\omega t) \mathbf{e}'_x + \cos(\omega t) \mathbf{e}'_y) + m\omega^2 R \mathbf{e}'_y - 2m\omega \mathbf{e}'_z \wedge \frac{d\mathbf{x}'}{dt} - m\omega^2 \mathbf{e}'_z \wedge (\mathbf{e}'_z \wedge \mathbf{x}'). \quad (1.60)$$

L'equazione pura di movimento si ottiene passando a lavorare in coordinate naturali adattate al vincolo. In questo caso conviene usare coordinate polari piane  $r, \varphi$  centrate in  $O'$ , in modo che  $\phi$  appaia solo nell'equazione ottenuta proiettando su  $\mathbf{e}_r$ , mentre non appaia nell'equazione che si ottiene proiettando su  $\mathbf{e}_\varphi$ . Quest'ultima sarà l'equazione pura di movimento. Al solito:

$$\mathbf{e}_r = \cos \varphi \mathbf{e}'_x + \sin \varphi \mathbf{e}'_y, \quad (1.61)$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}'_x + \cos \varphi \mathbf{e}'_y, \quad (1.62)$$

che si invertono, prendendo la trasposta della matrice associata alla trasformazione lineare sopra scritta, in

$$\mathbf{e}'_x = \cos \varphi \mathbf{e}_r - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi, \quad (1.63)$$

$$\mathbf{e}'_y = \sin \varphi \mathbf{e}_r + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi. \quad (1.64)$$

Ulteriormente, essendo  $\mathbf{x}'(t) = r \mathbf{e}_r(t)$  (con  $r$  costante) si ha che:

$$\frac{d\mathbf{x}'}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{e}_\varphi(t),$$

e ancora:

$$\frac{d^2\mathbf{x}'}{dt^2} = r \frac{d^2\varphi}{dt^2} \mathbf{e}_\varphi(t) - r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \mathbf{e}_r(t),$$

Sostituendo queste identità in (1.60), facendo anche uso di (1.63) e (1.64), notando infine che

$$\mathbf{e}'_z \wedge \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\varphi \quad \mathbf{e}'_z \wedge \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e}_r,$$

si ottiene l'equazione, equivalente a (1.60):

$$\begin{aligned} mr \frac{d^2\varphi}{dt^2} \mathbf{e}_\varphi - mr \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \mathbf{e}_r &= \phi \mathbf{e}_r - mg (\cos(\omega t) \sin \varphi + \sin(\omega t) \cos \varphi) \mathbf{e}_r \\ -mg (\cos(\omega t) \cos \varphi - \sin(\omega t) \sin \varphi) \mathbf{e}_\varphi &+ m\omega^2 R (\sin \varphi \mathbf{e}_r + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi) + 2m\omega r \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{e}_r \\ &+ m\omega^2 r \mathbf{e}_r. \end{aligned}$$

Raccogliendo i fattori complessivi di  $\mathbf{e}_\varphi$  e  $\mathbf{e}_r$  otteniamo rispettivamente le equazioni:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{r} \cos(\omega t + \varphi) + \frac{\omega^2 R}{r} \cos \varphi, \quad (1.65)$$

$$\phi = -mr \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + mg \sin(\omega t + \varphi) - m\omega^2 R \sin \varphi - 2m\omega r \frac{d\varphi}{dt} - m\omega^2 r. \quad (1.66)$$

La (1.65) è un'equazione differenziale del prim'ordine in forma normale con secondo membro di classe  $C^\infty$ , pertanto determina il moto del sistema (nella coordinate *locale*  $\varphi$ ) unicamente, quando sono assegnate condizioni iniziali. Questa è l'equazione pura di movimento. La seconda equazione individua il valore della reazione vincolare una volta noto il moto del sistema.

(2). Direttamente dall'equazione (1.66) troviamo:

$$\phi(0) = m [g - \omega^2(R + r)] \mathbf{e}_r.$$

Nelle nostre ipotesi, a  $t = 0$ ,  $O'$  si trova in  $R \mathbf{e}_y$ , mentre  $\mathbf{e}_r$  per  $\varphi = \pi/2$  coincide con  $\mathbf{e}'_y$ . Ma per ipotesi  $\mathbf{e}'_y = \mathbf{e}_y$  a  $t = 0$  e pertanto, all'istante considerato:

$$\phi(0) = m [g - \omega^2(R + r)] \mathbf{e}_y.$$

(3) Nel caso  $g = 0$ , riscriviamo l'equazione (1.65) come:

$$mr^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} - m\omega^2 Rr \cos \varphi = 0 .$$

Moltiplicando ambo i membri di questa equazione per  $\frac{d\varphi}{dt}$  si trova:

$$mr^2 \frac{d\varphi}{dt} \frac{d^2\varphi}{dt^2} - m\omega^2 Rr \frac{d\varphi}{dt} \cos \varphi = 0 .$$

che può essere riscritta:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} mr^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - m\omega^2 Rr \sin \varphi(t) \right] = 0 .$$

Cioé, su ogni moto del sistema:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E} \left( \phi(t), \frac{d\varphi}{dt} \right) = 0 .$$

Passiamo al significato fisico di  $\mathcal{E}$ . Esaminando l'equazione (1.60) nel caso  $g = 0$ , si vede che le forze viste agire in  $\mathcal{R}'$ , eccettuata la reazione vincolare  $\phi$  che è girostatica, sono: un'altra forza girostatica  $-2m\omega \mathbf{e}'_z \wedge \frac{d\mathbf{x}'}{dt}$  e due forze conservative:

$$\omega^2 R \mathbf{e}'_y ,$$

(pensabile come una forza di gravità effettiva nella direzione  $y'$ ) e

$$-m\omega^2 \mathbf{e}'_z \wedge (\mathbf{e}'_z \wedge \mathbf{x}') = m\omega^2 \mathbf{x}'$$

(pensabile come dovuta ad una molla *repulsiva* di costante elastica  $-m\omega^2$  attaccata in  $O'$  di lunghezza nulla a riposo). L'energia potenziale totale è:

$$\mathcal{W}|_{\mathcal{R}'}(x', y') = -\omega^2 R y' - \frac{m\omega^2}{2} (x'^2 + y'^2) .$$

Dato che il moto avviene sulla circonferenza  $x'^2 + y'^2 = r^2$ , sui moti del sistema il secondo addendo rimane costante (la forza ad esso associata non compie pertanto lavoro). In definitiva, sui moti del sistema vincolato, l'energia potenziale è solamente, eliminando una costante additiva inessenziale:

$$-\omega^2 R y' = -m\omega^2 Rr \sin \varphi .$$

Pertanto, tenendo conto che l'energia cinetica di  $P$  in  $\mathcal{R}'$ , tenendo conto del vincolo, è proprio:

$$\frac{1}{2} mr^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 ,$$

concludiamo che

$$\mathcal{E}(\varphi, \dot{\varphi}) := \frac{1}{2} mr^2 \dot{\varphi}^2 - m\omega^2 Rr \sin \varphi$$

rappresenta l'energia meccanica di  $P$  nel riferimento  $\mathcal{R}'$  tenendo conto del vincolo.

(4). Le configurazioni di equilibrio si ottengono dall'equazione pura di movimento (cfr (1.65) con  $g = 0$ ),

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{\omega^2 R}{r} \cos \varphi, \quad (1.67)$$

cercando i punti  $\varphi_0$  tali che annullano il secondo membro nelle ipotesi, qui irrilevante, che  $d\varphi/dt = 0$ . Le configurazioni di equilibrio sono quindi gli angoli  $\varphi_0$  che soddisfano:  $\cos \varphi_0 = 0$ :  $\varphi_0 = 0, \pi$ . Per studiarne la stabilità usiamo  $\mathcal{E}$  come funzione di Liapunov. Possiamo scrivere

$$\mathcal{E}(\varphi, \dot{\varphi}) := \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + \mathcal{U}(\varphi)$$

dove:

$$\mathcal{U}(\varphi) := -m\omega^2 Rr \sin \varphi.$$

Si osservi che, come ci si aspetta, le configurazioni di equilibrio risultano essere i punti di stazionarietà di  $\mathcal{U}$ . Dato che  $\dot{\mathcal{E}} = 0$ , dato che  $\mathcal{E}$  si conserva sui moti del sistema e dato che la parte di  $\mathcal{E}$  contenente  $\dot{\varphi}$  ha un minimo stretto in corrispondenza di  $\dot{\varphi} = 0$ , per avere stabilità nel passato e nel futuro è sufficiente che  $\mathcal{U}$  abbia un minimo stretto in corrispondenza della configurazione di equilibrio considerata. Studiamo quindi la matrice hessiana di  $\mathcal{U}$  che si riduce ad un numero:

$$H(\varphi_0) = \frac{d^2}{d\varphi^2} \mathcal{U}|_{\varphi_0} = m\omega^2 Rr \sin \varphi_0.$$

In tal modo troviamo:

$$H(\pi/2) = m\omega^2 Rr.$$

Concludiamo che la configurazione di equilibrio  $\varphi_0 = \pi/2$  è stabile nel passato e nel futuro. Si tenga ora conto che le equazioni pure di movimento possono essere riscritte come:

$$mr^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{d\mathcal{U}}{d\varphi},$$

pensabile come equazione del moto per un punto materiale in una dimensione, sottoposto ad una forza conservativa e dotato di massa  $M = mr^2$ . Tenendo allora conto dell'osservazione ?? ed applicando la proposizione ?? concludiamo che se la matrice hessiana di  $\mathcal{U}$  ha un autovalore negativo in corrispondenza di una configurazione di equilibrio, allora si ha instabilità nel passato e nel futuro. Essendo:

$$H(-\pi/2) = -m\omega^2 Rr,$$

concludiamo che  $\varphi_0 = -\pi/2$  è instabile nel passato e nel futuro.

## ESERCIZIO 5

Si consideri un riferimento inerziale  $\mathcal{R}$  ed un sistema di coordinate cartesiane ortonormali solidale ad esso, di origine  $O$  e assi  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  con asse  $y$  verticale. Un punto materiale  $P$  di massa  $m > 0$  è vincolato al cilindro di equazione  $x^2 + y^2 = R^2$  con  $R > 0$ . Supponendo la superficie del cilindro *liscia* si assuma che sul punto materiale agisca, oltre alla reazione vincolare:

(i) la forza di gravità  $-mg \mathbf{e}_y$  e

(ii) la forza di una molla di costante elastica  $\kappa > 0$ , lunghezza nulla a riposo, attaccata a  $P$  ed al punto  $Q = (2R, 0, 0)$  fisso in  $\mathcal{R}$ .

Si risolvano i seguenti quesiti usando coordinate cilindriche standard  $r, \varphi, z$  adattate al cilindro (ovviamente  $r = R$  costantemente per il punto  $P$ ).

(1). Si scrivano le equazioni pure di movimento del punto  $P$  e l'equazione che determina la reazione vincolare  $\phi$  quando è assegnato un moto del sistema.

(2). Si scriva esplicitamente la forma dell'energia meccanica del punto  $P$  e si provi che è conservata sui moti del sistema.

(3). Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità nel caso:

$$\frac{2\kappa R}{mg} = 1.$$

In questo caso si calcoli la componente lungo  $\mathbf{e}_r$  della reazione vincolare in ogni configurazione di equilibrio stabile.

(4). *FACOLTATIVO*. Si dimostri che sul moto si conserva l'integrale primo:

$$\Lambda = \frac{m}{2} R^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + mgR \sin \varphi - 2\kappa R^2 \cos \varphi.$$

Si usi infine questo integrale primo per esprimere la componente lungo  $\mathbf{e}_r$  della reazione vincolare  $\phi$  in funzione della sola variabile  $\varphi$ , sul moto determinato dalle condizioni iniziali  $\varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 0$  e  $z(0) = 0, \dot{z}(0) = 0$ .

**NOTA.** Per il calcolo dell'accelerazione in coordinate cilindriche ricordiamo le identità :

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \quad \dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_r.$$

**Soluzione.**

(1) Omettendo  $P|_{\mathcal{R}}$  per semplicità, dato che c'è un unico punto in movimento ed un unico riferimento, il secondo principio della dinamica fornisce:

$$m\mathbf{a} = \phi - mg \mathbf{e}_y - \kappa(P - Q).$$

Esprimiamo questa equazione rispetto alla base  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$  in coordinate cilindriche. Teniamo conto delle relazioni:

$$\mathbf{e}_r = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y, \quad (1.68)$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y, \quad (1.69)$$

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z, \quad (1.70)$$

che si invertono in:

$$\mathbf{e}_x = \cos \varphi \mathbf{e}_r - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi, \quad (1.71)$$

$$\mathbf{e}_y = \sin \varphi \mathbf{e}_r + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi, \quad (1.72)$$

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z, \quad (1.73)$$

da cui:

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \quad \dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_r.$$

Tenendo conto che è  $P - O = R \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z$  troviamo che:

$$\mathbf{v} = R \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{e}_\varphi + \frac{dz}{dt} \mathbf{e}_z, \quad (1.74)$$

e quindi:

$$\mathbf{a} = R \frac{d^2\varphi}{dt^2} \mathbf{e}_\varphi - R \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \mathbf{e}_r + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{e}_z. \quad (1.75)$$

Il primo membro dell'equazione del moto si scrive dunque:

$$mR \frac{d^2\varphi}{dt^2} \mathbf{e}_\varphi - mR \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \mathbf{e}_r + m \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{e}_z.$$

Riguardo al secondo membro si ha:  $\phi = \phi \mathbf{e}_r$  in quanto il vincolo è liscio per ipotesi. Inoltre

$$-mg \mathbf{e}_y = -mg \sin \varphi \mathbf{e}_r - mg \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi.$$

Infine, essendo:

$$P - Q = (P - O) - (Q - O) = R \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z - 2R \mathbf{e}_x = R \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z - 2R \cos \varphi \mathbf{e}_r + 2R \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi,$$

troviamo:

$$-\kappa(P - Q) = \kappa R(2 \cos \varphi - 1) \mathbf{e}_r - 2R\kappa \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi - \kappa z \mathbf{e}_z.$$

Mettendo tutto insieme le equazioni del moto risultano essere:

$$\begin{aligned} mR \frac{d^2\varphi}{dt^2} \mathbf{e}_\varphi - mR \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \mathbf{e}_r + m \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{e}_z &= \phi \mathbf{e}_r - mg \sin \varphi \mathbf{e}_r - mg \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi \\ &+ \kappa R(2 \cos \varphi - 1) \mathbf{e}_r - 2R\kappa \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi - \kappa z \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Raccogliendo i fattori dei vari versori separatamente otteniamo: il sistema, che costituisce le equazioni pure di movimento essendo scrivibile in forma normale con secondo membro di classe  $C^\infty$ :

$$mR \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg \cos \varphi - 2\kappa R \sin \varphi, \quad (1.76)$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = -\kappa z, \quad (1.77)$$

insieme all'equazione che determina la reazione vincolare:

$$\phi = mg \sin \varphi - \kappa R(2 \cos \varphi - 1) - mR \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2. \quad (1.78)$$

(2). L'energia meccanica si conserva sicuramente in quanto l'unica forza non conservativa è  $\phi$  che è normale al cilindro mentre la velocità di  $P$  è tangente al cilindro. In tal caso la potenza dissipata da  $\phi$  è nulla e, dal teorema di bilancio dell'energia meccanica, abbiamo la conservazione sui moti dell'energia meccanica. L'energia meccanica ha la forma, usando (1.74):

$$\mathcal{E} = \frac{m}{2} R^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{m}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \mathcal{U}(\varphi, z),$$

dove l'energia potenziale è data dalla somma dell'energia potenziale gravitazionale e di quella della molla, usando l'espressione precedentemente ottenuta per  $P - O$  e  $y = R \cos \varphi$ , si trova:

$$\mathcal{U}(\varphi, z) = mgy + \frac{\kappa}{2}(P - Q)^2 = mgR \sin \varphi + \frac{\kappa z^2}{2} - 2\kappa R^2 \cos \varphi + \frac{5\kappa R^2}{2}.$$

Nel seguito ometteremo l'inessenziale costante additiva finale nell'espressione di  $\mathcal{U}$ . In definitiva abbiamo trovato che:

$$\mathcal{E} = \frac{m}{2} R^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{m}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{\kappa z^2}{2} + mgR \sin \varphi - 2\kappa R^2 \cos \varphi. \quad (1.79)$$

(3). Le configurazioni di equilibrio  $(\varphi_0, z_0)$  si ottengono imponendo che esse annullino il secondo membro delle equazioni pure di movimento quando le derivate temporali di  $\varphi$  e  $z$  sono nulle in tali secondi membri (questa condizione non ha alcun effetto nel caso in esame visto che le derivate di tali variabili non appaiono nei secondi membri delle equazioni pure di movimento). Imponendo tali condizioni, si ottengono le equazioni che determinano tutte le configurazioni di equilibrio:

$$mg \cos \varphi_0 + 2\kappa R \sin \varphi_0 = 0, \quad (1.80)$$

$$z_0 = 0. \quad (1.81)$$

Passiamo a studiare la stabilità usando il teorema di Lipunov con  $\mathcal{E}$  come funzione di Liapunov. Nel caso  $2\kappa R/(mg) = 1$ , le soluzioni sono:  $(\varphi_0, z_0) = (-\pi/4, 0)$  e  $(\varphi_0, z_0) = (3\pi/4, 0)$ . La matrice hessiana dell'energia potenziale  $\mathcal{U}(\varphi, z)$  vale

$$H(\varphi, z) = \text{diag}(-mgR \sin \varphi + 2\kappa R^2 \cos \varphi, \kappa).$$

Pertanto troviamo:

$$H(-\pi/2, 0) = \text{diag} \left( \frac{\sqrt{2}}{2}(mgR + 2\kappa R^2), \kappa \right).$$

Gli autovalori in questo caso sono entrambi positivi e pertanto, essendo  $\dot{\mathcal{E}} = 0$  ed avendo  $\mathcal{E}$  un minimo stretto nel punto singolare individuato dalla configurazione di equilibrio suddetta, si ha equilibrio stabile nel passato e nel futuro.

Direttamente da (1.78) troviamo che nella configurazione di equilibrio stabile  $(\varphi_0, z_0) = (-\pi/2, 0)$ :

$$\phi = -mg \frac{\sqrt{2}}{2} - \kappa R(\sqrt{2} - 1).$$

Passiamo all'altra configurazione di equilibrio. Similmente a prima troviamo:

$$H(3\pi/2, 0) = \text{diag} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}(mgR + 2\kappa R^2), \kappa \right).$$

In questo caso un autovalore della matrice hessiana è negativo. Essendo il sistema in esame conservativo (escludendo la reazione vincolare), possiamo concludere che l'equilibrio è instabile nel passato e nel futuro.

(4). Moltiplicando i due membri di (1.76) per  $Rd\varphi/dt$  e portando a primo membro il secondo membro ottenuto in questo modo, l'identità che si ottiene alla fine risulta essere:

$$\frac{d\Lambda}{dt} = 0.$$

Dato che  $\Lambda$  è conservato nel tempo, sulla soluzione considerata il valore di  $\Lambda$  sarà quello valutato al tempo iniziale. Dall'espressione di  $\Lambda$ , tenuto conto delle condizioni iniziali troviamo:

$$\frac{m}{2}R^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + mgR \sin \varphi - 2\kappa R^2 \cos \varphi = -2\kappa R^2.$$

Di conseguenza:

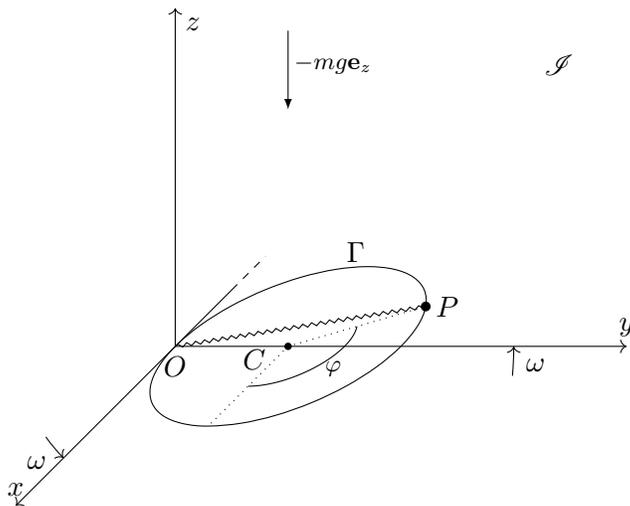
$$mR \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = -4\kappa R + 2mg \sin \varphi - 4\kappa R \cos \varphi.$$

Inserendo in (1.78) troviamo l'espressione richiesta:

$$\phi(\varphi) = -mg \sin \varphi + 2\kappa R \cos \varphi + 5\kappa R.$$

## ESERCIZIO 6

Sia  $\mathcal{R}_0$  un sistema di riferimento *inerziale* ed  $\mathcal{R}$  un altro riferimento che ruota senza traslare (rispetto a  $\mathcal{R}_0$ ) attorno al punto  $O$  in quiete in  $\mathcal{R}_0$ . Si consideri un sistema di coordinate



cartesiane ortonormali destrorse  $x, y, z$  di origine  $O$  solidali con  $\mathcal{R}$  e si supponga che  $\omega_{\mathcal{R}|\mathcal{R}_0} = \omega \mathbf{e}_z$  con  $\omega > 0$  costante. Una circonferenza  $\Gamma$  di raggio  $R > 0$ , tangente all'asse  $x$  in  $O$ , è in quiete in  $\mathcal{R}$  nel semipiano  $z = 0, y \geq 0$ . Un punto materiale  $P$  di massa  $m > 0$  vincolato a  $\Gamma$ , supposta liscia, è sottoposto alle seguenti forze in aggiunta alla reazione vincolare  $\phi$ :

(i) la forza di gravità  $-mg \mathbf{e}_z, g \geq 0$ ,

(ii) la forza di una molla ideale di costante  $\kappa > 0$ , lunghezza nulla a riposo, fissata ad  $O$ .

Si risolvano i seguenti quesiti descrivendo  $P$  in coordinate cilindriche  $r, \varphi, z$  dove:  $r = 0$  individua il centro della circonferenza  $C$  e  $\varphi$  è valutato rispetto all'asse parallelo a  $x$  passante per  $C$ .

(1). Si scrivano le equazioni pure di movimento del punto  $P$  e l'equazione che determina la reazione vincolare  $\phi$  sui moti del sistema.

(2). Si dimostri che sui moti si conserva l'integrale primo:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 + (R^2\kappa - m\omega^2R^2) \sin \varphi .$$

Si provi che  $\mathcal{E}$  è l'energia meccanica del sistema nel riferimento  $\mathcal{R}$  e si spieghi perché  $\mathcal{E}$  si conserva usando il teorema di conservazione dell'energia meccanica.

(3). Si determinino le configurazioni di equilibrio di  $P$  nel riferimento  $\mathcal{R}$ . Se ne discuta la stabilità a seconda che  $m\omega^2/\kappa > 1$ ,  $m\omega^2/\kappa = 1$  e  $m\omega^2/\kappa < 1$ .

(4). Si esprima la componente lungo  $\mathbf{e}_r$  della reazione vincolare  $\phi$  in funzione della sola variabile

$\varphi$ , sul moto determinato dalle condizioni iniziali  $\varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = \omega > 0$ .

**NOTE.** (1) Per il calcolo dell'accelerazione in coordinate cilindriche ricordiamo le identità :

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \quad \dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_r.$$

inoltre:

$$\mathbf{e}_r = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y$$

(2) Per discutere l'instabilità nel caso  $g = 0$  e  $m\omega^2/\kappa \neq 1$  può essere utile notare che l'equazione pura di movimento di  $P$  è interpretabile come quella di un punto materiale sulla retta reale, di massa  $M = mR$  e posizione  $\varphi \in \mathbb{R}$ , soggetto ad una sola forza conservativa di energia potenziale

$$\mathcal{U}(\varphi) := (R^2\kappa - m\omega^2 R^2) \sin \varphi.$$

**Soluzione.**

(1). Nel seguito:  $\boldsymbol{\omega} := \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}}$ . L'equazione del moto di  $P$  nel riferimento inerziale  $\mathcal{R}_0$  ha la forma:

$$m\mathbf{a}_P|_{\mathcal{R}_0} = \boldsymbol{\phi} - mg \mathbf{e}_z - \kappa(P - O).$$

Teniamo conto del fatto che, essendo il moto puramente traslatorio e con velocità angolare costante, vale la relazione tra le accelerazioni di  $P$  valutate nei due riferimenti (ometteremo sottointendendolo l'indice  $P$  nelle accelerazioni e velocità d'ora in poi):

$$\mathbf{a}|_{\mathcal{R}_0} = \mathbf{a}|_{\mathcal{R}} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge (P - O)) + 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}|_{\mathcal{R}}.$$

Pertanto l'equazione del moto del punto  $P$  nel riferimento  $\mathcal{R}$  risulta essere:

$$m\mathbf{a}|_{\mathcal{R}} = -m\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge (P - O)) - 2m\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}|_{\mathcal{R}} + \boldsymbol{\phi} - mg \mathbf{e}_z - \kappa(P - O). \quad (1.82)$$

Dobbiamo ora decomporre questa equazione sulla terna  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$  associata alle coordinate cilindriche. L'equazione che otterremo lungo  $\mathbf{e}_\varphi$  non conterrà componenti della reazione vincolare  $\boldsymbol{\phi} = \phi^z \mathbf{e}_z + \phi^r \mathbf{e}_r$  a causa dell'ipotesi di vincolo liscio. Tale equazione sarà, al solito, l'equazione pura di movimento. Le rimanenti due equazioni determineranno le reazioni vincolari una volta noto il moto del sistema.

Dobbiamo esprimere ogni grandezza vettoriale sulla base detta. Notiamo che, se  $C$  è il centro di  $\Gamma$ :

$$P - O = P - C + C - O = R \mathbf{e}_r + R \mathbf{e}_y = R \mathbf{e}_r + R(\sin \varphi \mathbf{e}_r + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi),$$

da cui:

$$P - O = R(1 + \sin \varphi) \mathbf{e}_r + R \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi. \quad (1.83)$$

In coordinate cilindriche e tenendo conto che  $r = R$  e  $z = 0$  costantemente, abbiamo le relazioni, se  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{a}$  denotano rispettivamente la velocità e l'accelerazione di  $P$  rispetto a  $\mathcal{R}$ :

$$\mathbf{v} = R\dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{a} = R\ddot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi - R\dot{\varphi}^2 \mathbf{e}_r, \quad (1.84)$$

Queste formule si ottengono facilmente notando che la velocità e l'accelerazione di  $P$  in  $\mathcal{R}$  sono le derivate temporali prima e seconda rispettivamente, rispetto a  $\mathcal{R}$ , di  $P - C = R \mathbf{e}_r$ . Tenendo conto del fatto che  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$  formano una base destrorsa nel calcolarne i prodotti vettoriali, usando (1.83) e (1.84) in (1.82), giungiamo all'equazione:

$$\begin{aligned} mR\ddot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi - mR\dot{\varphi}^2 \mathbf{e}_r &= m\omega^2 R(1 + \sin \varphi) \mathbf{e}_r + m\omega^2 R \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi + 2m\omega R\dot{\varphi} \mathbf{e}_r \\ &+ \phi^z \mathbf{e}_z + \phi^r \mathbf{e}_r - mg \mathbf{e}_z - \kappa R(1 + \sin \varphi) \mathbf{e}_r - \kappa R \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi . \end{aligned}$$

Proiettando su  $\mathbf{e}_\varphi$  otteniamo l'equazione:

$$mR \frac{d^2\varphi}{dt^2} = R(m\omega^2 - \kappa) \cos \varphi , \quad (1.85)$$

che è immediatamente esprimibile in forma normale, con secondo membro di classe  $C^\infty$ , e pertanto determina il moto del punto  $P$  per assegnate condizioni iniziali. Questa è dunque l'equazione pura di movimento. Le proiezioni su  $\mathbf{e}_z$  e  $\mathbf{e}_r$  individuano le equazioni che forniscono la reazione vincolare quando è dato un moto del sistema:

$$\phi^z = -mg , \quad (1.86)$$

$$\phi^r = -mR\dot{\varphi}^2 + R(\kappa - m\omega^2)(1 + \sin \varphi) - 2m\omega R\dot{\varphi} . \quad (1.87)$$

(2). Moltiplicando per  $R\dot{\varphi}$  entrambi i membri dell'equazione (1.85) e raccogliendo a primo membro il risultato, si ha:

$$mR\dot{\varphi}\ddot{\varphi} - R^2(m\omega^2 - \kappa)\dot{\varphi} \cos \varphi = 0$$

che può essere riscritta come

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^2 + (R^2 \kappa - m \omega^2 R^2) \sin \varphi \right) = 0 .$$

Questo prova che  $\mathcal{E}$  si conserva sui moti del sistema. Consideriamo ora l'equazione (1.82) e studiamo le forze a secondo membro dal punto di vista del teorema di conservazione dell'energia. Sul punto  $P$  nel riferimento  $\mathcal{R}$  agiscono le forze conservative della molla, con energia potenziale

$$\mathcal{U}_\kappa(P) = \frac{1}{2} \kappa (P - O)^2 = \frac{1}{2} \kappa R^2 (1 + \sin \varphi)^2 + \frac{1}{2} \kappa R^2 \cos^2 \varphi = \kappa R^2 \sin \varphi + \text{costante} ,$$

e della gravità, la cui energia potenziale è sempre costante (e può essere presa nulla) essendo la quota di  $P$  sempre costante:

$$\mathcal{U}_g(P) = 0 .$$

Consideriamo poi le due forze inerziali. Quella centrifuga è:

$$-m\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge (P - O)) = m\omega^2(P - O) ,$$

ed è conservativa (notare che  $\omega$  è costante e la forza ha la struttura di quella di una molla repulsiva di costante elastica  $-m\omega^2$ ) con energia potenziale:

$$\mathcal{U}_{cent}(P) = -\frac{1}{2}m\omega^2(P - O)^2 = -m\omega^2 R^2 \sin \varphi + \text{costante} .$$

La forza di di Coriolis:

$$-2m\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}|_{\mathcal{E}} ,$$

non compie lavoro essendo sempre normale alla velocità . Infine, l'ultima forza in gioco che appare nel secondo membro di (1.82), la reazione vincolare  $\boldsymbol{\phi}$ , non compie lavoro essendo normale alla velocità . In definitiva, dal teorema di conservazione dell'energia meccanica, si conserva l'energia meccanica ottenuta sommando l'energia cinetica

$$\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2$$

all'energia potenziale totale data dalla somma delle tre energie potenziali sopra individuate. A meno, eventualmente, della solita costante additiva, l'energia totale meccanica coincide dunque con  $\mathcal{E}$ .

(3). Riscriviamo l'equazione pura di movimento come sistema del prim'ordine:

$$mR\frac{d\dot{\varphi}}{dt} = R(m\omega^2 - \kappa) \cos \varphi , \quad (1.88)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} , \quad (1.89)$$

le configurazioni di equilibrio  $\varphi_0$  sono individuate dal fatto che l'unica soluzione del sistema di sopra, corrispondente alla condizione iniziale ( $\varphi(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = 0$ ), è quella costante  $\varphi(t) = \varphi_0$ . Dal teorema di esistenza ed unicità si ha subito che  $\varphi_0$  è configurazione di equilibrio se e solo se:

$$R(m\omega^2 - \kappa) \cos \varphi_0 = 0 . \quad (1.90)$$

Abbiamo pertanto che: se  $m\omega^2/\kappa \neq 1$  si hanno due configurazioni di equilibrio  $\varphi_{\pm} := \pm\pi/2$ , mentre *ogni* punto  $\varphi_0 \in [-\pi, \pi)$  è configurazione di equilibrio se  $m\omega^2/\kappa = 1$ . In questo caso le configurazioni di equilibrio *non sono isolate*.

Lo studio della stabilità nel caso  $m\omega^2/\kappa \neq 1$  può essere eseguito usando

$$\mathcal{E}(\varphi, \dot{\varphi}) := \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 + (R^2\kappa - m\omega^2 R^2) \sin \varphi$$

come funzione di Liapunov per il sistema del prim'ordine scritto sopra; oppure attraverso il teorema di Lagrange-Dirichlet, pensando le equazioni (1.85) come le equazioni del moto per un problema unidimensionale per un punto di massa  $mR$ , coordinata  $\varphi$  in moto sulla retta reale sottoposto alla sola forza conservativa di energia potenziale:

$$\mathcal{U}(\varphi) = R(\kappa - m\omega^2) \sin \varphi .$$

Per l'instabilità, per  $m\omega^2/\kappa \neq 1$ , conviene usare il secondo punto di vista e riferirsi al teorema della matrice hessiana del potenziale nei punti di stazionarietà. Esaminiamo le varie situazioni nel caso  $m\omega^2/\kappa \neq 1$ .

Se  $m\omega^2/\kappa < 1$ ,  $\varphi_+$  e  $\varphi_-$  corrispondono rispettivamente ad un massimo ed ad un minimo stretti dell'energia potenziale. Nel caso del massimo la matrice hessiana dell'energia potenziale è negativa. Concludiamo che, se  $m\omega^2/\kappa < 1$ ,  $\varphi_-$  è un punto di equilibrio stabile nel passato e nel futuro, mentre  $\varphi_+$  è un punto di equilibrio instabile nel passato e nel futuro.

Se  $m\omega^2/\kappa > 1$ ,  $\varphi_+$  e  $\varphi_-$  corrispondono rispettivamente ad un minimo ed ad un massimo stretti dell'energia potenziale. Nel caso del massimo la matrice hessiana dell'energia potenziale è negativa. Concludiamo che, se  $m\omega^2/\kappa > 1$ ,  $\varphi_+$  è un punto di equilibrio stabile nel passato e nel futuro, mentre  $\varphi_-$  è un punto di equilibrio instabile nel passato e nel futuro.

Se  $m\omega^2/\kappa = 1$ , non possiamo usare i metodi classici in quanto le configurazioni di equilibrio non sono isolate. Tuttavia l'analisi diretta mostra che ogni configurazione di equilibrio è instabile. Infatti, nel caso considerato, l'equazione del moto si riduce a:

$$mR \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0.$$

Questa, riscritta come sistema al primo'ordine, è:

$$\frac{d\dot{\varphi}}{dt} = 0 \tag{1.91}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \tag{1.92}$$

La soluzione di questo sistema con condizioni iniziali  $(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)$  è  $\varphi(t) = \varphi_0 + t\dot{\varphi}_0$ . Deve allora essere chiaro che ogni punto  $\varphi_0$ , che è configurazione di equilibrio per quanto detto, è *instabile nel passato e nel futuro*. Infatti comunque fissiamo un intorno  $U$  attorno a  $(\varphi_0, 0)$  ogni soluzione del sistema con condizioni iniziali (diverse da  $(\varphi_0, 0)$ ) in un intorno  $V \subset U$  di  $(\varphi_0, 0)$  piccolo a piacere, non potrà essere confinata in  $U$  per tutti i tempi  $t \in \mathbb{R}$  a causa del suo andamento lineare in  $t$  (se  $\dot{\varphi}_0 \neq 0$ ).

(4). In virtù della conservazione di  $\mathcal{E}$  varrà, su ogni fissato moto:  $\mathcal{E}(t=0) = \mathcal{E}(t)$ . Nel caso in esame, tenendo conto delle condizioni iniziali assegnate avremo dunque che:

$$\frac{1}{2}mR^2\omega^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}(t)^2 + (R^2\kappa - m\omega^2R^2) \sin \varphi(t).$$

Quest'equazione produce:

$$\dot{\varphi}(t)^2 = 2 \left( \omega^2 - \frac{\kappa}{m} \right) \sin \varphi(t) + \omega^2,$$

che si risolve in

$$\dot{\varphi}(t) = \pm \sqrt{2 \left( \omega^2 - \frac{\kappa}{m} \right) \sin \varphi(t) + \omega^2}.$$

Il segno viene fissato notando che per  $t = 0$  il primo membro deve coincidere con  $\omega > 0$ . Tale segno, per continuità viene mantenuto almeno fino a quando  $\dot{\varphi}(t)$  non si annulla. Pertanto abbiamo che:

$$\dot{\varphi} = \sqrt{2 \left( \omega^2 - \frac{\kappa}{m} \right) \sin \varphi + \omega^2},$$

valida istante per istante sul moto considerato. Inserendo questa espressione nell'equazione che determina  $\phi^r$ :

$$\phi^r = -mR\dot{\varphi}^2 + R(\kappa - m\omega^2)(1 + \sin \varphi) - 2m\omega R\dot{\varphi},$$

si ottiene una relazione che individua, sul moto detto,  $\phi^r$  come funzione della sola posizione  $\varphi$ :

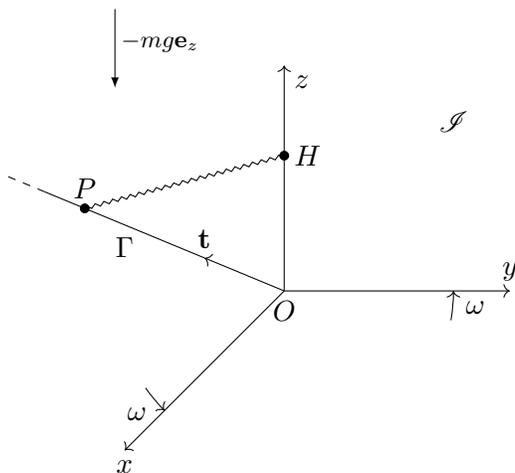
$$\phi^r(\varphi) = -mR \left[ 2 \left( \omega^2 - \frac{\kappa}{m} \right) \sin \varphi + \omega^2 \right] + R(\kappa - m\omega^2)(1 + \sin \varphi) - 2m\omega R \sqrt{2 \left( \omega^2 - \frac{\kappa}{m} \right) \sin \varphi + \omega^2},$$

da cui:

$$\phi^r(\varphi) = R\kappa - 2mR\omega^2 + 3R(\kappa - m\omega^2) \sin \varphi - 2m\omega R \sqrt{2 \left( \omega^2 - \frac{\kappa}{m} \right) \sin \varphi + \omega^2}.$$

## ESERCIZIO 7

Sia  $\mathcal{R}_0$  un sistema di riferimento *inerziale* ed  $\mathcal{R}$  un altro riferimento che ruota senza traslare (rispetto a  $\mathcal{R}_0$ ) attorno al punto  $O$  in quiete in  $\mathcal{R}_0$ . Si consideri un sistema di coordinate



cartesiane ortonormali destrorse  $x, y, z$  di origine  $O$  solidali con  $\mathcal{R}$  e si supponga che  $\omega_{\mathcal{R}|\mathcal{R}_0} = \omega \mathbf{e}_z$  con  $\omega > 0$  costante. Un punto materiale  $P$  di massa  $m > 0$  vincolato alla retta  $\Gamma$  uscente da  $O$  con versore tangente  $\mathbf{t} = (\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z)/\sqrt{2}$ , supposta liscia, è sottoposto alle seguenti forze in aggiunta alla reazione vincolare  $\phi$ :

(i) la forza di gravità  $-mg \mathbf{e}_z$ ,

(ii) la forza di una molla ideale di costante  $\kappa > 0$ , lunghezza nulla a riposo, fissata ad  $H = O + h \mathbf{e}_z$  con  $h > 0$  noto.

Si risolvano i seguenti quesiti descrivendo  $P$  in termini della lunghezza, *indicata con  $s$* , del segmento  $P - O$  (di segno negativo se  $P$  precede  $O$ ).

(1). Si scrivano le equazioni pure di movimento del punto  $P$  e l'equazione che determina la reazione vincolare  $\phi$  sui moti del sistema.

(2). Si dimostri che sui moti si conserva l'integrale primo:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + \frac{s^2}{4} (2\kappa - m\omega^2) + \frac{s}{\sqrt{2}} (mg - \kappa h)$$

Si provi che  $\mathcal{E}$  è l'energia meccanica del sistema nel riferimento  $\mathcal{R}$  e si spieghi perché  $\mathcal{E}$  si conserva usando il teorema di conservazione dell'energia meccanica.

(3). Supponendo  $mg \geq \kappa h$ , si determinino le configurazioni di equilibrio di  $P$  nel riferimento  $\mathcal{R}$ . Se ne discuta la stabilità a seconda che  $m\omega^2/(2\kappa) > 1$ ,  $m\omega^2/(2\kappa) = 1$  e  $m\omega^2/(2\kappa) < 1$ .

(4). Posto  $a := (2\kappa - m\omega^2)/(2m)$  e  $b := (mg - \kappa h)/(m\sqrt{2})$ , si trovi il moto del sistema nell'ipotesi  $a > 0$  quando sono assegnate le condizioni iniziali  $\dot{s}(0) = 0$  e  $s(0) = b/a$  e si scriva, in

funzione del tempo, la reazione vincolare su tale moto.

**Soluzione.**

(1) Conviene introdurre una nuove base ortonormale destrorsa  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  con  $\mathbf{n} := (\mathbf{e}_z - \mathbf{e}_x)/\sqrt{2}$  e  $\mathbf{b} := \mathbf{t} \wedge \mathbf{n} = -\mathbf{e}_y$ . Da cui si ha subito che

$$\mathbf{e}_x = (\mathbf{t} - \mathbf{n})/\sqrt{2}, \quad \mathbf{e}_y = -\mathbf{b}, \quad \mathbf{e}_z = (\mathbf{t} + \mathbf{n})/\sqrt{2}$$

Al fine di scrivere esplicitamente la forza della molla in funzione di  $s$  si osservi che vale  $P-O = st$  e quindi:

$$P - H = P - O + O - H = st - \frac{h \mathbf{e}_z}{\sqrt{2}} = st - h \frac{\mathbf{t} + \mathbf{n}}{\sqrt{2}}.$$

Pertanto, nel riferimento inerziale  $\mathcal{R}_0$ , l'equazione  $F = ma$  si scrive:

$$m\mathbf{a}_P|_{\mathcal{R}_0} = -mg \frac{\mathbf{t} + \mathbf{n}}{\sqrt{2}} - \kappa st + \frac{\kappa h(\mathbf{t} + \mathbf{n})}{\sqrt{2}} + \phi. \quad (1.93)$$

Nel riferimento  $\mathcal{R}$  abbiamo di conseguenza che:

$$m(\mathbf{a}_P|_{\mathcal{R}} + \omega \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} + \omega \mathbf{e}_z \wedge (\omega \mathbf{e}_z \wedge (P - O))) = -mg \frac{\mathbf{t} + \mathbf{n}}{\sqrt{2}} - \kappa st + \frac{\kappa h(\mathbf{t} + \mathbf{n})}{\sqrt{2}} + \phi.$$

Tenendo conto del fatto che  $\mathbf{e}_z = (\mathbf{t} + \mathbf{n})/\sqrt{2}$ , del fatto che  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} = \dot{s}\mathbf{t}$  ed, infine, del fatto che  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  è base ortonormale destrorsa, abbiamo l'equazione del moto in  $\mathcal{R}$  (si osservi che  $\phi$  non ha componenti lungo  $\mathbf{t}$  essendo il vincolo ideale):

$$m\ddot{s}\mathbf{t} = \left( -\frac{mg}{\sqrt{2}} - \kappa s + \frac{h\kappa}{\sqrt{2}} + \frac{m\omega^2 s}{2} \right) \mathbf{t} + \left( -\frac{mg}{\sqrt{2}} + \frac{h\kappa}{\sqrt{2}} - \frac{m\omega^2 s}{2} + \phi^n \right) \mathbf{n} + \left( -\sqrt{2}m\omega\dot{s} + \phi^b \right) \mathbf{b}.$$

Separando le equazioni ottenute dalle varie componenti otteniamo quindi, in riferimento all'asse  $\mathbf{t}$ , l'equazione pura di movimento:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{mg}{\sqrt{2}} - \kappa s + \frac{h\kappa}{2} + \frac{m\omega^2 s}{2}, \quad (1.94)$$

questa è un'equazione differenziale del secondo ordine in forma normale con secondo membro di classe  $C^\infty$  e pertanto determina univocamente la soluzione del problema del moto una volta assegnate condizioni iniziali. In riferimento agli assi  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{b}$  otteniamo invece le due equazioni che determinano la reazione vincolare se è data una soluzione del problema del moto:

$$\phi^n = \frac{mg}{\sqrt{2}} - \frac{h\kappa}{2} + \frac{m\omega^2 s}{2}, \quad (1.95)$$

$$\phi^b = m\omega\dot{s}, \quad (1.96)$$

(2) Moltiplicando ambo i membri di (1.94) per  $ds/dt$  e raccogliendo tutto a primo membro, il risultato può essere riscritto come l'equazione di conservazione (sui moti) di  $\mathcal{E}$ :

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + \frac{s^2}{4} (2\kappa - m\omega^2) + \frac{s}{\sqrt{2}} (mg - \kappa h) \right] = 0.$$

L'interpretazione fisica di  $\mathcal{E}$  è chiara: si tratta dell'energia meccanica di  $P$  nel riferimento  $\mathcal{R}$ . Infatti, in tale riferimento, il punto  $P$  è sottoposto alle forze conservative della gravità e della molla, che producono il termine di energia potenziale (omettendo una costante additiva inessenziale):

$$\frac{s}{\sqrt{2}} (mg - \kappa h) + \frac{\kappa s^2}{2},$$

un altro termine di energia potenziale è quello dovuto alla forza centrifuga:

$$-s^2 \frac{m\omega^2}{4}.$$

L'energia cinetica è semplicemente  $\frac{1}{2} m \dot{s}^2$ . La somma di tali termini è proprio  $\mathcal{E}$ . La derivata temporale della somma dell'energia cinetica più quella potenziale (cioè  $\mathcal{E}$ ) deve uguagliare la potenza delle forze rimanenti: la forza di Coriolis e la reazione vincolare  $\phi$ . Queste ultime hanno potenza nulla essendo entrambe normali alla velocità nel riferimento  $\mathcal{R}$  e questo spiega, in termini fisici, la ragione della conservazione di  $\mathcal{E}$ .

(3) Le equazioni che determinano il moto del sistema, ridotte al prim'ordine sono:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{g}{\sqrt{2}} - \frac{\kappa}{m} s + \frac{h\kappa}{2m} + \frac{\omega^2 s}{2}, \quad (1.97)$$

$$\frac{ds}{dt} = v. \quad (1.98)$$

Le configurazioni di equilibrio  $s_0$  si ottengono come le configurazioni che annullano il secondo membro del sistema appena scritto, quando si richiede anche che  $v = 0$ . Si trova pertanto l'unica configurazione di equilibrio:

$$s_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2mg - h\kappa\sqrt{2}}{m\omega^2 - 2\kappa}.$$

Possiamo studiarne la stabilità usando il teorema di Liapunov e l'integrale primo  $\mathcal{E}$  che ha un punto con gradiente nullo esattamente in  $(s_0, v = 0)$ . Per stabilire se c'è un minimo stretto in tale configurazione, studiamo il segno della derivata seconda in  $s_0$  dell'energia potenziale:

$$\mathcal{U}(s) = \frac{s^2}{4} (2\kappa - m\omega^2) + \frac{s}{\sqrt{2}} (mg - \kappa h).$$

Si ha esplicitamente:

$$\left. \frac{d^2 \mathcal{U}}{ds^2} \right|_{s_0} = \frac{2\kappa - m\omega^2}{2}.$$

Il punto  $s_0$  corrisponde ad un punto di minimo stretto di  $\mathcal{U}$  solo se  $2\kappa - m\omega^2 > 0$  ossia  $m\omega^2/2\kappa < 1$ . In tal caso, direttamente dal teorema di Liapunov, possiamo dire che la configurazione di equilibrio  $s_0$  è stabile nel futuro. Si ha invece un punto di massimo stretto se  $m\omega^2/2\kappa > 1$ . In questo caso la configurazione  $s_0$  risulta essere di equilibrio instabile per noti teoremi. Il caso  $m\omega^2/2\kappa = 1$  non può essere studiato con i metodi generali visti nel corso. Tuttavia, in questa situazione, l'equazione pura di movimento (1.94), si riduce a

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g}{\sqrt{2}} + \frac{h\kappa}{2m},$$

la cui soluzione generale è :

$$s(t) = \left( \frac{h\kappa}{2m} - \frac{g}{\sqrt{2}} \right) \frac{t^2}{2} + At + B.$$

Si osservi che il coefficiente davanti a  $t^2/2$  è sicuramente strettamente negativo se, come richiesto dalle ipotesi,  $mg > h\kappa$ . Di conseguenza, per  $t \rightarrow +\infty$ , comunque scegliamo le costanti  $A$  e  $B$  si ha che  $s(t) \rightarrow -\infty$  oppure  $s(t) \rightarrow +\infty$  se  $t \rightarrow -\infty$ . Pertanto il moto non può essere confinato per tutti i tempi in un intorno di  $s_0$  e quindi è impossibile che  $s_0$  sia una configurazione di equilibrio stabile nel futuro o nel passato.

(4) L'equazione del moto (1.94) si scrive, con le definizioni date di  $a$  e  $b$ :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + as + b = 0$$

ossia, nell'ipotesi  $a > 0$

$$\frac{d^2s}{dt^2} + a(s + b/a) = 0.$$

Definendo  $\sigma := s + b/a$ , l'equazione diviene:

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} + a\sigma = 0. \tag{1.99}$$

Dato che  $a > 0$  per ipotesi, la soluzione generale è :

$$\sigma(t) = A \cos(\sqrt{at}) + B \sin(\sqrt{at}),$$

ossia

$$s(t) = -\frac{b}{a} + A \cos(\sqrt{at}) + B \sin(\sqrt{at}).$$

Le condizioni iniziali  $s(0) = b/a$  e  $\dot{s}(0) = 0$  forniscono:  $A = 2b/a$  e  $B = 0$  da cui:

$$s(t) = \frac{b}{a} (1 + 2 \cos(\sqrt{at})). \tag{1.100}$$

e anche

$$\dot{s}(t) = -2 \frac{b}{\sqrt{a}} \sin(\sqrt{at}). \tag{1.101}$$

Inserendo nelle espressioni per le reazioni vincolari (1.95) e (1.96) si ottiene infine l'espressione, in componenti, delle reazioni vincolari in funzione del tempo:

$$\phi^n(t) = \frac{mg}{\sqrt{2}} - \frac{h\kappa}{2} + \frac{m\omega^2 b}{2a} (1 + 2 \cos(\sqrt{at})) , \quad (1.102)$$

$$\phi^b(t) = -\frac{2m\omega b}{\sqrt{a}} \sin(\sqrt{at}) . \quad (1.103)$$

## ESERCIZIO 8

Nel riferimento inerziale  $\mathcal{R}$ , rispetto a coordinate cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{R}$ ,  $x, y, z$  di origine  $O$ , un punto materiale  $P$  di massa  $m > 0$  è vincolato a giacere sulla circonferenza  $z^2 + y^2 = R^2$  e  $x = 0$ . Un secondo punto materiale  $Q$  di massa  $m > 0$  è vincolato ad appartenere alla retta parallela a  $\mathbf{e}_z$  e passante per  $(R, 0, 0)$ . Entrambi i vincoli sono supposti lisci ed entrambi i punti sono sottoposti alla forza di gravità  $-mg \mathbf{e}_z$  (con  $g \geq 0$ ). Sul punto  $Q$  agisce una forza viscosa  $-\gamma \mathbf{v}_Q|_{\mathcal{R}}$  con  $\gamma \geq 0$  costante. Infine i punti sono connessi l'un l'altro da una molla di costante elastica  $\kappa > 0$  e lunghezza nulla a riposo. Si risolvano i seguenti quesiti.

(1). Scrivere le equazioni pure di movimento del sistema e le equazioni che determinano le reazioni vincolari. Si determini la posizione del punto  $P$  tramite l'angolo  $\varphi$  che  $P - O$  descrive rispetto all'asse  $y$ , con orientazione positiva rispetto a  $\mathbf{e}_x$ . Si determini la posizione del punto  $Q$  tramite la sua coordinata  $z$ .

(2). Si scriva esplicitamente l'energia meccanica totale del sistema e si provi che si conserva sui moti del sistema solo se  $\gamma = 0$ . Nel caso  $\gamma > 0$  si calcoli la derivata temporale dell'energia meccanica totale in funzione delle posizioni e delle velocità dei due punti.

(3). Si scrivano le equazioni che determinano le configurazioni di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità nella situazione  $\gamma, g = 0$  (conservando la richiesta  $\kappa > 0$ ).

### Soluzione.

(1). Le equazioni del moto dei due punti sono (non scriviamo esplicitamente  $|_{\mathcal{R}}$  in quanto lavoriamo solo con un riferimento)

$$m\mathbf{a}_P = -mg \mathbf{e}_z - \kappa(P - Q) + \phi_P, \quad (1.104)$$

$$m\mathbf{a}_Q = -mg \mathbf{e}_z - \kappa(Q - P) + \phi_Q - \gamma \mathbf{v}_Q. \quad (1.105)$$

Definiamo il solito sistema di coordinate polari piane  $r, \varphi$  adattato alla circonferenza in cui l'angolo  $\varphi$  individua  $P - O$  rispetto all'asse  $y$ , con orientazione positiva rispetto a  $\mathbf{e}_x$ . Esprimiamo le equazioni del moto usando, per ciascun punto, le coordinate suggerite nel testo. Le relazioni tra i versori  $\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  e quelli associati alle coordinate polari sono, al solito:

$$\mathbf{e}_r = \cos \varphi \mathbf{e}_y + \sin \varphi \mathbf{e}_z, \quad (1.106)$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \varphi \mathbf{e}_z, \quad (1.107)$$

che si invertono in (prendendo la trasposta della corrispondente trasformazione lineare):

$$\mathbf{e}_y = \cos \varphi \mathbf{e}_r - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi, \quad (1.108)$$

$$\mathbf{e}_z = \sin \varphi \mathbf{e}_r + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi. \quad (1.109)$$

Di conseguenza:

$$P - Q = -R \mathbf{e}_x + R \cos \varphi \mathbf{e}_y + (R \sin \varphi - z) \mathbf{e}_z, \quad (1.110)$$

può anche essere scritto come

$$P - Q = -R \mathbf{e}_x + R \cos \varphi (\cos \varphi \mathbf{e}_r - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi) + (R \sin \varphi - z) (\sin \varphi \mathbf{e}_r + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi),$$

ossia:

$$P - Q = -R \mathbf{e}_x + (R - z \sin \varphi) \mathbf{e}_r - z \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi. \quad (1.111)$$

Tenendo conto del fatto che:

$$\mathbf{v}_Q = \frac{dz}{dt} \mathbf{e}_z \quad \text{e} \quad \mathbf{a}_Q = \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{e}_z,$$

l'equazione (1.105) usando (1.110), può decomporsi, sulla base  $\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_x$  nelle tre equazioni con ovvie notazioni:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2z}{dt^2} &= -mg + \kappa(R \sin \varphi - z) - \gamma \frac{dz}{dt}, \\ 0 &= \kappa R \cos \varphi + \phi_Q^y, \\ 0 &= -\kappa R + \phi_Q^x. \end{aligned}$$

Tenendo conto del fatto che:

$$\mathbf{a}_P = R \frac{d^2\varphi}{dt^2} \mathbf{e}_\varphi - R \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \mathbf{e}_r,$$

con una analoga procedura, usando l'equazione (1.111), l'equazione del moto (1.104) si decompone nelle tre equazioni sulla base  $\mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_x$ :

$$\begin{aligned} mR \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= (\kappa z - mg) \cos \varphi, \\ -mR \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 &= -mg \sin \varphi - \kappa(R - z \sin \varphi) + \phi_P^r, \\ 0 &= -\kappa R + \phi_P^x. \end{aligned}$$

Abbiamo dunque un sistema di equazioni differenziali corrispondente alle equazioni pure di movimento (infatti tale sistema è scrivibile in forma normale ed il secondo membro è  $C^\infty$ ):

$$mR \frac{d^2\varphi}{dt^2} = (\kappa z - mg) \cos \varphi, \quad (1.112)$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = -\gamma \frac{dz}{dt} - mg + \kappa(R \sin \varphi - z), \quad (1.113)$$

ed equazioni che, una volta noto un moto del sistema, determinano tutte le componenti delle reazioni vincolari:

$$\begin{aligned} \phi_P^r &= -mg \sin \varphi - \kappa(R - z \sin \varphi) + mR \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2, \\ \phi_P^x &= \kappa R, \\ \phi_Q^y &= -\kappa R \cos \varphi, \\ \phi_Q^x &= \kappa R. \end{aligned}$$

(2). L'energia meccanica del sistema è la somma dell'energia cinetica

$$\mathcal{T} := \frac{m}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{m}{2} R^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 ,$$

e delle energie potenziali dovute alla forza della molla ed alla gravità (attenzione che l'energia della molla è contata *una volta sola*):

$$\mathcal{U} = \frac{\kappa}{2} (P - Q)^2 + mgR \sin \varphi + mgz .$$

Usando (1.110) si trova esplicitamente, trascurando una inessenziale costante additiva:

$$\mathcal{U}(\varphi, z) := \frac{\kappa z^2}{2} - \kappa R z \sin \varphi + mgR \sin \varphi + mgz . \quad (1.114)$$

Sommando tutto:

$$\mathcal{E} = \frac{m}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{m}{2} R^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{\kappa z^2}{2} - \kappa R z \sin \varphi + mgR \sin \varphi + mgz . \quad (1.115)$$

Per provare che, se  $\gamma = 0$ ,  $\mathcal{E}$  è conservata sui moti del sistema è sufficiente procedere come segue. Si moltiplicano ambo membri di (1.112) per  $Rd\varphi/dt$  e ambo membri di (1.113) per  $dz/dt$ , quindi si sommano membro a membro i risultati ottenendo:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{m}{2} R^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( -\frac{\kappa z^2}{2} + \kappa R z \sin \varphi - mgR \sin \varphi - mgz \right) ,$$

che può essere riscritta semplicemente come, supponendo verificate le equazioni (1.112) e (1.113):

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0 .$$

Se  $\gamma > 0$ , la stessa procedura fornisce invece:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\gamma \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 .$$

(3). Le configurazioni  $(\varphi_0, z_0)$  di equilibrio per il sistema del *secondo ordine* (1.112)-(1.113) si ottengono imponendo che per  $(\varphi, z) = (\varphi_0, z_0)$  i secondi membri di (1.112) e (1.113) siano nulli quando valgono le ulteriori condizioni  $d\varphi/dt = 0$  e  $dz/dt = 0$ . Questa procedura porta immediatamente alle equazioni che determinano le configurazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} (\kappa z_0 - mg) \cos \varphi_0 &= 0 , \\ -mg + \kappa(R \sin \varphi_0 - z_0) &= 0 . \end{aligned}$$

Nel caso in cui  $\gamma, g = 0$  e  $\kappa > 0$ , il sistema si riduce a

$$\begin{aligned} z_0 \cos \varphi_0 &= 0 , \\ R \sin \varphi_0 &= z_0 . \end{aligned}$$

Abbiamo 4 soluzioni:  $(z_0, \varphi_0) = (0, 0), (0, \pi), (R, \pi/2), (-R, -\pi/2)$ . Passiamo allo studio della stabilità delle 4 configurazioni di equilibrio. Al solito l'idea è di usare l'energia meccanica come funzione di Liapunov dato che, essendo conservata vale  $\dot{\mathcal{E}} = 0$ . Dall'espressione di  $\mathcal{E}$  in (1.115), vediamo che si ha un minimo stretto nella parte riguardate le velocità  $d\varphi/dt, dz/dt$  attorno alla configurazione di velocità nulle. Se l'energia potenziale ha un minimo stretto in una delle due configurazioni di equilibrio, l'energia totale, pensata come funzione di Liapunov, soddisfa le ipotesi del teorema di Liapunov e si ha stabilità nel futuro e anche nel passato valendo  $\dot{\mathcal{E}} = 0$  e non solo  $\dot{\mathcal{E}} \leq 0$ . Viceversa se la matrice hessiana dell'energia potenziale in una delle due configurazioni ha un autovalore negativo concludiamo che la configurazione di equilibrio è instabile. Il calcolo della matrice hessiana di  $\mathcal{U}$  con  $g = 0$ :

$$\mathcal{U}(z, \varphi) := \frac{\kappa z^2}{2} - \kappa R z \sin \varphi,$$

fornisce direttamente

$$H(z_0, \varphi_0) = \kappa \begin{bmatrix} 1 & -R \cos \varphi_0 \\ -R \cos \varphi_0 & z_0 R \sin \varphi_0 \end{bmatrix}.$$

Ne consegue che:

$$H(0, 0) = \kappa \begin{bmatrix} 1 & -R \\ -R & 0 \end{bmatrix}.$$

Avendo questa matrice (omettendo il fattore positivo  $\kappa$ ) traccia 1 e determinante  $-R^2$ , concludiamo che i suoi autovalori (la cui somma è la traccia della matrice ed il cui prodotto ne è il determinante) sono uno positivo e l'altro negativo positivi. Segue immediatamente che la configurazione di equilibrio considerata è instabile. Passando alla seconda configurazione di equilibrio troviamo

$$H(0, \pi) = \kappa \begin{bmatrix} 1 & R \\ R & 0 \end{bmatrix}.$$

Avendo questa matrice (omettendo il fattore positivo  $\kappa$ ) traccia 1 e determinante  $-R^2$ , concludiamo che i suoi autovalori (la cui somma è la traccia della matrice ed il cui prodotto ne è il determinante) sono uno positivo e l'altro negativo positivi. Segue immediatamente che la configurazione di equilibrio considerata è ancora instabile. La terza configurazione di equilibrio fornisce

$$H(R, \pi/2) = \kappa \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^2 \end{bmatrix}.$$

Dato che il determinante e la traccia della matrice sono entrambi positivi entrambi gli autovalori sono strettamente positivi e pertanto si ha stabilità nel passato e nel futuro.

La quarta configurazione di equilibrio fornisce ancora

$$H(-R, -\pi/2) = \kappa \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^2 \end{bmatrix},$$

con le stesse conclusioni: la configurazione è di equilibrio stabile nel passato e nel futuro.

## ESERCIZIO 9

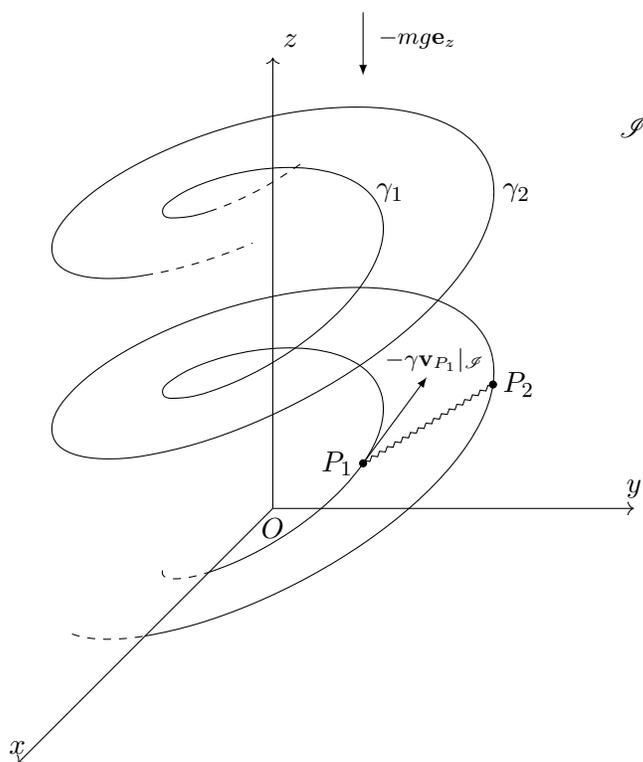
In riferimento al sistema di assi cartesiani ortonormali  $x, y, z$  destrorso di origine  $O$  e solidali con un sistema di riferimento inerziale  $\mathcal{R}$ , si considerino le due curve:  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  di equazioni:

$$\gamma_1 : \quad x(\theta_1) = r \cos \theta_1, \quad y(\theta_1) = r \sin \theta_1, \quad z(\theta_1) = h\theta_1, \quad \theta_1 \in \mathbb{R}$$

$$\gamma_2 : \quad x(\theta_2) = 2r \cos \theta_2, \quad y(\theta_2) = 2r \sin \theta_2, \quad z(\theta_2) = h\theta_2, \quad \theta_2 \in \mathbb{R}$$

dove  $h, r > 0$  sono costanti fissate.

I punti materiali  $P_1$  e  $P_2$  con la stessa massa  $m > 0$  sono vincolati a  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  rispettivamente, pensate come curve prive di attrito. Oltre alle reazioni vincolari, sui due punti agiscono le



seguenti forze:

- (i) la forza  $-mg \mathbf{e}_z$  su *ciascuno* dei due punti, con  $g \geq 0$  costante fissata,
- (ii) la forza di una molla che ha gli estremi fissati ai due punti, di lunghezza nulla a riposo, priva di peso, con costante elastica  $K > 0$  assegnata.
- (iii) una forza viscosa  $-\gamma \mathbf{v}_{P_1}|_{\mathcal{R}}$  (che agisce dunque solo su  $P_1$ ) dove  $\gamma \geq 0$  è una costante nota. Usando come coordinate libere gli angoli  $\theta_1$  e  $\theta_2$  si risolvano i quesiti (a),(b),(c) ed un ulteriore quesito scelto tra (d) e (e).

- (a) Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange del sistema dei due punti materiali.
- (b) Nel caso  $\gamma = 0$  si dimostri che l'energia meccanica totale del sistema (riferita al sistema inerziale  $\mathcal{R}$ ) si conserva e se ne dia l'espressione esplicita in funzione delle coordinate lagrangiane e delle loro derivate prime temporali.
- (c) Nel caso  $\gamma = 0$  partendo dalle coordinate libere  $\theta_1, \theta_2$  si passi alla formulazione hamiltoniana, scrivendo esplicitamente:
- (1) l'hamiltoniana in funzione delle variabili di Hamilton  $\theta_1, \theta_2, p_{\theta_1}, p_{\theta_2}$  e
  - (2) le equazioni di Hamilton.
- (d) Nel caso  $\gamma = 0$  e  $g = 0$  si passi alle nuove coordinate lagrangiane  $\Theta = (\theta_1 + \theta_2)/2$  e  $\Phi = (\theta_1 - \theta_2)/2$  e si proceda come segue.
- (1) Si verifichi che la lagrangiana del sistema (riferita a  $\mathcal{R}$ ) è indipendente da  $\Theta$  e si determini l'integrale primo associato  $I$ ;
  - (2) Si scrivano esplicitamente in funzione delle coordinate libere e delle coordinate libere puntate, la componente  $z$  del momento angolare totale rispetto al riferimento  $\mathcal{R}$  ed al polo  $O$ ,  $\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{e}_z$ , e la componente  $z$  dell'impulso totale rispetto al riferimento  $\mathcal{R}$ ,  $\mathbf{P}|_{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{e}_z$ . Si verifichi se  $I$  sia o meno esprimibile come una funzione di  $\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{e}_z$  e  $\mathbf{P}|_{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{e}_z$ .
- (e) Si considerino le equazioni di Eulero-Lagrange nel caso  $\gamma = 0$  e si proceda come segue.
- (1) Per  $r, h > 0$  assegnate, si determinino i valori della costante  $g \geq 0$  per cui possono esistere soluzioni del problema del moto tali che  $\theta_1(t) = \theta_2(t) \forall t \in \mathbb{R}$ ;
  - (2) si dia infine l'espressione esplicita di tali soluzioni.

### Soluzione.

(a) Omettiamo nel seguito l'indice  $|_{\mathcal{R}}$  essendo tutte le grandezze cinematiche associate unicamente al riferimento  $\mathcal{R}$ . In riferimento a coordinate cilindriche, vale:  $P_1 - O = r \mathbf{e}_r(\theta_1) + z(\theta_1) \mathbf{e}_z$ ,  $P_2 - O = 2r \mathbf{e}_r(\theta_2) + z(\theta_2) \mathbf{e}_z$ . Pertanto

$$\mathbf{v}_{P_1} = r\dot{\theta}_1 \mathbf{e}_\theta(\theta_1) + h\dot{\theta}_1 \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{v}_{P_2} = 2r\dot{\theta}_2 \mathbf{e}_\theta(\theta_2) + h\dot{\theta}_2 \mathbf{e}_z.$$

L'energia cinetica del sistema di punti sarà allora data da:

$$\mathcal{T} := \frac{m}{2} (r^2\dot{\theta}_1^2 + h^2\dot{\theta}_1^2 + 4r^2\dot{\theta}_2^2 + h^2\dot{\theta}_2^2) = \frac{m(r^2 + h^2)}{2} \dot{\theta}_1^2 + \frac{m(4r^2 + h^2)}{2} \dot{\theta}_2^2.$$

Tendo conto del fatto che:  $P_1 - P_2 = r \mathbf{e}_r(\theta_1) - 2r \mathbf{e}_r(\theta_2) + z(\theta_1) \mathbf{e}_z - z(\theta_2) \mathbf{e}_z$ , si ha che l'energia potenziale totale avrà invece espressione:

$$mg(z(\theta_1) + z(\theta_2)) + \frac{K}{2} (P_1 - P_2)^2 = mgh(\theta_1 + \theta_2) + \frac{K}{2} (r^2 + 4r^2 - 2r^2 \mathbf{e}_r(\theta_1) \cdot \mathbf{e}_r(\theta_2) + h^2(\theta_1 - \theta_2)^2).$$

Essendo:

$$\mathbf{e}_r(\theta_1) \cdot \mathbf{e}_r(\theta_2) = (\cos \theta_1 \mathbf{e}_x + \sin \theta_1 \mathbf{e}_y) \cdot (\cos \theta_2 \mathbf{e}_x + \sin \theta_2 \mathbf{e}_y) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 = \cos(\theta_1 - \theta_2),$$

abbiamo l'espressione finale:

$$\mathcal{U} = mgh(\theta_1 + \theta_2) + \frac{K}{2} (h^2(\theta_1 - \theta_2)^2 - 4r^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)),$$

dove abbiamo trascurato una costante additiva inessenziale. Infine la componente lagrangiana  $\mathcal{Q}_{\theta_1}$  (l'unica non nulla) della forza viscosa è

$$\mathcal{Q}_{\theta_1} = \frac{\partial \mathbf{x}_{P_1}}{\partial \theta_1} \cdot (-\gamma \mathbf{v}_{P_1}) = -\gamma(r \mathbf{e}_\theta(\theta_1) + h \mathbf{e}_z) \cdot (r\dot{\theta}_1 \mathbf{e}_\theta(\theta_1) + h\dot{\theta}_1 \mathbf{e}_z),$$

cioé

$$\mathcal{Q}_{\theta_1} = -\gamma(r^2 + h^2)\dot{\theta}_1.$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange prendono dunque la forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} &= \mathcal{Q}_{\theta_1} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} &= 0 \\ \frac{d\theta_1}{dt} = \dot{\theta}_1, \quad \frac{d\theta_2}{dt} &= \dot{\theta}_2, \end{aligned}$$

dove abbiamo introdotto la funzione lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U} = \frac{m(r^2 + h^2)}{2} \dot{\theta}_1^2 + \frac{m(4r^2 + h^2)}{2} \dot{\theta}_2^2 - mgh(\theta_1 + \theta_2) - \frac{K}{2} (h^2(\theta_1 - \theta_2)^2 - 4r^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)).$$

Esplicitamente:

$$\begin{aligned} m(r^2 + h^2) \frac{d^2\theta_1}{dt^2} &= -mgh - K(h^2(\theta_1 - \theta_2) + 2r^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)) - \gamma(r^2 + h^2) \frac{d\theta_1}{dt}, \\ m(4r^2 + h^2) \frac{d^2\theta_2}{dt^2} &= -mgh - K(h^2(\theta_2 - \theta_1) + 2r^2 \sin(\theta_2 - \theta_1)). \end{aligned}$$

(b) Siamo nelle ipotesi del teorema di Jacobi dato che la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo, pertanto si conserva nel tempo la funzione hamiltoniana. Ulteriormente nel riferimento  $\mathcal{R}$  i vincoli non dipendono dal tempo, le coordinate libere sono solidali a tale riferimento, le forze attive sono tutte conservative e la lagrangiana è stata calcolata rispetto a  $\mathcal{R}$ . In tal caso, come è noto l'hamiltoniana del sistema coincide con l'energia meccanica totale calcolata rispetto a  $\mathcal{R}$ . Possiamo anche fare una verifica esplicita. L'Hamiltoniana è per definizione:

$$\mathcal{H} = \dot{\theta}_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} + \dot{\theta}_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} - \mathcal{L}$$

Nel caso in esame otteniamo immediatamente che, esplicitamente:

$$\mathcal{H} = \frac{m(r^2 + h^2)}{2} \dot{\theta}_1^2 + \frac{m(4r^2 + h^2)}{2} \dot{\theta}_2^2 + mgh(\theta_1 + \theta_2) + \frac{K}{2} (h^2(\theta_1 - \theta_2)^2 - 4r^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)).$$

In tale espressione

$$\frac{m(r^2 + h^2)}{2} \dot{\theta}_1^2 + \frac{m(4r^2 + h^2)}{2} \dot{\theta}_2^2$$

non è altro che l'energia cinetica del sistema come provato precedentemente, mentre

$$mgh(\theta_1 + \theta_2) + \frac{K}{2} (h^2(\theta_1 - \theta_2)^2 - 4r^2 \cos(\theta_1 - \theta_2))$$

è, come calcolato sopra, l'energia potenziale delle forze attive (la forza viscosa è assente e le reazioni vincolari non compiono lavoro). Abbiamo trovato che l'energia meccanica totale del sistema coincide con l'hamiltoniana.

(c) Nel nostro caso la trasformazione di Legendre si riduce a:

$$\begin{aligned} p_{\theta_1} &= \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = m(r^2 + h^2)\dot{\theta}_1, \\ p_{\theta_2} &= \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = m(4r^2 + h^2)\dot{\theta}_2, \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \frac{p_{\theta_1}}{m(r^2 + h^2)}, \\ \dot{\theta}_2 &= \frac{p_{\theta_2}}{m(4r^2 + h^2)}. \end{aligned}$$

Sostituendo nell'espressione esplicita dell'hamiltoniana trovata in (b) otteniamo che la funzione hamiltoniana come funzione delle variabili di Hamilton si scrive;

$$\mathcal{H}(\theta_1, \theta_2, p_{\theta_1}, p_{\theta_2}) = \frac{p_{\theta_1}^2}{2m(r^2 + h^2)} + \frac{p_{\theta_2}^2}{2m(4r^2 + h^2)} + mgh(\theta_1 + \theta_2) + \frac{K}{2} (h^2(\theta_1 - \theta_2)^2 - 4r^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)).$$

Possiamo allora scrivere il set di equazioni di Hamilton come:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_1}{dt} &= \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{\theta_1}} \right) = \frac{p_{\theta_1}}{m(r^2 + h^2)}, \\ \frac{d\theta_2}{dt} &= \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{\theta_2}} \right) = \frac{p_{\theta_2}}{m(4r^2 + h^2)}, \\ \frac{dp_{\theta_1}}{dt} &= \left( -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta_1} \right) = -mgh - K(h^2(\theta_1 - \theta_2) + 2r^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)), \\ \frac{dp_{\theta_2}}{dt} &= \left( -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta_2} \right) = -mgh - K(h^2(\theta_2 - \theta_1) + 2r^2 \sin(\theta_2 - \theta_1)). \end{aligned}$$

(d) Vale:  $\theta_1 = \Theta + \Phi$  e  $\theta_2 = \Theta - \Phi$ . Sostituendo nell'espressione della lagrangiana trovata in (a) con  $\gamma = 0$  e  $g = 0$ , si vede immediatamente che essa si trascrive:

$$\mathcal{L} = \frac{m(r^2 + h^2)}{2} (\dot{\Theta} + \dot{\Phi})^2 + \frac{m(4r^2 + h^2)}{2} (\dot{\Theta} - \dot{\Phi})^2 - \frac{K}{2} (4h^2\Phi^2 - 4r^2 \cos(2\Phi)).$$

Dato che la lagrangiana non dipende esplicitamente da  $\Theta$ , si ha allora l'integrale primo:

$$I = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Theta}} = m(r^2 + h^2) (\dot{\Theta} + \dot{\Phi}) + m(4r^2 + h^2) (\dot{\Theta} - \dot{\Phi}) .$$

In definitiva:

$$I = m(r^2 + h^2)\dot{\theta}_1 + m(4r^2 + h^2)\dot{\theta}_2 .$$

D'altra parte:

$$(P_1 - O) \wedge m\mathbf{v}_{P_1} = (r\mathbf{e}_r(\theta_1) + h\theta_1\mathbf{e}_z) \wedge m(r\dot{\theta}_1\mathbf{e}_\theta(\theta_1) + h\dot{\theta}_1\mathbf{e}_z) = mr^2\dot{\theta}_1\mathbf{e}_z - mrh\dot{\theta}_1\mathbf{e}_\theta - mrh\theta_1\dot{\theta}_1\mathbf{e}_r ,$$

per cui:

$$(P_1 - O) \wedge m\mathbf{v}_{P_1} \cdot \mathbf{e}_z = mr^2\dot{\theta}_1 .$$

Nello stesso modo troviamo:

$$(P_2 - O) \wedge m\mathbf{v}_{P_2} \cdot \mathbf{e}_z = 4mr^2\dot{\theta}_2 ,$$

da cui:

$$\Gamma_O \cdot \mathbf{e}_z = ((P_1 - O) \wedge m\mathbf{v}_{P_1} + (P_2 - O) \wedge m\mathbf{v}_{P_2}) \cdot \mathbf{e}_z = mr^2\dot{\theta}_1 + 4mr^2\dot{\theta}_2 .$$

Riguardo all'impulso totale lungo l'asse  $z$  si ha invece:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_z = (m\mathbf{v}_{P_1} + m\mathbf{v}_{P_2}) \cdot \mathbf{e}_z = (m(r\dot{\theta}_1\mathbf{e}_\theta(\theta_1) + h\dot{\theta}_1\mathbf{e}_z) + m(r\dot{\theta}_2\mathbf{e}_\theta(\theta_2) + h\dot{\theta}_2\mathbf{e}_z)) \cdot \mathbf{e}_z = mh\dot{\theta}_1 + mh\dot{\theta}_2 .$$

Concludiamo che:

$$I = \Gamma_O \cdot \mathbf{e}_z + h\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_z ,$$

ed in particolare  $\alpha = h$ .

(e) Le equazioni di E-L nel caso  $\gamma = 0$  si riducono a:

$$\begin{aligned} m(r^2 + h^2) \frac{d^2\theta_1}{dt^2} &= -mgh - K (h^2(\theta_1 - \theta_2) + 2r^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)) , \\ m(4r^2 + h^2) \frac{d^2\theta_2}{dt^2} &= -mgh - K (h^2(\theta_2 - \theta_1) + 2r^2 \sin(\theta_2 - \theta_1)) . \end{aligned}$$

Se  $\theta_1 = \theta_1(t)$ ,  $\theta_2 = \theta_2(t)$  è una soluzione con  $\theta_1(t) = \theta_2(t)$ , allora deve valere

$$\begin{aligned} m(r^2 + h^2) \frac{d^2\theta_1}{dt^2} &= -mgh , \\ m(4r^2 + h^2) \frac{d^2\theta_1}{dt^2} &= -mgh . \end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro troviamo:

$$m3r^2 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = 0 \quad \text{e quindi} \quad \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = 0 .$$

Pertanto, valendo

$$m(r^2 + h^2) \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = -mgh$$

con  $m, r, h > 0$ , deve anche essere  $-mgh = 0$ . Dato che è  $mh > 0$  per ipotesi, si possono avere soluzioni suddette solo per  $g = 0$ .

Determiniamo la forma esplicita di tali soluzioni. Se esistono soluzioni con  $\theta_1(t) = \theta_2(t) \forall t \in \mathbb{R}$  devono soddisfare in particolare:  $\theta_1(0) = \theta_2(0)$  e  $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0)$ . Se fissiamo condizioni iniziali:  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \theta_0$  e  $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = v_0$  per arbitrarie costanti  $\theta_0, v_0$ , la coppia di funzioni:

$$\theta_1(t) = v_0 t + \theta_0, \quad \theta_2(t) = v_0 t + \theta_0, \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}$$

soddisfa le equazioni:

$$\begin{aligned} m(r^2 + h^2) \frac{d^2\theta_1}{dt^2} &= -K (h^2(\theta_1 - \theta_2) - 2r^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)) , \\ m(4r^2 + h^2) \frac{d^2\theta_2}{dt^2} &= -K (h^2(\theta_2 - \theta_1) - 2r^2 \sin(\theta_2 - \theta_1)) . \end{aligned}$$

con le condizioni iniziali dette ed anche la richiesta  $\theta_1(t) = \theta_2(t)$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Queste sono dunque tutte e sole le soluzioni del tipo cercato per il teorema di unicità dei sistemi di equazioni differenziali in forma normale con secondo membro regolare.

## ESERCIZIO 10

Nel riferimento inerziale  $\mathcal{R}$ , rispetto a coordinate cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{R}$ ,  $x, y, z$  di origine  $O$ , un punto materiale  $P$  di massa  $M > 0$  è vincolato a giacere sulla circonferenza  $C$  di equazione  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  $z = 0$ . Un secondo punto materiale  $Q$  di massa  $M > 0$  è vincolato ad appartenere alla retta parallela a  $\mathbf{e}_z$  e passante per  $(0, 2R, 0)$ . Entrambi i vincoli sono supposti lisci ed entrambi i punti sono sottoposti alla forza di gravità  $-Mg \mathbf{e}_z$  (con  $g > 0$ ). I punti sono connessi l'un l'altro da una molla senza peso e di costante elastica  $K > 0$  e lunghezza nulla a riposo. Sul punto  $P$  agisce infine la forza viscosa  $-\gamma \mathbf{v}_P$  dove  $\gamma \geq 0$  è una costante assegnata e la velocità è riferita al riferimento  $\mathcal{R}$ . Si risolvano i seguenti quesiti usando come coordinate lagrangiane  $\theta \in (-\pi, \pi)$  (valutato su  $C$  rispetto all'asse  $x$  ed orientato positivamente rispetto a  $\mathbf{e}_z$ ) per descrivere la posizione del punto  $P$  e la quota  $z$  per descrivere la posizione del punto  $Q$ .

(1). Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange del sistema e, nel caso  $\gamma = 0$ , l'espressione delle componenti delle reazioni vincolari in funzione di  $\theta, z, \dot{\theta}, \dot{z}$ .

(2). Si scriva esplicitamente l'energia meccanica totale del sistema e si provi che si conserva sui moti del sistema se  $\gamma = 0$ . Per  $\gamma > 0$ , esprimere la derivata temporale dell'energia meccanica valutata sui moti del sistema in funzione di  $\theta, z, \dot{\theta}, \dot{z}$ .

(3). Ponendo  $\gamma = 0$ , Si passi in formulazione di Hamilton, scrivendo esplicitamente l'Hamiltoniana del sistema in funzione delle variabili di Hamilton e le equazioni di Hamilton in tali variabili.

(4). Ponendo  $\gamma = 0$ , in formulazione di Lagrange, si risolva il problema del moto con i dati iniziali:

$$\theta(0) = -\pi/2$$

$$\dot{\theta}(0) = 0$$

$$z(0) = Z$$

$$\dot{z}(0) = 0,$$

con  $Z$  costante assegnata, e si calcolino le componenti delle reazioni vincolari su tale soluzione in funzione del tempo.

(5). Ponendo  $\gamma = 0$ , in formulazione di Lagrange, si determinino tutte le condizioni iniziali al tempo  $t = 0$ ,  $(z(0), \dot{z}(0), \theta(0), \dot{\theta}(0))$  per cui il moto risultante è di quiete:  $z(t) = \text{costante}$ ,  $\theta(t) = \text{costante}$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .

### Soluzione.

(1). Definiamo il solito sistema di coordinate polari piane  $r, \theta$  adattato alla circonferenza in cui l'angolo  $\theta$  individua  $P - O$  rispetto all'asse  $x$ , con orientazione positiva rispetto a  $\mathbf{e}_z$ . Le relazioni tra i versori  $\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  e quelli associati alle coordinate polari sono, al solito:

$$\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y, \quad (1.116)$$

$$\mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y, \quad (1.117)$$

che si invertono in (prendendo la trasposta della corrispondente trasformazione lineare):

$$\mathbf{e}_x = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta, \quad (1.118)$$

$$\mathbf{e}_y = \sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta. \quad (1.119)$$

Di conseguenza:

$$\mathbf{x}_P = R \cos \theta \mathbf{e}_x + R \sin \theta \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{x}_Q = 2R \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z.$$

Dunque:

$$\mathbf{v}_P = R\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{v}_Q = \dot{z} \mathbf{e}_z.$$

Perché saranno utili tra poco, ricaviamo anche  $P - Q$  in coordinate cartesiane e polari:

$$P - Q = R \cos \theta \mathbf{e}_x + (R \sin \theta - 2R) \mathbf{e}_y - z \mathbf{e}_z, \quad (1.120)$$

può anche essere scritto come

$$P - Q = R \cos \theta (\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta) + (R \sin \theta - 2R) (\sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta) - z \mathbf{e}_z,$$

ossia:

$$P - Q = R(1 - 2 \sin \theta) \mathbf{e}_r - 2R \cos \theta \mathbf{e}_\theta - z \mathbf{e}_z. \quad (1.121)$$

Passiamo a scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange. Usando (1.120) l'energia potenziale della molla risulta avere espressione esplicita, in coordinate lagrangiane:

$$\frac{K}{2} (P - Q)^2 = \frac{K}{2} (R^2 + 4R^2 - 4R^2 \sin \theta + z^2).$$

Trascurando una costante additiva inessenziale, l'energia potenziale totale, tenendo conto anche dell'energia potenziale della forza di gravità  $Mgz$ , risulta essere:

$$\mathcal{U}(\varphi, z) := \frac{Kz^2}{2} - 2KR^2 \sin \theta + Mgz. \quad (1.122)$$

L'energia cinetica ha banalmente la forma:

$$\mathcal{T} = \frac{M}{2} (\dot{z}^2 + R^2 \dot{\theta}^2).$$

Se fosse  $\gamma = 0$  avremmo che la lagrangiana seguente determinan completamente il moto del sistema:

$$\mathcal{L} = \frac{M}{2} (\dot{z}^2 + R^2 \dot{\theta}^2) - \frac{Kz^2}{2} + 2KR^2 \sin \theta - Mgz. \quad (1.123)$$

Tuttavia si deve tenere conto della forza viscosa che ha solo componente lagrangiana  $\mathcal{Q}_\theta$  non nulla:

$$\mathcal{Q}_\theta = \frac{\partial \mathbf{x}_P}{\partial \theta} \cdot (-\gamma \mathbf{v}_P) = -\gamma R^2 \dot{\theta}.$$

La coppia non banale di equazioni di Eulero-Lagrange, nel caso generale di  $\gamma \neq 0$ , è data da

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0 \quad (1.124)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -\gamma R^2 \dot{\theta}. \quad (1.125)$$

Esplicitamente si ottiene, tenendo conto di (1.123):

$$M \frac{d^2 z}{dt^2} = -Mg - Kz, \quad (1.126)$$

$$M \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 2K \cos \theta - \gamma \frac{d\theta}{dt}. \quad (1.127)$$

Abbiamo dunque un sistema di equazioni differenziali corrispondente alle equazioni pure di movimento (infatti tale sistema è scrivibile in forma normale ed il secondo membro è  $C^\infty$ ): per trovare le equazioni che determinano le reazioni vincolari notiamo che valgono le equazioni di Newton (per  $\gamma = 0$ ):

$$\begin{aligned} M \mathbf{a}_P &= -Mg \mathbf{e}_z - K(P - Q) + \phi_P, \\ M \mathbf{a}_Q &= -Mg \mathbf{e}_z - K(Q - P) + \phi_Q. \end{aligned}$$

che possiamo riscrivere:

$$MR \frac{d^2 \theta}{dt^2} \mathbf{e}_\theta - MR \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \mathbf{e}_r = -Mg \mathbf{e}_z - K(P - Q) + \phi_P, \quad (1.128)$$

$$M \frac{d^2 z}{dt^2} \mathbf{e}_z = -Mg \mathbf{e}_z - K(Q - P) + \phi_Q. \quad (1.129)$$

Quindi, sviluppando  $P - Q$  usando (1.121) nella prima equazione del moto (1.128) e (1.120) nella seconda (1.129) e, finalmente, proiettando la prima equazione lungo le direzioni  $\mathbf{e}_r$  e  $\mathbf{e}_z$  e la seconda equazione lungo le direzioni  $\mathbf{e}_y$  e  $\mathbf{e}_x$  otteniamo le equazioni che, una volta noto un moto del sistema, determinano tutte le componenti delle reazioni vincolari:

$$\begin{aligned} \phi_P^r &= -MR \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + KR(1 - 2 \sin \theta), \\ \phi_P^z &= Mg - Kz, \\ \phi_Q^y &= -K(R \sin \theta - 2R), \\ \phi_Q^x &= -KR \cos \theta. \end{aligned}$$

(2). L'energia meccanica del sistema è la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale tale:

$$\mathcal{E} = \frac{M}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{M}{2} R^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{Kz^2}{2} - 2KR^2 \sin \theta + Mgz. \quad (1.130)$$

Per provare che  $\mathcal{E}$  è conservata sui moti del sistema quando  $\gamma = 0$  è sufficiente applicare il teorema di Jacobi tenendo conto che la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo e i vincoli sono solidali al riferimento. Oppure si può procedere come segue. Si moltiplicano ambo membri di (1.127) per  $R^2 d\theta/dt$  e ambo membri di (1.126) per  $dz/dt$ , quindi si sommano membro a membro i risultati ottenendo:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{M}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{M}{2} R^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( -\frac{Kz^2}{2} + 2KR^2 \sin \theta - Mgz \right),$$

che può essere riscritta semplicemente come, supponendo verificate le equazioni (1.128) e (1.129):

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0.$$

Nel caso  $\gamma > 0$  la stessa procedura fornisce:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\gamma R^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2. \quad (1.131)$$

**(3).** Partendo dalla lagrangiana (1.123) ed applicando la definizione di hamiltoniana, risulta subito:

$$\mathcal{H} = \frac{M}{2} (\dot{z}^2 + R^2 \dot{\theta}^2) + \frac{Kz^2}{2} - 2KR^2 \sin \theta + Mgz.$$

Partendo dalla lagrangiana (1.123), i momenti coniugati sono:

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = MR^2 \dot{\theta}, \quad (1.132)$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = M\dot{z}, \quad (1.133)$$

Pertanto l'hamiltoniana si scrive, in funzione di tali variabili:

$$\mathcal{H} = \frac{p_z^2}{2M} + \frac{p_\theta^2}{2MR^2} + \frac{Kz^2}{2} - 2KR^2 \sin \theta + Mgz. \quad (1.134)$$

Abbiamo quindi il set di equazioni di Hamilton:

$$\frac{dp_z}{dt} = \left( -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} \right) = -Mg - Kz, \quad (1.135)$$

$$\frac{dp_\theta}{dt} = \left( -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} \right) = 2KR^2 \cos \theta, \quad (1.136)$$

$$\frac{dz}{dt} = \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_z} \right) = \frac{p_z}{M}, \quad (1.137)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} \right) = \frac{p_\theta}{MR^2}. \quad (1.138)$$

(4) In riferimento alle equazioni del moto scritte in forma normale (1.126) e (1.127), si osservi che le equazioni sono disaccoppiate. Dato che la seconda equazione risulta essere soddisfatta dalla funzione  $\theta(t) = -\pi/2$  costantemente, questa è l'unica soluzione determinata dalle condizioni iniziali dette. Bisogna risolvere la seconda equazione, che riscriviamo come:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{K}{M} z + g = 0.$$

ossia, se  $z_1 := z + \frac{M}{K}g$ ,

$$\frac{d^2 z_1}{dt^2} + \frac{K}{M} z_1 = 0.$$

Questa è omogenea ed ha soluzione generale:

$$z_1(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{K}{M}}t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{K}{M}}t\right).$$

Quindi nella variabile  $z$ :

$$z(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{K}{M}}t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{K}{M}}t\right) - \frac{M}{K}g.$$

Dato che  $z(0) = Z$  deve essere:  $Z = A - \frac{M}{K}g$  e dunque  $A = Z + \frac{M}{K}g$ . Pertanto:

$$z(t) = \left(Z + \frac{M}{K}g\right) \cos\left(\sqrt{\frac{K}{M}}t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{K}{M}}t\right) - \frac{M}{K}g.$$

Derivando in  $t$  e imponendo che la derivata si annulli per  $t = 0$  si trova che  $B = 0$ . In definitiva la soluzione richiesta è:

$$\theta(t) = -\pi/2, \quad z(t) = \left(Z + \frac{M}{K}g\right) \cos\left(\sqrt{\frac{K}{M}}t\right) - \frac{M}{K}g, \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Sostituendo le funzioni  $z(t)$  e  $\theta(t)$  nei secondi membri delle equazioni trovate sopra per le componenti delle reazioni vincolari, si ha l'espressione delle componenti delle reazioni vincolari in funzione del tempo sul moto considerato:

$$\begin{aligned} \phi_P^r &= 3KR, \\ \phi_P^z &= 2Mg - (KZ + Mg) \cos\left(\sqrt{\frac{K}{M}}t\right), \\ \phi_Q^y &= 3RK, \\ \phi_Q^x &= 0. \end{aligned}$$

(5) Consideriamo le equazioni del moto scritte in forma normale.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = 2\frac{K}{M}\cos\theta - \frac{\gamma}{M}\frac{d\theta}{dt}, \quad (1.139)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g - \frac{K}{M}z, \quad (1.140)$$

Dato che il secondo membro è di classe  $C^\infty$  come funzione delle funzioni incognite e delle loro derivate prime, l'assegnazione di condizioni iniziali individua univocamente una soluzione, vale cioè il teorema di esistenza ed unicità.

Condizione necessaria affinché una soluzione sia rappresentata da funzioni costanti nel tempo è che entrambi i membri del sistema scritto sopra siano nulli per ogni tempo. Il primo membro si annulla banalmente se le funzioni  $\theta = \theta(t)$ ,  $z = z(t)$  sono costanti. Il secondo si annulla invece solo se  $\theta(t) = \theta_0$  e  $z(t) = z_0$  prendono i valori costanti  $\theta_0 = \pm\pi/2$  e  $z_0 = -Mg/K$ . Usando questi valori come dati di Cauchy unitamente a  $d\theta/dt|_{t=0} = 0$ ,  $dz/dt|_{t=0} = 0$ , il teorema di esistenza ed unicità implica che le uniche soluzioni associate siano quelle costanti. In definitiva le condizioni iniziali (a  $t = 0$ ) che producono moti costanti sono tutte e sole date da:

$$(\theta(0), z(0), d\theta/dt|_{t=0}, dz/dt|_{t=0}) = (\pm\pi/2, -Mg/K, 0, 0).$$

## ESERCIZIO 11

Nel riferimento inerziale  $\mathcal{R}$ , rispetto a coordinate cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{R}$ ,  $x, y, z$  di origine  $O$ , un punto materiale  $P$  di massa  $M > 0$  è vincolato a giacere sulla circonferenza  $C$  di equazione  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  $z = 0$ . Un secondo punto materiale  $Q$  di massa  $M > 0$  è vincolato ad appartenere alla retta parallela a  $\mathbf{e}_z$  e passante per  $(0, 2R, 0)$ . Entrambi i vincoli sono supposti lisci ed entrambi i punti sono sottoposti alla forza di gravità  $-Mg \mathbf{e}_z$  (con  $g > 0$ ). I punti sono connessi da una molla di costante elastica  $K > 0$ , massa nulla e lunghezza nulla a riposo. Sul punto  $P$  agisce infine la forza viscosa  $-\gamma \mathbf{v}_P$  dove  $\gamma \geq 0$  è una costante assegnata e la velocità è riferita al riferimento  $\mathcal{R}$ . Si risolvano i seguenti quesiti usando come coordinate:  $\theta \in (-\pi, \pi)$  (valutato su  $C$  rispetto all'asse  $x$  ed orientato positivamente rispetto a  $\mathbf{e}_z$ ) per descrivere la posizione del punto  $P$  e la quota  $z$  per descrivere la posizione del punto  $Q$ .

- (1). Scrivere le equazioni pure di movimento del sistema e le equazioni che determinano le reazioni vincolari quando è noto il moto del sistema.
- (2). Si scriva esplicitamente l'energia meccanica totale del sistema e si provi che si conserva sui moti del sistema se  $\gamma = 0$ . Se  $\gamma > 0$ , esprimere la derivata temporale dell'energia meccanica valutata sui moti del sistema in funzione delle velocità di  $P$  e  $Q$ .
- (3). Si determinino le configurazioni di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità.
- (4). Si risolva il problema del moto con i dati iniziali:  $\theta(0) = -\pi/2$ ,  $d\theta/dt|_{t=0} = 0$ ,  $z(0) = Z$  (con  $Z$  costante assegnata) e  $dz/dt|_{t=0} = 0$ .

### Soluzione.

(1). Le equazioni del moto dei due punti sono (non scriviamo esplicitamente  $|\mathcal{R}$  in quanto lavoriamo solo con un riferimento)

$$M\mathbf{a}_P = -Mg \mathbf{e}_z - K(P - Q) + \phi_P, \quad (1.141)$$

$$M\mathbf{a}_Q = -Mg \mathbf{e}_z - K(Q - P) + \phi_Q. \quad (1.142)$$

Definiamo il solito sistema di coordinate polari piane  $r, \theta$  adattato alla circonferenza in cui l'angolo  $\theta$  individua  $P-O$  rispetto all'asse  $x$ , con orientazione positiva rispetto a  $\mathbf{e}_z$ . Esprimiamo le equazioni del moto usando, per ciascun punto, le coordinate suggerite nel testo. Le relazioni tra i versori  $\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  e quelli associati alle coordinate polari sono, al solito:

$$\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y, \quad (1.143)$$

$$\mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y, \quad (1.144)$$

che si invertono in (prendendo la trasposta della corrispondente trasformazione lineare):

$$\mathbf{e}_x = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta, \quad (1.145)$$

$$\mathbf{e}_y = \sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta. \quad (1.146)$$

Di conseguenza:

$$P - Q = R \cos \theta \mathbf{e}_x + (R \sin \theta - 2R) \mathbf{e}_y - z \mathbf{e}_z, \quad (1.147)$$

può anche essere scritto come

$$P - Q = R \cos \theta (\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta) + (R \sin \theta - 2R)(\sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta) - z \mathbf{e}_z ,$$

ossia:

$$P - Q = R(1 - 2 \sin \theta) \mathbf{e}_r - 2R \cos \theta \mathbf{e}_\theta - z \mathbf{e}_z . \quad (1.148)$$

Tenendo conto del fatto che

$$\mathbf{a}_Q = \frac{d^2 z}{dt^2} \mathbf{e}_z ,$$

l'equazione (1.142) usando (1.147), può decomporsi, sulla base  $\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_x$  nelle tre equazioni con ovvie notazioni:

$$\begin{aligned} M \frac{d^2 z}{dt^2} &= -Mg - Kz , \\ 0 &= K(R \sin \theta - 2R) + \phi_Q^y , \\ 0 &= KR \cos \theta + \phi_Q^x . \end{aligned}$$

Tenendo conto del fatto che:

$$\mathbf{a}_P = R \frac{d^2 \theta}{dt^2} \mathbf{e}_\theta - R \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \mathbf{e}_r ,$$

e anche  $\mathbf{v}_P = R \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta$ , con una analoga procedura, usando l'equazione (1.148), l'equazione del moto (1.141) si decompone nelle tre equazioni sulla base  $\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_z$ :

$$\begin{aligned} M \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= 2K \cos \theta - \gamma \frac{d\theta}{dt} , \\ -MR \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 &= -KR(1 - 2 \sin \theta) + \phi_P^r , \\ 0 &= \phi_P^z + Mg . \end{aligned}$$

Abbiamo dunque un sistema di equazioni differenziali corrispondente alle equazioni pure di movimento (infatti tale sistema è scrivibile in forma normale ed il secondo membro è  $C^\infty$ ):

$$M \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 2K \cos \theta - \gamma \frac{d\theta}{dt} , \quad (1.149)$$

$$M \frac{d^2 z}{dt^2} = -Mg - Kz , \quad (1.150)$$

ed equazioni che, una volta noto un moto del sistema, determinano tutte le componenti delle reazioni vincolari:

$$\begin{aligned} \phi_P^r &= -MR \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + KR(1 - 2 \sin \theta) , \\ \phi_P^z &= Mg - Kz , \\ \phi_Q^y &= -K(R \sin \theta - 2R) , \\ \phi_Q^x &= -KR \cos \theta . \end{aligned}$$

(2). L'energia meccanica del sistema è la somma dell'energia cinetica

$$\mathcal{T} := \frac{M}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{M}{2} R^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 ,$$

e delle energie potenziali dovute alla forza della molla ed alla gravità (attenzione che l'energia della molla è contata *una volta sola*):

$$\mathcal{U} = \frac{K}{2} (P - Q)^2 + mgz .$$

Usando (1.147) si trova esplicitamente, trascurando una inessenziale costante additiva:

$$\mathcal{U}(\varphi, z) := \frac{Kz^2}{2} - 2KR^2 \sin \theta + Mgz . \quad (1.151)$$

Sommando tutto:

$$\mathcal{E} = \frac{M}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{M}{2} R^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{Kz^2}{2} - 2KR^2 \sin \theta + Mgz . \quad (1.152)$$

Per provare che  $\mathcal{E}$  è conservata sui moti del sistema quando  $\gamma = 0$  è sufficiente procedere come segue. Si moltiplicano ambo membri di (1.149) per  $dz/dt$  e ambo membri di (1.150) per  $R^2 d\theta/dt$ , quindi si sommano membro a membro i risultati ottenendo:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{M}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{M}{2} R^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( -\frac{Kz^2}{2} + 2KR^2 \sin \theta - Mgz \right) ,$$

che può essere riscritta semplicemente come, supponendo verificate le equazioni (1.149) e (1.150):

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0 .$$

Nel caso  $\gamma > 0$  la stessa procedura fornisce:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\gamma R^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 . \quad (1.153)$$

(3). Le configurazioni  $(\theta_0, z_0)$  di equilibrio per il sistema del *secondo ordine* (1.149)-(1.150) si ottengono, ragionando come per l'esercizio precedente, imponendo che per  $(\theta, z) = (\theta_0, z_0)$  i secondi membri di (1.149) e (1.150) siano nulli quando valgono le ulteriori condizioni  $d\theta/dt = 0$  e  $dz/dt = 0$ . Questa procedura porta immediatamente alle equazioni che determinano le configurazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} 0 &= -Mg - Kz_0 , \\ 0 &= 2KR \cos \theta_0 . \end{aligned}$$

che ha come uniche soluzioni:

$$\begin{aligned} z_0 &= -\frac{Mg}{K}, \\ \theta_0 &= \pm\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Passiamo allo studio della stabilità di esse. Al solito l'idea è di usare l'energia meccanica come funzione di Liapunov dato che vale  $\dot{\mathcal{E}} \leq 0$  come conseguenza della (1.153). Dall'espressione di  $\mathcal{E}$  in (1.152), vediamo che si ha un minimo stretto nella parte riguardate le velocità  $d\varphi/dt$ ,  $dz/dt$  attorno alla configurazione di velocità nulle. Se l'energia potenziale ha un minimo stretto in una delle due configurazioni di equilibrio, l'energia totale, pensata come funzione di Liapunov, soddisfa le ipotesi del teorema di Liapunov e si ha stabilità nel futuro.

$$\mathcal{U}(\varphi, z) := \frac{Kz^2}{2} - 2KR^2 \sin \theta + Mgz,$$

fornisce direttamente

$$H(\varphi_0, z_0) = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 2KR^2 \sin \varphi_0 \end{bmatrix}.$$

Ne consegue che:

$$H\left(-\frac{Mg}{K}, \pm\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & \pm 2KR^2 \end{bmatrix}.$$

Segue immediatamente che la configurazione di equilibrio  $\left(-\frac{Mg}{K}, \frac{\pi}{2}\right)$  è stabile nel futuro (e anche nel passato se  $\gamma = 0$ ). Viceversa se  $\gamma = 0$  possiamo anche concludere che la configurazione di equilibrio  $\left(-\frac{Mg}{K}, -\frac{\pi}{2}\right)$  è instabile nel passato e nel futuro.

(4) Consideriamo le equazioni del moto scritte in forma normale.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = 2\frac{K}{M} \cos \theta - \frac{\gamma}{M} \frac{d\theta}{dt}, \quad (1.154)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g - \frac{K}{M}z, \quad (1.155)$$

Si osservi che le equazioni sono disaccoppiate. Dato che entrambi i membri della prima equazione si annullano per  $\theta(t) = -\pi/2$  costantemente, questa è l'unica soluzione determinata dalle condizioni iniziali dette. Bisogna risolvere la seconda equazione, che riscriviamo come:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{K}{M}z + g = 0.$$

ossia, se  $z_1 := z + \frac{M}{K}g$ ,

$$\frac{d^2z_1}{dt^2} + \frac{K}{M}z_1 = 0.$$

Questa è omogenea ed ha soluzione generale:

$$z_1(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{K}{M}}t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{K}{M}}t\right).$$

Quindi nella variabile  $z$ :

$$z(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{K}{M}}t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{K}{M}}t\right) - \frac{M}{K}g.$$

Dato che  $z(0) = Z$  deve essere:  $Z = A - \frac{M}{K}g$  e dunque  $A = Z + \frac{M}{K}g$ . Pertanto:

$$z(t) = \left(Z + \frac{M}{K}g\right) \cos\left(\sqrt{\frac{K}{M}}t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{K}{M}}t\right) - \frac{M}{K}g.$$

Derivando in  $t$  e imponendo che la derivata si annulli per  $t = 0$  si trova che  $B = 0$ . In definitiva la soluzione richiesta è:

$$\theta(t) = -\pi/2, \quad z(t) = \left(Z + \frac{M}{K}g\right) \cos\left(\sqrt{\frac{K}{M}}t\right) - \frac{M}{K}g, \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

## ESERCIZIO 12

Nel riferimento non inerziale  $\mathcal{R}$ , rispetto a coordinate cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{R}$ ,  $x, y, z$  di origine  $O$ , un punto materiale  $P$  di massa  $m > 0$  è vincolato a giacere sulla circonferenza  $C$  di equazione  $x^2 + z^2 = R^2$ ,  $y = 0$  supposta liscia. Il punto materiale è connesso all'asse  $z$  con una molla ideale, di lunghezza nulla a riposo, priva di massa, di costante elastica  $k > 0$ . Il punto  $Q$  sull'asse  $z$  al quale è attaccato un estremo della molla è libero di scorrere lungo tale asse e si trova sempre alla stessa quota di  $P$ . Infine il punto  $P$  è sottoposto alla forza di gravità  $-mg \mathbf{e}_z$  con  $g > 0$  costante. Il sistema di riferimento  $\mathcal{R}$  ruota attorno all'asse  $z$  rispetto ad un riferimento inerziale  $\mathcal{R}_0$  con  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}}|_{\mathcal{R}_0} = \Omega \mathbf{e}_z$  dove  $\Omega > 0$  è costante.

Si risolvano i seguenti quesiti usando come coordinata per descrivere il punto sulla circonferenza l'angolo  $\theta \in (-\pi, \pi)$  individuato da  $P - O$  rispetto all'asse  $x$  ed orientato positivamente rispetto a  $-\mathbf{e}_y$ .

- (1). Scrivere l'equazione pura di movimento di  $P$  in termini di equazioni di Eulero-Lagrange, ottenendola sia nel riferimento inerziale che in quello non inerziale e provando che le due equazioni coincidono.
- (2). Scrivere le equazioni che determinano le reazioni vincolari quando è noto il moto del punto.
- (3). Si scriva esplicitamente l'energia meccanica totale del sistema nel riferimento  $\mathcal{R}$  e si provi che si conserva sui moti del sistema.
- (4). Si determinino le configurazioni di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità al variare dei parametri  $m, k, \Omega, g$  in  $(0, +\infty)$ .

### Soluzione.

(1). Scriviamo la lagrangiana del sistema nel riferimento inerziale  $\mathcal{R}_0$  nel quale non sono presenti forze inerziali e tutte le forze vere sono conservative. In tale riferimento la lagrangiana avrà forma  $\mathcal{L} = \mathcal{T}|_{\mathcal{R}_0} - \mathcal{U}$  e le equazioni di Eulero-Lagrange avranno la forma più semplice:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0}}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}.$$

Riferiamoci ad un sistema di coordinate polari piane  $(r, \theta)$  centrato in  $O$  nel piano  $x, z$  del riferimento non inerziale. Sappiamo che, se  $\mathbf{v}|_{\mathcal{R}}$  indica la velocità di  $P$  rispetto a  $\mathcal{R}$  e  $\mathbf{v}|_{\mathcal{R}_0}$  indica la velocità di  $P$  rispetto a  $\mathcal{R}_0$ , allora:  $\mathbf{v}|_{\mathcal{R}_0} = \mathbf{v}|_{\mathcal{R}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}}|_{\mathcal{R}_0} \wedge (P - O)$ . Nel caso in esame  $\mathbf{v}|_{\mathcal{R}} = R\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta$  e pertanto:

$$\mathbf{v}|_{\mathcal{R}_0} = R\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \Omega \mathbf{e}_z \wedge R \mathbf{e}_r,$$

Sapendo che  $\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_z$  si ha subito:

$$\mathbf{v}|_{\mathcal{R}_0} = R\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + R\Omega \cos \theta \mathbf{e}_y.$$

Quindi, tenendo conto che  $\mathbf{e}_\theta \perp \mathbf{e}_y$ , avremo che:

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{R}_0} = \frac{m}{2} \left( R^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \Omega^2 \cos^2 \theta \right). \quad (1.156)$$

Per quanto riguarda l'energia potenziale  $\mathcal{U}$ , essa avrà due contributi: quello dovuto alla molla  $(1/2)k(P - Q)^2$  e quello dovuto alla forza di gravità  $mzpg$  (avendo scelto lo zero dell'energia gravitazionale a  $z = 0$ ):

$$\mathcal{U}(\theta) = \frac{1}{2}kR^2 \cos^2 \theta + mgR \sin \theta . \quad (1.157)$$

In definitiva:

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0} = \frac{m}{2} (R^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \Omega^2 \cos^2 \theta) - \frac{1}{2}kR^2 \cos^2 \theta - mgR \sin \theta . \quad (1.158)$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange risultano allora essere:

$$mR^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mR^2 \Omega^2 \cos \theta \sin \theta + kR^2 \sin \theta \cos \theta - mgR \cos \theta . \quad (1.159)$$

Questa equazione, dividendo per  $mR^2$ , risulta essere scritta in forma normale con secondo membro dato da una funzione  $C^\infty$  di  $\theta$ . Per il teorema di esistenza ed unicità, tale equazione determina univocamente una soluzione quando sono assegnate le condizioni iniziali. Pertanto la (1.159) è l'equazione pura di movimento del punto  $P$ .

Vediamo come si ottenga la stessa equazione lavorando nel riferimento non inerziale  $\mathcal{R}$ . In questo caso appaiono forze fittizie non tutte conservative e conviene usare le equazioni di Eulero-Lagrange nella forma più generale:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{R}}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{R}}}{\partial \theta} = \mathcal{Q}_\theta + \mathcal{Q}'_\theta , \quad \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} , \quad (1.160)$$

dove  $\mathcal{Q}_\theta$  e  $\mathcal{Q}'_\theta$  sono, rispettivamente, le componenti lagrangiane delle forze attive vere e delle forze attive inerziali. L'energia cinetica  $\mathcal{T}|_{\mathcal{R}}$  è semplicemente  $m\mathbf{v}|_{\mathcal{R}}^2/2$  e cioè:

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{R}} = \frac{m}{2} R^2 \dot{\theta}^2 . \quad (1.161)$$

La componente lagrangiana delle forze attive vere sarà data da, tenendo conto che le forze vere sono quella gravitazionale  $-mg \mathbf{e}_z$  e quella della molla  $-k(P - Q)$ :

$$\mathcal{Q}_\theta = (k(Q - P) - mg \mathbf{e}_z) \cdot \frac{\partial P - O}{\partial \theta} = (-kR \cos \theta \mathbf{e}_x - mg \mathbf{e}_z) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} R(\cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_z) .$$

In definitiva:

$$\mathcal{Q}_\theta = kR^2 \cos \theta \sin \theta - mgR \cos \theta . \quad (1.162)$$

Le forze attive inerziali, in questo caso di assenza di traslazione e rotazione con  $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$ , sono solo la forza centrifuga:

$$\mathbf{F}^{(cent.)} := -m\boldsymbol{\omega}|_{\mathcal{R}_0} \wedge (\boldsymbol{\omega}|_{\mathcal{R}_0} \wedge (P - O)) = m\Omega^2(P - Q) = mR\Omega^2 \cos \theta \mathbf{e}_x$$

e quella di Coriolis:

$$\mathbf{F}^{(Coriolis)} := -2m\boldsymbol{\omega}|_{\mathcal{R}_0} \wedge \mathbf{v}|_{\mathcal{R}} = -2m\Omega R \mathbf{e}_z \wedge \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta = -2m\Omega \dot{\theta} R \mathbf{e}_z \wedge (-\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_z) = 2mR\Omega \dot{\theta} \sin \theta \mathbf{e}_y ,$$

dove abbiamo tenuto conto che:

$$\mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_z .$$

In definitiva:

$$\mathcal{Q}'_\theta = \left( mR\Omega^2 \cos \theta \mathbf{e}_x + 2mR\Omega\dot{\theta} \sin \theta \mathbf{e}_y \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} R(\cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_z) = -m\Omega^2 R^2 \cos \theta \sin \theta . \quad (1.163)$$

Si osservi che, in particolare, la forza di Coriolis non fornisce contributo alle componenti lagrangiane delle forze attive. A questo punto la (1.160), tenendo conto di (1.161), (1.162) e (1.163) si esplicita in:

$$mR^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = kR^2 \cos \theta \sin \theta - mgR \cos \theta - m\Omega^2 R^2 \cos \theta \sin \theta ,$$

che coincide con (1.159), già ottenuta per altra via.

(2). Conviene lavorare nel riferimento non inerziale nel quale abbiamo già l'espressione esplicita delle forze inerziali. L'equazione newtoniana del moto ha la forma, nel riferimento non inerziale e tenendo conto che in coordinate polari piane vale:  $d\mathbf{e}_r/dt = (d\theta/dt) \mathbf{e}_\theta$  e  $d\mathbf{e}_\theta/dt = -(d\theta/dt) \mathbf{e}_r$ ,

$$mR \frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbf{e}_\theta - mR \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \mathbf{e}_r = -mg \mathbf{e}_z - kR \cos \theta \mathbf{e}_x + mR\Omega^2 \cos \theta \mathbf{e}_x + 2mR\Omega\dot{\theta} \sin \theta \mathbf{e}_y + \boldsymbol{\phi} .$$

Cioè :

$$\begin{aligned} mR \frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbf{e}_\theta - mR \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \mathbf{e}_r &= \left( 2mR\Omega\dot{\theta} \sin \theta + \phi^y \right) \mathbf{e}_y - mg(\sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta) \\ &+ (mR\Omega^2 - kR) \cos \theta (\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta) + \phi^r \mathbf{e}_r , \end{aligned}$$

dove abbiamo supposto che la reazione vincolare, dato che è per ipotesi perpendicolare alla circonferenza, può solo avere componente radiale e lungo l'asse  $y$ :

$$\boldsymbol{\phi} = \phi^r \mathbf{e}_r + \phi^y \mathbf{e}_y .$$

Decomponendo l'equazione del moto di Newton scritta sopra lungo gli assi  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$ ,  $\mathbf{e}_y$  si ha il sistema di equazioni:

$$\phi^r = -mR \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + mg \sin \theta - (mR\Omega^2 - kR) \cos^2 \theta , \quad (1.164)$$

$$mR \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \cos \theta - (mR\Omega^2 - kR) \cos \theta \sin \theta , \quad (1.165)$$

$$\phi^y = -2mR\Omega \sin \theta \frac{d\theta}{dt} . \quad (1.166)$$

La seconda è ancora l'equazione pura di movimento (basta moltiplicare ambo membri per  $R$ ) già trovata, le rimanenti due determinano le componenti della reazione vincolare quando è noto

il moto del sistema.

**(3).** Notiamo preventivamente che la forza centrifuga in  $\mathcal{R}$  è conservativa: ha la stessa struttura di quella di una molla con costante elastica *negativa*:  $-m\Omega^2$  ed ha pertanto un'energia potenziale  $-m\Omega^2(P-Q)^2/2$ . L'energia meccanica  $\mathcal{E}|_{\mathcal{R}}$  nel sistema  $\mathcal{R}$  è data dalla somma dell'energia cinetica, dell'energia potenziale gravitazionale, dell'energia potenziale della molla e dell'energia potenziale centrifuga. Le rimanenti forze: la forza di Coriolis e la reazione vincolare non contribuiscono al calcolo non essendo conservative e compiendo sempre lavoro nullo. Per quest'ultima ragione, parlando in termini fisici, l'energia meccanica totale si conserva nel riferimento non inerziale  $\mathcal{R}$ :

$$\mathcal{E}|_{\mathcal{R}} = \frac{m}{2}R^2\dot{\theta}^2 + mgR \sin \theta + \frac{1}{2}kR^2 \cos^2 \theta - \frac{m}{2}R^2\Omega^2 \cos^2 \theta. \quad (1.167)$$

Tuttavia questo *non* è il modo di risolvere l'esercizio usando l'approccio matematico della meccanica Lagrangiana. La maniera più rapida per provare che  $\mathcal{E}|_{\mathcal{R}}$  è un integrale primo usando l'approccio matematico della meccanica di Lagrange è però quella di notare prima di tutto che  $\mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0}$  espressa in coordinate  $(\theta, \dot{\theta})$ , quindi adattate al riferimento  $\mathcal{R}$ , non dipende esplicitamente dal tempo e pertanto si ha l'integrale primo di Jacobi:

$$\mathcal{H}(\theta, \dot{\theta}) := \dot{\theta} \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0}}{\partial \dot{\theta}} - \mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0}(\theta, \dot{\theta})$$

L'espressione di  $\mathcal{H}$  si ottiene senza calcoli applicando direttamente la seconda parte del teorema di Jacobi osservando che  $\mathcal{L}|_{\mathcal{R}}$  coincide con  $\mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0}$  data da (1.158), dove ora il termine  $\frac{mR^2}{2}\Omega^2 \cos^2 \theta$  è visto come energia potenziale della forza centrifuga e non dell'energia cinetica che ora è:  $\mathcal{T}|_{\mathcal{R}} = \frac{m}{2}R^2\dot{\theta}^2$ . Nel riferimento  $\mathcal{R}$  i vincoli non dipendono dal tempo e la coordinata lagrangiana  $\theta$  è solidale con  $\mathcal{R}$ . Di conseguenza la seconda parte del teorema di Jacobi ci dice che la funzione di Hamilton calcolata a partire da  $\mathcal{L}|_{\mathcal{R}} = \mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0}$  coincide con l'energia meccanica totale in  $\mathcal{R}$ :

$$\mathcal{H}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{m}{2}R^2\dot{\theta}^2 + mgR \sin \theta + \frac{1}{2}kR^2 \cos^2 \theta - \frac{m}{2}R^2\Omega^2 \cos^2 \theta = \mathcal{E}|_{\mathcal{R}}.$$

Un metodo alternativo e più laborioso è quello di prendere l'equazione pura di movimento (1.159) moltiplicare ambo membri per  $d\theta/dt$ , ottenendo:

$$mR^2 \frac{d\theta}{dt} \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mR^2\Omega^2 \frac{d\theta}{dt} \cos \theta \sin \theta + kR^2 \frac{d\theta}{dt} \sin \theta \cos \theta - mgR \frac{d\theta}{dt} \cos \theta$$

e notando che il risultato si può riscrivere come, su ogni moto:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2}R^2\dot{\theta}^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2}R^2\Omega^2 \cos^2 \theta - \frac{1}{2}kR^2 \cos^2 \theta - mgR \sin \theta \right).$$

Questa è infine riscrivibile come:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2}R^2\dot{\theta}^2 + mgR \sin \theta + \frac{1}{2}kR^2 \cos^2 \theta - \frac{m}{2}R^2\Omega^2 \cos^2 \theta \right) = 0,$$

cioé, dove la derivata temporale totale è riferita ad una generica soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange  $t \mapsto (t, \theta(t), \dot{\theta}(t))$  inserita in  $\mathcal{E}|_{\mathcal{R}}$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}|_{\mathcal{R}}(t, \theta(t), \dot{\theta}(t)) = 0.$$

(4) In riferimento alle equazioni pure di movimento (1.159) che riscriviamo in forma normale ed al prim'ordine:

$$\frac{dv}{dt} = -\Omega^2 \cos \theta \sin \theta + \frac{k}{m} \sin \theta \cos \theta - \frac{g}{R} \cos \theta, \quad (1.168)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = v, \quad (1.169)$$

le configurazioni di equilibrio  $\theta_0$  sono tutte e sole le configurazioni per le quali l'unica soluzione del sistema autonomo sopra scritto con condizioni iniziali  $\theta(0) = \theta_0$ ,  $v(0) = 0$  sono date da  $\theta(t) = \theta_0$  e  $v(t) = 0$ , per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Deve allora essere chiaro, in base al teorema di esistenza ed unicità globale delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali, che le configurazioni di equilibrio  $\theta_0$  sono tutte e sole quelle che annullano il secondo membro di (1.168). Questo è equivalente a dire che le configurazioni di equilibrio sono tutti e soli i punti di stazionarietà della funzione energia potenziale totale (1.157). L'equazione per le configurazioni di equilibrio è dunque:

$$\left[ \left( \frac{k}{m} - \Omega^2 \right) \sin \theta_0 - \frac{g}{R} \right] \cos \theta_0 = 0. \quad (1.170)$$

Assumeremo  $\theta \in [-\pi, \pi]$  con  $-\pi \equiv \pi$ . Abbiamo dunque sempre le seguenti configurazioni di equilibrio:  $\theta_{\pm} = \pm\pi/2$ . Inoltre, nel caso  $k \neq m\Omega^2$  e

$$\left| \frac{gm}{R(k - m\Omega^2)} \right| \leq 1$$

esistono altre configurazioni di equilibrio. Più precisamente, se in tali ipotesi  $k > m\Omega^2$ , si hanno ancora le soluzioni

$$\theta_1^{(>)} = \arcsin \frac{gm}{R(k - m\Omega^2)}, \quad \theta_2^{(>)} = \pi - \arcsin \frac{gm}{R(k - m\Omega^2)},$$

e se viceversa  $k < m\Omega^2$ , si hanno le ulteriori soluzioni:

$$\theta_1^{(<)} = \arcsin \frac{gm}{R(k - m\Omega^2)}, \quad \theta_2^{(<)} = -\pi - \arcsin \frac{gm}{R(k - m\Omega^2)}.$$

Tenendo conto del fatto che dal punto di vista matematico, guardando le equazioni lagrangiane del moto, possiamo completamente ignorare la presenza della forza di Coriolis che non gioca alcun ruolo in esse, possiamo supporre che il sistema sia completamente descritto da forze conservative ed applicare la teoria generale che sappiamo in tale caso. La stabilità delle configurazioni di

equilibrio si può completamente studiare andando a guardare il segno della derivata seconda dell'energia potenziale totale:

$$\mathcal{U}(\theta) := mgR \sin \theta + \frac{1}{2}kR^2 \cos^2 \theta - \frac{m}{2}R^2\Omega^2 \cos^2 \theta .$$

Se tale segno è positivo in una configurazione di equilibrio  $\theta_0$ ,  $\mathcal{E}|_{\mathcal{R}}$  è una funzione di Liapunov per  $(\theta_0, 0)$  rispetto al sistema del primo ordine (1.168)-(1.169) e pertanto si ha equilibrio stabile nella configurazione  $\theta_0$ . Se il segno è negativo, per noti teoremi sappiamo che l'equilibrio è instabile. Se il segno è nullo non possiamo concludere nulla in base ai teoremi che conosciamo. Vale:

$$\frac{d\mathcal{U}(\theta)}{d\theta} = mgR \cos \theta - \frac{R^2}{2} (k - m\Omega^2) 2 \sin \theta \cos \theta = mgR \cos \theta - \frac{R^2}{2} (k - m\Omega^2) \sin(2\theta) .$$

Derivando ancora una volta:

$$\frac{d^2\mathcal{U}(\theta)}{d\theta^2} = -mgR \sin \theta - R^2 (k - m\Omega^2) \cos(2\theta) = -mgR \sin \theta - R^2 (k - m\Omega^2) (1 - 2 \sin^2 \theta) .$$

In definitiva:

$$\frac{d^2\mathcal{U}(\theta)}{d\theta^2} = -mgR \sin \theta + R^2 (k - m\Omega^2) (2 \sin^2 \theta - 1) . \quad (1.171)$$

Usando questa espressione troviamo subito che:

$$\left. \frac{d^2\mathcal{U}(\theta)}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_+} = -mgR + R^2 (k - m\Omega^2) ,$$

possiamo dire che  $\theta_+$ :

- (i) è stabile se  $-mg + R(k - m\Omega^2) > 0$ ,
- (ii) è instabile se  $-mg + R(k - m\Omega^2) < 0$ ,
- (iii) non possiamo dire nulla con i teoremi noti se  $-mg + R(k - m\Omega^2) = 0$ .

Nello stesso modo troviamo che:

$$\left. \frac{d^2\mathcal{U}(\theta)}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_-} = mgR + R^2 (k - m\Omega^2) ,$$

possiamo dire che  $\theta_-$ :

- (i) è stabile se  $mg + R(k - m\Omega^2) > 0$ ,
- (ii) è instabile se  $mg + R(k - m\Omega^2) < 0$ ,
- (iii) non possiamo dire nulla con i teoremi noti se  $mg + R(k - m\Omega^2) = 0$ .

Consideriamo ora le altre configurazioni trovate nel caso  $k \neq m\Omega^2$  e  $\left| \frac{gm}{R(k-m\Omega^2)} \right| \leq 1$ . Focalizziamo l'attenzione sulle configurazioni di equilibrio  $\theta_{1,2}^{(>)}$ . Si osservi che il seno di tali angoli coincide e vale  $\frac{gm}{R(k-m\Omega^2)} > 0$ . Pertanto, usando (1.171) si trova:

$$\left. \frac{d^2\mathcal{U}(\theta)}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_{1,2}^{(>)}} = -mgR \frac{gm}{R(k-m\Omega^2)} + R^2 (k - m\Omega^2) \left[ 2 \left( \frac{gm}{R(k-m\Omega^2)} \right)^2 - 1 \right] ,$$

cioé , con qualche passaggio:

$$\left. \frac{d^2 \mathcal{U}(\theta)}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_{1,2}^{(>)}} = \frac{g^2 m^2}{k - m\Omega^2} - R^2 (k - m\Omega^2) .$$

Tenendo conto che  $k - m\Omega^2 > 0$  concludiamo che:  $\theta_1^{(>)}$  e  $\theta_2^{(>)}$  sono entrambe a priori:

- (i) configurazioni di equilibrio stabile se  $g^2 m^2 - R^2 (k - m\Omega^2)^2 > 0$ ,
- (ii) configurazioni di equilibrio instabile se  $g^2 m^2 - R^2 (k - m\Omega^2)^2 < 0$ ,
- (iii) non possiamo dire nulla con i teoremi noti se  $g^2 m^2 - R^2 (k - m\Omega^2)^2 = 0$ .

Tuttavia dobbiamo ricordare il vincolo  $\left| \frac{gm}{R(k-m\Omega^2)} \right| \leq 1$  che implica che il caso (i) non è possibile.

Inoltre nel caso (iii), cioè per  $g^2 m^2 - R^2 (k - m\Omega^2)^2 = 0$ , in realtà si ritrova il caso già trattato indecidibile (iii)  $\theta_1^{(>)} = \theta_2^{(>)} = \pi/2$  già visto sopra.) Concludiamo dicendo che: *quando differiscono da  $\pi/2$ , le configurazioni di equilibrio  $\theta_1^{(>)}$  e  $\theta_2^{(>)}$  sono entrambe instabili.*

Consideriamo per finire le configurazioni di equilibrio  $\theta_{1,2}^{(<)}$ . Si osservi che il seno di tali angoli coincide e vale  $\frac{gm}{R(k-m\Omega^2)} < 0$ . Pertanto, usando (1.171) si trova:

$$\left. \frac{d^2 \mathcal{U}(\theta)}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_{1,2}^{(<)}} = -mgR \frac{gm}{R(k-m\Omega^2)} + R^2 (k - m\Omega^2) \left[ 2 \left( \frac{gm}{R(k-m\Omega^2)} \right)^2 - 1 \right] ,$$

cioé , con qualche passaggio:

$$\left. \frac{d^2 \mathcal{U}(\theta)}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_{1,2}^{(<)}} = \frac{g^2 m^2}{k - m\Omega^2} - R^2 (k - m\Omega^2) .$$

Tenendo conto che  $k - m\Omega^2 < 0$  concludiamo che:  $\theta_1^{(<)}$  e  $\theta_2^{(<)}$  sono entrambe, a priori:

- (i) configurazioni di equilibrio stabile se  $g^2 m^2 - R^2 (k - m\Omega^2)^2 < 0$ ,
- (ii) configurazioni di equilibrio instabile se  $g^2 m^2 - R^2 (k - m\Omega^2)^2 > 0$ ,
- (iii) non possiamo dire nulla con i teoremi noti se  $g^2 m^2 - R^2 (k - m\Omega^2)^2 = 0$ .

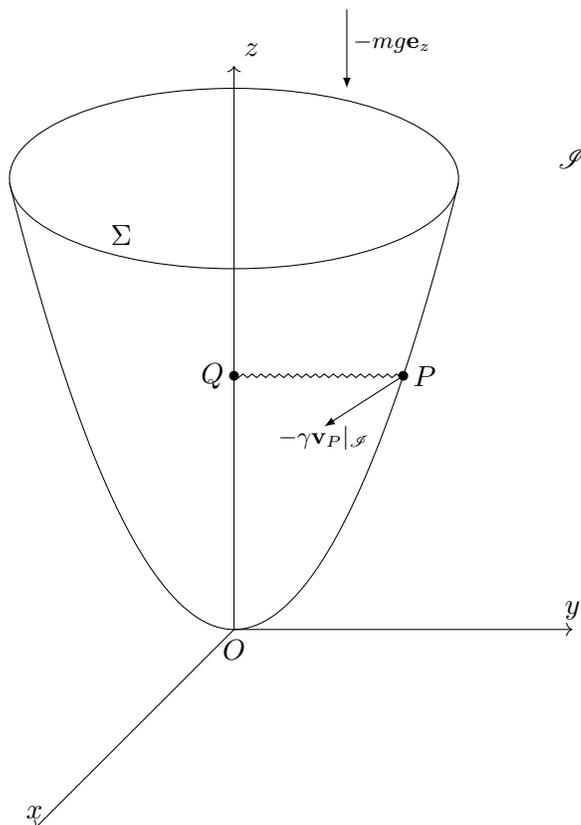
Tuttavia dobbiamo ricordare il vincolo  $\left| \frac{gm}{R(k-m\Omega^2)} \right| \leq 1$  che implica che il caso (ii) non è possibile.

Inoltre nel caso (iii), cioè per  $g^2 m^2 - R^2 (k - m\Omega^2)^2 = 0$ , in realtà si ritrova il caso già trattato indecidibile (iii)  $\theta_1^{(<)} = \theta_2^{(<)} = -\pi/2$  visto sopra.

Concludiamo dicendo che: *quando differiscono da  $-\pi/2$ , le configurazioni di equilibrio  $\theta_1^{(<)}$  e  $\theta_2^{(<)}$  sono entrambe stabili.*

### ESERCIZIO 13

In riferimento al sistema di assi cartesiani ortonormali  $x, y, z$  destrorso di origine  $O$  e solidali con un sistema di riferimento inerziale  $\mathcal{R}$ , sia  $\Sigma$  la superficie  $z = a(x^2 + y^2)/2$  con  $a > 0$  costante. Sia  $P$  un punto materiale di massa  $m > 0$  vincolato a muoversi su  $\Sigma$ , pensata come vincolo



ideale.  $P$  è sottoposto alle seguenti forze:

- (i) la forza di gravità  $-mg \mathbf{e}_z$  (con  $g > 0$  costante),
- (ii) la forza di una molla ideale di costante elastica  $k > 0$ , lunghezza nulla a riposo, con un estremo in  $P$  e l'altro dato dal punto  $Q$  sull'asse  $z$  che si trova sempre alla stessa quota di  $P$ ,
- (iii) la forza viscosa  $-\gamma \mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}}$  con  $\gamma \geq 0$  costante.

Si risolvano i seguenti quesiti.

(1). Si scrivano le equazioni pure di movimento per il punto  $P$  usando coordinate cilindriche  $(r, \theta, z)$  adattate al sistema di assi  $x, y, z$ .

(2). Si dimostri che, se  $\gamma = 0$ , esistono moti con  $r(t) = r_0 > 0$  costante e  $d\theta/dt = \dot{\theta}_0$  costante e si determinino tutti i valori ammissibili per  $r_0$  e  $\dot{\theta}_0$ . Su tali moti si calcoli la reazione vincolare

$\phi$ . Si dimostri infine che moti con  $r(t) = r_0 > 0$  costante e  $d\theta/dt = \dot{\theta}_0$  costante *non possono esistere* nel caso  $\gamma > 0$ .

(3). Nel caso  $\gamma = 0$ , si determinino *due* integrali primi indipendenti del sistema spiegandone il significato fisico. Si discuta se qualcuno dei due integrali possa derivare dall'applicazione elementare del teorema di Nöther.

(4). Nel caso  $\gamma = 0$ , si passi in formulazione di Hamilton esplicitando l'Hamiltoniana del sistema in funzione delle variabili  $r, \theta, p_r, p_\theta$  e scrivendo esplicitamente le equazioni di Hamilton.

*Suggerimento.* Si ricordi che, in coordinate cilindriche:

$$\mathbf{a} = \left( \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \mathbf{e}_r + \left( r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{d^2 z}{dt^2} \mathbf{e}_z .$$

### Soluzione.

(1). Omettiamo nel seguito l'indice  $|\mathcal{R}$ , essendo tutte le grandezze cinematiche associate unicamente al riferimento  $\mathcal{R}$ ; ometteremo anche l'indice  $P$  visto che si lavora con un unico punto materiale. Le coordinate libere saranno le coordinate polari piane  $r$  e  $\theta$ , dato che la variabile  $z$  è vincolata a soddisfare  $z = ar^2/2$  in conseguenza del fatto che  $P \in \Sigma$ . Visto che il vincolo è ideale, le equazioni pure di movimento (cioè equazioni differenziali in forma normale che *non* contengono le reazioni vincolari e che permettono di ottenere i moti del sistema) si possono sempre scrivere come equazioni di Eulero-Lagrange. Nel caso  $\gamma = 0$  le forze sono tutte conservative se si esclude la reazione vincolare, pertanto il sistema ammette una lagrangiana di struttura  $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$ . Nel caso  $\gamma > 0$  le equazioni di Eulero-Lagrange si possono scrivere nella forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \mathcal{Q}_r, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \mathcal{Q}_\theta, \quad (1.172)$$

dove le  $\mathcal{Q}_r, \mathcal{Q}_\theta$  sono le componenti lagrangiane della forza attiva viscosa  $-\gamma \mathbf{v}$ , la lagrangiana  $\mathcal{L}$  è la stessa di prima e sono sottintese le ulteriori equazioni  $\dot{\theta} = d\theta/dt$  e  $\dot{r} = dr/dt$ .

Andiamo a determinare  $\mathcal{L}$  e le componenti lagrangiane della forza viscosa notando che, nelle nostre coordinate, vale:

$$P - O = r \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z = r \mathbf{e}_r + \frac{ar^2}{2} \mathbf{e}_z \quad (1.173)$$

e

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{z} \mathbf{e}_z = \dot{r} \mathbf{e}_r + r\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + ar\dot{r} \mathbf{e}_z . \quad (1.174)$$

Quadrando la seconda e moltiplicando il risultato per  $m/2$  si ha l'espressione dell'energia cinetica  $\mathcal{T}$  di  $P$ . L'energia potenziale totale di  $P$ ,  $\mathcal{U}$ , è data dalla somma del contributo  $mgz = mgar^2/2$ , dovuto alla forza di gravità, e del contributo  $k(P-Q)^2/2 = kr^2/2$ , dovuto alla molla. Pertanto, nel caso  $\gamma = 0$ , la lagrangiana di  $P$  in  $\mathcal{R}$ , tenendo anche conto di (1.174) risulta essere:

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U} = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + a^2 r^2 \dot{r}^2 \right) - \frac{mgar^2}{2} - \frac{kr^2}{2}$$

cioé

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \left( (1 + a^2 r^2) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - \frac{mga + k}{2} r^2. \quad (1.175)$$

Passiamo alle componenti lagrangiane della forza viscosa. Abbiamo da (1.173) e (1.174)

$$\mathcal{Q}_r = -\gamma \mathbf{v} \cdot \frac{\partial P - O}{\partial r} = -\gamma \left( \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + ar \dot{r} \mathbf{e}_z \right) \cdot \left( \mathbf{e}_r + ar \mathbf{e}_z \right) = -\gamma \dot{r} (1 + a^2 r^2), \quad (1.176)$$

$$\mathcal{Q}_\theta = -\gamma \mathbf{v} \cdot \frac{\partial P - O}{\partial \theta} = -\gamma \left( \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + ar \dot{r} \mathbf{e}_z \right) \cdot r \mathbf{e}_\theta = -\gamma r^2 \dot{\theta}. \quad (1.177)$$

Le quazioni di Eulero-Lagrange, da (1.172), risultano immediatamente essere:

$$m \frac{d}{dt} \left( (1 + a^2 r^2) \frac{dr}{dt} \right) = ma^2 r \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + mr \left( \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - ga - \frac{k}{m} \right) - \gamma \frac{dr}{dt} (1 + a^2 r^2), \quad (1.178)$$

$$m \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = -\gamma r^2 \frac{d\theta}{dt}. \quad (1.179)$$

Sviluppando il primo membro si arriva facilmente, con qualche passaggio, ad un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine in forma normale con secondo memebro di classe  $C^\infty$ . Valendo il teorema di esistenza ed unicit  per le soluzioni di sistemi die equazioni differenziali, concludiamo che il sistema sopra scritto   formato da equazioni pure di movimento.

(2). Nel caso  $\gamma = 0$ , inserendo le funzioni  $r(t) = r_0 > 0$  costante e  $\theta(t) = \dot{\theta}_0 t + c$  con  $\dot{\theta}_0$  e  $c$  costanti nelle equazioni di Eulero-Lagrange (1.178) e (1.179) (per  $\gamma = 0!$ ), si trova che esse sono verificate da tali funzioni se e solo se:

$$\left( m \dot{\theta}_0^2 - mga - k \right) = 0,$$

e quindi i valori possibili per  $r_0 > 0$  e  $\dot{\theta}_0$  sono:

$$r_0 > 0 \quad \text{e} \quad \dot{\theta}_0 = \pm \sqrt{ga + \frac{k}{m}}. \quad (1.180)$$

Le equazioni che determinano la reazione vincolare si ottengono decomponendo la seconda legge della dinamica (nel caso  $\gamma = 0$ ) sulla terna  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$  e tenendo conto che la reazione vincolare non ha componenti tangenti a  $\Sigma$  e pertanto ha la struttura  $\boldsymbol{\phi} = \phi^{(z)} \mathbf{e}_z + \phi^{(r)} \mathbf{e}_r$ . Se

$$\mathbf{F} = -mg \mathbf{e}_z - kr \mathbf{e}_r - \gamma \mathbf{v},$$

  la somma delle forze attive agenti su  $P$ , e

$$\mathbf{a} = \left( \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \mathbf{e}_r + \left( r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{d^2 z}{dt^2} \mathbf{e}_z,$$

vale in particolare

$$m \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_z + \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{e}_z, \quad m \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_r = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_r + \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{e}_r,$$

che, tenendo conto che  $z = ar^2/2$ , si esplicitano in:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \frac{a}{2} r^2 = \phi^{(z)} - mg, \quad m \left( \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) = -kr + \phi^{(r)}.$$

Inserendo le funzioni  $r(t) = r_0 > 0$  costante e  $\theta(t) = \pm \sqrt{ga + \frac{k}{m}} t + c$  si trovano le uniche componenti di  $\phi$ :

$$\phi^{(z)} = mg \quad \text{e} \quad \phi^{(r)} = -mr_0ga,$$

e quindi:

$$\phi = -mr_0ga \mathbf{e}_r + mg \mathbf{e}_z.$$

Nel caso  $\gamma > 0$ , inserendo le funzioni  $r(t) = r_0 > 0$  costante e  $\theta(t) = \dot{\theta}_0 t + c$  con  $\dot{\theta}_0$  e  $c$  costanti nelle equazioni di Eulero-Lagrange (1.178) e (1.179) si ottiene la coppia di equazioni  $\gamma r_0 \dot{\theta}_0 = 0$  e  $r_0 (m \dot{\theta}_0^2 - mga - k) = 0$ . Nelle nostre ipotesi  $\gamma > 0, mga > 0, k > 0$ , e con la richiesta  $r_0 > 0$ , tale sistema *non* ammette soluzioni.

(3). Da (1.179) si conclude che, nel caso  $\gamma = 0$ , la grandezza:

$$L_z := mr^2 \frac{d\theta}{dt}$$

è un integrale primo. Il suo significato fisico è evidentemente la componente  $z$  del momento angolare di  $P$  rispetto al polo  $O$  nel riferimento  $\mathcal{R}$ . Infatti, il calcolo diretto mostra che:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \wedge m\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_z &= m(r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z) \wedge (\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{e}_z = m\mathbf{e}_z \wedge (r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z) \cdot (\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e}_z) \\ &= mr^2 \frac{d\theta}{dt}. \end{aligned}$$

L'integrale primo suddetto è un caso elementare di applicazione del teorema di Nöther per invarianza del sistema sotto rotazioni attorno ad un asse, notando che la Lagrangiana (1.175) non dipende esplicitamente dall'angolo  $\theta$  e pertanto si conserva l'integrale primo:

$$I := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}.$$

Il calcolo esplicito (già svolto nel ricavare le equazioni di E-L) mostra immediatamente che

$$I = mr^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

L'esistenza di un secondo integrale primo, sempre nel caso  $\gamma = 0$ , segue immediatamente dal teorema di Jacobi, visto che il sistema è conservativo nel riferimento  $\mathcal{R}$ , i vincoli sono indipendenti dal tempo nel riferimento  $\mathcal{R}$  e le coordinate libere usate sono solidali con il riferimento  $\mathcal{R}$ . Dal teorema di Jacobi si ha immediatamente che si conserva l'hamiltoniana:

$$\mathcal{H}(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) := \dot{r} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} + \dot{\theta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \mathcal{L}$$

del sistema fisico e che essa coincide con l'energia meccanica totale del sistema fisico studiato valutata nel sistema di riferimento  $\mathcal{B}$ :

$$\mathcal{H} = \mathcal{T} + \mathcal{U} = \frac{m}{2} \left( (1 + a^2 r^2) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) + \frac{mga + k}{2} r^2 .$$

(4). Passiamo alla formulazione di Hamilton nel caso  $\gamma = 0$ . I momenti coniugati sono dati da:

$$p_r := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m(1 + a^2 r^2) \dot{r} , \quad p_\theta := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta} ,$$

che si invertono banalmente in

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m(1 + a^2 r^2)} , \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} .$$

Pertanto la funzione hamiltoniana espressa in variabili di Hamilton:

$$\mathcal{H}(r, \theta, p_r, p_\theta) = p_r \dot{r}(r, \theta, p_r, p_\theta) + p_\theta \dot{\theta}(r, \theta, p_r, p_\theta) - \mathcal{L}(r, \theta, p_r, p_\theta)$$

risulta avere la forma:

$$\mathcal{H}(r, \theta, p_r, p_\theta) = \frac{p_r^2}{2m(1 + a^2 r^2)} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{mga + k}{2} r^2 .$$

Le equazioni di Hamilton sono allora:

$$\begin{aligned} \frac{dp_r}{dt} \left( = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} \right) &= \frac{a^2 r p_r^2}{m(1 + a^2 r^2)^2} + \frac{p_\theta^2}{mr^3} - (mga + k)r , \\ \frac{dp_\theta}{dt} \left( = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} \right) &= 0 , \\ \frac{dr}{dt} \left( = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} \right) &= \frac{p_r}{m(1 + a^2 r^2)} , \\ \frac{d\theta}{dt} \left( = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} \right) &= \frac{p_\theta}{mr^2} . \end{aligned}$$

## ESERCIZIO 14

Nel riferimento inerziale  $\mathcal{R}$  dotato di coordinate cartesiane ortonormali solidali  $x, y, z$  di origine  $O$ , si considerino due punti materiali  $P$  e  $p$  di masse  $M > 0$  e  $m > 0$  rispettivamente, vincolati a stare nel piano  $x = 0$ , supponendo il vincolo ideale. Si supponga che i punti materiali interagiscano con una forza conservativa con energia potenziale (in  $\mathcal{R}$ ) data da

$$\mathcal{U}(p, P) = k\|p - P\|^3$$

dove  $k > 0$  è una costante assegnata. Sul punto  $P$  agisce una forza non conservativa  $\mathbf{f} := \gamma(\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{e}_y) \mathbf{e}_z$ , dove  $\gamma \geq 0$  è una costante (notare che la forza agisce solo lungo l'asse  $z$ ). Infine i due punti sono sottoposti alla forza di gravità con accelerazione  $-g\mathbf{e}_z$  essendo  $g > 0$  una costante. Si risolvano i seguenti quesiti.

(1). Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange del sistema usando come coordinate libere: le due coordinate  $y, z$  del centro di massa  $G$ , l'angolo  $\theta$  che  $P - G$  individua rispetto all'asse  $y'$  passante per  $G$  e parallelo (equiverso) a  $y$  e la distanza  $r > 0$  di  $P$  da  $G$ .  $\theta$  è supposto essere orientato positivamente rispetto a versore  $\mathbf{e}_x$ .

(2). Nel caso  $\gamma = 0$ , si scriva l'espressione esplicita dell'energia meccanica totale, della componente  $x$  del momento angolare rispetto al centro di massa e della componente  $y$  dell'impulso totale del sistema, relativi al riferimento  $\mathcal{R}$ , e si dimostri che sono tutte integrali primi.

(3). Nel caso  $\gamma = 0$ , si discuta se possano esistere soluzioni delle equazioni del moto  $y = y(t), z = z(t), \theta = \theta(t), r = r(t)$  con  $\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_0 \neq 0$  costante ed eventualmente si determinino tali soluzioni esplicitamente.

(4). Nel caso  $\gamma = 0$ , si passi in formulazione di Hamilton, si scriva l'hamiltoniana e le equazioni di Hamilton in funzione delle coordinate hamiltoniane del sistema  $y, z, \theta, r, p_y, p_z, p_\theta, p_r$ .

**Soluzione.** Tutte le quantità considerate sono relative al sistema di riferimento inerziale  $\mathcal{R}$  e pertanto omettiamo di scrivere esplicitamente il pedice  $\mathcal{R}$ .

(1) Per costruzione vale, se  $\rho > 0$  è la distanza di  $p$  da  $G$ ,  $m\rho = Mr$ , da cui

$$\rho = \frac{M}{m}r.$$

Vale allora:

$$P - O = (y + r \cos \theta) \mathbf{e}_y + (z + r \sin \theta) \mathbf{e}_z \quad (1.181)$$

$$p - O = \left(y - \frac{M}{m}r \cos \theta\right) \mathbf{e}_y + \left(z - \frac{M}{m}r \sin \theta\right) \mathbf{e}_z. \quad (1.182)$$

Da queste relazioni si trovano

$$\mathbf{v}_P = (\dot{y} + \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta) \mathbf{e}_y + (\dot{z} + \dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta) \mathbf{e}_z \quad (1.183)$$

$$\mathbf{v}_p = \left(\dot{y} - \frac{M}{m}\dot{r} \cos \theta + \frac{M}{m}r\dot{\theta} \sin \theta\right) \mathbf{e}_y + \left(\dot{z} - \frac{M}{m}\dot{r} \sin \theta - \frac{M}{m}r\dot{\theta} \cos \theta\right) \mathbf{e}_z. \quad (1.184)$$

Questa espressione fornisce, con qualche calcolo, l'espressione dell'energia cinetica definita come  $\mathcal{T} = (1/2)m\mathbf{v}_p^2 + (1/2)M\mathbf{v}_P^2$  (lo stesso risultato si ottiene direttamente applicando il teorema di König):

$$\mathcal{T} = \frac{M+m}{2} (\dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{M(m+M)}{2m} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) . \quad (1.185)$$

L'energia potenziale si ottiene sommando l'energia potenziale

$$\mathcal{U}(p, P) = k\|P - p\|^3 = k \left( r + \frac{M}{m}r \right)^3 = k(1 + M/m)^3 r^3$$

a quella dovuta alla forza di gravità :

$$mgz_p + Mgz_P = Mg(z + r \sin \theta) + mg \left( z - \frac{M}{m} \sin \theta \right) = (m + M)gz .$$

Nel caso  $\gamma = 0$  la lagrangiana del sistema è pertanto:

$$\mathcal{L} = \frac{M+m}{2} (\dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{M(m+M)}{2m} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - k \left( 1 + \frac{M}{m} \right)^3 r^3 - (m + M)gz . \quad (1.186)$$

Nel caso  $\gamma \neq 0$  le equazioni di E-L terranno anche conto delle componenti lagrangiane  $\mathcal{Q}_k$  di  $\mathbf{f}$  ed avranno dunque la forma

$$\frac{dq^k}{dt} = \dot{q}^k , \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} = \mathcal{Q}_k$$

dove  $\mathcal{L}$ , come scritto sopra, tiene conto delle sole forze conservative. Le componenti lagrangiane di  $\mathbf{f}$  sono:

$$\mathcal{Q}_y = \gamma(\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{e}_y) \mathbf{e}_z \cdot \frac{\partial P - O}{\partial y} = \gamma(\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{e}_y) \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_y = 0 ,$$

$$\mathcal{Q}_z = \gamma(\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{e}_y) \mathbf{e}_z \cdot \frac{\partial P - O}{\partial z} = \gamma(\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{e}_y) \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = \gamma(\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{e}_y) ,$$

$$\mathcal{Q}_r = \gamma(\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{e}_y) \mathbf{e}_z \cdot \frac{\partial P - O}{\partial r} = \gamma(\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{e}_y) \mathbf{e}_z \cdot (\cos \theta \mathbf{e}_y + \sin \theta \mathbf{e}_z) = \gamma \sin \theta (\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{e}_y) ,$$

$$\mathcal{Q}_\theta = \gamma(\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{e}_y) \mathbf{e}_z \cdot \frac{\partial P - O}{\partial \theta} = \gamma r \cos \theta (\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{e}_y) .$$

Mettendo tutto insieme, le equazioni di Eulero-Lagrange risultano infine essere:

$$\frac{d}{dt} \frac{dy}{dt} = 0 , \quad (1.187)$$

$$(M+m) \frac{d}{dt} \frac{dz}{dt} = -(m+M)g + \gamma \left( \frac{dy}{dt} + \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \frac{d\theta}{dt} \sin \theta \right) , \quad (1.188)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{dt} \right) &= r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{3k(m+M)^2}{Mm^2} r^2 \\ &\quad + \frac{m\gamma \sin \theta}{M(m+M)} \left( \frac{dy}{dt} + \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \frac{d\theta}{dt} \sin \theta \right) \end{aligned} \quad (1.189)$$

$$\frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{m\gamma r \cos \theta}{M(m+M)} \left( \frac{dy}{dt} + \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \frac{d\theta}{dt} \sin \theta \right) . \quad (1.190)$$

(2) Se  $\gamma = 0$ , il sistema fisico è sottoposto a sole forze conservative ed ha vincoli ideali indipendenti dal tempo. Possiamo applicare il teorema di Jacobi che afferma che (a) l'energia meccanica totale si conserva nel tempo sulle soluzioni delle equazioni del moto e (b) coincide con la funzione di Hamilton. Pertanto l'energia meccanica totale ha la forma:

$$\mathcal{H}(y, z, \theta, r, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\theta}, \dot{r}) = \frac{M+m}{2} (\dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{M(m+M)}{2m} (\dot{r}^2 + r\dot{\theta}^2) + k \left(1 + \frac{M}{m}\right)^3 r^3 + (m+M)gz. \quad (1.191)$$

La lagrangiana non dipende esplicitamente da  $y$ , applicando la versione più elementare del teorema di Nöther, ovvero direttamente da (1.187), concludiamo che si deve conservare il momento coniugato:

$$p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = (m+M)\dot{y} = (M+m)\frac{dy}{dt}.$$

Risulta evidente che  $p_y$  altro non è che la componente  $y$  dell'impulso totale del sistema essendo il prodotto della massa totale del sistema moltiplicata per la componente  $y$  della velocità del centro di massa e valendo il teorema del centro di massa. La componente  $x$  del momento angolare totale del sistema rispetto al centro di massa è:

$$L_G^x = (M(P-G) \wedge \mathbf{v}_P + m(p-G) \wedge \mathbf{v}_p) \cdot \mathbf{e}_x.$$

Facendo uso di (1.181)-(1.184) notando che  $G-O = y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ , si trova con qualche calcolo che:

$$L_G^x = M \left(1 + \frac{M}{m}\right) r^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

In virtù della non dipendenza esplicita di  $\mathcal{L}$  da  $\theta$ , si conserva il momento coniugato:

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{M}{m}(m+M)r^2\dot{\theta} = \frac{M}{m}(m+M)r^2 \frac{d\theta}{dt} = L_G^x.$$

Lo stesso risultato si evince dalla (1.190).

(3) Se  $\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_0$  è costante non nulla, (1.190) implica immediatamente che  $r$  deve rimanere costante sul moto. Sostituendo questo risultato nella (1.189) si arriva all'equazione algebrica:

$$r\dot{\theta}_0^2 - \frac{3k(m+M)^2}{Mm^2}r^2 = 0.$$

Questa equazione ammette come unica soluzione ammissibile (l'altra è  $r = 0$  che non si deve accettare perché abbiamo richiesto  $r > 0$  per evitare la singolarità dell'origine nelle coordinate polari):

$$r_0 = \frac{\dot{\theta}_0^2 M m^2}{3k(m+M)^2}.$$

Concludiamo che per ogni valore  $\dot{\theta}_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  c'è una classe di soluzioni in cui  $\theta(t)$  ammette derivata costante pari a  $\dot{\theta}_0$ , parametrizzata da  $y_0, \dot{y}_0, z_0, \dot{z}_0, \theta_0 \in \mathbb{R}$ :

$$y(t) = y_0 + \dot{y}_0 t, \quad (1.192)$$

$$z(t) = z_0 + \dot{z}_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \quad (1.193)$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0 t, \quad (1.194)$$

$$r(t) = \frac{\dot{\theta}_0^2 M m^2}{3k(m+M)^2}. \quad (1.195)$$

(5) I momenti coniugati sono

$$p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = (m+M)\dot{y}$$

$$p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = (m+M)\dot{z}$$

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \frac{M}{m}(M+m)\dot{r}$$

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{M}{m}(M+m)r^2\dot{\theta}.$$

L'hamiltoniana è stata scritta in (1.191) in funzione delle variabili di Lagrange. Invertendo le relazioni di sopra e sostituendo nella (1.191) si ritrova:

$$\mathcal{H}(y, z, \theta, r, p_y, p_z, p_\theta, p_r) = \frac{(p_y^2 + p_z^2)}{2(M+m)} + \frac{m(r^2 p_r^2 + p_\theta^2)}{2r^2 M(m+M)} + k \left(1 + \frac{M}{m}\right)^3 r^3 + (m+M)gz. \quad (1.196)$$

Le equazioni di Hamilton sono allora:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y} = \frac{p_y}{M+m}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_z} = \frac{p_z}{M+m}$$

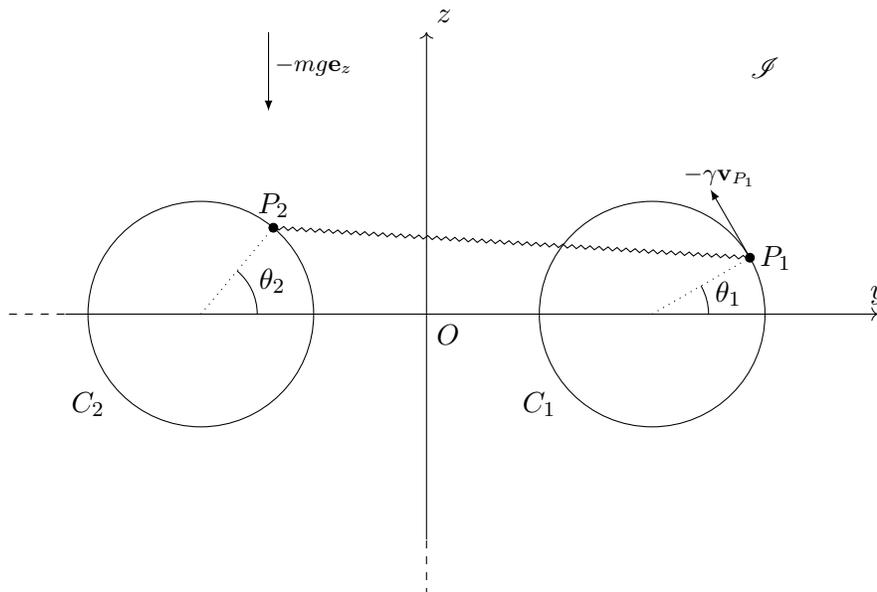
$$\frac{dp_y}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = 0, \quad \frac{dp_z}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = -(m+M)g$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{m p_r}{M(M+m)}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} = \frac{m p_\theta}{r^2 M(M+m)}$$

$$\frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = \frac{m p_\theta^2}{r^3 M(m+M)} - 3k \left(1 + \frac{M}{m}\right)^3 r^2, \quad \frac{dp_\theta}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = 0.$$

## ESERCIZIO 15

In un sistema di riferimento *inerziale*  $\mathcal{R}$  si fissi un sistema di assi cartesiani ortonormali destrorsi  $x, y, z$  con origine  $O$  solidali con  $\mathcal{R}$ . Due punti materiali  $P_1$  e  $P_2$ , entrambi di massa  $m > 0$ , sono



supposti essere vincolati alle circonferenze lisce  $C_1$  e  $C_2$  di centro, rispettivamente  $(0, 2R, 0)$  e  $(0, -2R, 0)$  e raggi uguali pari a  $R > 0$  giacenti nel piano  $x = 0$ . I due punti materiali sono connessi l'un l'altro da una molla ideale di lunghezza nulla a riposo, massa trascurabile e costante elastica  $k > 0$ . Sui due punti agisce la forza di gravità  $-mg \mathbf{e}_z$  con  $g > 0$ . Infine sul punto  $P_1$  agisce la forza viscosa  $-\gamma\mathbf{v}_{P_1}$  con  $\gamma \geq 0$  costante fissata ed essendo la velocità riferita a sistema inerziale considerato.

Si risolvano i seguenti quesiti usando come coordinate libere gli angoli polari  $\theta_1$  e  $\theta_2$  dei due punti  $P_1$  e  $P_2$  nel piano  $y, z$ , valutati a partire dall'asse  $y$  ed orientati positivamente rispetto all'asse  $x$ .

- (1). Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange per il moto del sistema dei due punti materiali  $P_1$  e  $P_2$ .
- (2). Si esprima la derivata temporale dell'energia meccanica del sistema in funzione di  $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$  e si dimostri che, per  $\gamma = 0$ , l'energia meccanica è un integrale primo.
- (3). (i) Si determini il valore della costante  $m > 0$  in funzione delle costanti positive (supposte assegnate)  $k, g, R$  in modo tale che le condizioni iniziali

$$\theta_1(0) = -3\pi/4, \quad \theta_2(0) = -\pi/4, \quad \dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$$

individuino la soluzione di quiete:

$$\theta_1(t) = -3\pi/4, \quad \theta_2(t) = -\pi/4 \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

(ii) Si può determinare il valore della costante  $m > 0$  in funzione delle costanti positive  $k, g, R$  in modo tale che le condizioni iniziali

$$\theta_1(0) = 3\pi/4, \quad \theta_2(0) = \pi/4, \quad \dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$$

individuino la soluzione di quiete:

$$\theta_1(t) = 3\pi/4, \quad \theta_2(t) = \pi/4 \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R} ?$$

(4). Si determinino le (tre) componenti della reazione vincolare agenti su ciascuno dei due punti sul moto individuato in (3) (i).

(5). Nell'ipotesi  $\gamma = 0$  si passi in formulazione di Hamilton scrivendo esplicitamente l'hamiltoniana e le equazioni di Hamilton del sistema.

### Soluzione.

(1). Dato che le circonferenze sono lisce i vincoli sono ideali e dunque possiamo usare la formulazione lagrangiana della meccanica. Usando la solita base ortonormale  $\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_r$  adattata alle coordinate polari piane, la velocità del punto  $P_1$  risulta essere  $\mathbf{v}_{P_1} = R\dot{\theta}_1 \mathbf{e}_\theta$  e quella di  $P_2$  ha una forma analoga. L'energia cinetica del sistema riferita a  $\mathcal{R}$  è quindi semplicemente:

$$\mathcal{T} := \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) .$$

L'energia potenziale totale si ottiene sommando l'energia potenziale gravitazionale

$$mgR (\sin \theta_1 + \sin \theta_2)$$

all'energia potenziale della molla

$$\frac{k}{2}(P_1 - P_2)^2 = \frac{k}{2} [R(\sin \theta_1 - \sin \theta_2) \mathbf{e}_z + (2R + R \cos \theta_1 + 2R - R \cos \theta_2) \mathbf{e}_y]^2 .$$

Sommando tutto trascurando un'inessenziale costante additiva che si ha sviluppando l'energia potenziale di sopra, si ha infine l'energia potenziale totale:

$$\mathcal{U} = mgR (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) + kR^2 [-\sin \theta_1 \sin \theta_2 - \cos \theta_1 \cos \theta_2 + 4(\cos \theta_1 - \cos \theta_2)]$$

cioé

$$\mathcal{U} = mgR (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) + kR^2 [4(\cos \theta_1 - \cos \theta_2) - \cos(\theta_1 - \theta_2)] .$$

Nel caso  $\gamma = 0$  la lagrangiana del sistema vale pertanto  $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$ :

$$\mathcal{L} = \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - mgR (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) - kR^2 [4(\cos \theta_1 - \cos \theta_2) - \cos(\theta_1 - \theta_2)] . \quad (1.197)$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange assumono pertanto, nel caso generale, la forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i} = \mathcal{Q}_i \quad \text{per } i = 1, 2.$$

Le componenti lagrangiane  $\mathcal{Q}_i$  sono riferite alla forza viscosa  $-\gamma \mathbf{v}_1$ . Il calcolo diretto mostra subito che:

$$\mathcal{Q}_1 = \frac{\partial P_1}{\partial \theta_1} \cdot (-\gamma \mathbf{v}_1) = -\gamma R^2 \dot{\theta}_1 \quad \text{e} \quad \mathcal{Q}_2 = \frac{\partial P_1}{\partial \theta_2} \cdot (-\gamma \mathbf{v}_1) = 0.$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange risultano essere in tal modo in forma normale e date da:

$$mR^2 \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} = -mgR \cos \theta_1 - kR^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + 4kR^2 \sin \theta_1 - \gamma R^2 \frac{d\theta_1}{dt}, \quad (1.198)$$

$$mR^2 \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} = -mgR \cos \theta_2 + kR^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - 4kR^2 \sin \theta_2. \quad (1.199)$$

(2). Moltiplicando entrambi i membri della prima equazione di E-L per  $\frac{d\theta_1}{dt}$ , quelli della seconda per  $\frac{d\theta_2}{dt}$  e sommando membro a membro il risultato, si arriva all'identità:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) \right] = -\frac{d\theta_1}{dt} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta_1} - \frac{d\theta_2}{dt} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta_2} - \gamma R^2 \left( \frac{d\theta_1}{dt} \right)^2.$$

Questa identità può essere riscritta come:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + \mathcal{U} \right] = -\gamma R^2 \left( \frac{d\theta_1}{dt} \right)^2,$$

cioé

$$\frac{d}{dt} [\mathcal{E} + \mathcal{U}] = -\gamma R^2 \left( \frac{d\theta_1}{dt} \right)^2.$$

Abbiamo ottenuto in tal modo che la derivata temporale dell'energia meccanica totale  $E$  si può scrivere, su ogni moto del sistema, come:

$$\frac{dE}{dt} = -\gamma R^2 \dot{\theta}_1^2.$$

Nel caso in cui  $\gamma = 0$  si conclude che l'energia meccanica del sistema si conserva sui moti del sistema e pertanto l'energia meccanica totale è un integrale primo.

(3). (i) Dato che il sistema di equazioni differenziali del secondo ordine (1.198)- (1.199) è (a parte un coefficiente irrilevante a primo membro) in forma normale con secondo membro di classe  $C^\infty$ , vale il teorema di esistenza ed unicità. Pertanto le possibili condizioni iniziali  $\theta_1(0), \theta_2(0), \dot{\theta}_1(0), \dot{\theta}_2(0)$  per il moto dei due punti in modo tale che il moto risultante sia di quiete sono tutte e sole quelle per le quali si annulla il secondo membro del sistema detto. Di conseguenza deve essere:  $\dot{\theta}_1(0) = 0, \dot{\theta}_2(0) = 0$  ed ulteriormente deve valere:

$$0 = -mgR \cos \theta_1(0) - kR^2 \sin(\theta_1(0) - \theta_2(0)) + 4kR^2 \sin \theta_1(0), \quad (1.200)$$

$$0 = -mgR \cos \theta_2(0) + kR^2 \sin(\theta_1(0) - \theta_2(0)) - 4kR^2 \sin \theta_2(0). \quad (1.201)$$

Imponendo che le equazioni dette siano soddisfatte per le configurazioni

$$\theta_1(0) = -3\pi/4, \quad \theta_2(0) = -\pi/4,$$

si ha subito la condizione (la stessa per entrambe le equazioni):

$$m = \frac{(4 - \sqrt{2})kR}{g}, \quad (1.202)$$

che determina un valore strettamente positivo di  $m$  e pertanto accettabile. Procedendo in senso inverso nelle implicazioni, si verifica subito che assumendo che  $m = \frac{(4 - \sqrt{2})kR}{g}$ , le condizioni iniziali assegnate individuano la soluzione di quiete voluta in virtù del teorema di esistenza ed unicità.

(ii) In questo caso, procedendo come nel caso (i) si trova il valore di  $m$

$$m = -\frac{(4 - \sqrt{2})kR}{g}.$$

che è inaccettabile in quanto negativo. Si conclude che la risposta al quesito è negativa.

(4). Per calcolare la reazione vincolare  $\phi = \phi^x \mathbf{e}_x + \phi^y \mathbf{e}_y + \phi^z \mathbf{e}_z$  agente sul punto  $P_1$ , si osservi che tale reazione è normale alla circonferenza su cui è vincolato  $P_1$ , essendo il vincolo liscio, ed ha pertanto direzione radiale. Dato che  $P_1$  è in quiete, la somma delle forze agenti su di esso deve dare il vettore nullo:

$$\phi - mg \mathbf{e}_z - k(P_1 - P_2) = \mathbf{0}.$$

Nella configurazione considerata la componente  $\phi^y$  e la componente  $\phi^z$  coincidono ( $\theta_1(0) = -3\pi/4$ ). Tenendo conto del fatto che  $\phi^z$  deve equilibrare il peso del punto, che non ci sono componenti delle forze attive nella direzione  $\mathbf{e}_x$  si trova immediatamente:

$$\phi^x = 0, \quad \phi^y = mg, \quad \phi^z = mg.$$

La simmetria del problema porta immediatamente a determinare la reazione vincolare  $\phi = \phi^x \mathbf{e}_x + \phi^y \mathbf{e}_y + \phi^z \mathbf{e}_z$  agente sul punto  $P_2$  come:

$$\phi^x = 0, \quad \phi^y = -mg, \quad \phi^z = mg.$$

(5). Riferendosi alla lagrangiana (1.197), i momenti  $p_1$  e  $p_2$  coniugati rispettivamente con la coordinata  $\theta_1$  e  $\theta_2$  risultano essere immediatamente:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} = mR^2 \dot{\theta}_i, \quad i = 1, 2.$$

Invertendo tali semplici relazioni ed esprimendo l'hamiltoniana  $\mathcal{H} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} \dot{\theta}_i - \mathcal{L}$  in funzione delle variabili canoniche si trova subito:

$$\mathcal{H}(\theta_1, \theta_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2mR^2} (p_1^2 + p_2^2) + mgR (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) - kR^2 [4(\cos \theta_1 - \cos \theta_2) - \cos(\theta_1 - \theta_2)].$$

Le equazioni di Hamilton risultano pertanto essere:

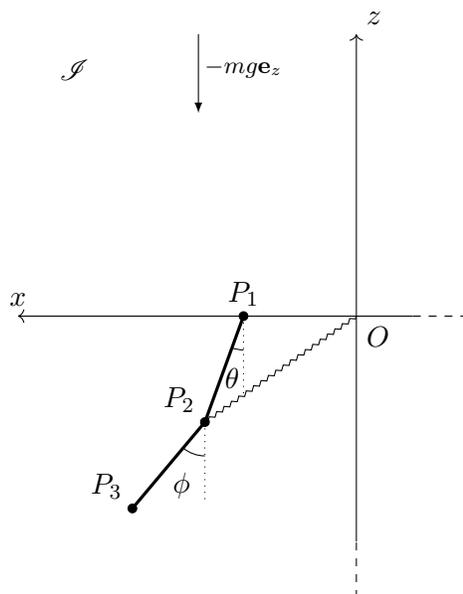
$$\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{p_1}{mR^2}, \quad \frac{d\theta_2}{dt} = \frac{p_2}{mR^2}$$

e

$$\frac{dp_1}{dt} = -mgR \cos \theta_1 + kR^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - 4kR^2 \sin \theta_1, \quad \frac{dp_2}{dt} = -mgR \cos \theta_2 - kR^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + 4kR^2 \sin \theta_2.$$

## ESERCIZIO 16

In un sistema di riferimento *inerziale*  $\mathcal{R}$ , si fissi un sistema di assi cartesiani ortonormali destrorsi  $x, y, z$  con origine  $O$  solidali con  $\mathcal{R}$ . Tre punti materiali  $P_1, P_2, P_3$  tutti di massa  $m > 0$ , sono



supposti essere vincolati a rimanere nel piano  $x, z$ , pensato come vincolo liscio, ed in modo tale che:

- (i) il punto  $P_1$  si può muovere solo sull'asse  $x$  pensato come curva liscia,
- (ii) il punto  $P_2$  è appeso al punto  $P_1$  con un'asta rigida priva di peso e lunga  $\ell > 0$ ,
- (iii) il punto  $P_3$  è appeso al punto  $P_2$  con una seconda asta rigida priva di peso e lunga  $\ell > 0$ .

I tre punti, oltre alle reazioni vincolari, sono sottoposti alla forza peso  $-mg \mathbf{e}_z$ , con  $g > 0$  nota, ed alla forza di una molla ideale di massa nulla, lunghezza a riposo nulla, costante elastica  $k \geq 0$  assegnata, fissata ad un estremo in  $O$  ed all'altro estremo in  $P_2$ .

Si risolvano i seguenti quesiti usando come coordinate libere le tre seguenti coordinate. L'ascissa  $s$  di  $P_1$ , l'angolo  $\theta \in (-\pi, \pi]$  che  $P_2 - P_1$  individua rispetto a  $-\mathbf{e}_z$  pensato su di una retta verticale (su cui  $\theta = 0$ ) passante per  $P_1$  ed in modo tale che  $\theta$  sia orientato positivamente rispetto all'asse  $-\mathbf{e}_y$ , l'angolo  $\phi \in (-\pi, \pi]$  che  $P_3 - P_2$  individua rispetto a  $-\mathbf{e}_z$  pensato su di una retta verticale (su cui  $\phi = 0$ ) passante per  $P_2$  ed in modo tale che  $\phi$  sia orientato positivamente rispetto all'asse  $-\mathbf{e}_y$ .

- (1). Si scriva la lagrangiana per il sistema dei tre punti.
- (2). Per  $k = 0$  si determinino due integrali primi scrivendone l'espressione in funzione delle coordinate libere e delle coordinate libere puntate e precisandone il significato fisico. Si provi che, se  $k > 0$ , una delle due funzioni continua ad essere un integrale primo, mentre l'altra cessa

di esserlo e si calcoli esplicitamente la derivata temporale di tale funzione su un moto generico del sistema in funzione delle coordinate libere.

(3). Si determinino tutte le configurazioni di equilibrio del sistema per  $m, g, \ell, k > 0$  e si studi la stabilità di ciascuna di esse per quanto possibile con i teoremi noti.

(4). Si calcolino le reazioni vincolari agenti su ciascuno dei tre punti quando il sistema è in quiete in una configurazione di equilibrio stabile con  $\theta \neq 0$ .

*Suggerimento.* Si osservi che le aste, essendo prive di massa, trasmettono completamente la forza ai loro estremi: in altre parole, le forze applicate agli estremi di un'asta rigida priva di massa sono sempre uguali e contrarie e coincidono con la tensione dell'asta.

**Soluzione.**

(1). In base alle definizioni date:

$$\begin{aligned} P_1 - O &= s \mathbf{e}_x, & P_2 - O &= (s + \ell \sin \theta) \mathbf{e}_x - \ell \cos \theta \mathbf{e}_z, \\ P_3 - O &= (s + \ell(\sin \theta + \sin \phi)) \mathbf{e}_x - \ell(\cos \theta + \cos \phi) \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (1.203)$$

Notiamo che le coordinate libere sono quindi solidali con il riferimento  $\mathcal{R}$  ed inoltre la coordinata  $s$  è traslazionale nella direzione di  $\mathbf{e}_x$ . L'espressione per la velocità dei punti si ottiene immediatamente (nel seguito ometteremo sistematicamente di usare l'indice  $\mathcal{R}$ , dato che si lavora in un unico sistema di riferimento).

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \dot{s} \mathbf{e}_x, & \mathbf{v}_2 &= (\dot{s} + \ell \dot{\theta} \cos \theta) \mathbf{e}_x + \ell \dot{\theta} \sin \theta \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{v}_3 &= (\dot{s} + \ell \dot{\theta} \cos \theta + \ell \dot{\phi} \cos \phi) \mathbf{e}_x + \ell(\dot{\theta} \sin \theta + \dot{\phi} \sin \phi) \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (1.204)$$

Usando le espressioni trovate, con un calcolo banale si perviene all'espressione dell'energia cinetica del sistema nel riferimento  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{T} = \frac{m}{2} (\mathbf{v}_1^2 + \mathbf{v}_2^2 + \mathbf{v}_3^2)$ , che vale:

$$\mathcal{T} = m \left[ \frac{3}{2} \dot{s}^2 + \ell \dot{s} (2\dot{\theta} \cos \theta + \dot{\phi} \cos \phi) + \ell^2 \left( \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \dot{\theta} \dot{\phi} \cos(\theta - \phi) \right) \right].$$

L'energia potenziale si ottiene sommando l'energia potenziale gravitazionale di  $P_2$  e  $P_3$  (quella di  $P_1$  si può trascurare dato che il punto rimane a quota costante), all'energia potenziale della molla. Avendo scelto la quota  $z = 0$  per la quale l'energia potenziale gravitazionale si annulla, si trova

$$\mathcal{U} = -mgl(2 \cos \theta + \cos \phi) + \frac{k}{2} \|P_2 - O\|^2 = -mgl(2 \cos \theta + \cos \phi) + \frac{k}{2} [(s + \ell \sin \theta)^2 + \ell^2 \cos^2 \theta],$$

cioè, trascurando una costante inessenziale:

$$\mathcal{U} = -mgl(2 \cos \theta + \cos \phi) + \frac{ks}{2} (s + 2\ell \sin \theta). \quad (1.205)$$

Concludiamo che la lagrangiana del sistema fisico, nel riferimento  $\mathcal{R}$  ha la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = m \left[ \frac{3}{2} \dot{s}^2 + \ell \dot{s} (2\dot{\theta} \cos \theta + \dot{\phi} \cos \phi) + \ell^2 \left( \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \dot{\theta} \dot{\phi} \cos(\theta - \phi) \right) \right] \\ + mgl (2 \cos \theta + \cos \phi) - \frac{ks}{2} (s + 2\ell \sin \theta) . \end{aligned} \quad (1.206)$$

(2). Nel caso generale di  $k \geq 0$  sicuramente un integrale primo è l'hamiltoniana che coincide con l'energia meccanica del sistema, visto che siamo nelle ipotesi del teorema di Jacobi: i vincoli non dipendono dal tempo nel riferimento  $\mathcal{R}$  e le coordinate libere sono solidali con  $\mathcal{R}$ , la lagrangiana (1.206) non dipende esplicitamente dal tempo, le forze sono tutte conservative. L'espressione esplicita di questo integrale primo è dunque:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = m \left[ \frac{3}{2} \dot{s}^2 + \ell \dot{s} (2\dot{\theta} \cos \theta + \dot{\phi} \cos \phi) + \ell^2 \left( \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \dot{\theta} \dot{\phi} \cos(\theta - \phi) \right) \right] \\ - mgl (2 \cos \theta + \cos \phi) + \frac{ks}{2} (s + 2\ell \sin \theta) . \end{aligned}$$

Un secondo integrale primo si ottiene, nel caso  $k = 0$ , notando che in tal caso la lagrangiana (1.206) non dipende dalla variabile  $s$ . Pertanto la quantità  $I = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}}$  si conserva sui moti del sistema. Dato che, da (1.203) risulta immediatamente

$$P_i(s + \Delta s, \theta, \phi) = P_i(s, \theta, \phi) + \Delta s \mathbf{e}_x, \quad i = 1, 2, 3,$$

concludiamo che la coordinata libera  $s$  è traslazionale lungo la direzione  $\mathbf{e}_x$ . Di conseguenza  $I = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}}$  coincide con l'impulso totale del sistema nella direzione  $\mathbf{e}_x$ . Il calcolo esplicito usando (1.206) produce:

$$I := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} = 3m\dot{s} + m\ell(2\dot{\theta} \cos \theta + \dot{\phi} \cos \phi),$$

Si verifica immediatamente, usando le espressioni (1.204) trovate sopra per le velocità dei tre punti, che questo è l'impulso totale del sistema lungo l'asse  $x$ . Nel caso in cui  $k > 0$ , le stesse equazioni di Eulero-Lagrange per la coordinata  $s$  ci dicono quanto valga la derivata temporale di  $I$  quando valutata su un generico moto del sistema  $s = s(t), \theta = \theta(t), \phi = \phi(t)$ , cioè su una generica soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange. Usando nuovamente l'espressione trovata per  $\mathcal{L}$ , ma con  $k > 0$ , si ha subito dall'equazione di E-L per  $s$ :

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = -k(s(t) + \ell \sin \theta(t)) .$$

(3) Le configurazioni di equilibrio si ottengono annullando il secondo membro delle equazioni di Eulero-Lagrange, quando queste sono state scritte in forma normale. Nel caso in esame, tutte le forze attive sono conservative, le coordinate libere sono solidali al riferimento  $\mathcal{R}$  nel quale si valuta la lagrangiana, come è noto, in tal caso le configurazioni di equilibrio si ottengono come tutte e sole le configurazioni che annullano tutte le derivate parziali prime di  $\mathcal{U}$ . Nel caso in

esame troviamo le seguenti condizioni direttamente da (1.205).

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \phi} = mgl \sin \phi = 0 \text{ da cui } \phi = 0 \text{ oppure } \phi = \pi.$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} = 2mgl \sin \theta + ksl \cos \theta = 0 \text{ da cui } 2mgl \sin \theta = -ksl \cos \theta.$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial s} = ks + kl \sin \theta = 0 \text{ da cui } s = -l \sin \theta.$$

Inserendo l'ultima condizione trovata nella precedente, abbiamo infine le condizioni che individuano le configurazioni di equilibrio:

$$\sin \phi = 0, \quad \sin \theta \left( \frac{2mg}{kl} - \cos \theta \right) = 0, \quad s = -l \sin \theta.$$

Abbiamo pertanto i seguenti due casi.

Se  $\frac{2mg}{kl} > 1$ , allora ci sono le configurazioni di equilibrio  $(\phi, \theta, s)$ :

$$(0, 0, 0), \quad (\pi, 0, 0), \quad (\pi, \pi, 0), \quad (0, \pi, 0)$$

Se  $\frac{2mg}{kl} \leq 1$ , oltre alle precedenti, ci sono anche le ulteriori configurazioni di equilibrio

$$(0, \theta_0, s_0), \quad (0, -\theta_0, -s_0)$$

e

$$(\pi, \theta_0, s_0), \quad (\pi, -\theta_0, -s_0)$$

dove abbiamo definito

$$\theta_0 := \arccos \frac{2mg}{kl} \geq 0, \quad s_0 := -l \sin \theta_0 = -l \sqrt{1 - \left( \frac{2mg}{kl} \right)^2},$$

e quindi valgono in particolare

$$\sin \theta_0 = \sqrt{1 - \left( \frac{2mg}{kl} \right)^2}, \quad s_0 \sin \theta_0 = -l \left( 1 - \left( \frac{2mg}{kl} \right)^2 \right). \quad (1.207)$$

Da (1.205), la matrice Hessiana

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \phi \partial \phi} & \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \phi \partial \theta} & \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \phi \partial s} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta \partial \phi} & \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta \partial \theta} & \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta \partial s} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial s \partial \phi} & \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial s \partial \theta} & \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial s \partial s} \end{bmatrix},$$

risulta avere forma

$$H(\phi, \theta, s) = \begin{bmatrix} mgl \cos \phi & 0 & 0 \\ 0 & 2mgl \cos \theta - ksl \sin \theta & kl \cos \theta \\ 0 & kl \cos \theta & k \end{bmatrix},$$

Osserviamo che tutte le configurazioni di equilibrio con  $\phi = \pi$ , sono tali che  $H(\pi, \theta, s)$  ammette sempre un autovalore negativo  $mgl \cos \pi = -mgl$  associato al vettore colonna  $(1, 0, 0)$ . Pertanto queste configurazioni sono tutte instabili nel passato e futuro. Restringiamoci pertanto a studiare le configurazioni di equilibrio con  $\phi = 0$ . Questo è equivalente a studiare la sottomatrice quadrata

$$H'(\phi, \theta, s) = \begin{bmatrix} 2mgl \cos \theta - ksl \sin \theta & kl \cos \theta \\ kl \cos \theta & k \end{bmatrix}.$$

Se la configurazione di equilibrio  $(0, \theta, s)$  rende definita positiva tale matrice, l'equilibrio è stabile nel passato e nel futuro. Se appare qualche autovalore negativo, l'equilibrio è instabile nel passato e nel futuro. Se infine appare qualche autovalore nullo, non siamo in grado di decidere la natura della stabilità con i teoremi a disposizione. Dato che il minore dato dall'elemento in basso a destra è sempre strettamente positivo, la positività della matrice  $H'$  è equivalente alla positività del suo determinante:

$$\det H'(\phi, \theta, s) = k(2mgl \cos \theta - ksl \sin \theta) - k^2 \ell^2 \cos^2 \theta.$$

Viceversa, se il determinante risultasse essere negativo, dato che esso coincide con il prodotto degli autovalori, un autovalore dovrebbe essere negativo e pertanto si avrebbe instabilità. Se il determinante risultasse nullo, non potremmo trarre alcuna conclusione. Esaminando le configurazioni prima individuate (solo quelle con  $\phi = 0$  le altre sappiamo già essere instabili) abbiamo che:

$\det H'(0, 0, 0) = k^2 \ell^2 \left( \frac{2mg}{k\ell} - 1 \right)$  e pertanto si ha stabilità per  $2mg > k\ell$ , instabilità per  $2mg < k\ell$ , non possiamo decidere nulla per  $2mg = k\ell$  con i teoremi noti.

$\det H'(0, \pi, 0) = -k^2 \ell^2 \left( \frac{2mg}{k\ell} + 1 \right)$  e pertanto si ha sempre instabilità.

$\det H'(0, \theta_0, s_0) = k^2 \ell^2 \left( 1 - \left( \frac{2mg}{k\ell} \right)^2 \right)$ , dove abbiamo usato (1.207), e pertanto si ha stabilità per  $2mg < k\ell$ , instabilità per  $2mg > k\ell$  – ma in realtà questo caso è escluso per ipotesi – e non possiamo decidere nulla per  $2mg = k\ell$  con i teoremi noti.

$\det H'(0, -\theta_0, -s_0) = k^2 \ell^2 \left( 1 - \left( \frac{2mg}{k\ell} \right)^2 \right)$ , dove abbiamo usato (1.207), e pertanto si ha nuovamente stabilità per  $2mg < k\ell$  e non possiamo decidere nulla per  $2mg = k\ell$  con i teoremi noti.

Riassumendo:

- (a)  $(\pi, 0, 0)$ ,  $(\pi, \pi, 0)$  sono configurazioni di equilibrio instabili nel passato e futuro.
- (b)  $(0, 0, 0)$  è configurazione di equilibrio instabili nel passato e futuro rispettivamente per  $2mg < k\ell$  e stabile nel passato e nel futuro se  $2mg > k\ell$ , e non possiamo decidere niente per il caso  $2mg = k\ell$  con i teoremi noti.
- (c)  $(0, \pi, 0)$  è configurazione di equilibrio instabile nel passato e nel futuro.
- (d) Nel caso  $2mg < k\ell$ , le ulteriori configurazioni di equilibrio  $(0, \theta_0, s_0)$ ,  $(0, -\theta_0, -s_0)$  sono stabili nel passato e nel futuro. Nel caso  $2mg = k\ell$ , non possiamo decidere niente sulla stabilità di tali configurazioni con i teoremi noti.

(3) Consideriamo ad esempio la configurazione di equilibrio stabile che si ha per  $\phi = 0$ ,  $\theta = \theta_0 := \arccos \frac{2mg}{k\ell}$ ,  $s = s_0 := -\ell \sin \theta_0$  (la discussione per l'altra configurazione stabile con  $\theta \neq 0$  è del tutto analoga). Si osservi che, in questo caso,  $P_1$  si trova sull'asse  $x$  negativo a distanza  $-s_0$  dall'origine,  $P_2$  e  $P_3$  giacciono sull'asse  $z$ . Determiniamo le reazioni vincolari che agiscono su ciascuno dei tre punti. Le forze che agiscono su ciascun punto devono avere risultante nulla visto che ciascun punto non ha accelerazione nel riferimento inerziale  $\mathcal{R}$ . Esaminiamo i tre punti separatamente.

(a) Punto  $P_3$ . La reazione vincolare sul punto  $P_3$  sarà banalmente:

$$\phi_3 = mg \mathbf{e}_z .$$

Si osservi che non vi sono componenti della reazione vincolare (totale) perpendicolare al piano  $x, z$ , dato che l'accelerazione normale al piano è nulla e non vi sono forze attive che agiscono in tale direzione. Quanto trovato mostra anche che la tensione dell'asta che unisce  $P_3$  a  $P_2$  uguaglia il peso di  $P_3$ .

(b) Punto  $P_2$ . Il punto  $P_2$  è sottoposto alla forza peso  $-mg \mathbf{e}_z$ , alla forza della molla ed alla reazione vincolare dovuta all'asta che connette  $P_1$  a  $P_2$ . Non vi sono componenti della reazione vincolare (totale) perpendicolare al piano  $x, z$ , dato che l'accelerazione normale al piano è nulla e non vi sono forze attive che agiscono in tale direzione. La forza della molla vale  $k\ell \cos \theta_0 \mathbf{e}_z = k\ell \frac{2mg}{k\ell} = 2mg \mathbf{e}_z$  e pertanto coincide con la somma della forza peso di  $P_2$  e della reazione vincolare dovuta all'asta che unisce  $P_2$  a  $P_3$ , cioè alla tensione dell'asta (con il segno opportunamente scelto). Concludiamo che la reazione vincolare dovuta all'asta che connette  $P_2$  a  $P_1$  deve essere nulla (ed è pertanto nulla anche la tensione di tale asta). In definitiva l'unica reazione vincolare che agisce su  $P_2$  è quella dovuta all'asta che lo connette a  $P_3$ . Vale pertanto:

$$\phi_2 = -mg \mathbf{e}_z .$$

(c) Punto  $P_1$ . Il punto  $P_1$  è sottoposto alla forza vincolare che lo trattiene alla guida liscia data dall'asse  $x$ , alla forza di gravità  $-mg \mathbf{e}_3$  ed alla forza dovuta all'asta che lo connette a  $P_2$ . Quest'ultima forza è nulla, dato che la tensione dell'asta è nulla come detto sopra. Si conclude che:

$$\phi_1 = mg \mathbf{e}_z .$$

Ancora, non vi sono componenti della reazione vincolare (totale) perpendicolare al piano  $x, z$ , dato che l'accelerazione normale al piano è nulla e non vi sono forze attive che agiscono in tale direzione.

## ESERCIZIO 17

In riferimento al sistema di assi cartesiani ortonormali  $x, y, z$  destrorso di origine  $O$  e solidali con un sistema di riferimento inerziale  $\mathcal{R}$ , sia  $\Sigma$  la superficie  $z = cx^2$  con  $c > 0$  costante nota. Sia  $P$  un punto materiale di massa assegnata  $m > 0$  vincolato a muoversi su  $\Sigma$ , pensata come vincolo ideale.  $P$  è sottoposto alle seguenti forze:

(i) la forza di gravità  $-mg \mathbf{e}_z$  (con  $g > 0$  costante),

(ii) le forze di due molle ideali entrambe di costante elastica  $k > 0$  assegnata, lunghezza nulla a riposo; una molla ha un estremo in  $P$  e l'altro estremo in  $O$ , mentre l'altra molla ha un estremo in  $P$  e l'altro estremo nel punto  $Q$  di coordinate  $(0, q, 0)$ , con  $q > 0$  costante nota,

(iii) la forza viscosa  $-\gamma \mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}}$  con  $\gamma \geq 0$  costante nota.

Si risolvano i seguenti quesiti.

(1) Si ricavino le equazioni di Eulero-Lagrange per il punto  $P$  usando le coordinate  $x, y$  come coordinate lagrangiane, scrivendo esplicitamente le dette equazioni in forma normale e provando esplicitamente nel caso in esame che (come sappiamo che deve essere vero nel caso generale) vale il teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni.

(2) Nel caso  $\gamma = 0$ , si provi che esiste un integrale primo spiegandone il significato fisico e dandone la forma esplicita in termini delle coordinate lagrangiane e delle "coordinate lagrangiane puntate". Si discuta se tale funzione sia ancora un integrale primo per  $\gamma > 0$ .

(3) Si determinino le configurazioni di equilibrio per il punto  $P$ , si verifichi che tali configurazioni individuano un punto di stazionarietà dell'energia potenziale ed, infine, si discuta la stabilità delle configurazioni di equilibrio trovate.

(4) Si calcolino le componenti rispetto alla base  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  della reazione vincolare  $\phi$  che agisce sul punto materiale  $P$  quando è in quiete in una configurazione di equilibrio.

(5) Si determini il moto del punto  $P$  con condizioni iniziali  $x(0) = 0, \frac{dx}{dt}(0) = 0, y(0) = q, \frac{dy}{dt}(0) = 0$  nel caso  $\gamma^2 > 100mk$  e si dica quanto vale il limite per  $t \rightarrow +\infty$  di tale soluzione.

### Soluzione.

Omettiamo nel seguito l'indice  $|_{\mathcal{R}}$ , essendo tutte le grandezze cinematiche associate unicamente al riferimento  $\mathcal{R}$ ; ometteremo anche l'indice  $P$  visto che si lavora con un unico punto materiale.

(1) Per costruzione, in funzione delle coordinate libere  $x, y$ , abbiamo:

$$P - O = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + cx^2 \mathbf{e}_z, \quad (1.208)$$

e pertanto

$$\mathbf{v} = \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{y} \mathbf{e}_y + 2cx\dot{x} \mathbf{e}_z, \quad (1.209)$$

da cui, l'energia cinetica del punto  $P$  nel riferimento  $\mathcal{R}$  ha la forma:

$$\mathcal{T} = \frac{m}{2} ((1 + 4c^2x^2)\dot{x}^2 + \dot{y}^2).$$

L'energia potenziale si ottiene sommando l'energia potenziale gravitazionale alle due energie potenziali della molla

$$\mathcal{U} = mgz + \frac{k}{2} \|P - O\|^2 + \frac{k}{2} \|P - Q\|^2.$$

Il calcolo esplicito, tenendo conto dell'espressione esplicita di  $P - O$  (1.208) in funzione delle coordinate libere  $x, y$  e delle coordinate di  $Q$ , produce immediatamente, trascurando una costante additiva inessenziale:

$$\mathcal{U} = c^2 k x^4 + (k + mcg)x^2 + ky(y - q) .$$

La lagrangiana del sistema avrà allora forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U} = \frac{m}{2} ((1 + 4c^2 x^2)\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - c^2 k x^4 - (k + mcg)x^2 - ky(y - q) . \quad (1.210)$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange devono però anche tenere conto delle componenti lagrangiane  $\mathcal{Q}_k$  della forza non conservativa viscosa e avranno la solita forma generale, per  $q^1 = x$  e  $q^2 = y$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} + \mathcal{Q}_k \\ \frac{d\dot{q}^k}{dt} &= \dot{q}^k . \end{aligned}$$

Il calcolo esplicito fornisce subito, tramite (1.208) e (1.209):

$$\mathcal{Q}_x = \frac{\partial P - O}{\partial x} \cdot (-\gamma \mathbf{v}) = -\gamma \dot{x}(1 + 4c^2 x^2) \quad (1.211)$$

$$\mathcal{Q}_y = \frac{\partial P - O}{\partial y} \cdot (-\gamma \mathbf{v}) = -\gamma \dot{y} . \quad (1.212)$$

Concludiamo che le equazioni di Eulero-Lagrange si scrivono esplicitamente:

$$\begin{aligned} m \frac{d}{dt} \left( (1 + 4c^2 x^2) \frac{dx}{dt} \right) &= -4c^2 k x^3 - 2(k + mcg)x - \gamma(1 + 4c^2 x^2) \frac{dx}{dt} + 4mc^2 x \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 , \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= -2ky + kq - \gamma \frac{dy}{dt} , \end{aligned}$$

ovvero, in forma normale:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{-4c^2 k x^3 - 2(k + mcg)x - (\gamma + 4\gamma c^2 x^2) \frac{dx}{dt} - 4mc^2 x \left( \frac{dx}{dt} \right)^2}{m(1 + 4c^2 x^2)} , \quad (1.213)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -2 \frac{ky}{m} + \frac{kq}{m} - \frac{\gamma}{m} \frac{dy}{dt} , \quad (1.214)$$

dove il secondo membro è evidentemente di classe  $C^\infty$  in tutte le variabili congiuntamente (pensando  $\dot{x} := dx/dt$  e  $\dot{y} := dy/dt$  come variabili indipendenti da  $x$  e  $y$ ). Le funzioni a secondo membro sono infatti rapporti di polinomi i cui denominatori non hanno zeri reali. Concludiamo che siamo nelle ipotesi di validità del teorema di esistenza ed unicità per il problema di Cauchy.

(2) Se  $\gamma = 0$  il sistema è completamente descritto dalla lagrangiana  $\mathcal{L} = \mathcal{T}|_{\mathcal{R}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}$  essendo tutte le forze conservative, i vincoli non dipendono dal tempo nel riferimento  $\mathcal{R}$ , le coordinate

libere sono solidali con  $\mathcal{R}$ . Infine  $\mathcal{L}$  non dipende esplicitamente dal tempo. Pertanto si ha l'integrale primo di Jacobi che coincide con l'energia meccanica del sistema

$$\mathcal{H} = \mathcal{T}|_{\mathcal{R}} + \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}.$$

Esplicitamente:

$$\mathcal{H} = \frac{m}{2} ((1 + 4c^2x^4)\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + c^2kx^4 + (k + mcg)x^2 + ky(y - q).$$

Nel caso in cui  $\gamma > 0$ , calcolando la derivata di  $\mathcal{H}$  su ogni moto del sistema vale la nota identità

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_k \dot{q}^k \mathcal{Q}_k,$$

dove  $\mathcal{Q}_k$  sono le componenti lagrangiane delle forze non conservative. Nel caso in esame si trova subito che

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\gamma \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 (1 + 4c^2x^2) - \gamma \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 = -\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{v},$$

da cui si vede che  $\mathcal{H}$  in generale non può continuare ad essere un integrale primo. Dal punto di vista fisico abbiamo ottenuto che l'energia meccanica viene dissipata dalla potenza della forza viscosa.

**(3)** Per definizione, le configurazioni di equilibrio  $(x_0, y_0)$  si ottengono imponendo che il secondo membro di (1.213)-(1.214) sia nullo quando valutato per  $(x, y) = (x_0, y_0)$  in aggiunta alla condizione che  $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$ . Queste richieste producono il sistema di equazioni per  $(x_0, y_0)$ :

$$0 = \frac{-4c^2kx_0^3 - 2(k + mcg)x_0}{m(1 + 4c^2x_0^2)}, \quad (1.215)$$

$$0 = -2\frac{ky_0}{m} + \frac{kq}{m}, \quad (1.216)$$

che, tenendo conto della stretta positività di  $c, m, g, k$ , ammettono l'unica soluzione:

$$(x_0, y_0) = (0, q/2).$$

Si osservi che questa configurazione annulla le derivate parziali dell'energia potenziale

$$\mathcal{U}(x, y) = c^2kx^4 - (k + mcg)x^2 + ky(y - q),$$

valendo

$$\left. \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} \right|_{(0, q/2)} = [4kc^2x^3 + 2(k + mcg)x]|_{(0, q/2)} = 0, \quad \left. \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} \right|_{(0, q/2)} = [2ky - kq]|_{(0, q/2)} = 0.$$

Dato che le forze non conservative sono dissipative e si annullano per  $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$ , il teorema di Lagrange-Dirichlet permette di concludere che la configurazione di equilibrio trovata è stabile

nel futuro (e anche nel passato in assenza della forza dissipativa, cioè per  $\gamma = 0$ ) se l'energia potenziale:

$$\mathcal{U}(x, y) = c^2 k x^4 + (k + mcg)x^2 + ky(y - q)$$

ha un minimo stretto in  $(0, q/2)$ . Dato che, come già notato,  $(0, q/2)$  è un punto di stazionarietà di  $\mathcal{U}$ , possiamo studiare la matrice hessiana di  $\mathcal{U}$  in  $(0, q/2)$  per decidere se la configurazione individui un minimo stretto. Dato che risulta:

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2} \right|_{(0, q/2)} = 2(k + mcg) > 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x \partial y} \right|_{(0, q/2)} = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial y \partial x} \right|_{(0, q/2)} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial y^2} \right|_{(0, q/2)} = 2k > 0,$$

concludiamo che  $(0, q/2)$  è un punto di minimo stretto per  $\mathcal{U}$ , in quanto la matrice hessiana ha entrambi gli autovalori strettamente positivi, e pertanto la configurazione di equilibrio  $(0, q/2)$  è stabile nel futuro per il teorema di Lagrange-Dirichlet valendo  $\sum_k \dot{q}^k \mathcal{Q}_k = -\gamma \mathbf{v}^2 \leq 0$ . Se  $\gamma = 0$  la configurazione di equilibrio è stabile anche nel passato.

(4) Nell'unica configurazione di equilibrio trovata  $R \equiv (0, q/2, 0)$ , all'equilibrio, vale

$$\mathbf{0} = m \mathbf{a}_P = \boldsymbol{\phi} - k(R - O) - k(R - Q) - mg \mathbf{e}_z - \gamma \mathbf{0}.$$

Pertanto il valore esplicito di  $\boldsymbol{\phi}$  è:

$$\boldsymbol{\phi} = k(R - O) + k(R - Q) + mg \mathbf{e}_z = kq/2 \mathbf{e}_y + k(q/2 - q) \mathbf{e}_y + mg \mathbf{e}_z = mg \mathbf{e}_z.$$

(5). Osservando il sistema (1.213)-(1.214), si vede che la funzione  $x(t) = 0$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$  soddisfa la prima equazione che, essendo disaccoppiata dalla seconda, ammette tale funzione come unica soluzione per condizioni iniziali  $x(0) = 0$ ,  $\frac{dx}{dt}(0) = 0$ . Per concludere dobbiamo risolvere la seconda equazione:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{2k}{m}y + \frac{kq}{m} - \frac{\gamma}{m} \frac{dy}{dt},$$

con le condizioni iniziali  $y(0) = q$ ,  $\frac{dy}{dt}(0) = 0$  nel caso  $\gamma^2 > 100mk$ . Introduciamo la nuova variabile  $Y := y - q/2$ . In questo modo l'equazione si riscrive in forma di equazione lineare omogenea a coefficienti costanti:

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} + \frac{\gamma}{m} \frac{dY}{dt} + \frac{2k}{m} Y = 0.$$

Le due soluzioni del polinomio caratteristico sono:

$$\chi_{\pm} = -\frac{\gamma}{2m} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma^2}{m^2} - \frac{8k}{m}}.$$

Nel caso  $\gamma^2 > 100mk$ , abbiamo evidentemente che  $\chi_{\pm}$  sono numeri reali, negativi e distinti. Possiamo scrivere la soluzione generale nella variabile  $y$ , come, se  $C_{\pm} \in \mathbb{R}$ ,

$$y(t) = q/2 + Y(t) = q/2 + C_+ e^{\chi_+ t} + C_- e^{\chi_- t}.$$

Sappiamo che  $y(0) = q$  e quindi  $q/2 + C_+ + C_- = q$ , ma anche  $\frac{dy}{dt}(0) = 0$  e quindi  $\chi_+ C_+ + \chi_- C_- = 0$ . Si ricava facilmente che:  $C_- = q\chi_+ / 2(\chi_+ - \chi_-)$  e  $C_+ = -q\chi_- / 2(\chi_+ - \chi_-)$ .

In definitiva, il moto del punto  $P$  con i dati iniziali proposti, cioè la soluzione del problema di Cauchy complessivo, si scrive:

$$x(t) = 0, \quad y(t) = \frac{q}{2} - \frac{q\chi_- e^{\chi_+ t}}{2(\chi_+ - \chi_-)} + \frac{q\chi_+ e^{\chi_- t}}{2(\chi_+ - \chi_-)} \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Evidentemente la soluzione del problema di Cauchy posto è massimale e completa. Dato che  $\chi_{\pm} < 0$  nelle nostre ipotesi, il limite per  $t \rightarrow +\infty$  di  $y(t)$  vale  $q/2$  in quanto i rimanenti addendi si annullano nel limite. In definitiva:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = (0, q/2).$$

## ESERCIZIO 18

In riferimento al sistema di assi cartesiani ortonormali  $x, y, z$  destrorso di origine  $O$  e solidali con un sistema di riferimento inerziale  $\mathcal{R}$ , sia  $\Sigma$  la superficie  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  $z \in \mathbb{R}$ . Sia  $P$  un punto materiale di massa assegnata  $m > 0$  vincolato a muoversi su  $\Sigma$ , pensata come vincolo ideale.  $P$  è sottoposto alle seguenti forze:

(i) la forza di gravità  $-mg \mathbf{e}_z$  (con  $g > 0$  costante),

(ii) le forze di due molle ideali entrambe di costante elastica  $k > 0$  assegnata, lunghezza nulla a riposo; una molla ha un estremo in  $P$  e l'altro estremo in  $O$ , mentre l'altra molla ha un estremo in  $P$  e l'altro estremo nel punto  $Q$  di coordinate  $(0, 2R, 0)$ ,

(iii) la forza viscosa  $-\gamma \mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}}$  con  $\gamma \geq 0$  costante nota.

Si risolvano i seguenti quesiti.

(1) Si ricavino le equazioni di Eulero-Lagrange per il punto  $P$  usando le coordinate cilindriche  $\theta, z$  come coordinate lagrangiane (con  $\theta \in (-\pi, \pi]$  valutata a partire dall'asse  $x$  ed orientata positivamente rispetto a  $\mathbf{e}_z$ ), scrivendo esplicitamente le dette equazioni in forma normale.

(2) Nel caso  $\gamma = 0$ , si provi che esiste un integrale primo spiegandone il significato fisico e dandone la forma esplicita in termini delle coordinate lagrangiane e delle "coordinate lagrangiane puntate". Si discuta se tale funzione sia ancora un integrale primo per  $\gamma \geq 0$ .

(3) Si determinino le configurazioni di equilibrio per il punto  $P$  discutendone la stabilità nel caso  $\gamma > 0$ .

(4) Si calcolino le componenti rispetto alla base  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  della reazione vincolare  $\phi$  che agisce sul punto materiale  $P$  quando è in quiete in una configurazione di equilibrio stabile nel caso  $\gamma \geq 0$ .

(5) Si determini il moto del punto  $P$  con condizioni iniziali  $\theta(0) = \pi/2$ ,  $\frac{d\theta}{dt}(0) = 0$ ,  $z(0) = c$ ,  $\frac{dz}{dt}(0) = 0$ , con  $c > 0$  costante assegnata, nel caso  $mk > 100\gamma^2$ . Si calcoli il limite della soluzione per  $t \rightarrow +\infty$ , discutendo se tale limite dipenda o meno da  $c$ .

### Soluzione.

Omettiamo nel seguito l'indice  $|_{\mathcal{R}}$ , essendo tutte le grandezze cinematiche associate unicamente al riferimento  $\mathcal{R}$ ; ometteremo anche l'indice  $P$  visto che si lavora con un unico punto materiale.

(1) Dalle ipotesi abbiamo che

$$P - O = z \mathbf{e}_z + R \cos \theta \mathbf{e}_x + R \sin \theta \mathbf{e}_y \quad (1.217)$$

e di conseguenza

$$\mathbf{v} = \dot{z} \mathbf{e}_z + R \dot{\theta} (-\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y), \quad (1.218)$$

per cui, l'energia cinetica vale:

$$\mathcal{T} = \frac{m}{2} (\dot{z}^2 + R^2 \dot{\theta}^2).$$

L'energia potenziale sarà data dalla somma dell'energia potenziale gravitazionale  $mgz$  e di quella delle due molle:

$$\frac{k}{2}\|P - O\|^2 + \frac{k}{2}\|P - Q\|^2 = \frac{k}{2}(z^2 + R^2) + \frac{k}{2}(z^2 + R^2 \cos^2 \theta + (2R - R \sin^2 \theta)^2) .$$

Omettendo alcune costanti additive inessenziali:

$$\mathcal{U} = mgz + k(z^2 - 2R^2 \sin \theta) . \quad (1.219)$$

La lagrangiana del sistema, che tiene conto delle sole forze attive conservative, avrà dunque forma

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{z}^2 + R^2 \dot{\theta}^2) - mgz - k(z^2 - 2R^2 \sin \theta) . \quad (1.220)$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange avranno la forma generale

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} = \mathcal{Q}_k , \quad \frac{dq^k}{dt} = \dot{q}^k ,$$

dove il secondo membro includerà le componenti lagrangiane della forza viscosa  $-\gamma \mathbf{v}$  che valgono, usando (1.217) e (1.218)

$$\mathcal{Q}_\theta = -\gamma \mathbf{v} \cdot \frac{\partial P - O}{\partial \theta} = -\gamma R^2 \dot{\theta} , \quad \mathcal{Q}_z = -\gamma \mathbf{v} \cdot \frac{\partial P - O}{\partial z} = -\gamma \dot{z} .$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange saranno allora date da:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg - 2kz - \gamma \frac{dz}{dt} , \quad (1.221)$$

$$mR^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 2kR^2 \cos \theta - \gamma R^2 \frac{d\theta}{dt} . \quad (1.222)$$

Queste equazioni si scrivono in forma normale come:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -g - \frac{2kz}{m} - \frac{\gamma}{m} \frac{dz}{dt} , \quad (1.223)$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{2k}{m} \cos \theta - \frac{\gamma}{m} \frac{d\theta}{dt} . \quad (1.224)$$

**(2)** Nel caso  $\gamma = 0$ , siamo nelle ipotesi del teorema di Jacobi (vincoli indipendenti dal tempo, coordinate libere solidali con il riferimento, lagrangiana non dipendente dal tempo esplicitamente). Pertanto si ha l'integrale primo di Jacobi che, nel caso in esame, per la seconda parte del teorema di Jacobi, coincide con l'energia meccanica del sistema:

$$\mathcal{H} = \mathcal{T} + \mathcal{U} = \frac{m}{2}(\dot{z}^2 + R^2 \dot{\theta}^2) + mgz + k(z^2 - 2R^2 \sin \theta) .$$

Nel caso in cui valga  $\gamma > 0$ , e tenendo conto delle forze non conservative descritte dalle  $\mathcal{Q}_k$ , vale la formula generale, per la derivata dell'integrale primo di Jacobi valutato su una soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_{k=1}^n \dot{q}^k \mathcal{Q}_k .$$

Quindi, nel nostro caso:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\gamma (R^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) = -\gamma \mathbf{v}^2 .$$

L'energia meccanica è quindi dissipata dalla forza viscosa.

**(3)** Le configurazioni di equilibrio  $(\theta_0, z_0)$  si ottengono annullando il secondo membro delle equazioni di E-L scritte in forma normale, con l'aggiunta delle condizioni  $\dot{\theta} = 0, \dot{z} = 0$ . Dalle (1.221) e (1.222), ricaviamo le condizioni:

$$0 = mg + 2kz_0 , \quad (1.225)$$

$$0 = 2kR^2 \cos \theta_0 . \quad (1.226)$$

Abbiamo dunque le due configurazioni di equilibrio:  $(\pm\pi/2, -mg/(2k))$ . Si osservi che tali configurazioni annullano il gradiente di  $\mathcal{U}$  come è immediato verificare da (1.219). Se la matrice jacobiana  $H$  di  $\mathcal{U}$  è definita positiva su una configurazione di equilibrio, il teorema di Lagrange-Dirichlet assicura che la configurazione di equilibrio è stabile nel futuro, si noti a tal proposito, che è presente la componente lagrangiana della forza viscosa,  $\mathcal{Q}_k$  che soddisfa  $\sum_k \dot{q}^k \mathcal{Q}_k \leq 0$ . Nel caso in cui  $\gamma = 0$ , cioè non è presente la componente lagrangiana detta, la presenza di un autovalore negativo implica l'instabilità nel futuro. Il calcolo produce immediatamente

$$H(\theta_0, z_0) = \text{diag}(2kR^2 \sin \theta_0, 2k) .$$

Concludiamo che per la configurazione  $(\pi/2, mg/(2k))$  si hanno solo autovalori positivi, per cui  $\mathcal{U}$  ha un minimo stretto e pertanto tale configurazione è stabile nel futuro. Nella configurazione  $(-\pi/2, mg/(2k))$ , un autovalore è negativo e pertanto si ha equilibrio instabile almeno per  $\gamma = 0$ .

**(4)** Nel caso  $\gamma > 0$ , la configurazione di equilibrio  $(\pi/2, mg/(2k))$  è stabile. Calcoliamo la reazione vincolare  $\phi$  su  $P$  in tale configurazione, quando  $P$  è in quiete. Dato che il punto è in quiete, tutte le forze si bilanciano e  $\phi - k(P - O) - k(P - Q) - mg \mathbf{e}_z = \mathbf{0}$ . Abbiamo omesso la forza viscosa, che è nulla se  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Decomponendo sugli assi le forze scritte sopra abbiamo che:

$$(\phi^x - kR - k(R - 2R)) \mathbf{e}_x + (\phi^y) \mathbf{e}_y + (\phi^z - k(-2mg/2k) - mg) \mathbf{e}_z .$$

Pertanto:

$$\phi^x = 0 , \quad \phi^y = 0 , \quad \phi^z = 0 .$$

**(5)** L'equazione (1.222) ammette banalmente la soluzione

$$\theta(t) = \pi/2 \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R} , \quad (1.227)$$

che soddisfa anche la condizione iniziale  $\theta(0) = \pi/2$  e  $d\theta/dt(0) = 0$ . Dato che l'equazione (1.222) è scrivibile in forma normale con secondo membro di classe  $C^\infty$  congiuntamente in tutte le variabili, questa è l'unica soluzione che soddisfa le condizioni iniziali assegnate. Per determinare il moto del sistema è sufficiente risolvere l'altra equazione

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\gamma}{m} \frac{dz}{dt} + \frac{2k}{m} z + g = 0,$$

con le condizioni iniziali assegnate  $z(0) = c > 0$  e  $dz/dt(0) = 0$ . A tal fine, introduciamo la nuova variabile  $Z := z + gm/(2k)$ . In questa nuova variabile l'equazione si riscrive in forma omogenea:

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + \frac{\gamma}{m} \frac{dZ}{dt} + \frac{2k}{m} Z = 0.$$

Le equazioni del polinomio caratteristico sono, tenendo conto che  $mk > 100\gamma^2$  e quindi  $8mk - \gamma^2 > 0$ :

$$\chi_{\pm} = \frac{\pm i \sqrt{8mk - \gamma^2} - \gamma}{2m}.$$

La soluzione generale ha quindi la forma:

$$Z(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2m}} [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)],$$

dove

$$\Omega := \frac{1}{2m} \sqrt{8mk - \gamma^2}.$$

La condizione  $dz/dt(0) = 0$ , cioè  $dZ/dt(0) = 0$  fornisce

$$(-\gamma/(2m))A + B\Omega = 0.$$

La condizione  $z(0) = c > 0$ , cioè  $Z(0) = c + gm/(2k)$  implica che:

$$A = c + gm/(2k).$$

Abbiamo infine ottenuto che

$$z(t) = -\frac{gm}{2k} + \left(c + \frac{gm}{2k}\right) e^{-\frac{\gamma t}{2m}} \left[\cos(\Omega t) + \frac{\gamma}{2\Omega m} \sin(\Omega t)\right], \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.228)$$

Il moto del sistema, con le condizioni iniziali date, è completamente descritto dalle funzioni (1.227) e (1.228). È evidente che, essendo  $\mathbb{R} \ni t \mapsto \cos(\Omega t) + (\gamma/(2\Omega)) \sin(\Omega t)$  una funzione limitata, vale

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\theta(t), z(t)) = \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{gm}{2k}\right).$$

Il limite non dipende dunque da  $c$ .

## ESERCIZIO 19

I versori  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_z$  individuano un sistema di coordinate cartesiane ortonormali destorse di origine  $O$ , solidali con il riferimento non inerziale  $\mathcal{R}$ . Tale riferimento ruota attorno all'asse  $\mathbf{e}_z$  rispetto al riferimento inerziale  $\mathcal{R}_0$  con  $\omega_{\mathcal{R}|\mathcal{R}_0} = \Omega \mathbf{e}_z$  dove  $\Omega > 0$  è una costante nota.

Un punto materiale  $P$  di massa  $m > 0$  assegnata è vincolato a muoversi sulla curva  $\Gamma$  piana, solidale con  $\mathcal{R}$ , di equazione

$$z = ay^3, \quad x = 0,$$

dove  $a > 0$  è una costante assegnata. La curva  $\Gamma$  è priva di attrito. Sul punto  $P$  agisce (i) la forza di gravità  $-mg \mathbf{e}_z$  e (ii) la forza di una molla ideale, di massa trascurabile e lunghezza nulla a riposo con costante elastica  $k > 0$  nota, con un estremo fissato in  $O$  e l'altro in  $P$ .

Si risolvano i seguenti quesiti usando come coordinata lagrangiana la coordinata  $y$  solidale con il riferimento non inerziale  $\mathcal{R}$ .

(1). (i) Usando la lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0}$ , *calcolata nel riferimento inerziale*, scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange per il moto del punto  $P$ . (ii) Scrivere e esplicitamente l'espressione delle componenti delle reazioni vincolari in funzione di  $y$  e  $\frac{dy}{dt}$  e  $\frac{d^2y}{dt^2}$  usando  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_z$  come versori. (iii) È possibile esprimere la reazione vincolare in funzione delle sole  $y$  e  $\frac{dy}{dt}$ ?

(2). (i) Si dimostri che la funzione hamiltoniana  $\mathcal{H}$  riferita alla lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0} = \mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0}(y, \dot{y})$  è un integrale primo. (ii) Si dimostri che tale integrale primo ha il significato fisico dell'energia meccanica del punto  $P$  nel riferimento non inerziale  $\mathcal{R}$ . (iii) Si spieghi infine perchè, per una soluzione generica delle equazioni di E-L del punto  $P$ , non si conserva l'energia meccanica totale relativa al riferimento inerziale  $\mathcal{R}_0$ .

(3). (i) Dimostrare che vale

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0}(y, \dot{y}) = \mathcal{T}|_{\mathcal{R}_0}(y, \dot{y}) - \mathcal{U}|_{\mathcal{R}_0}(y) = \mathcal{T}|_{\mathcal{R}}(y, \dot{y}) - \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}(y) =: \mathcal{L}|_{\mathcal{R}}(y, \dot{y}),$$

dove  $\mathcal{T}|_{\mathcal{R}}$  è l'energia cinetica rispetto al riferimento *non inerziale*  $\mathcal{R}$  e l'energia potenziale  $\mathcal{U}|_{\mathcal{R}}(y) \neq \mathcal{U}|_{\mathcal{R}_0}(y)$  si riferisce alle forze conservative che sono viste agire nel riferimento *non inerziale*  $\mathcal{R}$  e quindi *includendo le forze inerziali* conservative. (ii) Ponendo  $k = m\Omega^2$ , si determinino le configurazioni di equilibrio del punto  $P$  nel riferimento non inerziale  $\mathcal{R}$  e se ne discuta la stabilità. (iv) Sempre per  $k = m\Omega^2$ , si determini la reazione vincolare  $\phi$  alla quale è sottoposto il punto materiale  $P$  in ogni configurazione di equilibrio se si trova in tali posizioni con velocità  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} = \mathbf{0}$ .

### Suggerimenti.

Riguardo al punto (2). Si ricordi che l'energia meccanica totale del punto  $P$  valutata in un certo riferimento è la somma dell'energia cinetica, valutata in quel riferimento, e delle energie potenziali di tutte le forze conservative (incluse quelle inerziali se ve ne sono) in quel riferimento.

Riguardo al punto (3). Lavorando nel riferimento  $\mathcal{R}$  come detto sopra ed usando  $\mathcal{L}|_{\mathcal{R}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{R}}(y, \dot{y}) - \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}(y)$ , possiamo applicare la solita teoria della stabilità per sistemi con lagrangiana della forma  $\sum_{ij} a_{ij}(q^1, \dots, q^n) \dot{q}^i \dot{q}^j - \mathcal{U}(q^1, \dots, q^n)$  dove le  $q^k$  (la sola  $y$  nel caso in esame)

sono coordinate solidali con  $\mathcal{R}$ .

**Soluzione.**

(1). Il sistema considerato ammette lagrangiana. Calcoleremo la lagrangiana nel riferimento inerziale  $cI_0$  usando però la coordinata lagrangiana  $y$  che è solidale con  $\mathcal{R}$ . Vale  $P - O = y \mathbf{e}_y + ay^3 \mathbf{e}_z$  e quindi

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}_0} = \dot{y}(\mathbf{e}_y + 3ay^2 \mathbf{e}_z) + \Omega \mathbf{e}_z \wedge (y \mathbf{e}_y + ay^3 \mathbf{e}_z) = \dot{y}(\mathbf{e}_y + 3ay^2 \mathbf{e}_z) - \Omega y \mathbf{e}_x.$$

In definitiva, l'energia cinetica di  $P$  nel riferimento  $\mathcal{R}$  ha la forma:

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{R}_0} = \frac{m}{2} \dot{y}^2 (1 + 9a^2 y^4) + \frac{m\Omega^2}{2} y^2.$$

Nel riferimento  $\mathcal{R}_0$  le forze attive che agiscono sono: la forza di gravità, con energia potenziale  $mgz_p = mgy^3$  e la forza della molla, con energia potenziale  $k(P - O)^2/2$ . Di conseguenza l'energia potenziale totale risulta essere:

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{R}_0} = mgy^3 + \frac{k}{2} (y^2 + a^2 y^6).$$

In definitiva, la lagrangiana nel riferimento  $\mathcal{R}_0$  risulta essere:

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0} = \frac{m}{2} \dot{y}^2 (1 + 9a^2 y^4) - mgy^3 - \frac{k - m\Omega^2}{2} y^2 - \frac{ka^2}{2} y^6. \quad (1.229)$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange si ottengono subito dalla lagrangiana trovata come:

$$\frac{d}{dt} \left( m \frac{dy}{dt} (1 + 9a^2 y^4) \right) = 18ma^2 y^3 \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 - 3mgy^2 - (k - m\Omega^2)y - 3ka^2 y^5.$$

Tali equazioni possono essere riscritte come:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = - \frac{18a^2 y^3 m \frac{dy}{dt} + 3mgy^2 + (k - m\Omega^2)y + 3ka^2 y^5}{m(1 + 9a^2 y^4)}. \quad (1.230)$$

Abbiamo scritto le equazioni in forma normale. Per quanto riguarda la reazione vincolare  $\phi$  sul punto  $P$ , conviene lavorare nel riferimento inerziale  $\mathcal{R}_0$ . In esso vale:

$$m\mathbf{a}_p|_{\mathcal{R}_0} = \phi - mg \mathbf{e}_z - k(y \mathbf{e}_y + ay^3 \mathbf{e}_z)$$

e quindi

$$\phi = m\mathbf{a}_p|_{\mathcal{R}_0} + mg \mathbf{e}_z + k(y \mathbf{e}_y + ay^3 \mathbf{e}_z).$$

D'altra parte, dalle note relazioni tra le accelerazioni valutate in due riferimenti, troviamo subito:

$$m\mathbf{a}_p|_{\mathcal{R}_0} = m\mathbf{a}_p|_{\mathcal{R}} + 2m\Omega \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{v}_p|_{\mathcal{R}} + m\Omega^2 \mathbf{e}_z \wedge (\mathbf{e}_z \wedge (P - O)).$$

Tenendo conto delle espressioni trovate sopra per  $P - O$  e  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}}$  abbiamo alla fine che:

$$\phi = -2m\Omega \frac{dy}{dt} \mathbf{e}_x + \left( ky - m\Omega^2 y + m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \mathbf{e}_y + \left( mg + kay^3 + 6amy \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + 3ma^2 y^2 \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \mathbf{e}_z. \quad (1.231)$$

Ovviamente l'espressione della reazione vincolare può essere ulteriormente semplificata in una funzione della sola  $y$  e della derivata prima  $dy/dt$ , quando si esplicita la derivata seconda  $d^2 y/dt^2$  in funzione delle prime due attraverso l'equazione del moto (1.230).

(2) Dato che la lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0}$  non dipende esplicitamente dal tempo, per il teorema di Jacobi, si conserva, sui moti del sistema, la funzione di Hamilton:

$$\mathcal{H} = \mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0} - \dot{y} \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0}}{\partial \dot{y}} = \frac{m}{2} \dot{y}^2 (1 + 9a^2 y^4) + mgy^3 + \frac{k - m\Omega^2}{2} y^2 + \frac{ka^2}{2} y^6.$$

Nel sistema di riferimento  $\mathcal{R}$ , le forze che agiscono su  $P$  sono: la forza di gravità, la forza della molla, la forza centrifuga, la forza di Coriolis e la reazione vincolare. Le ultime due non compiono lavoro in quanto sono sempre perpendicolari alla velocità  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}}$  e pertanto non contribuiscono all'energia totale del sistema. La forza di gravità è conservativa con energia potenziale  $mgz_P = mgy^3$ , la forza della molla è conservativa, con energia potenziale  $k(P - O)^2/2 = \frac{k}{2} y^2 + \frac{ka^2}{2} y^6$ . La forza centrifuga, come sappiamo, si può vedere come la forza di una molla repulsiva con costante elastica negativa  $-m\Omega^2$ , attaccata ad un estremo all'asse  $z$  e con tale estremo che si trova sempre alla stessa quota del punto  $P$ . L'energia potenziale di tale "molla" è quindi  $-\frac{m\Omega^2}{2} y^2$ . In definitiva l'energia meccanica totale nel riferimento  $\mathcal{R}$  è

$$\mathcal{E}|_{\mathcal{R}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{R}} + \mathcal{U}|_{\mathcal{R}} = \frac{m}{2} \dot{y}^2 (1 + 9a^2 y^4) + mgy^3 + \frac{k}{2} y^2 + \frac{ka^2}{2} y^6 - \frac{m\Omega^2}{2} y^2 = \mathcal{H}.$$

Nel riferimento  $\mathcal{R}_0$ , le forze conservative sono quella della molla e quella gravitazionale, l'energia meccanica è pertanto data dalla somma delle energie potenziali di tali forze e dell'energia cinetica in  $\mathcal{R}_0$ . Tuttavia esiste anche la reazione vincolare  $\phi$  che non è una forza conservativa e compie lavoro in  $\mathcal{R}_0$ : è normale alla curva  $\Gamma$ , ma non è normale a  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}_0}$ , dato che la curva si muove in  $\mathcal{R}_0$  e quindi  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}_0}$  non è tangente alla curva! Si conclude che l'energia meccanica totale non si conserva nel riferimento  $\mathcal{R}_0$ .

(3) Possiamo scrivere la lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0}$  come

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0} = \mathcal{T}|_{\mathcal{R}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{R}} = \frac{m}{2} \dot{y}^2 (1 + 9a^2 y^4) - mgy^3 - \frac{k - m\Omega^2}{2} y^2 - \frac{ka^2}{2} y^6,$$

dove:

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{R}} := mgy^3 + \frac{k - m\Omega^2}{2} y^2 + \frac{ka^2}{2} y^6.$$

Siamo nel caso in cui le coordinate lagrangiane sono solidali con il riferimento ed in tale riferimento la lagrangiana ha forma  $\mathcal{T}|_{\mathcal{R}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}$  con energia cinetica con struttura standard  $\sum_{i,k=1}^1 a_{ik} \dot{q}^i \dot{q}^k$  con  $a_{ik}$ . Infine le equazioni di E-L rispetto a questa lagrangiana ed in assenza di

termini dovuti a componenti lagrangiane di forze attive<sup>1</sup>, coincidono con le equazioni di Eulero-Lagrange per  $\mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0}$  e quindi determinano le corrette equazioni del moto già trovate per il punto  $P$ . Possiamo pertanto applicare la teoria della stabilità elementare, notando che, per prima cosa, le configurazioni di equilibrio si determinano come punti stazionari dell'energia potenziale:

$$3mgy^2 + (k - m\Omega^2)y + 3ka^2y^5 = 0.$$

Se, come richiesto  $k = m\Omega^2$ , l'equazione si riduce a

$$3mgy^2 + 3ka^2y^5 = 0,$$

che ammette come soluzioni  $y = 0$  e  $y = -\left(\frac{mg}{ka}\right)^{1/3}$ . In entrambi i casi, tenendo conto che nelle configurazioni di equilibrio il moto è dato dalla quiete (e pertanto sono nulle le derivate temporali di  $y$ ), l'identità (1.231) fornisce  $\phi = mg \mathbf{e}_z$  per la prima configurazione e  $\phi = \mathbf{0}$  per la seconda. Passiamo allo studio della stabilità. Consideriamo la matrice hessiana di  $\mathcal{U}|_{\mathcal{R}}$  che, nel caso in esame si riduce alla derivata seconda

$$\frac{d^2\mathcal{U}|_{\mathcal{R}}}{dy^2} = ay(6mg + 15kay^3).$$

La configurazione di equilibrio  $y = 0$  annulla il secondo membro e pertanto per essa non possiamo concludere nulla con il teorema di Lagrange-Dirichlet o con altre tecniche elementari. Viceversa la configurazione  $y = -\left(\frac{mg}{ka}\right)^{1/3}$  produce

$$\frac{d^2\mathcal{U}|_{\mathcal{R}}}{dy^2} = -a\left(\frac{mg}{ka}\right)^{1/3}\left(6mg - 15ka\frac{mg}{ka}\right) = 9amg\left(\frac{mg}{ka}\right)^{1/3} > 0.$$

Tale configurazione è dunque stabile nel passato e nel futuro.

---

<sup>1</sup>In effetti, partendo direttamente dal riferimento  $\mathcal{R}$  uno potrebbe pensare di dover tenere conto delle componenti lagrangiane delle forze di Coriolis, ma in questo caso risultano essere nulle per verifica diretta ed immediata.

## Esercizio 20

Si consideri un sistema di coordinate cartesiane ortonormali destrose  $x, y, z$  con origine  $O$  solidali con un riferimento inerziale  $\mathcal{R}$ . La guida  $\Gamma$ , costituita da una circonferenza di centro  $C$  e raggio  $R > 0$  assegnato e massa nulla, è libera di *rotolare senza strisciare* sull'asse  $y$  nel piano verticale  $x = 0$ . Un punto materiale  $P$  di massa  $m > 0$  assegnata è saldato alla guida ed è soggetto al forza peso  $-mg \mathbf{e}_z$  con  $g \geq 0$  assegnato. Una molla ideale (massa nulla e lunghezza nulla a riposo) di costante elastica nota  $K \geq 0$ , è fissata con un estremo in  $C$  e l'altro in  $O$ .

Si indichi con  $\theta$  l'angolo che il segmento  $P - C$  individua rispetto alla retta verticale  $r$  passante per  $C$ . Tale angolo è orientato positivamente rispetto al versore  $-\mathbf{e}_x$  e vale  $\theta = 0$  quando  $P, C$  e  $O$  si trovano allineati sull'asse  $z$ . Usando  $\theta$  come coordinata libera, assumendo tutti i vincoli ideali, si risolvano i seguenti quesiti.

(1) (i) Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange per il punto  $P$ . (ii) Discutere per quali valori di  $\theta(0)$  e  $d\theta/dt(0)$  vale il teorema di esistenza ed unicità per tali equazioni. (iii) Scrivere le equazioni che determinano la reazione vincolare  $\phi$  su  $P$  in funzione di  $\theta, d\theta/dt$  e  $d^2\theta/dt^2$ .

(2). Si determini un integrale primo e se ne spieghi il significato fisico.

(3). (i) Si dimostri che se  $KR/(mg) > 0$  è sufficientemente grande, e si precisi quanto grande, allora il sistema ammette un'unica configurazione di equilibrio. (ii) Si determini tale configurazione di equilibrio e se ne discuta la stabilità. (iii) Si spieghi cosa succede al numero delle configurazioni di equilibrio quando  $KR/(mg) > 0$  si avvicina al valore nullo.

(4). Usando le equazioni di Eulero-Lagrange, si esprima la componente  $\phi^y$  della reazione vincolare  $\phi$  in funzione di  $\theta(t)$  e  $\dot{\theta}(t)$ .

### Soluzione.

(1)(i) Nel seguito, dato che si userà un unico riferimento  $\mathcal{R}$ , ometteremo la specificazione del riferimento,  $|\mathcal{R}$ , nelle quantità cinematiche. Se  $Q$  è il punto in cui  $r$  interseca  $\Gamma$  sull'asse  $y$ , il vincolo di rotolamento della guida  $\Gamma$  impone che

$$Q - O = R\theta \mathbf{e}_y ,$$

e pertanto possiamo esprimere la posizione del punto  $P$ , cioè il vettore  $P - O$  in termini della sola coordinata  $\theta$ . Si ha subito che

$$P - O = P - C + C - O = (R\theta + R \sin \theta) \mathbf{e}_y + (R + R \cos \theta) \mathbf{e}_z , \quad (1.232)$$

da cui

$$\mathbf{v}_P = R\dot{\theta}(1 + \cos \theta) \mathbf{e}_y - R\dot{\theta} \sin \theta \mathbf{e}_z , \quad (1.233)$$

e quindi, ricaviamo la forma dell'accelerazione che sarà utile più tardi:

$$\mathbf{a}_P = R[\ddot{\theta}(1 + \cos \theta) - \dot{\theta}^2 \sin \theta] \mathbf{e}_y - R(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \mathbf{e}_z . \quad (1.234)$$

Le forze attive sono tutte conservative e pertanto il sistema può essere descritto con una lagrangiana di struttura  $\mathcal{T} - \mathcal{U}$  e senza componenti lagrangiane di forze non conservative. Da

(1.233) otteniamo che l'energia cinetica vale

$$\mathcal{T} = mR^2\dot{\theta}^2(1 + \cos \theta).$$

Le forze attive sono conservative e l'energia potenziale complessiva ha banalmente la forma:

$$\mathcal{U} = mgz_p + \frac{K\|C - O\|^2}{2} = mgR \cos \theta + \frac{KR^2}{2}\theta^2 + \text{cost.}$$

da cui, trascurando inessenziali costanti additive, si trova subito:

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = mR^2\dot{\theta}^2(1 + \cos \theta) - mgR \cos \theta - \frac{KR^2}{2}\theta^2. \quad (1.235)$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange risultano pertanto essere

$$\frac{d}{dt} \left( 2mR^2 \frac{d\theta}{dt} (1 + \cos \theta) \right) = -mR^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \sin \theta + mgR \sin \theta - KR^2 \theta,$$

che si possono esplicitamente scrivere,

$$2mR^2(1 + \cos \theta) \frac{d^2\theta}{dt^2} - mR^2 \sin \theta \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - mgR \sin \theta + KR^2 \theta = 0. \quad (1.236)$$

Per  $\theta \neq \pi + 2k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ , queste equazioni possono infine risciversi:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{mgR \sin \theta - KR^2 \theta + mR^2 \sin \theta \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2}{2mR^2(1 + \cos \theta)}. \quad (1.237)$$

(ii) Dato che il secondo membro è una funzione  $C^\infty$  delle variabili  $\theta$  e  $\dot{\theta}$ , concludiamo che, per condizioni iniziali  $(\theta(0), d\theta/dt(0))$  arbitrarie in  $\mathbb{R}^2$ , ma con  $\theta(0) \neq (2k+1)\pi$  e  $k \in \mathbb{Z}$ , vale il teorema di esistenza ed unicità per le soluzioni dell'equazione del moto (1.236). Assegnando condizioni iniziali  $(\theta(0), d\theta/dt(0))$  in  $\mathbb{R}^2$  con  $\theta(0) = (2k+1)\pi$  e  $k \in \mathbb{Z}$ , il problema non ammette soluzioni, dato che la (1.236) per  $t = 0$  e valutata su ogni eventuale soluzione, si ridurrebbe all'identità impossibile:

$$KR^2(2k+1)\pi = 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Si osservi che lo stesso problema si ha anche assegnando condizioni iniziali al generico tempo  $t$ , dato che i coefficienti dell'equazione differenziale (1.236) non dipendono dal tempo. Si osservi infine che il moto, in virtù della patologia trovata, può avvenire solo tra due consecutivi valori di  $\theta = (2k+1)\pi$  e  $k \in \mathbb{Z}^2$ .

(iii) Per scrivere esplicitamente la formula della reazione vincolare  $\phi$  agente su  $P$ , si osservi che su di esso, oltre a  $\phi$ , agisce solo la forza peso  $-mg \mathbf{e}_z$  e che vale

$$m\mathbf{a}_P = \phi - mg \mathbf{e}_z.$$

---

<sup>2</sup>Dal punto di vista fisico, la patologia incontrata deriva dal fatto che la guida  $\Gamma$  ha massa nulla, ma è sottoposta a forze la cui somma non si annulla quando  $\theta(t) = (2k+1)\pi$  e  $k \in \mathbb{Z}$ .

Il primo membro si ricava da (1.234) ottenendo alla fine:

$$\phi = mR \left[ \frac{d^2\theta}{dt^2} (1 + \cos \theta) - \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \sin \theta \right] \mathbf{e}_y + \left( mg - R \frac{d^2\theta}{dt^2} \sin \theta - R \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \cos \theta \right) \mathbf{e}_z. \quad (1.238)$$

(2) Dato che siamo completamente nelle ipotesi del teorema di Jacobi, abbiamo che un integrale primo è dato dalla funzione hamiltoniana  $\mathcal{H} = \mathcal{T} + \mathcal{U}$  che coincide con l'energia meccanica totale del punto  $P$  nel riferimento  $\mathcal{R}$  quando si pone, su un generico moto del sistema,  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = 0$ :

$$\mathcal{H}(\theta, \dot{\theta}) = mR^2 \dot{\theta}^2 (1 + \cos \theta) + mgR \cos \theta + \frac{KR^2}{2} \theta^2. \quad (1.239)$$

(3) (i) e (iii). Nel caso in esame di lagrangiana  $\mathcal{T} - \mathcal{U}$ , con forze attive tutte conservative e vioncoli indipendenti dal tempo, le configurazioni di equilibrio si trovano come i punti di stazionarietà della funzione  $\mathcal{U}(\theta) = mgR \cos \theta + \frac{KR^2}{2} \theta^2$  (sottointendendo che tali punti non devono coincidere con nessuno dei punti  $(2k+1)\pi$  dove  $k \in \mathbb{Z}$ ). Pertanto, le configurazioni di equilibrio  $\theta_0$  sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione:

$$\sin \theta_0 = \frac{KR}{mg} \theta_0,$$

dove  $KR/(mg) > 0$  per ipotesi. L'equazione descrive le intersezioni di un seno con un fascio di rette uscenti dall'origine e con coefficiente angolare  $KR/(mg) > 0$ . Lo studio delle intersezioni (facendo banalmente la figura), prova che si ha una sola intersezione  $\theta_0 = 0$  per  $KR/(mg) \geq 1$ , mentre per valori più piccoli, ma sempre positivi, si ha un numero di soluzioni sempre più grande che tende all'infinito per  $KR/(mg) \rightarrow 0^+$ . (ii) Nel caso  $KR/(mg) \geq 1$ , possiamo studiare la stabilità della soluzione applicando il teorema di Lagrange-Dirichlet. Vale

$$\frac{d^2\mathcal{U}}{d\theta^2} \Big|_{\theta=0} = -mgR \cos 0 + KR^2 = R(KR - mg).$$

Nel caso  $KR/(mg) > 1$  si ha pertanto stabilità nel futuro e nel passato, mentre non si può decidere nulla con i teoremi elementari di cui disponiamo nel caso  $KR/(mg) = 1$ .

(4) Inserendo il secondo membro di Eq. (1.237) nel secondo membro dell'Eq. (1.238) si ricava l'espressione di  $\phi$  in funzione di  $\theta$  e  $\dot{\theta}$  unicamente. In particolare troviamo:

$$\phi^y = mR \left[ \frac{mgR \sin \theta - KR^2 \theta + mR^2 \sin \theta \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2}{2mR^2} - \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \sin \theta \right],$$

cioè:

$$\phi^y = \frac{1}{2} (mg \sin \theta - RK\theta(t)) - \frac{mR}{2} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \sin \theta. \quad (1.240)$$

**ESERCIZIO 21** (si tratta del precedente esercizio 4 ora svolto con le tecniche della meccanica lagrangiana)

Si consideri un sistema di coordinate cartesiane ortonormali destrorse  $x, y, z$ , solidali con il riferimento inerziale  $\mathcal{R}$ , di origine  $O$  e assi  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ . L'asse  $\mathbf{e}_y$  è verticale in direzione opposta all'accelerazione di gravità  $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_y$  (con  $g \geq 0$ ). Un punto geometrico  $O'$ , distante  $R > 0$  da  $O$ , ruota nel piano  $xy$  con velocità angolare  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$ , essendo  $\omega > 0$  costante nel tempo. Sia  $\mathcal{R}'$  un nuovo sistema di riferimento (non inerziale) che ammette un sistema di coordinate cartesiane destrorse ortonormali  $x', y', z'$  solidali con  $\mathcal{R}'$ , di origine  $O'$  e assi  $\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z$  con  $\mathbf{e}'_z = \mathbf{e}_z$  e  $\mathbf{e}'_y$  dato dal versore di  $O' - O$ . Si supponga che  $\mathbf{e}'_y = \mathbf{e}_y$  per  $t = 0$ .

Nel piano  $x'y'$ , in quiete con  $\mathcal{R}'$ , si trova una circonferenza  $\Gamma$  di centro  $O'$  e raggio  $r > 0$  con  $r < R$ . Un punto materiale  $P$  di massa  $m > 0$ , sottoposto alla forza di gravità è vincolato a muoversi su  $\Gamma$  pensata come vincolo *liscio*. Si indichi con  $\phi$  la reazione vincolare agente su  $P$  dovuta al vincolo.

(1). Si determinino le equazioni di Eulero-Lagrange del punto  $P$ , usando come coordinata del punto l'angolo  $\varphi$  che  $P - O'$  individua rispetto a  $\mathbf{e}'_x$ , orientato positivamente rispetto a  $\mathbf{e}'_z$ .

(2). Si ricavi il valore della reazione vincolare  $\phi$  al tempo  $t = 0$  quando valgono le condizioni iniziali  $\varphi(0) = \pi/2, \dot{\varphi}(0) = 0$ . Esprimere tale reazione vincolare rispetto agli assi del riferimento  $\mathcal{R}$ .

(3). Assumendo  $g = 0$ , si dimostri che la grandezza

$$\mathcal{E}(\varphi, \dot{\varphi}) := \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - m\omega^2 Rr \sin \varphi$$

è conservata nel tempo su ogni moto di  $P$ . Si spieghi quale sia il significato fisico di  $\mathcal{E}$ .

(4). Assumendo  $g = 0$ , si determinino le configurazioni di equilibrio di  $P$  nel riferimento  $\mathcal{R}'$  e se ne discuta la stabilità.

**Soluzione.**

D'ora in poi  $\boldsymbol{\omega} := \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'}|_{\mathcal{R}} = \omega \mathbf{e}_z = \omega \mathbf{e}_{z'}$ .

(1) Per ricavare le equazioni di E-L è comodo lavorare sia sulla base  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$  che sulla base  $\mathbf{e}_{x'}, \mathbf{e}_{y'}$ . Le relazioni tra queste due basi, tenendo conto del fatto che  $\mathbf{e}_{y'} \equiv \mathbf{e}_y$  per  $t = 0$ , sono:

$$\mathbf{e}_{x'} = \cos(\omega t) \mathbf{e}_x + \sin(\omega t) \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_{y'} = -\sin(\omega t) \mathbf{e}_x + \cos(\omega t) \mathbf{e}_y, \quad (1.241)$$

che si invertono in:

$$\mathbf{e}_x = \cos(\omega t) \mathbf{e}_{x'} - \sin(\omega t) \mathbf{e}_{y'}, \quad \mathbf{e}_y = \sin(\omega t) \mathbf{e}_{x'} + \cos(\omega t) \mathbf{e}_{y'}. \quad (1.242)$$

Notiamo che:

$$\frac{d}{dt}|_{\mathcal{R}} \mathbf{e}_{y'} = -\omega \mathbf{e}_{x'}. \quad (1.243)$$

Scriviamo, al fine di ottenere la lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{R}}$ , l'energia cinetica  $\mathcal{T}|_{\mathcal{R}}$  in funzione della coordinata libera indicata nel testo. Vale

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} = \mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}'} + \mathbf{v}_{O'}|_{\mathcal{R}} + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O').$$

L'ultimo termine si può esplicitare in  $\boldsymbol{\omega} \mathbf{e}_{z'} \wedge r \mathbf{e}_r = r\omega \mathbf{e}_\varphi$ . Tenendo conto del fatto che  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$ ,  $O' - O = R \mathbf{e}_{y'}$  ed usando coordinate polari piane relative agli assi  $x', y'$  nel piano  $z' = 0$ , possiamo riscrivere la formula precedente per  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}}$  come:

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} = r\dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi - \omega R \mathbf{e}_{x'} + r\omega \mathbf{e}_\varphi,$$

dove abbiamo usato (1.241). In altre parole:

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} = r(\dot{\varphi} + \omega) \mathbf{e}_\varphi - \omega R \mathbf{e}_{x'}.$$

Tenendo conto del fatto che  $\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_{x'} + \cos \varphi \mathbf{e}_{y'}$ , il quadrato dell'espressione precedente fornisce:

$$(\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}})^2 = r^2(\dot{\varphi} + \omega)^2 + \omega^2 R^2 + 2\omega Rr(\dot{\varphi} + \omega) \sin \varphi. \quad (1.244)$$

Avremo allora che:

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{R}} = \frac{m}{2} r^2 (\dot{\varphi} + \omega)^2 + \omega^2 R^2 + m\omega Rr(\dot{\varphi} + \omega) \sin \varphi. \quad (1.245)$$

La forza di gravità è data da  $\mathbf{f} = -mg \mathbf{e}_y$ . Vediamone le componenti lagrangiane rispetto alla coordinata  $\varphi$ . Facendo uso di (1.242) si trova che:

$$\mathcal{Q}_\varphi = -mg \mathbf{e}_y \cdot \frac{\partial(P - O)}{\partial \varphi} = -mg(\sin(\omega t) \mathbf{e}_{x'} + \cos(\omega t) \mathbf{e}_{y'}) \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} (R \mathbf{e}_{y'} + r \mathbf{e}_r),$$

Da cui:

$$\mathcal{Q}_\varphi = -mg(\sin(\omega t) \mathbf{e}_{x'} + \cos(\omega t) \mathbf{e}_{y'}) \cdot r \mathbf{e}_\varphi = -mgr(-\sin(\omega t) \sin \varphi + \cos(\omega t) \cos \varphi) = -mgr \cos(\omega t + \varphi).$$

In definitiva, possiamo ricavare  $\mathcal{Q}_\varphi$  dal potenziale (non si parla di energia potenziale visto che si ha dipendenza esplicita dal tempo):

$$\mathcal{V}(t, \varphi) = -mgr \sin(\omega t + \varphi),$$

e quindi il sistema è descritto dalla lagrangiana:

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{R}}(\varphi, \dot{\varphi}) := \mathcal{T}|_{\mathcal{R}}(\varphi, \dot{\varphi}) + \mathcal{V}(t, \varphi) = \frac{m}{2} r^2 (\dot{\varphi} + \omega)^2 + m\omega Rr(\dot{\varphi} + \omega) \sin \varphi - mgr \sin(\omega t + \varphi), \quad (1.246)$$

dove abbiamo trascurato la costante additiva  $\omega^2 R^2$ , che non fornisce alcun contributo alle equazioni di Eulero-Lagrange. Con la lagrangiana (1.246), le equazioni di Eulero Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{R}}}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{R}}}{\partial \varphi}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi},$$

risultano essere, dopo un banale calcolo:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{R\omega^2}{r} \cos \varphi - \frac{g}{r} \cos(\omega t + \varphi). \quad (1.247)$$

(2) Per ricavare la reazione vincolare  $\phi$  all'istante  $t = 0$  sul moto con condizioni iniziali  $\varphi(0) = \pi/2$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0$ , partiamo dall'equazione di Newton:

$$m\mathbf{a}_P|_{\mathcal{R}} = \phi - mg \mathbf{e}_y . \quad (1.248)$$

Ora ricaviamo l'accelerazione  $\mathbf{a}_P|_{\mathcal{R}}$  all'istante considerato usando la formula:

$$\mathbf{a}_P|_{\mathcal{R}} = \mathbf{a}_P|_{\mathcal{R}'} + \mathbf{a}_{O'}|_{\mathcal{R}} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge (P - O')) + 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}'} . \quad (1.249)$$

Studiamo separatamente i termini nel secondo membro di (1.249). Notiamo che  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}'} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi$  si annulla all'istante  $t = 0$ , proprio per le condizioni iniziali. Pertanto il termine di Coriolis  $2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}'}$  si omette. Nello stesso modo, in:

$$\mathbf{a}_P|_{\mathcal{R}'} = r \frac{d^2\varphi}{dt^2} \mathbf{e}_\varphi - r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \mathbf{e}_r$$

il secondo addendo è nullo a  $t = 0$ , mentre il primo vale (a parte il fattore  $r \mathbf{e}_\varphi$ )

$$\frac{R\omega^2}{r} \cos \varphi(0) - \frac{g}{r} \cos(\omega 0 + \varphi(0)) = \frac{R\omega^2}{r} \cos(\pi/2) - \frac{g}{r} \cos(\pi/2) = 0 .$$

Infine, il punto  $O'$  compie un moto circolare uniforme sulla circonferenza di raggio  $R$  e con  $\omega$  costante, la sua accelerazione sarà quindi centripeta con modulo  $\omega^2 R$  (lo stesso risultato si ottiene svolgendo i calcoli) per  $t = 0$ , avremo allora

$$\mathbf{a}_{O'}|_{\mathcal{R}} = -\omega^2 R \mathbf{e}_y ,$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che il versore di  $O' - O$  è  $\mathbf{e}_y$  quando  $t = 0$ . In definitiva, tenendo conto che  $\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_y$  per  $t = 0$ :

$$\mathbf{a}_P|_{\mathcal{R}} = -\omega^2 R \mathbf{e}_y + \omega^2 \mathbf{e}_{z'} \wedge (\mathbf{e}_{z'} \wedge r \mathbf{e}_r) = -\omega^2 R \mathbf{e}_y - r\omega^2 \mathbf{e}_r = -\omega^2 R \mathbf{e}_y - r\omega^2 \mathbf{e}_y .$$

Abbiamo trovato che, sul moto considerato e per  $t = 0$ :

$$m\mathbf{a}_P|_{\mathcal{R}} = -m\omega^2(R + r) \mathbf{e}_y .$$

Per differenza, (1.248) fornisce:

$$\phi = m(g - \omega^2(R + r)) \mathbf{e}_y .$$

(3) Mettiamoci nel caso  $g = 0$ . La lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{R}}$  individuata in (1.246) e con  $g = 0$ , non dipende esplicitamente dal tempo. Per il teorema di Jacobi, si conserverà la funzione di Hamilton:  $\mathcal{H}(\varphi, \dot{\varphi}) := \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{R}}}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - \mathcal{L}|_{\mathcal{R}}$ . Il calcolo diretto produce immediatamente, a parte inessenziali costanti additive,

$$\mathcal{H}(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 - m \omega^2 R r \sin \varphi =: \mathcal{E}(\varphi, \dot{\varphi}) .$$

Pertanto  $\mathcal{E}$  è davvero conservato sui moti del sistema. Non possiamo applicare la seconda parte del teorema di Jacobi e concludere che  $\mathcal{H}$  coincide con l'energia meccanica del sistema nel riferimento  $\mathcal{R}$ , dato che la coordinata libera  $\varphi$  non è solidale con il riferimento  $\mathcal{R}$ . Si può allora supporre che  $\mathcal{E}$  coincida con l'energia meccanica totale di  $P$  nel riferimento non inerziale  $\mathcal{R}'$ . Tale energia meccanica totale, per definizione, è la somma dell'energia cinetica di  $P$  in  $\mathcal{R}'$  e di tutte le energie potenziali delle forze attive (vere e inerziali) conservative. Esaminiamo le forze attive che agiscono su  $P$  nel riferimento  $\mathcal{R}'$  nel caso  $g = 0$ .

$$m\mathbf{a}_P|_{\mathcal{R}'} = -m\mathbf{a}_{O'}|_{\mathcal{R}} - m\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge (P - O')) - 2m\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}'} + \boldsymbol{\phi}.$$

La forza vincolare  $\boldsymbol{\phi}$  non entra in gioco nella discussione che stiamo facendo (e non compie lavoro in  $\mathcal{R}'$ , per cui non contraddice l'eventuale conservazione dell'energia meccanica). La forza di gravità non è presente se  $g = 0$ , ma abbiamo tre forze inerziali nel riferimento  $\mathcal{R}'$ . Una è la forza di Coriolis, che non è conservativa (e non compie lavoro in  $\mathcal{R}'$  come  $\boldsymbol{\phi}$ ). Un'altra è la forza centrifuga:

$$\mathbf{F}^{(cent)} := -m\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge (P - O')) = -m\omega^2 r \mathbf{e}_z \wedge (\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_r) = m\omega^2 r \mathbf{e}_r.$$

Questa è una forza conservativa di una molla repulsiva, di costante elastica  $-m\omega^2$  con energia potenziale:

$$\mathcal{U}_{(cent)}(x', y') = -\frac{1}{2}m\omega^2(x'^2 + y'^2),$$

dove  $x'$  e  $y'$  sono le coordinate di  $P$  rispetto agli assi solidali con  $\mathcal{R}'$ . Tuttavia, nel caso considerato,  $(x'^2 + y'^2) = r^2$  costantemente per ogni moto del sistema e pertanto tale energia potenziale rimane sempre costante e può essere assimilata ad una costante additiva ed eliminata. Si osservi che la forza considerata è comunque sempre perpendicolare alla velocità nel caso in esame e quindi non compie lavoro in  $\mathcal{R}'$ . La forza inerziale dovuta alla rimanente parte del moto di trascinamento è infine data dall'accelerazione centripeta di  $O'$  cambiata di segno e moltiplicata per  $m$ :

$$\mathbf{F}^{(trasc)} = -m\mathbf{a}_{O'}|_{\mathcal{R}} = mR\omega^2 \mathbf{e}_{y'}.$$

Questa forza inerziale è pensabile come una forza di gravità fittizia nella direzione  $\mathbf{e}_{y'}$  (che è fisso in  $\mathcal{R}'$ ), con modulo  $g_{eff} := mR\omega^2$ , ed è pertanto descritta in  $\mathcal{R}'$  dall'energia potenziale:

$$\mathcal{U}_{(trasc)}(x', y') = -mR\omega^2 y' = -mrR\omega^2 \sin \varphi.$$

L'energia potenziale in  $\mathcal{R}'$  della quale dobbiamo tener conto è dunque solo quest'ultima, e l'energia meccanica totale coincide con la somma di essa e dell'energia cinetica in  $\mathcal{R}'$ . Dunque vale proprio, come si supponeva:

$$\frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - m\omega^2 Rr \sin \varphi = \mathcal{E}(\varphi, \dot{\varphi}).$$

Concludiamo che  $\mathcal{E}$  è l'energia meccanica totale di  $P$  nel sistema di riferimento non inerziale  $\mathcal{R}'$ .

(4) Per studiare le configurazioni di equilibrio nel riferimento  $\mathcal{R}'$ , converrebbe usare la lagrangiana (nel caso  $g = 0$ ) riferita a tale sistema di riferimento espressa in coordinate  $\varphi$ . Infatti i vincoli

sono indipendenti dal tempo in  $\mathcal{R}'$  e  $\varphi$  è solidale con  $\mathcal{R}'$  e pertanto potremmo applicare i teoremi sull'equilibrio nella forma più elementare. La lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{R}'}$  si ottiene come  $\mathcal{T}|_{\mathcal{R}'} - \mathcal{U}|_{\mathcal{R}'}$ , dove  $\mathcal{U}|_{\mathcal{R}'} := -mrR\omega^2 \sin \varphi$  è l'unica energia potenziale non costante individuata al punto (3). Si deve osservare che le equazioni di Eulero-Lagrange in  $\mathcal{R}'$  potrebbero essere però della forma generale che include qualche componente lagrangiana  $\mathcal{Q}_\varphi$  di qualche forza attiva (sicuramente inerziale) non conservativa. L'unica forza attiva non conservativa è data dalla forza di Coriolis che ha  $\mathcal{Q}_\varphi = 0$  come si verifica facilmente. Alternativamente, senza calcolare  $\mathcal{Q}_\varphi$ , si può notare che, assumendo direttamente:

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{R}'}(\varphi, \dot{\varphi}) := \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + m\omega^2 Rr \sin \varphi, \quad (1.250)$$

le equazioni di Eulero-Lagrange nella forma elementare (senza alcuna  $\mathcal{Q}_\varphi$ !):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{R}'}}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{R}'}}{\partial \varphi}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \quad (1.251)$$

producono le corrette equazioni del moto (1.247), che per loro natura non dipendono dal riferimento scelto. La verifica è immediata. Concludiamo che la  $\mathcal{L}|_{\mathcal{R}'}$  è comunque una buona lagrangiana per il sistema in  $\mathcal{R}'$ . Possiamo allora studiare le configurazioni di equilibrio per la lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{R}'}$  in (1.250) dove le equazioni di E-L sono quelle in forma standard (1.251). In base a noti teoremi, tali configurazioni si ottengono annullando il gradiente dell'energia potenziale:

$$\frac{\partial \mathcal{U}|_{\mathcal{R}'}}{\partial \varphi} = -m\omega^2 Rr \cos \varphi = 0.$$

Abbiamo pertanto le due configurazioni di equilibrio:  $\varphi_\pm := \pm\pi/2$ . La stabilità di esse si studia considerando gli autovalori della matrice hessiana, cioè il segno della derivata seconda:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}|_{\mathcal{R}'}}{\partial \varphi^2} \Big|_{\varphi_\pm} = m\omega^2 Rr \sin \varphi_\pm = \pm m\omega^2 Rr.$$

Concludiamo che la configurazione  $\varphi_+$  è stabile nel passato e nel futuro, mentre la configurazione  $\varphi_-$  è instabile nel passato e nel futuro.

## ESERCIZIO 22

In un sistema di riferimento *inerziale*  $\mathcal{R}$ , si fissi un sistema di assi cartesiani ortonormali destrorsi  $x, y, z$  con origine  $O$ , solidali con  $\mathcal{R}$ . Due punti materiali  $P_1$  e  $P_2$ , entrambi di massa  $m > 0$ , sono vincolati alla circonferenza priva d'attrito,  $C$ , di centro  $(0, 0, 0)$ , raggio  $R > 0$  e giacente nel piano  $x = 0$ . I due punti materiali sono connessi l'un l'altro da una molla ideale di lunghezza nulla a riposo, massa trascurabile e costante elastica  $k > 0$ . Sui due punti agisce la forza di gravità  $-mg \mathbf{e}_z$  con  $g \geq 0$ . Infine sul punto  $P_1$  agisce la forza viscosa  $-\gamma \mathbf{v}_{P_1}$  con  $\gamma \geq 0$  costante fissata ed essendo la velocità riferita a sistema inerziale considerato.

Si risolvano i seguenti quesiti, usando come coordinate libere gli angoli polari  $\theta_1$  e  $\theta_2$  dei due punti  $P_1$  e  $P_2$  nel piano  $y, z$ , valutati a partire dall'asse  $y$  ed orientati positivamente rispetto all'asse  $x$ .

(1). Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange per il moto del sistema dei due punti materiali  $P_1$  e  $P_2$  usando la lagrangiana  $\mathcal{L}$  riferita al sistema inerziale  $\mathcal{R}$  e le componenti lagrangiane  $\mathcal{Q}_k$  delle forze non conservative presenti.

(2). (i) Si esprima la derivata temporale dell'energia meccanica del sistema in funzione di  $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$  e si dimostri che, per  $\gamma = 0$ , l'energia meccanica è un integrale primo (cioè si conserva nel tempo sui moti del sistema).

(ii) Si dimostri che, se  $g = 0$  e  $\gamma = 0$ , si conserva nel tempo sui moti del sistema anche la quantità :

$$J := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2}.$$

(iii) Si spieghi il significato fisico di  $J$ .

(3). (i) Per  $\gamma = 0$ , si determinino le configurazioni di equilibrio e si discuta per quali valori del rapporto  $KR/(mg)$  esistono configurazioni di equilibrio differenti da  $\theta_1 = \theta_2 = \pm\pi/2$  e  $\theta_1 = -\theta_2 = \pm\pi/2$ .

(ii) Per  $\gamma = 0$ , si studi la stabilità delle configurazioni di equilibrio differenti da  $\theta_1 = \theta_2 = \pm\pi/2$  e  $\theta_1 = -\theta_2 = \pm\pi/2$ .

(4). Nell'ipotesi  $\gamma = 0$  si passi in formulazione di Hamilton scrivendo esplicitamente l'hamiltoniana e le equazioni di Hamilton del sistema.

Alcune formule che possono essere utili svolgendo l'esercizio.

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta, \quad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos(2\beta) = 1 - 2 \sin^2 \beta = 2 \cos^2 \beta - 1.$$

**Soluzione.**

(1). Dato che la circonferenza è liscia, i vincoli sono ideali e dunque possiamo usare la formulazione lagrangiana della meccanica. Usando la solita base ortonormale  $\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_r$  adattata alle coordinate polari piane, la velocità del punto  $P_1$  risulta essere  $\mathbf{v}_{P_1} = R\dot{\theta}_1 \mathbf{e}_\theta$  e quella di  $P_2$  ha un forma analoga. L'energia cinetica del sistema riferita a  $\mathcal{R}$  è quindi semplicemente:

$$\mathcal{T} := \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) .$$

L'energia potenziale totale si ottiene sommando l'energia potenziale gravitazionale

$$mgR (\sin \theta_1 + \sin \theta_2)$$

all'energia potenziale della molla

$$\frac{k}{2}(P_1 - P_2)^2 = \frac{k}{2} [R(\sin \theta_1 - \sin \theta_2) \mathbf{e}_z + R(\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \mathbf{e}_y]^2 .$$

Quadrando, tenendo conto che i due versori sono ortogonali, trascurando un'inessenziale costante additiva che si ha sviluppando l'energia potenziale di sopra, si ha infine l'energia potenziale totale:

$$\mathcal{U} = mgR (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) - kR^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Nel caso  $\gamma = 0$  la lagrangiana del sistema vale pertanto  $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$ :

$$\mathcal{L} = \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - mgR (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) + kR^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) . \quad (1.252)$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange assumono pertanto, nel caso generale, la forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i} = \mathcal{Q}_i \quad \text{per } i = 1, 2 .$$

Le componenti lagrangiane  $\mathcal{Q}_i$  sono riferite alla forza viscosa  $-\gamma \mathbf{v}_1$ . Il calcolo diretto mostra subito che:

$$\mathcal{Q}_1 = \frac{\partial P_1}{\partial \theta_1} \cdot (-\gamma \mathbf{v}_1) = -\gamma R^2 \dot{\theta}_1 \quad \text{e} \quad \mathcal{Q}_2 = \frac{\partial P_1}{\partial \theta_2} \cdot (-\gamma \mathbf{v}_1) = 0 .$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange risultano essere in tal modo in forma normale e date da:

$$mR^2 \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} = -mgR \cos \theta_1 - kR^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - \gamma R^2 \frac{d\theta_1}{dt} , \quad (1.253)$$

$$mR^2 \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} = -mgR \cos \theta_2 + kR^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) . \quad (1.254)$$

(2). (i) Moltiplicando entrambi i membri della prima equazione di E-L per  $\frac{d\theta_1}{dt}$ , quelli della seconda per  $\frac{d\theta_2}{dt}$  e sommando membro a membro il risultato, si arriva all'identità:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) \right] = -\frac{d\theta_1}{dt} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta_1} - \frac{d\theta_2}{dt} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta_2} - \gamma R^2 \left( \frac{d\theta_1}{dt} \right)^2 .$$

Questa identità può essere riscritta come:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + \mathcal{U} \right] = -\gamma R^2 \left( \frac{d\theta_1}{dt} \right)^2 ,$$

cioé

$$\frac{d}{dt} [\mathcal{T} + \mathcal{U}] = -\gamma R^2 \left( \frac{d\theta_1}{dt} \right)^2 .$$

Abbiamo ottenuto in tal modo che la derivata temporale dell'energia meccanica totale  $E$  si può scrivere, su ogni moto del sistema, come:

$$\frac{dE}{dt} = -\gamma R^2 \dot{\theta}_1^2 .$$

Nel caso in cui  $\gamma = 0$  si conclude che l'energia meccanica del sistema si conserva sui moti del sistema e pertanto l'energia meccanica totale è un integrale primo. Si arriva allo stesso risultato notando che i vincoli sono indipendenti dal tempo nel sistema di riferimento  $\mathcal{R}$ , le coordinate libere usate sono solidali con  $\mathcal{R}$  ed, infine, la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo. Sappiamo che in questo caso, la funzione Hamiltoniana  $\mathcal{H}$  coincide con l'energia meccanica totale  $E$  nel riferimento  $\mathcal{R}$  e sulle soluzioni del problema del moto vale:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_k \mathcal{Q}_k \dot{q}^k = -\gamma R^2 \dot{\theta}_1^2 .$$

(ii) Assumiamo  $g = 0$  e  $\gamma = 0$ . Un metodo abbastanza rapido è quello di notare che il gruppo ad un parametro di diffeomorfismi che preservano le fibre di  $\mathbb{V}^{2+1}$ ,  $\theta_1 \rightarrow \theta'_1 := \theta_1 + \epsilon$ ,  $\theta_2 \rightarrow \theta'_2 := \theta_2 + \epsilon$  che si rialza su  $J^1(\mathbb{V}^{2+1})$  aggiungendo le trasformazioni banali  $\dot{\theta}_1 \rightarrow \dot{\theta}'_1 := \dot{\theta}_1$ ,  $\dot{\theta}_2 \rightarrow \dot{\theta}'_2 := \dot{\theta}_2$  è una simmetria per la lagrangiana:

$$\mathcal{L}(t', \theta'_1, \theta'_2, \dot{\theta}', \dot{\theta}') = \mathcal{L} = \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + kR^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

dove abbiamo usato il fatto che:

$$\theta'_1 - \theta'_2 = \theta_1 + \epsilon - (\theta_2 + \epsilon) = \theta_1 - \theta_2 .$$

L'integrale che risulta dal teorema di Noether è allora:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} ,$$

per cui risulta che:

$$J = mR^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)$$

è un integrale primo. Un metodo alternativo è quello di passare, nella lagrangiana (sempre con  $g = 0$  e  $\gamma = 0$ ) alle nuove variabili  $\Theta := (\theta_1 - \theta_2)/2$ ,  $\Phi := (\theta_1 + \theta_2)/2$  e notare che la lagrangiana

espressa nelle nuove variabili non dipende esplicitamente dalla variabile  $\Phi$  e pertanto si conserva, in virtù delle equazioni di E-L, la quantità  $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\Phi}$ . Tale grandezza coincide con  $J$ .

(iii) Si verifica immediatamente facendo il calcolo, che  $J$  è la componente  $x$  del momento angolare

$$\Gamma_O|_{\mathcal{R}} = (P_1 - O) \wedge \mathbf{v}_{P_1}|_{\mathcal{R}} + (P_2 - O) \wedge \mathbf{v}_{P_2}|_{\mathcal{R}}.$$

(3). (i) Le configurazioni di equilibrio, nel caso in esame, si ottengono come punti di stazionarietà di  $\mathcal{U}$ . Abbiamo pertanto le equazioni:

$$\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\theta_1} = mgR \cos\theta_1 + kR^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0, \quad \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\theta_2} = mgR \cos\theta_2 - kR^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0.$$

Questo sistema di equazioni equivale a

$$mgR \cos\theta_1 + kR^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0, \quad \cos\theta_1 = -\cos\theta_2. \quad (1.255)$$

la seconda equazione si risolve in  $\theta_2 = \pi + \theta_1$  e  $\theta_2 = \pi - \theta_1$ . La prima equazione in (1.255) è soddisfatta, se  $\theta_2 = \pi + \theta_1$ , per  $\theta_1 = \pm\pi/2$ . Si ottengono in questo caso le configurazioni di equilibrio individuate da  $\theta_1 = -\theta_2 = \pi/2$  e  $\theta_1 = -\theta_2 = -\pi/2$ . Passiamo al secondo caso  $\theta_2 = \pi - \theta_1$  e studiamo la prima equazione in (1.255) in questo caso. Tale equazione diventa:

$$mgR \cos\theta_1 + kR^2 \sin(2\theta_1 - \pi) = 0$$

cioè:

$$mgR \cos\theta_1 - kR^2 \sin(2\theta_1) = 0$$

cioè:

$$mgR \cos\theta_1 - 2kR^2 \sin\theta_1 \cos\theta_1 = 0.$$

Il caso  $\cos\theta_1 = 0$  produce le configurazioni di equilibrio  $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$ ,  $\theta_1 = \theta_2 = -\pi/2$ . Consideriamo infine il caso  $\cos\theta_1 \neq 0$ . In questa situazione, le configurazioni di equilibrio si ottengono risolvendo

$$mgR = 2kR^2 \sin\theta_1, \quad \theta_2 = \pi - \theta_1.$$

Si hanno dunque soluzioni solo se (dove  $m, g, k > 0$ ):  $mg/(2kR) \leq 1$  e tali soluzioni sono differenti da  $\theta_1 = \theta_2 = \pm\pi/2$  e  $\theta_1 = -\theta_2 = \pm\pi/2$  solo se:

$$\frac{mg}{kR} < 2.$$

(ii) Passiamo a studiare la stabilità della configurazioni di equilibrio che, valendo  $0 < \frac{mg}{kR} < 2$ , si ottengono risolvendo

$$\sin\theta_1 = \frac{mg}{2kR}, \quad \theta_2 = \pi - \theta_1.$$

Le soluzioni e quindi le configurazioni di equilibrio, sono pertanto

$$\theta_1 = \arcsin\left(\frac{mg}{2kR}\right), \quad \theta_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{mg}{2kR}\right)$$

e

$$\theta_1 = \pi - \arcsin\left(\frac{mg}{2kR}\right), \quad \theta_2 = \arcsin\left(\frac{mg}{2kR}\right).$$

Si osservi che, come deve essere, una soluzione si ottiene dall'altra scambiando il ruolo di  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , data la simmetria del problema. Possiamo quindi studiare la stabilità per la prima configurazione di equilibrio dato che il risultato varrà, per simmetria, anche per la seconda. Abbiamo che

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta_1^2} = -mgR \sin \theta_1 + kR^2 \cos(\theta_1 - \theta_2), \quad \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} = \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} = -kR^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta_2^2} = -mgR \sin \theta_2 + kR^2 \cos(\theta_1 - \theta_2).$$

Nel caso in esame, essendo  $\theta_2 = \pi - \theta_1$  si ha

$$\sin \theta_1 = \sin \theta_2 = \frac{mg}{2kR}$$

mentre:

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos(2\theta_1 - \pi) = -\cos 2\theta = 2 \sin^2 \theta - 1 = 2 \left(\frac{mg}{2kR}\right)^2 - 1$$

e quindi

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta_1^2} = -kR^2, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} = \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} = -\frac{(mg)^2}{2k} + kR^2, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta_2^2} = -kR^2.$$

La traccia della matrice hessiana risulta essere

$$-2kR^2 < 0.$$

Conseguentemente almeno uno degli autovalori della matrice hessiana deve essere negativo e quindi le due configurazioni di equilibrio sono instabili nel passato e nel futuro.

(4). Riferendosi alla lagrangiana (1.252), i momenti  $p_1$  e  $p_2$  coniugati rispettivamente con la coordinata  $\theta_1$  e  $\theta_2$  risultano essere immediatamente:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} = mR^2 \dot{\theta}_i, \quad i = 1, 2.$$

Invertendo tali semplici relazioni ed esprimendo l'hamiltoniana  $\mathcal{H} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} \dot{\theta}_i - \mathcal{L}$  in funzione delle variabili canoniche si trova subito:

$$\mathcal{H}(\theta_1, \theta_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2mR^2} (p_1^2 + p_2^2) + mgR (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) - kR^2 \cos(\theta_1 - \theta_2).$$

Le equazioni di Hamilton risultano pertanto essere:

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{p_1}{mR^2}, \quad \frac{d\theta_2}{dt} = \frac{p_2}{mR^2}$$

e

$$\frac{dp_1}{dt} = -mgR \cos \theta_1 - kR^2 \sin(\theta_1 - \theta_2), \quad \frac{dp_2}{dt} = -mgR \cos \theta_2 + kR^2 \sin(\theta_1 - \theta_2).$$

## ESERCIZIO 23

In riferimento al sistema di assi cartesiani ortonormali  $x, y, z$  destrorso di origine  $O$  e solidali con un sistema di riferimento inerziale  $\mathcal{R}$ , sia  $S$  la superficie  $x \in \mathbb{R}$ ,  $z = ay^4$  con  $a > 0$  costante nota. Il punto materiale  $P$  di massa  $m > 0$  si muove su  $S$ , pensata come vincolo ideale. Su  $P$  agiscono le forze elencate di seguito:

(ii) le forze di due molle prive di peso entrambe di costante elastica  $k > 0$  assegnata, lunghezza nulla a riposo; una molla ha un estremo in  $P$  e l'altro estremo in  $O$ , mentre l'altra molla ha un estremo in  $P$  e l'altro estremo nel punto  $Q$  di coordinate  $(q, 0, 0)$ , con  $q > 0$  costante nota,

(i) la forza di gravità  $-mg \mathbf{e}_z$  (con  $g > 0$  costante),

(iii) una forza viscosa  $-\gamma \mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}}$  con  $\gamma \geq 0$  costante nota.

Si risolvano i seguenti quesiti.

(1) Si ricavino le equazioni di Eulero-Lagrange per il punto  $P$  usando le coordinate  $x, y$  come coordinate lagrangiane, scrivendo esplicitamente le dette equazioni in forma normale e spiegando esplicitamente nel caso in esame per quale motivo vale il teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni.

(2) Nel caso  $\gamma = 0$ , si provi che esiste un integrale primo spiegandone il significato fisico e dandone la forma esplicita in termini delle coordinate lagrangiane e delle coordinate lagrangiane puntate. Si discuta se tale funzione sia ancora un integrale primo per  $\gamma > 0$ .

(3) Nel caso  $\gamma = 0$  si trovino le configurazioni di equilibrio e se ne studi la stabilità per i valori dei parametri  $a, m, k, g > 0$ .

(4) Nel caso  $\gamma = 0$ , si calcolino le componenti rispetto alla base  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  della reazione vincolare  $\phi$  che agisce sul punto materiale  $P$  quando è in quiete in una configurazione di equilibrio.

(5) Nel caso  $\gamma > 0$ , si determini il moto del punto  $P$  con condizioni iniziali  $x(0) = q$ ,  $\frac{dx}{dt}(0) = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $\frac{dy}{dt}(0) = 0$  nel caso  $\gamma^2 > 100mk$  e si dica quanto vale il limite per  $t \rightarrow +\infty$  di tale soluzione.

(6) Nel caso  $\gamma = 0$ , si passi in formulazione di Hamilton scrivendo esplicitamente la funzione di Hamilton e le equazioni di Hamilton per il punto  $P$ .

**Soluzione.**

Omettiamo nel seguito l'indice  $\mathcal{R}$ , essendo tutte le grandezze cinematiche associate unicamente al riferimento  $\mathcal{R}$ ; ometteremo anche l'indice  $P$  visto che si lavora con un unico punto materiale.

(1) Per costruzione, in funzione delle coordinate libere  $x, y$ , abbiamo:

$$P - O = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + ay^4 \mathbf{e}_z, \quad (1.256)$$

e pertanto

$$\mathbf{v} = \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{y} \mathbf{e}_y + 4ay^3 \dot{y} \mathbf{e}_z, \quad (1.257)$$

da cui, l'energia cinetica del punto  $P$  nel riferimento  $\mathcal{R}$  ha la forma:

$$\mathcal{T} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + (1 + 16a^2y^6)\dot{y}^2).$$

L'energia potenziale si ottiene sommando l'energia potenziale gravitazionale alle due energie potenziali della molla

$$\mathcal{U} = mgz + \frac{k}{2} \|P - O\|^2 + \frac{k}{2} \|P - Q\|^2.$$

Il calcolo esplicito, tenendo conto dell'espressione esplicita di  $P - O$  (1.256) in funzione delle coordinate libere  $x, y$  e delle coordinate di  $Q$ , produce immediatamente, trascurando una costante additiva inessenziale:

$$\mathcal{U} = ka^2y^8 + mgay^4 + ky^2 + kx(x - q).$$

La lagrangiana del sistema avrà allora forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + (1 + 16a^2y^6)\dot{y}^2) - ka^2y^8 - mgay^4 - ky^2 - kx(x - q). \quad (1.258)$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange devono però anche tenere conto delle componenti lagrangiane  $\mathcal{Q}_k$  della forza non conservativa viscosa e avranno la solita forma generale, per  $q^1 = x$  e  $q^2 = y$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} + \mathcal{Q}_k \\ \frac{d\dot{q}^k}{dt} &= \dot{q}^k. \end{aligned}$$

Il calcolo esplicito fornisce subito, tramite (1.256) e (1.257):

$$\mathcal{Q}_x = \frac{\partial P - O}{\partial x} \cdot (-\gamma \mathbf{v}) = -\gamma \dot{x}, \quad (1.259)$$

$$\mathcal{Q}_y = \frac{\partial P - O}{\partial y} \cdot (-\gamma \mathbf{v}) = -\gamma \dot{y} (1 + 16a^2y^6). \quad (1.260)$$

Concludiamo che le equazioni di Eulero-Lagrange si scrivono esplicitamente:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= -2kx + kq - \gamma \frac{dx}{dt}, \\ m \frac{d}{dt} \left( (1 + 16a^2y^6) \frac{dy}{dt} \right) &= 48a^2my^5 \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 - 8a^2ky^7 - 4mgay^3 - 2ky - \gamma (1 + 16a^2y^6) \frac{dy}{dt}, \end{aligned}$$

ovvero, in forma normale:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\frac{kx}{m} + \frac{kq}{m} - \frac{\gamma}{m} \frac{dx}{dt} \quad (1.261)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{-8a^2ky^7 - 4mgay^3 - 2ky - \gamma(1 + 16a^2y^6)\frac{dy}{dt} - 48ma^2y^5\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}{m(1 + 16a^2y^6)}, \quad (1.262)$$

dove il secondo membro è evidentemente di classe  $C^\infty$  in tutte le variabili congiuntamente (pensando  $\dot{x} := dx/dt$  e  $\dot{y} := dy/dt$  come variabili indipendenti da  $x$  e  $y$ ). Le funzioni a secondo membro sono infatti rapporti di polinomi i cui denominatori non hanno zeri reali. Concludiamo che siamo nelle ipotesi di validità del teorema di esistenza ed unicità per il problema di Cauchy.

**(2)** Se  $\gamma = 0$  il sistema è completamente descritto dalla lagrangiana  $\mathcal{L} = \mathcal{T}|_{\mathcal{R}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}$  essendo tutte le forze conservative, i vincoli non dipendono dal tempo nel riferimento  $\mathcal{R}$ , le coordinate libere sono solidali con  $\mathcal{R}$ . Infine  $\mathcal{L}$  non dipende esplicitamente dal tempo. Pertanto si ha l'integrale primo di Jacobi che coincide con l'energia meccanica del sistema

$$\mathcal{H} = \mathcal{T}|_{\mathcal{R}} + \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}.$$

Esplicitamente:

$$\mathcal{H} = \mathcal{T} + \mathcal{U} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + (1 + 16a^2y^6)\dot{y}^2) + ka^2y^8 + mgay^4 + ky^2 + kx(x - q). \quad (1.263)$$

Nel caso in cui  $\gamma > 0$ , calcolando la derivata di  $\mathcal{H}$  su ogni moto del sistema vale la nota identità

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_k \dot{q}^k \mathcal{Q}_k,$$

dove  $\mathcal{Q}_k$  sono le componenti lagrangiane delle forze non conservative. Nel caso in esame si trova subito che

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{v},$$

da cui si vede che  $\mathcal{H}$  in generale non può continuare ad essere un integrale primo. Dal punto di vista fisico abbiamo ottenuto che l'energia meccanica viene dissipata dalla potenza della forza viscosa.

**(3)** Nel caso  $\gamma = 0$  le forze attive sono tutte conservative, pertanto le configurazioni di equilibrio  $(x_0, y_0)$  si ottengono imponendo che il gradiente dell'energia potenziale sia nullo quando valutato per  $(x, y) = (x_0, y_0)$ . Queste richieste producono il sistema di equazioni per  $(x_0, y_0)$ :

$$0 = 2kx_0 - kq, \quad (1.264)$$

$$0 = y(8ka^2y^6 + 4mgay^2 + 2k). \quad (1.265)$$

Dato che il secondo fattore a secondo membro di (1.265) è strettamente positivo con i valori dei parametri che abbiamo supposto, l'unica soluzione è evidentemente

$$(x_0, y_0) = (q/2, 0).$$

Se l'energia potenziale:

$$\mathcal{U}(x, y) = ka^2y^8 + mgay^4 + ky^2 + kx(x - q)$$

ha un minimo stretto in  $(q/2, 0)$  la configurazione è di equilibrio stabile. Possiamo studiare la matrice hessiana di  $\mathcal{U}$  in  $(q/2, 0)$  per decidere se la configurazione individui un minimo stretto. Dato che risulta:

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2} \right|_{(q/2, 0)} = 2k > 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x \partial y} \right|_{(q/2, 0)} = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial y \partial x} \right|_{(q/2, 0)} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial y^2} \right|_{(q/2, 0)} = 2k > 0,$$

concludiamo che  $(q/2, 0)$  è un punto di minimo stretto per  $\mathcal{U}$ , in quanto la matrice hessiana ha entrambi gli autovalori strettamente positivi, e pertanto la configurazione di equilibrio  $(q/2, 0)$  è stabile nel passato e nel futuro per il teorema di Lagrange-Dirichlet.

(4) Nella configurazione di equilibrio trovata  $R \equiv (q/2, 0, 0)$ , all'equilibrio, vale

$$\mathbf{0} = m\mathbf{a}_P = \boldsymbol{\phi} - k(R - O) - k(R - Q) - mg \mathbf{e}_z.$$

Pertanto il valore esplicito di  $\boldsymbol{\phi}$  è:

$$\boldsymbol{\phi} = k(R - O) + k(R - Q) + mg \mathbf{e}_z = kq/2 \mathbf{e}_x + k(q/2 - q) \mathbf{e}_x + mg \mathbf{e}_z = mg \mathbf{e}_z.$$

(5). Osservando il sistema (1.261)-(1.262), si vede che la funzione  $y(t) = 0$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$  soddisfa la seconda equazione che, essendo disaccoppiata dalla prima, ammette tale funzione come unica soluzione per condizioni iniziali  $y(0) = 0$ ,  $\frac{dy}{dt}(0) = 0$ . Per concludere dobbiamo risolvere la prima equazione:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2k}{m}x + \frac{kq}{m} - \frac{\gamma}{m} \frac{dx}{dt},$$

con le condizioni iniziali  $x(0) = q$ ,  $\frac{dx}{dt}(0) = 0$  nel caso  $\gamma^2 > 100mk$ . Introduciamo la nuova variabile  $X := x - q/2$ . In questo modo l'equazione si riscrive in forma di equazione lineare omogenea a coefficienti costanti:

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{\gamma}{m} \frac{dX}{dt} + \frac{2k}{m}X = 0.$$

Le due soluzioni del polinomio caratteristico sono:

$$\chi_{\pm} = -\frac{\gamma}{2m} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4m^2} - \frac{2k}{m}}.$$

Nel caso  $\gamma^2 > 100mk$ , abbiamo evidentemente che  $\chi_{\pm}$  sono numeri reali, negativi e distinti. Possiamo scrivere la soluzione generale nella variabile  $x$ , come, se  $C_{\pm} \in \mathbb{R}$ ,

$$x(t) = q/2 + X(t) = q/2 + C_+e^{\chi_+t} + C_-e^{\chi_-t}.$$

Sappiamo che  $x(0) = q$  e quindi  $q/2 + C_+ + C_- = q$ , ma anche  $\frac{dx}{dt}(0) = 0$  e quindi  $\chi_+C_+ + \chi_-C_- = 0$ . Si ricava facilmente che:  $C_- = q\chi_+/2(\chi_+ - \chi_-)$  e  $C_+ = -q\chi_-/2(\chi_+ - \chi_-)$ .

In definitiva, il moto del punto  $P$  con i dati iniziali proposti, cioè la soluzione del problema di Cauchy complessivo, si scrive:

$$y(t) = 0, \quad x(t) = \frac{q}{2} - \frac{q\chi_-e^{\chi_+t}}{2(\chi_+ - \chi_-)} + \frac{q\chi_+e^{\chi_-t}}{2(\chi_+ - \chi_-)} \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Evidentemente la soluzione del problema di Cauchy posto è massimale e completa. Dato che  $\chi_{\pm} < 0$  nelle nostre ipotesi, il limite per  $t \rightarrow +\infty$  di  $x(t)$  vale  $q/2$  in quanto i termini addendi si annullano nel limite. In definitiva:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = (q/2, 0).$$

(5) Dalla forma della lagrangiana (1.258) si ha immediatamente che:

$$p_x := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad (1.266)$$

$$p_y := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m(1 + 16a^2y^6)\dot{y}. \quad (1.267)$$

Da queste, invertendole e tenendo conto di (1.263) segue subito che la funzione di Hamilton è:

$$\mathcal{H}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m(1 + 16a^2y^6)} + ka^2y^8 + mgy^4 + ky^2 + kx(x - q).$$

Le quattro equazioni di Hamilton sono allora:

$$\frac{dx}{dt} = \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} = \right) \frac{p_x}{m}, \quad \frac{dy}{dt} = \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y} = \right) \frac{p_y}{m(1 + 16a^2y^6)}$$

che ripristinano il legame tra le coordinate lagrangiane puntate ed i momenti sul moto del sistema, insieme alle due equazioni che contengono la dinamica:

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{dt} &= \left( -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = \right) -2kx + kq \\ \frac{dp_y}{dt} &= \left( -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = \right) \frac{48a^2y^5}{m(1 + 16a^2y^6)^2} p_y^2 - 8a^2ky^7 - 4mgy^3 - 2ky. \end{aligned}$$

### ESERCIZIO 24

In un sistema di riferimento  $\mathcal{R}$ , si fissi un sistema di assi cartesiani ortonormali destrorsi  $x, y, z$  con origine  $O$  solidali con  $\mathcal{R}$ . Il punto materiale  $P$  di massa  $m > 0$  è vincolato ad appartenere alla curva liscia di equazione  $z = ax^3 - x$ ,  $y = 0$ , con  $a > 0$  parametro fissato. Il riferimento  $\mathcal{R}$  ruota senza traslare rispetto al riferimento inerziale  $\mathcal{R}_0$  con  $\omega_{\mathcal{R}_0|\mathcal{R}} = \Omega \mathbf{e}_z$ , dove  $\Omega > 0$  è una costante fissata. Oltre alla reazione vincolare  $\phi$ , sul punto agisce la forza peso  $-mg \mathbf{e}_z$  e la forza di una molla (di massa nulla e lunghezza nulla a riposo) di costante elastica  $k > 0$  attaccata con un estremo in  $P$  e l'altro sull'asse  $z$  al punto  $Q$  sull'asse  $z$ , che ha sempre la stessa quota di  $P$ . Si risolvano i seguenti quesiti, usando come coordinata lagrangiana per  $P$ , la sua ascissa  $x$  nel riferimento  $\mathcal{R}$ .

- (1). Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange per il moto del punto  $P$ . Quindi si determinino le formule che determinano le componenti della reazione vincolare  $\phi$  in funzione di  $x$  e  $\dot{x}$  nel riferimento  $\mathcal{R}$ .
- (2). Si determini un integrale primo del sistema spiegandone il significato fisico.
- (3). Si studino le configurazioni di equilibrio di  $P$  nel riferimento  $\mathcal{R}$  in funzione dei valori dei parametri  $m > 0, g > 0, a > 0, \Omega > 0, k > 0$  e se ne studi la stabilità.
- (4). Si calcoli esplicitamente la reazione vincolare  $\phi$  in una configurazione di equilibrio stabile, esprimendone le componenti rispetto ad una base solidale con il riferimento inerziale.

**Soluzione.**

(1) La posizione del punto  $P$  è individuata in  $\mathcal{R}$  da:

$$P(t) - O = x(t) \mathbf{e}_x + (ax(t)^3 - x(t)) \mathbf{e}_z .$$

Passiamo a scrivere le quantità cinematiche riferite a  $\mathcal{R}_0$  tenendo conto che, per costruzione, si ha facilmente che  $\frac{d\mathbf{e}_x}{dt}|_{\mathcal{R}_0} = \Omega \mathbf{e}_y$ . La velocità nel riferimento  $\mathcal{R}_0$  sarà data da:

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}_0} = \dot{x} \mathbf{e}_x + x \frac{d\mathbf{e}_x}{dt}|_{\mathcal{R}_0} + \dot{x} (3ax^2 - 1) \mathbf{e}_z = \dot{x} \mathbf{e}_x + x\Omega \mathbf{e}_y + \dot{x} (3ax^2 - 1) \mathbf{e}_z .$$

Quindi

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}_0} = \dot{x} \mathbf{e}_x + x\Omega \mathbf{e}_y + \dot{x} (3ax^2 - 1) \mathbf{e}_z . \quad (1.268)$$

Tenendo conto del fatto che  $\frac{d\mathbf{e}_y}{dt}|_{\mathcal{R}_0} = -\Omega \mathbf{e}_x$  troviamo anche:

$$\mathbf{a}_P|_{\mathcal{R}_0} = (\ddot{x} - \Omega^2 x) \mathbf{e}_x + 2\dot{x}\Omega \mathbf{e}_y + (\ddot{x}(3ax^2 - 1) + 6ax\dot{x}^2) \mathbf{e}_z . \quad (1.269)$$

L'energia cinetica in  $\mathcal{R}_0$  la possiamo ricavare quadrando l'espressione trovata per la velocità, tenendo conto che la base di vettori usata è ortonormale. Si ottiene in tal modo:

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{R}_0} = \frac{m}{2} \dot{x}^2 [1 + (3ax^2 - 1)^2] + \frac{m}{2} x^2 \Omega^2 \quad (1.270)$$

Le forze attive in  $\mathcal{R}_0$  sono tutte conservative: la forza gravitazionale con energia potenziale  $mg(ax^3 - x)$  e la forza della molla con energia potenziale  $\frac{k}{2}x^2$ . In totale abbiamo una lagrangiana in  $\mathcal{R}_0$ :

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0} = \frac{m}{2} \dot{x}^2 [9a^2x^4 - 6ax^2 + 2] + \frac{1}{2} (m\Omega^2 - k) x^2 - mg(ax^3 - x). \quad (1.271)$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange si ricavano dalla solita formula:

$$\frac{d}{dt} \left[ m \frac{dx}{dt} (9a^2x^4 - 6ax^2 + 2) \right] = m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 (18a^2x^3 - 6ax) + (m\Omega^2 - k)x - mg(3ax^2 - 1)$$

cioè:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} (9a^2x^4 - 6ax^2 + 2) = -m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 (18a^2x^3 - 6ax) + (m\Omega^2 - k)x - mg(3ax^2 - 1)$$

e quindi risultano essere, già scritte in forma normale:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 (18a^2x^3 - 6ax) + (m\Omega^2 - k)x - mg(3ax^2 - 1)}{m(9a^2x^4 - 6ax^2 + 2)} \quad (1.272)$$

Si osservi che il denominatore non può mai annullarsi in virtù del teorema che prova che le equazioni di Eulero-Lagrange si devono poter scrivere in forma normale. In ogni caso tale denominatore è, a parte il fattore  $m > 0$ , dato da:  $1 + (3ax^2 - 1)^2$  per cui non può mai

annullarsi.

Ora ricaviamo le componenti della reazione vincolare  $\phi$  agente sul punto, scritte rispetto alla terna  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ . Le equazioni di Newton, nel riferimento  $\mathcal{R}_0$ , ma usando la terna solidale con  $\mathcal{R}$ , dicono che:

$$m\mathbf{a}_P|_{\mathcal{R}_0} = -mg\mathbf{e}_z - kx\mathbf{e}_x + \phi,$$

dunque:

$$\phi = m\mathbf{a}_P|_{\mathcal{R}_0} + mg\mathbf{e}_z + kx\mathbf{e}_x$$

che, tenendo conto di (1.269) diventa:

$$\phi = m(\ddot{x} - \Omega^2 x)\mathbf{e}_x + 2m\dot{x}\Omega\mathbf{e}_y + m(\ddot{x}(3ax^2 - 1) + 6ax\dot{x}^2)\mathbf{e}_z + mg\mathbf{e}_z + kx\mathbf{e}_x$$

e quindi:

$$\phi = m\left(\ddot{x} - \Omega^2 x + \frac{k}{m}x\right)\mathbf{e}_x + 2m\dot{x}\Omega\mathbf{e}_y + m(\ddot{x}(3ax^2 - 1) + 6ax\dot{x}^2 + g)\mathbf{e}_z \quad (1.273)$$

dove a  $\ddot{x}$  si deve sostituire il secondo membro di (1.272) ottenendo la reazione vincolare in funzione della sola  $x$  e  $\dot{x}$ :

$$\begin{aligned} \phi = & \left[ \frac{-m\dot{x}^2(18a^2x^3 - 6ax) + (m\Omega^2 - k)x - mg(3ax^2 - 1)}{(9a^2x^4 - 6ax^2 + 2)} + m(-\Omega^2 x + kx) \right] \mathbf{e}_x \\ & + 2m\dot{x}\Omega\mathbf{e}_y \\ & + \left[ (3ax^2 - 1) \frac{-m\dot{x}^2(18a^2x^3 - 6ax) + (m\Omega^2 - k)x - mg(3ax^2 - 1)}{(9a^2x^4 - 6ax^2 + 2)} + m(6ax\dot{x}^2 + g) \right] \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

(2) Dato che la lagrangiana (1.271) non dipende esplicitamente dal tempo si ha l'integrale primo di Jacobi:

$$E(x, \dot{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0}}{\partial t} \dot{x} - \mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0}$$

cioè

$$E(x, \dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 [9a^2x^4 - 6ax^2 + 2] + \frac{1}{2}(k - m\Omega^2)x^2 + mg(ax^3 - x). \quad (1.274)$$

L'integrale primo detto ha il significato dell'energia meccanica totale nel riferimento  $\mathcal{R}$ . Infatti in tale riferimento agiscono la forza gravitazionale, la forza centrifuga e la forza della molla, alle quali compete un'energia potenziale totale (tenendo conto dei tre addendi detti che corrispondono ai tre addendi nello stesso ordine nel secondo membro dell'espressione che segue):

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{R}} = mg(ax^3 - x) - \frac{1}{2}m\Omega^2x^2 + \frac{1}{2}kx^2;$$

agiscono anche la forza di Coriolis e la reazione vincolare che non compiono lavoro in quanto sempre normali alla velocità in  $\mathcal{R}$ . L'energia cinetica in  $\mathcal{R}$  si ricava tenendo conto che:

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} = \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{x}(3ax^2 - 1)\mathbf{e}_z \quad (1.275)$$

e quindi:

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{R}} = \frac{m}{2} \dot{x}^2 [1 + (3ax^2 - 1)^2] . \quad (1.276)$$

Sommando tale energia cinetica e l'energia potenziale detta otteniamo proprio il secondo membro di (1.274).

**(3)** Nel riferimento  $\mathcal{R}$  possiamo usare la stessa lagrangiana di  $\mathcal{R}_0$  (1.271), interpretando la parte  $\frac{1}{2}m\Omega^2 x^2$  dell'energia cinetica come l'energia potenziale della forza centrifuga. Essendo la lagrangiana della forma  $\mathcal{L}|_{\mathcal{R}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{R}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}$ , possiamo applicare i soliti metodi della teoria della stabilità. In particolare, le configurazioni di equilibrio si ottengono come gli zeri del gradiente dell'energia potenziale. In realtà non tutte le forze agenti in  $\mathcal{R}$  su  $P$  sono conservative, dato che c'è anche una forza non conservativa data dalla forza di Coriolis, tuttavia questa forza non compare nelle equazioni di Eulero-Lagrange dato che ha componente lagrangiana nulla come si verifica immediatamente, essendo tale forza perpendicolare a  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} = \dot{x}\partial(P-O)/\partial x$  e quindi  $\mathcal{Q}_x^{(Coriolis)} = \partial(P-O)/\partial x \cdot \mathbf{f}^{(Coriolis)} = 0$ . Conseguentemente, come detto prima, la condizione di annullamento di della componente lagrangiana della forza totale agente su  $P$  equivale allora alla condizione di annullamento del gradiente dell'energia potenziale di tutte le forze conservative e le configurazioni di equilibrio sono allora le soluzioni di:

$$\frac{d}{dx} \mathcal{U}|_{\mathcal{R}} = mg(3ax^2 - 1) + (k - m\Omega^2)x = 0 .$$

Cioè:

$$3amgx^2 + (k - m\Omega^2)x - mg = 0 .$$

Esplicitamente abbiamo sempre, cioè per tutti i valori di  $m > 0, a > 0, k > 0, g > 0, \Omega > 0$ , le due soluzioni:

$$x_{\pm} = \frac{m\Omega^2 - k \pm \sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + 12am^2g}}{6amg} . \quad (1.277)$$

Per la stabilità studiamo il segno della derivata seconda di  $\mathcal{U}|_{\mathcal{R}}$ . Se tale segno è positivo possiamo concludere che la configurazione di equilibrio studiata è stabile se il segno è nullo non possiamo concludere niente. Se il segno è negativo possiamo concludere che la configurazione è stabile anche se in  $\mathcal{R}$  agisce anche la forza attiva di Coriolis, avendo essa componente lagrangiane nulle. Vale:

$$\frac{d^2 \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}}{dx^2} = 6amgx + (k - m\Omega^2)$$

per cui:

$$\frac{d^2 \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}}{dx^2} |_{x_{\pm}} = m\Omega^2 - k \pm \sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + 12am^2g^2} + (k - m\Omega^2) = \pm \sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + 12am^2g^2} .$$

Concludiamo che  $x_+$  è sicuramente stabile (nel futuro e nel passato). Con i teoremi che conosciamo possiamo similmente dire che  $x_-$  è instabile.

(4) Consideriamo la configurazione di equilibrio stabile  $x_+$ . Se  $P$  è fermo in  $\mathcal{R}$  in tale configurazione di equilibrio, allora  $dx/dt = 0$  e  $d^2x/dt^2 = 0$  per ogni tempo. In questo caso la (1.273) si riduce a:

$$\phi_{x_+} = (k - m\Omega^2) x_+ \mathbf{e}_x + mg \mathbf{e}_z$$

e quindi, se  $\mathbf{e}_{x0}, \mathbf{e}_{y0}, \mathbf{e}_{z0} = \mathbf{e}_z$  è una terna ortonormale in  $O$  solidale con  $\mathcal{R}_0$ :

$$\phi_{x_+} = (k - m\Omega^2) \frac{m\Omega^2 - k + \sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + 12am^2g^2}}{6amg} (\cos(\Omega t) \mathbf{e}_{x0} + \sin(\Omega t) \mathbf{e}_{y0}) + mg \mathbf{e}_z .$$

### ESERCIZIO 25

Nel riferimento inerziale  $\mathcal{R}$  dotato di coordinate cartesiane ortonormali solidali  $x, y, z$  di origine  $O$ , si considerino tre punti materiali  $P_1$  e  $P_2$  di masse uguali  $m > 0$  e  $G$  di massa  $2m$  vincolato a rimanere nel centro di massa del sistema di  $P_1$  e  $P_2$ . I tre punti sono vincolati a muoversi nel piano  $y = 0$  senza attrito. I due punti  $P_1$  e  $P_2$  interagiscono per mezzo di una forza conservativa con energia potenziale (in  $\mathcal{R}$ ):

$$\mathcal{U}(P_1, P_2) = a\|P_1 - P_2\|^3 - b\|P_1 - P_2\|^2$$

dove  $a, b > 0$  sono noti. Sul punto  $G$  agisce la forza di una molla ideale di lunghezza nulla a riposo e massa nulla, di costante elastica  $k > 0$  nota, il cui secondo estremo è fissato ad  $O$ . Sul punto  $P_1$  agisce una forza non conservativa  $\mathbf{f} := \gamma(\mathbf{v}_{P_1}|_{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{e}_x) \mathbf{e}_z$ , con  $\gamma \in \mathbb{R}$  costante assegnata. Infine i tre punti sono sottoposti alla forza di gravità di accelerazione  $-g \mathbf{e}_z$  essendo  $g > 0$  nota. Si risolvano i seguenti quesiti.

(1). Assumendo che tutti i vincoli siano ideali, si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange del sistema usando come coordinate libere: le due coordinate  $x, z$  del punto  $G$ , la distanza  $r > 0$  di  $P_1$  da  $G$ , l'angolo  $\theta$  che  $P_1 - G$  individua rispetto all'asse  $x'$  passante per  $G$  e parallelo (equiverso) a  $x$ .  $\theta$  è supposto essere orientato positivamente rispetto a versore  $\mathbf{e}_y$ .

(2). Nel caso  $\gamma = 0$ , si scriva l'espressione esplicita di:

(a) l'energia meccanica totale,

(b) la componente  $y$  del momento angolare rispetto al centro di massa del sistema dei tre punti,

(c) la componente  $x$  dell'impulso totale del sistema dei tre punti, relativi al riferimento  $\mathcal{R}$ .

Si dimostri che le prime due grandezze sono integrali primi, mentre la terza lo è nell'ipotesi  $k = 0$ .

(3). Nel caso  $\gamma = 0$  e  $k = 0$ , usando le equazioni del moto trovate, si determinino, in funzione delle condizioni iniziali, le eventuali soluzioni:  $x = x(t), z = z(t), \theta = \theta(t), r = r(t)$  delle equazioni del moto in cui valga  $\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_0 \neq 0$  costantemente per tutti i tempi  $t$  (ricordare che  $r > 0$  per ipotesi).

(4). Nel caso  $\gamma = 0$ , si determinino le configurazioni di equilibrio con  $r > 0$  e se ne studi la stabilità.

**Soluzione.**

Tutte le quantità considerate sono relative al sistema di riferimento inerziale  $\mathcal{R}$  e pertanto omettiamo di scrivere esplicitamente il pedice  $\mathcal{R}$ .

(1) Per costruzione, dato che  $P_1$  e  $P_2$  hanno la stessa massa, il centro di massa di essi si trova esattamente a metà del segmento che unisce i due punti, inoltre  $P_2 - G = -(P_1 - G)$ . Vale allora:

$$G - O = x \mathbf{e}_x + z \mathbf{e}_z, \quad (1.278)$$

$$P_1 - O = (x + r \cos \theta) \mathbf{e}_x + (z + r \sin \theta) \mathbf{e}_z \quad (1.279)$$

$$P_2 - O = (x - r \cos \theta) \mathbf{e}_x + (z - r \sin \theta) \mathbf{e}_z. \quad (1.280)$$

Da queste relazioni si trovano, con ovvie notazioni:

$$\mathbf{v}_G = \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{z} \mathbf{e}_z, \quad (1.281)$$

$$\mathbf{v}_1 = (\dot{x} + \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta) \mathbf{e}_x + (\dot{z} + \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta) \mathbf{e}_z \quad (1.282)$$

$$\mathbf{v}_2 = (\dot{x} - \dot{r} \cos \theta + r \dot{\theta} \sin \theta) \mathbf{e}_x + (\dot{z} - \dot{r} \sin \theta - r \dot{\theta} \cos \theta) \mathbf{e}_z. \quad (1.283)$$

Questa espressione fornisce, con qualche calcolo, l'espressione dell'energia cinetica definita come  $\mathcal{T} = m\mathbf{v}_G^2 + (1/2)m(\mathbf{v}_1^2 + \mathbf{v}_2^2)$  (lo stesso risultato si ottiene direttamente applicando il teorema di König):

$$\mathcal{T} = 2m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2). \quad (1.284)$$

L'energia potenziale si ottiene sommando  $\mathcal{U} = 8ar^3 - 4br^2$  a quella dovuta alla forza di gravità:  $-2mgz_G - mgz_1 - mgz_2 = -4mgz$ . Nel caso  $\gamma = 0$  la lagrangiana del sistema è pertanto:

$$\mathcal{L} = 2m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k}{2}(x^2 + z^2) - 8ar^3 + 4br^2 - 4mgz. \quad (1.285)$$

Nel caso  $\gamma \neq 0$  le equazioni di E-L terranno anche conto delle componenti lagrangiane di  $\mathbf{f}$ :

$$\mathcal{Q}_x = \gamma(\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{e}_x) \mathbf{e}_z \cdot \frac{\partial P_1 - O}{\partial x} = \gamma(\mathbf{v}_1|_{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{e}_x) \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x = 0,$$

$$\mathcal{Q}_z = \gamma(\mathbf{v}_1|_{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{e}_x) \mathbf{e}_z \cdot \frac{\partial P_1 - O}{\partial z} = \gamma(\dot{x} + \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta),$$

$$\mathcal{Q}_r = \gamma(\mathbf{v}_1|_{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{e}_x) \mathbf{e}_z \cdot \frac{\partial P_1 - O}{\partial r} = \gamma \sin \theta (\dot{x} + \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta)$$

$$\mathcal{Q}_\theta = \gamma(\mathbf{v}_1|_{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{e}_x) \mathbf{e}_z \cdot \frac{\partial P_1 - O}{\partial \theta} = \gamma r \cos \theta (\dot{x} + \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta),$$

Si ricavano quindi le equazioni di Eulero-Lagrange nella forma

$$\frac{dq^k}{dt} = \dot{q}^k, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} = \mathcal{Q}_k$$

dove  $\mathcal{L}$ , come scritto sopra, tiene conto delle sole forze conservative. Le quazioni dette sono date esplicitamente da:

$$\frac{d}{dt} \frac{dx}{dt} = -\frac{kx}{4m}, \quad (1.286)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{dz}{dt} = -\frac{kz}{4m} - g + \frac{\gamma}{4m} \left( \frac{dx}{dt} + \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \frac{d\theta}{dt} \sin \theta \right), \quad (1.287)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{dt} \right) = r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{12a}{m} r^2 + \frac{4b}{m} r + \frac{\gamma \sin \theta}{2m} \left( \frac{dx}{dt} + \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \frac{d\theta}{dt} \sin \theta \right) \quad (1.288)$$

$$\frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{\gamma r \cos \theta}{2m} \left( \frac{dx}{dt} + \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \frac{d\theta}{dt} \sin \theta \right). \quad (1.289)$$

(2) Se  $\gamma = 0$ , il sistema fisico è sottoposto a sole forze conservative ed ha vincoli ideali indipendenti dal tempo. Possiamo applicare il teorema di Jacobi che afferma che (a) l'energia meccanica totale si conserva nel tempo sulle soluzioni delle equazioni del moto e (b) coincide con la funzione di Hamilton. Pertanto l'energia meccanica totale ha la forma:

$$\mathcal{H}(x, z, \theta, r, \dot{x}, \dot{z}, \dot{\theta}, \dot{r}) = 2m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + m(\dot{r}^2 + r\dot{\theta}^2) + \frac{k}{2}(x^2 + z^2) + 8ar^3 - 4br^2 + 4mgz. \quad (1.290)$$

Se (oltre a  $\gamma = 0$ , che assicura che il sistema sia descritto da una lagrangiana senza dover introdurre forze generalizzate)  $k = 0$ , la lagrangiana non dipende esplicitamente da  $x$ , applicando la versione più elementare del teorema di Nöther, ovvero direttamente da (1.286), concludiamo che si deve conservare il momento coniugato:

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = 4m\dot{x} = 4m \frac{dx}{dt}.$$

Dato che  $x$  è una coordinata traslazionale, il momento coniugato  $p_x$  corrisponde alla componente  $x$  dell'impulso totale del sistema. (Risulta comunque direttamente evidente dall'espressione trovata che  $p_x$  altro non è che la componente  $x$  dell'impulso totale del sistema essendo il prodotto della massa totale del sistema moltiplicata per la componente  $x$  della velocità del centro di massa (che coincide con  $G$ ) e valendo il teorema del centro di massa).

In virtù della non dipendenza esplicita di  $\mathcal{L}$  da  $\theta$  (se  $\gamma = 0$ ), si conserva il momento coniugato:

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = 2mr^2\dot{\theta} = 2mr^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

Sapendo che:

$$L_G^y := (m(P_1 - G) \wedge \mathbf{v}_1 + m(P_2 - G)\mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{e}_y + 2m(G - G) \wedge \mathbf{v}_G \cdot \mathbf{e}_y,$$

facendo uso di (1.279)-(1.283) notando che  $G - O = x \mathbf{e}_x + z \mathbf{e}_z$ , si trova con qualche calcolo che:

$$L_G^y = 2mr^2 \frac{d\theta}{dt} = p_\theta.$$

(3) Quando  $\gamma = 0$  e  $k = 0$  le prime due equazioni del moto hanno soluzione immediata:

$$x(t) = x_0 + \dot{x}_0 t, \quad (1.291)$$

$$z(t) = z_0 + \dot{z}_0 t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (1.292)$$

Passiamo alle altre due equazioni. Se, valendo  $\gamma = 0$ ,  $\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_0$  è costante non nulla, (1.289) implica immediatamente che  $r$  deve rimanere costante sul moto. Sostituendo questo risultato nella (1.288) si arriva all'equazione algebrica:

$$r \left( \dot{\theta}_0^2 + \frac{4b}{m} \right) - \frac{12a}{m} r^2 = 0.$$

Questa equazione ammette come unica soluzione ammissibile (l'altra è  $r = 0$  che non si deve accettare perché abbiamo richiesto  $r > 0$  per evitare la singolarità dell'origine nelle coordinate polari):

$$r_0 = \frac{m}{12a} \left( \dot{\theta}_0^2 + \frac{4b}{m} \right).$$

Per questa scelta di  $r_0$  in funzione di ogni fissato valore  $\theta_0$  le funzioni  $r(t) = r_0$  e  $\theta(t) = \theta_0$  soddisfano le equazioni del moto come si verifica procedendo indietro nei passaggi di sopra. Concludiamo che per ogni valore  $\dot{\theta}_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  c'è una classe di soluzioni in cui  $\theta(t)$  ammette derivata costante pari a  $\dot{\theta}_0$ , parametrizzata da  $x_0, \dot{x}_0, z_0, \dot{z}_0, \theta_0 \in \mathbb{R}$ :

$$x(t) = x_0 + \dot{x}_0 t, \quad (1.293)$$

$$z(t) = z_0 + \dot{z}_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \quad (1.294)$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0 t, \quad (1.295)$$

$$r(t) = \frac{m}{12a} \left( \dot{\theta}_0^2 + \frac{4b}{m} \right). \quad (1.296)$$

(4) Nella situazione considerata il sistema fisico è soggetto a sole forze conservative (a parte le forze reattive). Pertanto le configurazioni di equilibrio si ottengono annullando il gradiente dell'energia potenziale totale:

$$U(x, z, r, \theta) := \frac{k}{2}(x^2 + z^2) + 8ar^3 - 4br^2 + 4mgz.$$

Abbiamo in particolare che:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = kx, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = kz + 4mg, \quad \frac{\partial U}{\partial r} = 32ar^2 - 8br, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} \equiv 0.$$

Pertanto la generica configurazioni di equilibrio  $(x_0, z_0, r_0, \theta_0)$  (scartando il caso  $r_0 = 0$ ) è del tipo:

$$x_0 = 0, \quad z_0 = -\frac{4mg}{k}, \quad r_0 = \frac{b}{4a}, \quad \theta_0 \in \mathbb{R} \quad \text{arbitrariamente fissato.}$$

La stabilità non può essere studiata attraverso il segno degli autovalori della matrice hessiana (che è comunque già in forma diagonale) dato che un autovalore, quello corrispondente alla coordinata  $\theta$ , è nullo. Tuttavia dall'equazione del moto di  $\theta$ , che nel caso in esame, essendo  $r$  costante, si riduce a  $d^2\theta/dt^2 = 0$ , ricaviamo che le configurazioni di equilibrio non sono stabili, nel passato e nel futuro. Infatti, in base a tale equazione, le soluzioni possibili sono tutte e sole della forma  $\theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0 t$ . Ne consegue che partendo da una configurazione iniziale  $x_0, z_0, r_0, \theta_0$ , pur scegliendo condizioni iniziali sulle velocità  $(\dot{x}_0, \dot{z}_0, \dot{r}_0, \dot{\theta}_0) \neq (0, 0, 0, 0)$  piccole a piacere, l'orbita della soluzione, nello spazio degli atti di moto esce da qualunque fissato intorno dell'atto di moto iniziale  $(x_0, z_0, r_0, \theta_0, \dot{x}_0, \dot{z}_0, \dot{r}_0, \dot{\theta}_0)$  a causa dell'evoluzione:  $\theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0 t$ .

## ESERCIZIO 26

In riferimento al sistema di assi cartesiani ortonormali  $x, y, z$  destrorso di origine  $O$  e solidale con il sistema di riferimento inerziale  $\mathcal{R}$ , due punti materiali  $P_1$  e  $P_2$  della stessa massa assegnata  $m > 0$  si muovono, rispettivamente:  $P_1$  sulla circonferenza  $C_1$  di raggio noto  $R > 0$  e centro  $O$ , giacente nel piano  $z = 0$ , e  $P_2$  sulla circonferenza  $C_2$  dello stesso raggio  $R > 0$ , giacente nel piano  $z = R$  e centrata nel punto  $O_2 = (0, 0, R)$ . Le circonferenze sono lisce. Sui due punti agiscono le seguenti forze attive.

(i) Le forze di tre molle ideali (peso nullo e lunghezza nulla a riposo) : *due* di costante elastica  $k \geq 0$  assegnata con un estremo in  $P_1$  ed i secondi estremi, rispettivamente nei punti  $(2R, 0, 0)$  e  $(0, 2R, 0)$ ; e la *terza* molla, di costante elastica  $K > 0$  nota, unisce  $P_1$  a  $P_2$ .

(ii) Una forza agente su  $P_1$  e data da  $\mathbf{f} = H \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{v}_{P_1}|_{\mathcal{R}}$  con  $H \geq 0$  costante nota.

(iii) La forza di gravità:  $-mg \mathbf{e}_z$ , con  $g > 0$  costante assegnata agente sui due punti.

Si risolvano i seguenti quesiti usando le seguenti due coordinate libere:

$\theta$ , angolo tra  $P_1 - O$  e  $\mathbf{e}_x$ , orientato positivamente rispetto all'asse  $z$ ,

$\phi$  angolo tra la proiezione di  $P_2 - O_2$  sul piano  $z = 0$  e  $P_1 - O$ , orientato positivamente rispetto all'asse  $z$ .

(1) Si ricavino le equazioni di Eulero-Lagrange per i punti  $P_1$  e  $P_2$  e si scrivano esplicitamente in forma normale.

(2) Nel caso  $k = 0$ , si provi l'energia meccanica totale  $\mathcal{E}|_{\mathcal{R}}$  del sistema in  $\mathcal{R}$  e la componente  $z$  del momento angolare totale del sistema valutata in  $\mathcal{R}$  rispetto al polo  $O$ ,  $\Gamma_{Oz}|_{\mathcal{R}}$ , sono integrali primi. Scrivere esplicitamente l'espressione di questi due integrali primi in funzione delle coordinate lagrangiane e delle loro derivate temporali prime. Assumendo poi  $k > 0$ , dimostrare che su un moto generico del sistema  $\mathcal{E}|_{\mathcal{R}}$  è ancora conservata, mentre  $\Gamma_{Oz}|_{\mathcal{R}}$  cessa di essere conservata dato che la sua derivata temporale è non nulla in generale.

(3) Si determinino le configurazioni di equilibrio del sistema, se ne studi la stabilità in funzione di  $R, k, K, m, g > 0$  e si calcoli la reazione vincolare su  $P_2$  se il sistema è in quiete in una configurazione di equilibrio stabile.

(4) Assumendo  $k = 0$  determinare tutte le condizioni iniziali per cui la soluzione del problema del moto è del tipo:  $\theta(t) = At + B$  e  $\phi = C$  per qualche scelta delle costanti  $A, B, C$ .

(5) (Per *Meccanica Analitica*) Si passi in formulazione di Hamilton, scrivendo la trasformazione di Legendre, l'hamiltoniana del sistema e le equazioni di Hamilton esplicitamente.

(5)' (Per *Fondamenti di Fisica Matematica*) Per  $k = 0$ , si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne studi la stabilità.

**Soluzione.**

Omettiamo nel seguito l'indice  $|\mathcal{R}$ , essendo tutte le grandezze cinematiche associate unicamente al riferimento  $\mathcal{R}$ .

(1) Per costruzione, in funzione delle coordinate libere  $x, y$ , abbiamo:

$$P_1 - O = R \cos \theta \mathbf{e}_x + R \sin \theta \mathbf{e}_y, \quad P_2 - O = R \cos(\theta + \phi) \mathbf{e}_x + R \sin(\theta + \phi) \mathbf{e}_y + R \mathbf{e}_z, \quad (1.297)$$

e pertanto:

$$\mathbf{v}_{P_1} = R\dot{\theta}(-\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y), \quad \mathbf{v}_{P_2} = R(\dot{\theta} + \dot{\phi})(-\sin(\theta + \phi) \mathbf{e}_x + \cos(\theta + \phi) \mathbf{e}_y). \quad (1.298)$$

Per quanto riguarda le forze agenti sui due punti, possiamo dire che sono tutte conservative eccetto la forza  $\mathbf{f}$  agente su  $P_1$ , che tuttavia non ha componenti lagrangiane, dato che è sempre normale al vincolo  $C_1$  per costruzione e dunque ha prodotto scalare nullo con  $\partial P_1 / \partial \theta$ . L'energia potenziale gravitazionale può non essere considerata nel calcolo della lagrangiana, dato che entrambi i punti si possono muovere solo rimanendo a quota costante. Tuttavia entrambe le forze si devono prendere in considerazione nel calcolo delle reazioni vincolari. In definitiva il sistema è descritto da una lagrangiana  $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$ , dove  $\mathcal{U}$  è l'energia potenziale delle sole forze delle tre molle. Scriviamo la lagrangiana esplicitamente. L'energia cinetica del sistema dei due punti nel riferimento  $\mathcal{R}$  si calcola da (1.298) come:

$$\mathcal{T} = \frac{mR^2}{2} \left[ \dot{\theta}^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 (\sin^2(\theta + \phi) + \cos^2(\theta + \phi)) \right],$$

e quindi:

$$\mathcal{T} = \frac{mR^2}{2} \left[ 2\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi} \right]. \quad (1.299)$$

L'energia potenziale si calcola usando le (1.297) come:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \frac{k}{2} \|P_1 - (2R, 0, 0)\|^2 + \frac{k}{2} \|P_1 - (0, 2R, 0)\|^2 + \frac{K}{2} \|P_1 - P_2\|^2 \\ &= \frac{k}{2} [(2R - R \cos \theta)^2 + R^2 \sin^2 \theta] + \frac{k}{2} [R^2 \cos^2 \theta + (R \sin \theta - 2R)^2] \\ &\quad + \frac{KR^2}{2} [(\cos \theta - \cos(\theta + \phi))^2 + (\sin \theta - \sin(\theta + \phi))^2 + 1]. \end{aligned}$$

Sviluppando i calcoli e trascurando le costanti additive si trova infine:

$$\mathcal{U} = -2kR^2(\sin \theta + \cos \theta) - KR^2 \cos \phi \quad (1.300)$$

Di conseguenza la lagrangiana del sistema è:

$$\mathcal{L} = \frac{mR^2}{2} \left[ 2\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi} \right] + 2kR^2(\sin \theta + \cos \theta) + KR^2 \cos \phi, \quad (1.301)$$

e le equazioni di Eulero-Lagrange che ne derivano sono:

$$\left[ 2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d^2\phi}{dt^2} \right] = \frac{2k}{m} (\cos\theta - \sin\theta), \quad (1.302)$$

$$\left[ \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d^2\phi}{dt^2} \right] = -\frac{K}{m} \sin\phi. \quad (1.303)$$

Sottraendo la seconda dalla prima e poi due volte la seconda dalla prima, otteniamo il sistema equivalente al precedente ma scritto in forma normale:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{2k}{m} (\cos\theta - \sin\theta) + \frac{K}{m} \sin\phi, \quad (1.304)$$

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{2k}{m} (\cos\theta - \sin\theta) - \frac{2K}{m} \sin\phi. \quad (1.305)$$

**(2)** La Lagrangiana (1.301) non dipende esplicitamente dal tempo, i vincoli sono indipendenti dal tempo in  $\mathcal{R}$  e le coordinate libere sono solidali con il riferimento detto. Nel caso  $H = 0$  tutte le forze attive sono conservative. Pertanto possiamo applicare il teorema di Jacobi provando che l'integrale primo di Jacobi  $\mathcal{H}$  coincide con l'energia meccanica totale nel riferimento  $\mathcal{R}$ :

$$\mathcal{E}|_{\mathcal{R}} = \mathcal{H} = \frac{mR^2}{2} [2\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi}] - 2kR^2(\sin\theta + \cos\theta) - KR^2 \cos\phi. \quad (1.306)$$

Nel caso in cui  $H \neq 0$  il teorema di Jacobi in questo caso si generalizza a, dove la derivata è calcolata sui moti del sistema:  $\frac{d\mathcal{E}|_{\mathcal{R}}}{dt} = Q_\theta\dot{\theta} + Q_\phi\dot{\phi}$ . Tuttavia il risultato finale non cambia perché le componenti lagrangiane della forza non conservativa che agisce su  $P_1$  sono nulle come sappiamo. Per quanto riguarda  $\Gamma_{Oz}|_{\mathcal{R}}$ , osserviamo che, per costruzione  $\theta$  è una coordinate rotazionale attorno all'asse  $z$ , inoltre, se  $k = 0$ , la lagrangiana (1.301) non dipende esplicitamente da  $\theta$ . Per noti teoremi, concludiamo che in tal caso  $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}$  coincide con  $\Gamma_{Oz}|_{\mathcal{R}}$  ed è un integrale primo. Nel caso in cui  $k > 0$ , l'equazione di E-L (1.302) che corrisponde a

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} \right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta},$$

mostra che, su un moto generico del sistema:

$$\frac{d}{dt} \Gamma_{Oz}|_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = 2kR^2(\cos\theta - \sin\theta)$$

il cui secondo membro in generale è non nullo. Pertanto, se  $k > 0$ ,  $\Gamma_{Oz}|_{\mathcal{R}}$  cessa di essere un integrale primo.

**(3)** Ignorando il valore di  $H$  che non gioca alcun ruolo nella dinamica del sistema dato che corrisponde ad una forza attiva che ammette componenti lagrangiane sempre nulle, le configurazioni di equilibrio  $(\theta_0, \phi_0)$  si ottengono annullando le componenti lagrangiane delle forze attive che agiscono sul sistema, imponendo contemporaneamente che  $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$ . Nel caso in

esame, data la forma della lagrangiana, le configurazioni di equilibrio si ottengono come zeri del gradiente dell'energia potenziale:

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} \Big|_{\theta_0, \phi_0} = -2kR^2(\cos \theta_0 - \sin \theta_0) = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \phi} \Big|_{\theta_0, \phi_0} = 2KR^2 \sin \phi_0 = 0.$$

Dunque, essendo  $k, K, R > 0$  abbiamo le seguenti configurazioni di equilibrio  $(\theta_0, \phi_0)$ :  $(\pi/4, 0)$ ,  $(5\pi/4, 0)$ ,  $(\pi/4, \pi)$ ,  $(5\pi/4, \pi)$ . La stabilità può essere studiata studiando gli autovalori della matrice hessiana  $H$  di  $\mathcal{U}$  valutata nelle configurazioni di equilibrio. Per costruzione:

$$H(\theta_0, \phi_0) = 2R^2 \text{diag}(k(\sin \theta_0 + \cos \theta_0), \frac{K}{2} \cos \phi_0).$$

Abbiamo di conseguenza che  $H(\pi/4, 0) = 2R^2 \text{diag}(k\sqrt{2}, K/2)$  e quindi la configurazione  $(\pi/4, 0)$  è di equilibrio stabile (nel passato e nel futuro, se  $R, k, K, m, g > 0$ ). Per le rimanenti tre configurazioni di equilibrio si vede immediatamente che la matrice hessiana ha almeno un autovalore negativo. Si conclude che se  $R, k, K, m, g > 0$  tali configurazioni sono instabili.

Nella configurazione di equilibrio  $(\theta_0, \phi_0) = (\pi/4, 0)$ , il punto  $P_2$  si trova in quiete sottoposto alle forze di gravità  $-mg \mathbf{e}_z$ , alla forza della molla di costante elastica  $K$ :  $-K(P_2 - P_1) = -KR \mathbf{e}_z$  e la reazione vincolare incognita  $\phi$ . La somma di tali forze deve essere nulla dato che il punto è in quiete in una configurazione di equilibrio, pertanto:

$$\phi = (mg + KR) \mathbf{e}_z.$$

(4) Se  $\theta(t) = At + B$ ,  $\phi(t) = C$  risolve le equazioni del moto, sostituendo tali funzioni nelle (1.304), (1.305) otteniamo che deve essere (ricordando che  $k = 0$ ):

$$0 = \frac{K}{m} \sin C, \tag{1.307}$$

$$0 = -\frac{2K}{m} \sin C. \tag{1.308}$$

da cui  $\sin C = 0$  e quindi  $C = 0$ , oppure  $C = \pi$  costantemente. Nel primo caso  $\phi(0) = 0$  e nel secondo  $\phi(0) = \pi$ , in entrambi i casi  $\frac{d\phi}{dt}(0) = 0$ . Nello stesso modo, per costruzione  $\theta(0) = B$  e  $\frac{d\theta}{dt}(0) = A$ . Se viceversa fissiamo condizioni iniziali:  $\phi(0) = 0$ ,  $\frac{d\phi}{dt}(0) = 0$ ,  $\theta(0) = B$  e  $\frac{d\theta}{dt}(0) = A$  le funzioni  $\theta(t) = At + B$ ,  $\phi(t) = 0$  soddisfano il problema di Cauchy dato da tali condizioni iniziali e le equazioni (1.304), (1.305) che costituiscono un sistema in forma normale con secondo membro di classe  $C^\infty$ , pertanto sono le uniche soluzioni del problema dato. Similmente, se fissiamo condizioni iniziali:  $\phi(0) = \pi$ ,  $\frac{d\phi}{dt}(0) = 0$ ,  $\theta(0) = B$  e  $\frac{d\theta}{dt}(0) = A$  le funzioni  $\theta(t) = At + B$ ,  $\phi(t) = \pi$  soddisfano il problema di Cauchy dato da tali condizioni iniziali e le equazioni (1.304), (1.305) e sono le uniche soluzioni del problema dato. Concludiamo che le scelte possibili di condizioni iniziali che producono soluzioni del tipo voluto sono solo  $\phi(0) = 0$ ,  $\frac{d\phi}{dt}(0) = 0$ ,  $\theta(0) = B$  e  $\frac{d\theta}{dt}(0) = A$  e  $\phi(0) = \pi$ ,  $\frac{d\phi}{dt}(0) = 0$ ,  $\theta(0) = B$  e  $\frac{d\theta}{dt}(0) = A$ . Nel primo caso  $\phi(t) = 0$  costantemente e nel secondo  $\phi(t) = \pi$  costantemente.

(5) Dalla forma della lagrangiana (1.301) si ha subito che la trasformazione di Legendre è:

$$p_\theta := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mR^2(2\dot{\theta} + \dot{\phi}), \quad p_\phi := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mR^2(\dot{\theta} + \dot{\phi})$$

con inversa:

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta - p_\phi}{mR^2}, \quad \dot{\phi} = \frac{2p_\phi - p_\theta}{mR^2}.$$

Sostituendo nell'espressione della funzione di Hamilton (1.306), troviamo l'espressione della funzione di Hamilton in variabili hamiltoniane:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2mR^2} [p_\theta^2 + 2p_\phi^2 - 2p_\theta p_\phi] - 2kR^2(\sin \theta + \cos \theta) - KR^2 \cos \phi.$$

Le equazioni di Hamilton risultano allora essere:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} \left( = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} \right) &= \frac{1}{mR^2} (p_\theta - p_\phi), & \frac{d\phi}{dt} \left( = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\phi} \right) &= \frac{1}{mR^2} (2p_\phi - p_\theta) \\ \frac{dp_\theta}{dt} \left( = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} \right) &= 2kR^2 (\cos \theta - \sin \theta), & \frac{dp_\phi}{dt} \left( = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} \right) &= -KR^2 \sin \phi. \end{aligned}$$

(5)' Le configurazioni di equilibrio si ottengono come nel punto (3), come zeri del gradiente dell'energia potenziale, tenendo però conto del fatto che  $k = 0$  e  $K, R > 0$ :

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} |_{\theta_0, \phi_0} = 0 = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \phi} |_{\theta_0, \phi_0} = 2KR^2 \sin \phi_0 = 0.$$

Le configurazioni di equilibrio risultano allora essere:  $(\theta_0, \phi_0) = (\theta_0, 0)$  per ogni  $\theta_0 \in \mathbb{R}$  e  $(\theta_0, \phi_0) = (\theta_0, \pi)$  per ogni  $\theta_0 \in \mathbb{R}$ . La matrice Hessiana ha sempre un autovalore nullo e, nella seconda classe di configurazioni, un autovalore negativo. Pertanto le configurazioni  $(\theta_0, \pi)$  sono instabili nel futuro e nel passato. Per quanto riguarda le configurazioni  $(\theta_0, 0)$  non possiamo concludere nulla dallo studio della matrice hessiana data la presenza dell'autovalore nullo. Tuttavia possiamo dire qualcosa direttamente applicando la definizione di configurazione di equilibrio stabile. Infatti, dal punto (4) sappiamo che fissando condizioni iniziali date dalla configurazione di equilibrio  $(\theta_0, 0)$  unitamente a  $\frac{d\theta}{dt}(0) = \epsilon$ ,  $\frac{d\phi}{dt}(0) = 0$ , si ottiene la soluzione  $\theta(t) = \epsilon t + \theta_0$ ,  $\phi(t) = 0$ . Comunque prendiamo piccolo un intorno, nello spazio degli atti di moto, dell'atto di moto  $(\theta_0, 0, 0, 0)$ , possiamo fissare  $\epsilon > 0$  abbastanza piccolo in modo tale che  $(\theta_0, 0, \epsilon, 0)$  appartiene a tale intorno, ma la soluzione con dati iniziali  $(\theta_0, 0, \epsilon, 0)$  esce dall'intorno se  $|t|$  è abbastanza grande, in virtù del fatto che la soluzione, come detto, è  $\theta(t) = \epsilon t + \theta_0$ ,  $\phi(t) = 0$ . Concludiamo che ogni configurazione di equilibrio  $(\theta_0, 0)$  è instabile, nel passato e nel futuro.

### ESERCIZIO 27

Si consideri la curva  $\Gamma$  di equazione  $y = 0, z = -ax^2$ , per  $a > 0$  fissato, riferita ad un sistema di coordinate cartesiane ortonormali  $x, y, z$  di origine  $O$  solidali con il sistema di riferimento non inerziale  $\mathcal{R}$ . Tale riferimento ruota senza traslare attorno all'asse  $\mathbf{e}_{0z} \equiv \mathbf{e}_z$  solidale con il sistema di riferimento inerziale  $\mathcal{R}_0$  e vale  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}|\mathcal{R}_0} = \Omega \mathbf{e}_z$ , con  $\Omega > 0$  costante assegnata. Il punto materiale  $P$  di massa  $m > 0$  assegnata è vincolato a rimanere su  $\Gamma$  pensata come vincolo liscio. Su  $P$  agiscono le seguenti forze vere attive:

(i) la forza di una molla ideale (massa nulla e lunghezza nulla a riposo) di costante elastica  $k > 0$  nota, attaccata a  $P$  ed al punto  $O$ ;

(ii) la forza di gravità  $-mg \mathbf{e}_z$  con  $g > 0$  costante nota;

(iii) la forza viscosa  $\mathbf{f} = -H \mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}_0}$ , dove  $H \geq 0$  è una costante nota.

Usando l'ascissa  $x$  del punto  $P$  come coordinata libera si risolvano i quesiti seguenti.

**(1)** Scrivere, esplicitamente in forma normale, le equazioni di Eulero Lagrange per il punto  $P$  e l'equazione che determina la componente lungo  $\mathbf{e}_z$  della reazione vincolare agente su  $P$  in funzione di  $x$  e  $\frac{dx}{dt}$  sui moti del sistema.

**(2)** Scrivere esplicitamente, in funzione di  $x$  e  $\dot{x}$  l'energia meccanica totale  $\mathcal{E}|_{\mathcal{R}}$  di  $P$  nel riferimento  $\mathcal{R}$ , provando che tale energia è un integrale primo se  $H = 0$ . Nel caso  $H > 0$ , calcolare esplicitamente la derivata temporale di  $\mathcal{E}|_{\mathcal{R}}$  valutata su un moto del sistema in funzione di  $x$  e  $\dot{x}$ .

**(3)** Calcolare le configurazioni di equilibrio di  $P$  nel riferimento non inerziale  $\mathcal{R}$  in funzione dei valori dei parametri  $a, m, k, g, \Omega > 0$  e studiare la stabilità di tali configurazioni se  $H > 0$ .

**(4)** (Per *Meccanica Analitica*) Per  $H = 0$ , passare in formulazione di Hamilton, scrivendo esplicitamente la trasformata di Legendre, la funzione di Hamilton in funzione delle variabili hamiltoniane e le equazioni di hamilton.

**(4)'** (Per *Fondamenti di Fisica Matematica*) Per  $H = 0$ , calcolare la reazione vincolare agente su  $P$ , rispetto alla base  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ , quando si trova in quiete in  $\mathcal{R}$  in una configurazione di equilibrio diversa da  $O$ .

**Soluzione.**

(1) Il vettore posizione del punto  $P$  è

$$P - O = x \mathbf{e}_x - ax^2 \mathbf{e}_z, \quad (1.309)$$

per cui, la velocità in  $\mathcal{R}$  vale:

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} = \dot{x}(\mathbf{e}_x - 2ax \mathbf{e}_z). \quad (1.310)$$

Conseguentemente, essendo  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}_0} = \mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}}|_{\mathcal{R}_0} \wedge (P - O)$ , abbiamo anche che:

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}_0} = \dot{x}(\mathbf{e}_x - 2ax \mathbf{e}_z) + \Omega x \mathbf{e}_y. \quad (1.311)$$

Le energie cinetiche nei due riferimenti saranno allora date da:

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{R}} = \frac{m\dot{x}^2}{2}(1 + 4a^2x^2), \quad \mathcal{T}|_{\mathcal{R}_0} = \frac{m\dot{x}^2}{2}(1 + 4a^2x^2) + \frac{m\Omega^2}{2}x^2. \quad (1.312)$$

Nel riferimento inerziale  $\mathcal{R}_0$  tutte le forze attive esclusa  $\mathbf{f}$  sono conservative. L'energia potenziale totale è quella dovuta alla molla più quella gravitazionale:

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{R}_0}(x) = \frac{k}{2}\|P - O\|^2 + mgz_P = \frac{k}{2}(x^2 + a^2x^4) - mgax^2. \quad (1.313)$$

Avremo allora una lagrangiana in  $\mathcal{R}_0$  data da:

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0} = \frac{m\dot{x}^2}{2}(1 + 4a^2x^2) + \frac{m\Omega^2}{2}x^2 - \frac{k}{2}(x^2 + a^2x^4) + mgax^2. \quad (1.314)$$

Per scrivere le equazioni di E-L di  $P$  nel riferimento  $\mathcal{R}_0$  abbiamo ancora bisogno della componente lagrangiana della forza  $\mathbf{f}$ :

$$\mathcal{Q}_x = \mathbf{f} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} = -H \mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}_0} \cdot (\mathbf{e}_x - 2ax \mathbf{e}_z) = -H [\dot{x}(\mathbf{e}_x - 2ax \mathbf{e}_z) + \Omega x \mathbf{e}_y] \cdot (\mathbf{e}_x - 2ax \mathbf{e}_z),$$

cioè, eseguendo il calcolo:

$$\mathcal{Q}_x = -H\dot{x}(1 + 4a^2x^2). \quad (1.315)$$

Le equazioni di E-L nel riferimento  $\mathcal{R}_0$ , che sono della forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0}}{\partial x} = \mathcal{Q}_x, \quad \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

risultano essere:

$$m \frac{d}{dt} \left( (1 + 4a^2x^2) \frac{dx}{dt} \right) - m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 4a^2x - (m\Omega^2 - k + 2mga)x + 4a^2x^3 = -H \frac{dx}{dt} (1 + 4a^2x^2),$$

e cioè

$$m(1 + 4a^2x^2) \frac{d^2x}{dt^2} + 4a^2mx \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - (m\Omega^2 - k + 2mga)x + 4a^2x^3 = -H \frac{dx}{dt} (1 + 4a^2x^2),$$

che in forma normale si scrivono:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-4a^2mx \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - H\frac{dx}{dt}(1 + 4a^2x^2) + (m\Omega^2 - k + 2mga)x - 2ka^2x^3}{m(1 + 4a^2x^2)}. \quad (1.316)$$

Per quanto riguarda la componente lungo  $\mathbf{e}_z$  della reazione vincolare, osserviamo che essa si ricava proiettando lungo  $\mathbf{e}_z$  l'equazione di Newton:

$$\phi = m\mathbf{a}_P|_{\mathcal{R}_0} + k(P - O) + H\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}_0} + mg\mathbf{e}_z.$$

Si osservi che valendo  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}}|_{\mathcal{R}_0} = \Omega \mathbf{e}_z$  e

$$\mathbf{a}_P|_{\mathcal{R}_0} = \mathbf{a}_P|_{\mathcal{R}} + 2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}}|_{\mathcal{R}_0} \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}}|_{\mathcal{R}_0} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}}|_{\mathcal{R}_0} \wedge (P - O))$$

l'unico contributo lungo l'asse  $z$  è quello dato da  $\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{a}_P|_{\mathcal{R}} = -\frac{d}{dt}(2ax\dot{x})$ , dove abbiamo tenuto conto della (1.310). Concludiamo che:

$$\phi_z = -2m\frac{d}{dt}ax\dot{x} + k(P - O) \cdot \mathbf{e}_z + H\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}_0} \cdot \mathbf{e}_z + mg,$$

sostituendo le espressioni già calcolate:

$$\phi_z = mg - 2m\frac{d}{dt}(ax\dot{x}) - kax^2 - 2Hax\dot{x},$$

e cioè, sul moto:

$$\phi_z = mg - 2ma \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 2max\frac{d^2x}{dt^2} - kax^2 - 2Hax\frac{dx}{dt}$$

L'espressione cercata per  $\phi_z$  in funzione dei soli  $x$  e  $\frac{dx}{dt}$  si ottiene dall'identità di sopra, sostituendo a  $\frac{d^2x}{dt^2}$  (nel secondo membro) il secondo membro della (1.316):

$$\begin{aligned} \phi_z = & mg - 2ma \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 2Hax\frac{dx}{dt} - kax^2 + mg \\ & + \frac{2ax}{1 + 4a^2x^2} \left[ 4a^2mx \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + H\frac{dx}{dt}(1 + 4a^2x^2) - (m\Omega^2 - k + 2mga)x + 2ka^2x^3 \right]. \end{aligned}$$

(2) Nel riferimento  $\mathcal{R}$ , oltre alle forze attive conservative presenti in  $\mathcal{R}_0$ , esistono anche le forze attive inerziali di Coriolis e centrifuga. La prima non compie lavoro nel riferimento considerato, essendo sempre normale alla velocità in tale riferimento, esattamente come la reazione vincolare in tale riferimento. La forza centrifuga è conservativa con energia potenziale  $-\frac{m\Omega^2}{2}x^2$ . L'energia meccanica totale in  $\mathcal{R}$  ha dunque la forma:

$$\mathcal{E}|_{\mathcal{R}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{R}} + \mathcal{U}|_{\mathcal{R}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{R}} + \mathcal{U}|_{\mathcal{R}_0} - \frac{m\Omega^2}{2}x^2,$$

e quindi:

$$\mathcal{E}|_{\mathcal{R}} = \frac{m\dot{x}^2}{2}(1 + 4a^2x^2) + \frac{k}{2}(x^2 + a^2x^4) - mgax^2 - \frac{m\Omega^2}{2}x^2. \quad (1.317)$$

Osservando la lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0}$  in (1.314), possiamo notare che la funzione di Hamilton ad essa associata è proprio, come si verifica immediatamente facendo il calcolo:

$$\mathcal{H}|_{\mathcal{R}_0} = \frac{m\dot{x}^2}{2}(1 + 4a^2x^2) + \frac{k}{2}(x^2 + a^2x^4) - mgax^2 - \frac{m\Omega^2}{2}x^2 \quad (1.318)$$

pertanto  $\mathcal{E}|_{\mathcal{R}} = \mathcal{H}|_{\mathcal{R}_0}$ . Nel caso in cui  $H = 0$ , il sistema è descritto in  $\mathcal{R}_0$  dalla sola lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0}$  in (1.314) che non dipende esplicitamente dal tempo. Il teorema di Jacobi prova allora che  $\mathcal{E}|_{\mathcal{R}} = \mathcal{H}|_{\mathcal{R}_0}$  è un integrale primo. Nel caso in cui  $H \neq 0$ , sappiamo che, su ogni soluzione delle equazioni di E-L vale:

$$\frac{d\mathcal{H}|_{\mathcal{R}_0}}{dt} = \mathcal{Q}_x \dot{x}$$

per cui, tenendo conto della (1.315), abbiamo trovato la relazione richiesta:

$$\frac{d\mathcal{E}|_{\mathcal{R}}}{dt} = -H\dot{x}^2(1 + 4a^2x^2). \quad (1.319)$$

**(3)** Osserviamo preventivamente che  $\mathcal{L}|_{\mathcal{R}} = \mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0}$  dove nella prima lagrangiana abbiamo tenuto conto dell'energia potenziale della forza centrifuga che appare nella seconda lagrangiana come termine dell'energia cinetica. La coordinata libera  $x$  è solidale con  $\mathcal{R}$  e pertanto possiamo studiare le configurazioni di equilibrio rispetto a  $\mathcal{R}$  usando tale coordinata libera. Le configurazioni di equilibrio  $x_0$  in  $\mathcal{R}$  si individuano richiedendo che l'atto di moto  $(x_0, 0)$  annulli la componente lagrangiana di tutte le forze attive che agiscono in  $\mathcal{R}$ . Dato che la componente lagrangiana della forza centrifuga è nulla, quella della forza  $\mathbf{f}$  si annulla sull'atto di moto detto – essendo  $\dot{x} = 0$  e valendo (1.315) – concludiamo che le configurazioni di equilibrio si ottengono annullando la componente lagrangiana della forza conservativa totale, e cioè annullando il gradiente di  $\mathcal{U}|_{\mathcal{R}}$ :

$$0 = \frac{d\mathcal{U}|_{\mathcal{R}}}{dx}|_{x_0} = 2a^2kx_0^3 + (k - 2mag - m\Omega^2)x_0,$$

da cui le configurazioni di equilibrio (ricordando che  $m, g, a, k, \Omega > 0$ ):

$$x_0 = 0, \quad x_{\pm} := \pm \sqrt{\frac{m\Omega^2 + 2amg - k}{2a^2k}},$$

dove le ultime due esistono solo se  $k \leq m\Omega^2 + 2amg$ .

Per studiare la stabilità per  $H > 0$  (che significa che è sempre presente una forza non conservativa con componenti lagrangiane non nulle), consideriamo la derivata seconda di  $\mathcal{U}|_{\mathcal{R}}$  valutata nelle tre soluzioni trovate:

$$\frac{d^2\mathcal{U}|_{\mathcal{R}}}{dx^2} = 6a^2kx^2 + (k - 2mag - m\Omega^2).$$

Per quanto riguarda  $x_0 = 0$ , possiamo concludere che la configurazione di equilibrio è stabile se  $k > 2mag + m\Omega^2$ , cioè se non esistono le altre due configurazioni di equilibrio. Non possiamo dire nulla per  $k \leq 2mag + m\Omega^2$  data la presenza della forza non conservativa con componente lagrangiana non nulla. Per quanto riguarda le altre due soluzioni si ha facilmente che:

$$\frac{d^2\mathcal{U}|_{\mathcal{R}}}{dx^2}\Big|_{x_{\pm}} = -2(k - 2mag - m\Omega^2)$$

e quindi quando tali configurazioni di equilibrio esistono e non coincidono con  $x_0 = 0$  (cioè quando  $k < m\Omega^2 + 2amg$ ), esse sono stabili nel futuro (e anche nel passato se  $H = 0$ ). Non possiamo dire nulla con i teoremi che conosciamo se  $k = m\Omega^2 + 2amg$ .

(4). Per costruzione la trasformata di Legendre si scrive:

$$p_x = \frac{\partial\mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0}}{\partial\dot{x}} = m(1 + 4a^2x^2)\dot{x},$$

che si inverte immediatamente in:

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m(1 + 4a^2x^2)}.$$

Sostituendo nell'espressione (1.318) della funzione di Hamilton:

$$\mathcal{H}|_{\mathcal{R}_0} = \frac{p_x^2}{2m(1 + 4a^2x^2)} + \frac{k}{2}(x^2 + a^2x^4) - mgax^2 - \frac{m\Omega^2}{2}x^2. \quad (1.320)$$

Le equazioni di Hamilton risultano allora essere:

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_x}\right) = \frac{p_x}{m(1 + 4a^2x^2)}$$

e

$$\frac{dp_x}{dt} = \left(-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x}\right) = \frac{8a^2xp_x^2}{2m(1 + 4a^2x^2)^2} - k(x + 4a^2x^3) + 2mgax + m\Omega^2x.$$

(4)' Nella situazione detta, ragionando in  $\mathcal{R}_0$  per la configurazione di equilibrio  $x_+$  in  $\mathcal{R}$  trovata sopra per  $k < m\Omega^2 + 2amg$ , deve essere (tenendo conto che in  $\mathcal{R}_0$  il punto  $P$  si vede animato della sola accelerazione centripeta):  $-m\Omega^2x_+ \mathbf{e}_x = \boldsymbol{\phi} - mg \mathbf{e}_z - k(P - O)$  e dunque  $\boldsymbol{\phi} = -m\Omega^2x_+ \mathbf{e}_x + mg \mathbf{e}_z + k(x_+ \mathbf{e}_x - ax_+^2 \mathbf{e}_z)$  ed infine:

$$\boldsymbol{\phi} = (k - m\Omega^2)x_+ \mathbf{e}_x + (mg - kax_+^2) \mathbf{e}_z,$$

dove

$$x_+ := \sqrt{\frac{m\Omega^2 + 2amg - k}{4a^2k}}.$$

### ESERCIZIO 28

Si consideri un sistema di assi ortonormali  $xyz$  destrorsi solidali con il riferimento inerziale  $\mathcal{R}$ . I punti materiali  $P_1$  e  $P_2$ , entrambi di massa  $m > 0$  nota, sono vincolati a muoversi rispettivamente:  $P_1$  sull'asse verticale  $z$  e  $P_2$  sulla curva di equazioni

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta, \quad z = R\theta \quad \text{per } \theta \in \mathbb{R}$$

dove  $R > 0$  è noto. Entrambe le curve sono prive di attrito e, oltre alle reazioni vincolari, sui due punti agiscono le seguenti forze attive.

(a) La forza peso  $-mg \mathbf{e}_z$  con  $g > 0$  assegnata.

(b) La forza di una molla ideale (lunghezza a riposo e peso nulli) di costante  $k \geq 0$  nota con un estremo in  $P_1$  e l'altro nell'origine degli assi  $O$ .

(c) La forza di una molla ideale di costante ancora  $k$ , con un estremo in  $P_1$  e l'altro in  $P_2$ .

(d) La forza viscosa  $-\gamma \mathbf{v}_1|_{\mathcal{R}}$ , dove  $\gamma \geq 0$  è una costante nota, che agisce su  $P_1$ .

Usando come coordinate libere la quota  $z$  di  $P_1$  e l'angolo  $\theta$  per determinare  $P_2$ , si risolvano i seguenti quesiti.

(1) Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange del sistema e le equazioni che determinano la reazione vincolare  $\phi_1$  su  $P_1$  in funzione delle coordinate libere e delle loro derivate prime temporali al più.

(2) Provare che, se  $k > 0$  e  $\gamma = 0$ , esiste un integrale primo e spiegarne il significato fisico. Calcolare la derivata temporale di tale funzione lungo un generico moto del sistema se  $\gamma > 0$ , verificando che cessa di essere un integrale primo.

(3) Per  $k = 0$  e  $\gamma = 0$ , passare alle nuove coordinate libere  $q^1 = z - R\theta$  e  $q^2 = z + R\theta$  e provare che esistono ulteriori integrali primi precisandone l'espressione esplicita in funzione delle coordinate libere iniziali. *Facoltativo*: esistono altri integrali primi nel caso  $k = 0$  e  $\gamma = 0$ ?

(4) Per  $k > 0$  e  $\gamma = 0$ , determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità al variare dei valori dei parametri  $R > 0$ ,  $m > 0$ ,  $g > 0$ ,  $k > 0$ .

(5) Per  $\gamma = 0$ , scrivere la trasformazione di Legendre, passare in formulazione di Hamilton e scrivere le equazioni di Hamilton del sistema.

**Soluzione.**

Omettiamo l'indice  $\mathcal{R}$  dato che tutte le quantità cinematiche sono riferite a tale sistema di riferimento inerziale.

(1) Per prima cosa calcoliamo la lagrangiana del sistema che tiene conto delle forze attive-conservative in gioco (non ci sono forze inerziali dato che il sistema di riferimento è inerziale). I vettori posizione delle due particelle sono:

$$P_1 - O = z \mathbf{e}_z, \quad P_2 - O = R \cos \theta \mathbf{e}_x + R \sin \theta \mathbf{e}_y + R\theta \mathbf{e}_z, \quad (1.321)$$

da cui le velocità

$$\mathbf{v}_1 = \dot{z} \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{v}_2 = R\dot{\theta}(-\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z). \quad (1.322)$$

Quadrando le velocità e tenendo conto del fatto che le masse dei due punti sono entrambe uguali a  $m$  otteniamo l'energia cinetica

$$\mathcal{T} = \frac{m}{2} \dot{z}^2 + mR^2 \dot{\theta}^2. \quad (1.323)$$

L'energia potenziale è data dalla somma dell'energia potenziale gravitazionale e quella delle due molle:

$$\mathcal{U} = mg(z + R\theta) + \frac{k}{2} (\|P_1 - O\|^2 + \|P_2 - P_1\|^2) = mg(z + R\theta) + \frac{k}{2} (z^2 + (R\theta - z)^2 + R^2).$$

Omettendo una costante addittiva inessenziale

$$\mathcal{U}(\theta, z) = mg(z + R\theta) + \frac{k}{2} z^2 + \frac{k}{2} (R\theta - z)^2. \quad (1.324)$$

Abbiamo infine la lagrangiana

$$\mathcal{L}(\theta, z, \dot{\theta}, \dot{z}) = \frac{m}{2} \dot{z}^2 + mR^2 \dot{\theta}^2 - mg(z + R\theta) - \frac{k}{2} (R\theta - z)^2 - \frac{k}{2} z^2. \quad (1.325)$$

La forza viscosa che agisce su  $P_1$  ha come unica componente lagrangiana, usando ancora (1.321) e (1.324):

$$Q_z = \frac{\partial P_1}{\partial z} \cdot (-\gamma \mathbf{v}_1) = -\gamma \dot{z}. \quad (1.326)$$

Il sistema delle due equazioni di Eulero-Lagrange viene allora scritto, già come sistema di equazioni differenziali del secondo ordine in forma normale:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{2} - \frac{k}{2m} \left( \theta - \frac{z}{R} \right), \quad (1.327)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{\gamma}{m} \frac{dz}{dt} - g - \frac{2kz}{m} + \frac{kR}{m} \theta. \quad (1.328)$$

Per ricavare la reazione vincolare su  $P_1$  usiamo la legge di Newton

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} \mathbf{e}_z = \phi_1 - mg \mathbf{e}_z - k(P_1 - P_2) - k(P_1 - O) - \gamma \mathbf{v}_1$$

da cui, usando (1.321), (1.324) e (1.328)

$$\phi_1 = \left[ -\gamma \frac{dz}{dt} - mg - 2kz + kR\theta \right] \mathbf{e}_z + k(z \mathbf{e}_z - R \cos \theta \mathbf{e}_x - R \sin \theta \mathbf{e}_y - R\theta \mathbf{e}_z) + kz \mathbf{e}_z + mg \mathbf{e}_z + \gamma \frac{dz}{dt} \mathbf{e}_z$$

che si semplifica in:

$$\phi_1 = -kR \cos \theta \mathbf{e}_x - kR \sin \theta \mathbf{e}_y.$$

Si osservi che tale reazione vincolare è normale all'asse  $z$  come doveva essere visto che abbiamo assunto i vincoli lisci per garantire l'idealità dei vincoli.

**(2)** Nel caso  $\gamma = 0$  il sistema è completamente descritto da una lagrangiana, i vincoli sono indipendenti dal tempo e le coordinate libere sono solidali con il riferimento rispetto al quale si calcola la lagrangiana che è l'unico sistema di riferimento in gioco  $\mathcal{R}$ . Concludiamo, dal teorema di Jacobi, che la funzione di Hamilton  $\mathcal{H}$  è un integrale primo e coincide con l'energia meccanica totale del sistema nel riferimento  $\mathcal{R}$  data da  $\mathcal{T} + \mathcal{U}$  e quindi:

$$\mathcal{H}(\theta, z, \dot{\theta}, \dot{z}) = \frac{m}{2} \dot{z}^2 + mR^2 \dot{\theta}^2 + mg(z + R\theta) + \frac{k}{2} (R\theta - z)^2 + \frac{k}{2} z^2. \quad (1.329)$$

Nel caso in cui  $\gamma > 0$ , come sappiamo dalla teoria generale, su ogni fissata soluzione delle equazioni di Eulero Lagrange, la derivata temporale totale di  $\mathcal{H}$  è pari a  $\sum_k \mathcal{Q}_k^{non\ cons.} \dot{q}^k$ . nel nostro caso troviamo dunque, essendo l'unica forza attiva non conservativa quella viscosa la cui unica componente lagrangiana è stata calcolata sopra:

$$\left. \frac{d\mathcal{H}}{dt} \right|_{sol.eq.E-L} = -\gamma \left( \frac{dz}{dt} \right)^2.$$

È quindi chiaro che se  $\gamma > 0$  l'energia meccanica totale cessa di essere un integrale primo.

**(3)** Mettiamoci nel caso  $\gamma = 0$  per cui la lagrangiana determina completamente il moto del sistema. La definizione delle nuove coordinate lagrangiane  $q^1 = z - R\theta$  e  $q^2 = z + R\theta$  si inverte in  $z = \frac{1}{2}(q^1 + q^2)$  e  $\theta = \frac{1}{2R}(q^2 - q^1)$  da cui

$$\dot{z} = \frac{1}{2}(\dot{q}^1 + \dot{q}^2), \quad \dot{\theta} = \frac{1}{2R}(\dot{q}^2 - \dot{q}^1). \quad (1.330)$$

La lagrangiana prende forma, nelle nuove coordinate

$$\mathcal{L}(\theta, z, \dot{\theta}, \dot{z}) = \frac{m}{2} \dot{z}^2 + mR^2 \dot{\theta}^2 - mgq^2 - \frac{k}{2} (q^1)^2 - \frac{k}{4} (q^1 + q^2)^2. \quad (1.331)$$

dove  $\dot{z}$  e  $\dot{\theta}$  sono date da (1.330). È evidente che se  $k = 0$  la lagrangiana non dipende più dalla coordinata  $q^1$  che risulta essere ciclica e pertanto abbiamo un nuovo integrale primo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^1} = m\dot{z} \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}^1} + 2mR\dot{\theta} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \dot{q}^1} = m\dot{z} \frac{1}{2} - 2mR^2 \dot{\theta} \frac{1}{2R} = \frac{m}{2} \dot{z} - mR\dot{\theta}.$$

Osserviamo che nel caso in esame in cui  $k = 0$ , la lagrangiana del sistema si scrive come somma di due lagrangiane indipendenti

$$\mathcal{L}(\theta, z, \dot{\theta}, \dot{z}) = \left( \frac{m}{2} \dot{z}^2 - mgz \right) + \left( mR^2 \dot{\theta}^2 - mgR\theta \right). \quad (1.332)$$

Possiamo studiare separatamente il punto  $P_1$  con lagrangiana  $\left( \frac{m}{2} \dot{z}^2 - mgz \right)$  e il punto  $P_2$ , con lagrangiana  $\left( mR^2 \dot{\theta}^2 - mgR\theta \right)$ . Dato che queste due lagrangiane non dipendono dal tempo, possiamo applicare il teorema di Jacobi separatamente a ciascuna delle due, ottenendo che si hanno due integrali primi in più:  $\left( \frac{m}{2} \dot{z}^2 + mgz \right)$  e  $\left( mR^2 \dot{\theta}^2 + mgR\theta \right)$ . Ovviamente l'energia meccanica totale è una funzione banale di questi due integrali primi: la loro somma. (In generale anche se non richiesto nella soluzione di questo esercizio, precisiamo che il sistema ammette  $2n - 1$  integrali primi funzionalmente indipendenti con  $n$  pari al numero di gradi di libertà, facendo riferimento al teorema ?? dove il campo vettoriale  $\mathbf{X}$  è ora quello tangente alle soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange in sullo spazio degli atti di moto, notando che le equazioni nel caso in esame sono autonome. Quindi nel nostro caso ci sono 3 integrali primi funzionalmente indipendenti).

(4) Le configurazioni di equilibrio si ottengono subito (essendo  $\gamma = 0$ ), cercando gli zeri del gradiente dell'energia potenziale totale:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} = mgR + kR^2\theta - Rkz, \quad 0 = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z} = mg + 2kz - kR\theta$$

che ha come unica soluzione

$$z_0 = -\frac{mg}{2}k, \quad \theta_0 = -\frac{3mg}{2Rk},$$

che determinano un'unica configurazione di equilibrio. La matrice hessiana dell'energia potenziale è costante e vale sempre:

$$H(\theta, z) = \begin{bmatrix} kR^2 & -kR \\ -kR & 2k \end{bmatrix}.$$

Questa matrice ha traccia e determinante positivi se  $R, m, g, k > 0$ , per cui entrambi gli autovalori sono positivi e la configurazione di equilibrio trovata è stabile nel passato e nel futuro.

(5) La trasformazione di Legendre produce

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mR^2 \dot{\theta}, \quad p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z},$$

che si inverte in

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{R^2 m}, \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m}.$$

La funzione di Hamilton scritta in variabili di Hamilton si scrive allora:

$$\mathcal{H}(\theta, z, p_\theta, p_z) = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m} + mg(z + R\theta) + \frac{k}{2}(R\theta - z)^2 + \frac{k}{2}z^2.$$

Le equazioni di Hamilton risultano allora essere:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{p_\theta}{R^2 m}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{p_z}{m}$$

che corrispondono alla trasformazione di Legendre valutata sul moto, e:

$$\frac{dp_\theta}{dt} = -mgR - kR(R\theta - z), \quad \frac{dp_z}{dt} = -mg - 2kz + kR\theta.$$

## ESERCIZIO 29

Si consideri un sistema di assi ortonormali  $xyz$ , destrorsi di origine  $O$ , solidali con il riferimento inerziale  $\mathcal{R}$ . Un sistema di due punti materiali è costituito come segue. Il punto  $P_1$  di massa  $m > 0$  assegnata è vincolato a muoversi nello spazio rimanendo attaccato ad un'estremo di un'asta rigida ideale (massa nulla) di lunghezza  $\ell > 0$  nota, il cui secondo estremo è sempre l'origine  $O$  degli assi. Il secondo punto  $P_2$ , ancora di massa  $m$ , è vincolato a rimanere sull'asse  $z$  ed è connesso al punto  $P_1$  tramite una seconda asta rigida ideale (massa nulla) di lunghezza ancora  $\ell$ .

Sul sistema di punti, oltre alle reazioni vincolari agiscono le seguenti forze:

(a) La forza di una molla ideale di costante  $k > 0$  nota, peso nullo e lunghezza nulla a riposo, attaccata con un estremo a  $P_2$  e l'altro all'origine degli assi  $O$ .

(b) La forza viscosa  $-\gamma \mathbf{v}_{P_2}|_{\mathcal{R}}$ , dove  $\gamma \geq 0$  è una costante nota, che agisce su  $P_2$ .

(c) La forza peso  $-mg \mathbf{e}_z$  che agisce su entrambi i punti materiali.

Usando come coordinate libere: l'angolo  $\theta \in (0, \pi)$  che  $P_1 - O$  individua rispetto all'asse  $z$  e l'angolo  $\phi \in [0, 2\pi)$  che la proiezione di  $P_1 - O$  sul piano  $z = 0$  individua rispetto a  $\mathbf{e}_x$  (angolo orientato positivamente rispetto a  $\mathbf{e}_z$ )<sup>3</sup>, si risolvano i seguenti quesiti.

(1) Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange del sistema. Scrivere la formula che determina la reazione vincolare totale  $\phi$  agente sul punto  $P_2$  in funzione delle coordinate lagrangiane e delle loro derivate prime temporali, ma non le derivate seconde. Ricavare il modulo della tensione dell'asta tra  $P_1$  e  $P_2$ , assumendo che l'asse  $z$  sia liscio.

(2) Provare che se  $\gamma = 0$  esistono due integrali primi di cui se ne spieghi anche il significato fisico. Discutere se, per  $\gamma > 0$ , tali funzioni cessano di essere integrali primi.

(3) Se  $\gamma = 0$  discutere, *al variare di*  $m, k, g, \ell > 0$ , se esistono soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange della forma  $\theta(t) = \theta_0$  e  $\phi(t) = \dot{\phi}_0 t + \phi_0$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$  dove  $\theta_0 \neq 0, \pi$  e  $\dot{\phi}_0 \neq 0$  e  $\phi_0$  sono costanti. Se esistono tali soluzioni precisare i valori possibili di  $\dot{\phi}_0$ ,  $\phi_0$  e  $\theta_0$ .

(4) Per  $\gamma \geq 0$  determinare le configurazioni di equilibrio con angolo  $\theta$  differente da  $0, \pi$  in funzione dei valori di  $m, k, g, \ell > 0$  e discutere cosa si possa concludere sulla stabilità di tali configurazioni con la teoria nota.

(5) Per  $\gamma = 0$ , scrivere la trasformazione di Legendre, passare in formulazione di Hamilton e scrivere le equazioni di Hamilton del sistema. Verificare direttamente dalle equazioni di Hamilton che  $p_\phi$  è un'integrale primo.

---

<sup>3</sup>Gli angoli  $\theta, \phi$  sono quindi le due coordinate angolari sferiche del punto  $P_1$ , la coordinata radiale  $r$  è fissata al valore costante  $\ell$ .

**Soluzione.**

(1) Per computo diretto abbiamo che

$$P_1 = O + \ell \sin \theta (\cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y) + \ell \cos \theta \mathbf{e}_z$$

e

$$P_2 = O + 2\ell \cos \theta \mathbf{e}_z .$$

Come conseguenza abbiamo che, omettendo la specificazione del riferimento  $\mathcal{R}$  d'ora in poi,

$$\mathbf{v}_{P_1} = \ell(\dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi) \mathbf{e}_x + \ell(\dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \phi) \mathbf{e}_y - \ell \dot{\theta} \sin \theta \mathbf{e}_z$$

e

$$\mathbf{v}_{P_2} = -2\ell \dot{\theta} \sin \theta \mathbf{e}_z . \quad (1.333)$$

Quadrando le espressioni ottenute, troviamo l'espressione per l'energia cinetica nel riferimento  $\mathcal{R}$ . In particolare:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{P_1}^2 &= \ell^2(\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi - 2\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta \cos \phi \sin \theta \sin \phi) \\ &+ \ell^2(\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + 2\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta \sin \phi \sin \theta \cos \phi) + \ell^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta . \end{aligned}$$

Cioè:

$$\mathbf{v}_{P_1}^2 = \ell^2[\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi)] .$$

Facendo uso dell'identità trigonometrica fondamentale  $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$  e poi  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$  si ha subito che

$$\mathbf{v}_{P_1}^2 = \ell^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) , \quad \mathbf{v}_{P_2}^2 = 4\ell^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta ,$$

da cui

$$\mathcal{T} = \frac{m\ell^2 \dot{\theta}^2}{2} (1 + 4 \sin^2 \theta) + \frac{m\ell^2 \dot{\phi}^2}{2} \sin^2 \theta . \quad (1.334)$$

L'energia potenziale totale, somma di energia potenziale gravitazionale ( $mgl \sin \theta + 2mgl \sin \theta$ ) ed energia potenziale della molla ( $\frac{1}{2}k\ell^2 4 \sin^2 \theta$ ), vale

$$\mathcal{U} = 3mgl \cos \theta + 2k\ell^2 \cos^2 \theta . \quad (1.335)$$

Abbiamo pertanto una lagrangiana data da:

$$\mathcal{L} = \frac{m\ell^2 \dot{\theta}^2}{2} (1 + 4 \sin^2 \theta) + \frac{m\ell^2 \dot{\phi}^2}{2} \sin^2 \theta - 3mgl \cos \theta - 2k\ell^2 \cos^2 \theta . \quad (1.336)$$

L'unica componente lagrangiana della forza viscosa è:

$$\mathcal{Q}_\theta = \frac{\partial P_2}{\partial \theta} \cdot (-\gamma)(-2\ell \dot{\theta} \sin \theta) \mathbf{e}_z = -4\gamma \ell^2 \dot{\theta} \sin^2 \theta .$$

Abbiamo tutti gli ingredienti per scrivere le due equazioni di Eulero-Lagrange del sistema. Esse sono, dove è ora sottointeso che  $\dot{\theta} = d\theta/dt$  e  $\dot{\phi} = d\phi/dt$ :

$$m\ell^2 \frac{d}{dt} \left[ \dot{\theta} (1 + 4 \sin^2 \theta) \right] = (4m\ell^2 \dot{\theta}^2 + m\ell^2 \dot{\phi}^2 + 4k\ell^2) \sin \theta \cos \theta + 3mg\ell \sin \theta - 4\gamma\ell^2 \dot{\theta} \sin^2 \theta \quad (1.337)$$

che si esplicita in

$$\frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{\ell(4k + m\dot{\phi}^2 - 4m\dot{\theta}^2) \sin \theta \cos \theta + (3mg - 4\gamma\ell\dot{\theta} \sin \theta) \sin \theta}{m(1 + 4 \sin^2 \theta)} \quad (1.338)$$

insieme a

$$m\ell^2 \frac{d}{dt} (\dot{\phi} \sin^2 \theta) = 0. \quad (1.339)$$

che non scriviamo in forma esplicita dato che ci servirà in questa forma.

L'equazione di Newton per il punto  $P_2$  nel riferimento  $\mathcal{R}$  è, tenendo conto di tutte le forze agenti e dove  $\boldsymbol{\phi}$  è la reazione vincolare *totale somma di quella dovuta all'asse  $z$  e quella dovuta all'asta di lunghezza  $\ell$* :

$$m\mathbf{a}_{P_2} = \boldsymbol{\phi} - k(2\ell \cos \theta \mathbf{e}_z) - mg \mathbf{e}_z - \gamma(-2\ell\dot{\theta} \sin \theta \mathbf{e}_z).$$

L'accelerazione si trova derivando nel tempo l'espressione per la velocità (1.333).

$$\mathbf{a}_{P_2} = -2\ell \left( \frac{d\dot{\theta}}{dt} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta \right) \mathbf{e}_z.$$

È chiaro allora che deve essere  $\boldsymbol{\phi} = \phi_z \mathbf{e}_z$ , dove:

$$\phi_z = -2\ell \left( m \frac{d\dot{\theta}}{dt} \sin \theta + m\dot{\theta}^2 \cos \theta \right) + k2\ell \cos \theta + mg - 2\gamma\ell\dot{\theta} \sin \theta,$$

cioè

$$\phi_z = mg - 2\ell \left( m \frac{d\dot{\theta}}{dt} + \gamma\dot{\theta} \right) \sin \theta + 2\ell(k - m\dot{\theta}^2) \cos \theta.$$

Tenendo conto di (1.338) abbiamo finalmente l'espressione di  $\boldsymbol{\phi}$  in funzione al più delle derivate prime temporali delle coordinate libere:  $\boldsymbol{\phi} = \phi_z \mathbf{e}_z$  con

$$\phi_z = mg - 2 \left[ \frac{\ell(4k + m\dot{\phi}^2 - 4m\dot{\theta}^2) \sin \theta \cos \theta + (3mg - 4\gamma\ell\dot{\theta} \sin \theta) \sin \theta}{1 + 4 \sin^2 \theta} + \gamma\ell\dot{\theta} \right] \sin \theta + 2\ell(k - m\dot{\theta}^2) \cos \theta.$$

L'asta che connette  $P_1$  e  $P_2$  è ideale e pertanto può solo esercitare forze parallelamente alla sua direzione. La componente  $z$  della reazione vincolare totale su  $P_2$  può solo essere dovuta all'asta dato che l'asse  $z$  è supposto liscio. Concludiamo che, se  $\mathbf{T}$  è la tensione dell'asta,  $|\phi_z| = \|\mathbf{T}\| \cos \theta$  e quindi

$$\|\mathbf{T}\| = \left| \frac{mg - 2 \left[ \frac{\ell(4k + m\dot{\phi}^2 - 4m\dot{\theta}^2) \sin \theta \cos \theta + (3mg - 4\gamma\ell\dot{\theta} \sin \theta) \sin \theta}{1 + 4 \sin^2 \theta} + \gamma\ell\dot{\theta} \right] \sin \theta + 2\ell(k - m\dot{\theta}^2) \cos \theta}{\cos \theta} \right|.$$

(2) Per  $\gamma = 0$  la sola lagrangiana (1.336) è sufficiente a descrivere il sistema fisico. Dato che essa non dipende esplicitamente dal tempo, abbiamo l'integrale primo di Jacobi dato dalla funzione di Hamilton del sistema

$$\mathcal{H} = \frac{m\ell^2\dot{\theta}^2}{2} (1 + 4\sin^2\theta) + \frac{m\ell^2\dot{\phi}^2}{2} \sin^2\theta + 3mgl \cos\theta + 2k\ell^2 \cos^2\theta. \quad (1.340)$$

Questa è evidentemente l'energia meccanica totale del sistema fisico nel riferimento  $\mathcal{R}$ , dato che è la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale di tutte le forze attive conservative, come è anche confermato dalla seconda parte del teorema di Jacobi valendone qui le ipotesi. Per  $\gamma > 0$  sappiamo che, sulle soluzioni delle equazioni di E.-L.

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \dot{\theta}\mathcal{Q}_\theta = -4\gamma\ell^2\dot{\theta}^2 \sin^2\theta$$

e quindi  $\mathcal{H}$  cessa di essere un integrale primo. Un secondo integrale primo per  $\gamma = 0$  lo abbiamo tenuto conto che  $\mathcal{L}$  non dipende esplicitamente da  $\phi$  che è dunque coordinata ciclica, per cui il suo momento coniugato  $p_\phi := \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\phi}$  è un integrale primo. Dato che, evidentemente,  $\phi$  è una coordinata rotazionale attorno all'asse  $z$ , concludiamo che  $p_\phi$  rappresenta la componente  $z$  del momento angolare totale del sistema dei due punti materiali rispetto al polo  $O$  nel riferimento  $\mathcal{R}$ . La conservazione di  $p_\phi$  sui moti si vede anche direttamente dalla seconda equazione di Eulero Lagrange (1.339), dato che

$$p_\phi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = m\ell^2\dot{\phi} \sin^2\theta$$

e l'ultimo membro appare nella derivata temporale totale (sul moto) a primo membro di (1.339). Dato che l'equazione (1.339) è valida anche per  $\gamma > 0$ , concludiamo che  $p_\phi$  continua ad essere un integrale primo anche se  $\gamma > 0$ .

(3) Se esistono soluzioni della forma detta devono soddisfare (1.337) e (1.339). La seconda equazione è soddisfatta da tali moti, mentre la prima fornisce la condizione

$$0 = (m\ell^2\dot{\phi}_0^2 + 4k\ell^2) \sin\theta_0 \cos\theta_0 + 3mgl \sin\theta_0.$$

Dato che si richiede  $\theta_0 \neq 0, \pi$  vale anche  $\sin\theta_0 \neq 0$  e pertanto:

$$0 = (m\ell^2\dot{\phi}_0^2 + 4k\ell^2) \cos\theta_0 + 3mgl.$$

Dato che  $(m\ell^2\dot{\phi}_0^2 + 4k\ell^2) > 0$  e  $3mgl > 0$  deve necessariamente essere  $\cos\theta_0 < 0$ . Pertanto  $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$ . Abbiamo in questo modo l'identità

$$\dot{\phi}_0^2 = -\frac{3g}{\ell \cos\theta_0} - \frac{4k}{m}$$

dove il primo membro è strettamente positivo e pertanto giungiamo alla condizione finale

$$-\frac{3g}{\ell \cos\theta_0} > \frac{4k}{m}$$

ossia

$$-\frac{3gm}{4k\ell} < \cos \theta_0 < 0 \quad (1.341)$$

Per risolvere questa disequazione in  $\theta_0 \in (0, \pi)$  dobbiamo tener conto dei possibili valori di  $-\frac{3gm}{4k\ell}$  al variare dei parametri che in esso appaiono  $g, m, k, \ell > 0$ . Abbiamo due casi come soluzione di (1.341):

$$\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \arccos\left(-\frac{3gm}{4k\ell}\right) \quad \text{per } \frac{3gm}{4k\ell} < 1$$

oppure

$$\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \pi \quad \text{per } \frac{3gm}{4k\ell} \geq 1.$$

In entrambi i casi

$$\dot{\phi}_0 = \pm \sqrt{-\frac{3g}{\ell \cos \theta_0} - \frac{4k}{m}}. \quad (1.342)$$

Ora procediamo a ritroso. Se scegliamo  $\theta_0$  arbitrariamente nei due intervalli a seconda dei due casi per  $\frac{3gm}{4k\ell} < 1$  oppure  $\frac{3gm}{4k\ell} \geq 1$  rispettivamente, e definiamo  $\dot{\phi}_0$  come in (1.342), sicuramente abbiamo un moto (uno per ogni segno) che soddisfa tutte le nostre condizioni: basta imporre le condizioni iniziali  $\theta(0) = \theta_0$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0$ ,  $\phi(0) = \phi_0$ ,  $\dot{\phi}(0) = \pm \sqrt{-\frac{3g}{\ell \cos \theta_0} - \frac{4k}{m}}$ . La curva  $\theta(t) = \theta_0$  e  $\phi(t) = \pm \sqrt{-\frac{3g}{\ell \cos \theta_0} - \frac{4k}{m}}t + \phi_0$  soddisfa sia le equazioni del moto che le condizioni iniziali e pertanto è il moto del tipo richiesto (l'unico dato che siamo nelle ipotesi del teorema di unicità). Concludendo, si hanno moti del tipo detto per ogni  $\theta_0$

$$\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \arccos\left(-\frac{3gm}{4k\ell}\right) \quad \text{se } \frac{3gm}{4k\ell} < 1$$

oppure per ogni  $\theta_0$

$$\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \pi \quad \text{se } \frac{3gm}{4k\ell} \geq 1.$$

In entrambi i casi,  $\phi_0 \in [0, 2\pi)$  è arbitrario e

$$\dot{\phi}_0 := \pm \sqrt{-\frac{3g}{\ell \cos \theta_0} - \frac{4k}{m}}.$$

Non ci sono altri casi possibili.

(4) Dato che  $\mathcal{Q}_\theta = 0$  per  $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$ , le configurazioni di equilibrio  $(\vartheta_0, \varphi_0)$  si ottengono annullando il gradiente dell'energia potenziale. Dato che  $\mathcal{U}$  non dipende da  $\phi$ , l'unica condizione da imporre è:

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} \Big|_{(\vartheta_0, \varphi_0)} = 0$$

che significa

$$-3mg\ell \sin \vartheta_0 - 4k\ell^2 \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 = 0.$$

Tenendo conto che stiamo cercando soluzioni con  $\vartheta_0 \neq 0, \pi$  per cui  $\sin \vartheta_0 \neq 0$ , l'equazione trovata è equivalente a

$$\cos \vartheta_0 = -\frac{3mg}{4k\ell}. \quad (1.343)$$

Concludiamo che, se  $3mg \geq 4k\ell$  non ci sono configurazioni di equilibrio (diverse da  $0, \pi$ ). Se invece  $3mg < 4k\ell$  abbiamo le infinite configurazioni di equilibrio:

$$(\vartheta_0, \varphi_0) = \left( \arccos \left( -\frac{3mg}{4k\ell} \right), \varphi_0 \right), \quad \forall \varphi_0 \in [0, 2\pi).$$

Studiare la stabilità tramite la matrice hessiana permette al più di dire (per  $\gamma = 0$  in modo che tutte le forze siano conservative) se una configurazione è instabile nel caso  $\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta^2} |_{(\vartheta_0, \varphi_0)} < 0$ , dato che tutti gli altri elementi di matrice sono nulli per cui non possiamo applicare il teorema di Lagrange-Dirichlet. Il calcolo diretto produce

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta^2} |_{(\vartheta_0, \varphi_0)} = -3mg\ell \cos \vartheta_0 - 4k\ell^2(2 \cos^2 \vartheta_0 - 1).$$

Usando (1.343) abbiamo che

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta^2} |_{(\vartheta_0, \varphi_0)} = 4k\ell^2 - \frac{9m^2 g^2}{4k} = 4k\ell^2 \left[ 1 - \left( \frac{3mg}{4k\ell} \right)^2 \right].$$

Dato che la configurazioni di equilibrio che ci interessano esistono per  $3mg < 4k\ell$ , concludiamo che la derivata seconda di sopra è positiva. Con i teoremi noti non possiamo quindi concludere nulla rispetto alla stabilità delle configurazioni trovate. (Tuttavia<sup>4</sup>, applicando direttamente la definizione di stabilità e tenendo conto del punto (3), possiamo concludere che tutte le configurazioni trovate devono essere instabili nel passato e nel futuro. A tal fine fissiamo una configurazione di equilibrio  $(\vartheta_0, \varphi_0)$ . Sappiamo che le soluzioni al problema del moto con condizioni iniziale del tipo  $\theta(0) = \theta_0$ ,  $\phi(0) = \phi_0$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0$ ,  $\dot{\phi}(0) := \sqrt{-\frac{3g}{\ell \cos \theta_0} - \frac{4k}{m}}$  hanno la forma  $\theta(t) = \theta_0$  e  $\phi(t) = \dot{\phi}_0 t + \phi_0$  se la condizione (1.341):

$$-\frac{3gm}{4k\ell} < \cos \theta_0 < 0$$

è verificata. Per (1.343) tale condizione si può riscrivere:

$$\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \vartheta_0$$

Inoltre vale anche  $0 < \dot{\phi}_0 \rightarrow 0$  se  $\theta_0 \rightarrow \vartheta_0$  da sinistra, come si verifica immediatamente. Controlliamo se la definizione di configurazione di equilibrio stabile si possa applicare alla configurazione di equilibrio  $(\vartheta_0, \varphi_0)$ . Consideriamo allora un intorno  $V$  dell'atto di moto  $(\vartheta_0, \varphi_0, 0, 0)$ . Indipendentemente da quanto  $V$  è piccolo, l'atto di moto  $(\theta_0, \phi_0, 0, \dot{\phi}_0)$  (dove come detto  $\dot{\phi}_0 :=$

<sup>4</sup>Questa discussione tecnica non era richiesta alla prova d'esame.

$\sqrt{-\frac{3g}{\ell \cos \theta_0} - \frac{4k}{m}} > 0$ ) cade dentro  $V$  pur di scegliere  $\theta_0$  abbastanza vicino a  $\vartheta_0$ . La soluzione delle equazioni di E.-L.  $\mathbb{R} \ni t \mapsto (\theta(t), \phi(t), \dot{\theta}(t), \dot{\phi}(t))$  con tali condizioni iniziali uscirà comunque da qualunque altro intorno fissato  $U$  di  $(\vartheta_0, \varphi_0, 0, 0)$ , sia per  $t$  positivi abbastanza grandi che per  $t$  negativi abbastanza grandi, a causa dell'evoluzione lineare dell'angolo  $\phi(t)$ :  $\phi(t) = \dot{\phi}_0 t + \phi_0$  dove  $\dot{\phi}_0 > 0$ . Pertanto ogni configurazione di equilibrio  $(\vartheta_0, \varphi_0)$  è instabile nel passato e nel futuro. Si osservi che il risultato vale anche se  $\gamma > 0$  dato che il punto (3) vale anche in questa situazione.)

(5) La trasformazione di Legendre è

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m\ell^2(1 + 4\sin^2 \theta)\dot{\theta}, \quad p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = m\ell^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}$$

che banalmente si inverte in

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m\ell^2(1 + 4\sin^2 \theta)}, \quad \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{m\ell^2 \sin^2 \theta}.$$

La funzione di Hamilton (1.340) in variabili di Hamilton ha quindi la forma

$$\mathcal{H}(p_\theta, p_\phi, \theta, \phi) = \frac{p_\theta^2}{2m\ell^2(1 + 4\sin^2 \theta)} + \frac{p_\phi^2}{2m\ell^2 \sin^2 \theta} + 3mg\ell \cos \theta + 2k\ell^2 \cos^2 \theta. \quad (1.344)$$

Le quazioni di Hamilton sono dunque:

$$\frac{dp_\theta}{dt} \left( = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} \right) = \frac{4p_\theta^2 \sin \theta \cos \theta}{m\ell^2(1 + 4\sin^2 \theta)^2} + \frac{p_\phi^2 \cos \theta}{m\ell^2 \sin^3 \theta} + 3mg\ell \sin \theta + 4k\ell^2 \sin \theta \cos \theta, \quad \frac{dp_\phi}{dt} \left( = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} \right) = 0,$$

dove si vede che  $p_\phi$  è integrale primo, dato che la funzione di Hamilton non dipende esplicitamente da  $\phi$ , e

$$\frac{d\theta}{dt} \left( = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} \right) = \frac{p_\theta}{m\ell^2(1 + 4\sin^2 \theta)}, \quad \frac{d\phi}{dt} \left( = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\phi} \right) = \frac{p_\phi}{m\ell^2 \sin^2 \theta}$$

### ESERCIZIO 30

Un punto materiale  $P$  di massa  $m > 0$  nota è attaccato all'origine  $O$  degli assi  $x, y, z$  di un riferimento non inerziale  $\mathcal{R}$  tramite un'asta ideale (senza peso) di lunghezza  $\ell > 0$ . Al punto  $P$  è attaccato un secondo punto  $Q$ , della stessa massa  $m > 0$ , tramite una seconda asta ideale di lunghezza ancora  $\ell$ . I due punti  $P$  e  $Q$  sono vincolati a rimanere nel piano verticale  $x, z$ .

Il riferimento  $\mathcal{R}$  ruota attorno all'asse  $z$  rispetto ad un riferimento inerziale  $\mathcal{R}_0$  con velocità angolare  $\Omega \mathbf{e}_z$  dove la costante  $\Omega > 0$  è nota.

Oltre alle reazioni vincolari (supposte ideali), sui due punti agiscono le seguenti forze attive vere:

(a) la forza peso  $-mg \mathbf{e}_z$  con  $g \geq 0$  nota,

(b) le forze di una molla ideale di costante elastica  $k > 0$  nota e lunghezza nulla a riposo.

La molla è attaccata a  $P$  ad un estremo e l'altro estremo si trova sull'asse  $z$  rimanendo sempre alla quota di  $P$ .

(c) la forza di una seconda molla ideale ancora di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza nulla a riposo. Tale molla è attaccata a  $Q$  con un estremo e l'altro estremo si trova sull'asse  $z$  rimanendo sempre alla quota di  $Q$ .

Usando come coordinate libere l'angolo  $\theta \in [-\pi, \pi]$  che  $P - O$  individua rispetto all'asse  $x$  e l'angolo  $\phi \in [-\pi, \pi]$  che  $Q - P$  individua rispetto alla parallela all'asse  $x$  passante per  $P$  si risolvano i seguenti problemi.

(1) Scrivere le equazioni di Eulero Lagrange del sistema di punti e mostrare che risulta  $\mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0} = \mathcal{L}|_{\mathcal{R}}$  osservando che anche nel riferimento  $\mathcal{R}$  la lagrangiana determina completamente il moto del sistema perché la forza di Coriolis non ha componenti lagrangiane.

(2) Provare che esiste un integrale primo di cui se ne discuta il significato fisico. Assumendo  $g = 0$ , si passi in coordinate  $\Theta := (\theta + \phi)/2$  e  $\Phi := (\theta - \phi)/2$  e si provi che esiste un secondo integrale primo se  $k = m\Omega^2$  e se ne spieghi il significato fisico.

(3) Ponendo  $g = 0$  determinare le configurazioni di equilibrio rispetto a  $\mathcal{R}$  per  $k \neq m\Omega^2$  al variare dei parametri  $\ell > 0, \Omega > 0, k > 0, m > 0$  e si discuta la stabilità di una configurazione di equilibrio in cui i  $P$  e  $Q$  risultano essere allineati, al variare dei valori dei parametri  $\ell > 0, \Omega > 0, k > 0, m > 0$  (sempre assumendo  $k \neq m\Omega^2$ ).

(4) Scrivere la trasformazione di Legendre e la sua inversa (cioè esprimere  $(p_\theta, p_\phi)$  in funzione di  $(\dot{\theta}, \dot{\phi})$  e poi invertire tale funzione ottenendo  $(\dot{\theta}, \dot{\phi})$  in funzione di  $(p_\theta, p_\phi)$ ). Esprimere la funzione di Hamilton tramite le variabili hamiltoniane  $(p_\theta, p_\phi, \theta, \phi)$ .

**Soluzione.**

(1) Orientiamo gli angoli  $\theta$  e  $\phi$  positivamente rispetto a  $\mathbf{e}_y$ . Per prima cosa valutiamo  $\mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0}$  dato che in esso appaiono solo forze vere. Per computo diretto

$$P - O = \ell(\cos \theta \mathbf{e}_x - \sin \theta \mathbf{e}_z), \quad Q - O = \ell(\cos \theta + \cos \phi) \mathbf{e}_x - \ell(\sin \theta + \sin \phi) \mathbf{e}_z.$$

Quindi

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} = -\ell\dot{\theta}(\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_z), \quad \mathbf{v}_Q|_{\mathcal{R}} = -\ell(\dot{\theta} \sin \theta + \dot{\phi} \sin \phi) \mathbf{e}_x - \ell(\dot{\theta} \cos \theta + \dot{\phi} \cos \phi) \mathbf{e}_z.$$

Le velocità nel riferimento  $\mathcal{R}_0$  si ottengono con la solita formula  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}_0} = \mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} + \Omega \mathbf{e}_z \wedge (P - O)$  e l'analogia formula per  $\mathbf{v}_Q$ , ottenendo

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}_0} = -\ell\dot{\theta}(\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_z) + \Omega \ell \cos \theta \mathbf{e}_y$$

e

$$\mathbf{v}_Q|_{\mathcal{R}_0} = -\ell(\dot{\theta} \sin \theta + \dot{\phi} \sin \phi) \mathbf{e}_x - \ell(\dot{\theta} \cos \theta + \dot{\phi} \cos \phi) \mathbf{e}_z + \Omega \ell(\cos \theta + \cos \phi) \mathbf{e}_y.$$

Con qualche calcolo da queste espressioni troviamo subito che:

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{R}_0} = m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}\ell^2\dot{\phi}^2 + m\ell^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta - \phi) + \frac{m\ell^2\Omega^2}{2}[\cos^2 \theta + (\cos \theta + \cos \phi)^2].$$

L'energia potenziale delle forze attive (tutte conservative) è la somma dell'energia potenziale delle due molle e di quella gravitazionale e pertanto:

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{R}} = \frac{k\ell^2}{2}[\cos^2 \theta + (\cos \theta + \cos \phi)^2] - mg\ell[2 \sin \theta + \sin \phi].$$

La lagrangiana nel riferimento  $\mathcal{R}_0$  ha pertanto la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0} = & m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}\ell^2\dot{\phi}^2 + m\ell^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta - \phi) + \frac{m\ell^2\Omega^2}{2}[\cos^2 \theta + (\cos \theta + \cos \phi)^2] \\ & - \frac{k\ell^2}{2}[\cos^2 \theta + (\cos \theta + \cos \phi)^2] + mg\ell[2 \sin \theta + \sin \phi]. \end{aligned} \quad (1.345)$$

Le quazioni di Eulero-Lagrange prendono la forma:

$$2m\ell^2\frac{d^2\theta}{dt^2} + m\ell^2\frac{d^2\phi}{dt^2}\cos(\theta - \phi) + m\ell^2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\sin(\theta - \phi) + \ell^2(m\Omega^2 - k)[\sin 2\theta + \sin \theta \cos \phi] - 2mg\ell \cos \theta = 0,$$

$$m\ell^2\frac{d^2\phi}{dt^2} + m\ell^2\frac{d^2\theta}{dt^2}\cos(\theta - \phi) - m\ell^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\sin(\theta - \phi) + \frac{\ell^2}{2}(m\Omega^2 - k)[\sin 2\phi + 2 \cos \theta \sin \phi] - mg\ell \cos \phi = 0.$$

Passiamo a provare che  $\mathcal{L}|_{\mathcal{R}} = \mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0}$ . Nel riferimento  $\mathcal{R}$  l'energia cinetica è semplicemente (basta porre  $\Omega = 0$  nell'espressione per l'energia cinetica calcolata in  $\mathcal{R}_0$ )

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{R}} = m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}\ell^2\dot{\phi}^2 + m\ell^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta - \phi),$$

inoltre, oltre alle forze attive vere e conservative che appaiono anche in  $\mathcal{R}_0$  esistono le forze inerziali centrifuga e di Coriolis. Queste ultime, applicate in  $P$  e  $Q$  sono dirette lungo  $\mathbf{e}_y$  dato che deve essere perpendicolare sia alla velocità dei punti in  $\mathcal{R}$  (che giace nel piano  $x, z$ ) che al vettore  $\Omega \mathbf{e}_z$ . Dato che le componenti lagrangiane delle forze di Coriolis si ottengono dalla moltiplicazione scalare di queste forze per  $\frac{\partial P}{\partial \theta}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial \theta}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial \phi}$  il risultato è sempre nullo dato che questi vettori giacciono nel piano  $x, z$ . Come conseguenza abbiamo in particolare che anche nel riferimento non inerziale la dinamica è completamente descritta da una lagrangiana senza dover aggiungere componenti lagrangiane di forze non conservative ai secondi membri delle equazioni di Eulero-Lagrange. La forza centrifuga è conservativa ed ha un'energia potenziale pari a quella di una molla con costante elastica negativa  $-m\Omega^2$  attaccata all'asse di rotazione, alla quota dei punti che subiscono tale forza:

$$\mathcal{U}^{(cent)}|_{\mathcal{R}} = -\frac{m\Omega^2}{2}[\cos^2 \theta + (\cos \theta + \cos \phi)^2].$$

Concludiamo che anche nel riferimento  $\mathcal{R}$  il sistema è completamente descritto da una lagrangiana, che avrà la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}|_{\mathcal{R}} = & m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}\ell^2\dot{\phi}^2 + m\ell^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta - \phi) + \frac{m\ell^2\Omega^2}{2}[\cos^2 \theta + (\cos \theta + \cos \phi)^2] \\ & - \frac{k\ell^2}{2}[\cos^2 \theta + (\cos \theta + \cos \phi)^2] + mg\ell[2\sin \theta + \sin \phi]. \end{aligned} \quad (1.346)$$

Per confronto con (1.345) abbiamo subito che  $\mathcal{L}|_{\mathcal{R}} = \mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0}$ .

(2) Consideriamo la lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{R}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{R}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}$  data in (1.346), dove:

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{R}} = m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}\ell^2\dot{\phi}^2 + m\ell^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta - \phi),$$

ed energia potenziale totale in  $\mathcal{R}$

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{R}} = \frac{\ell^2}{2}(k - m\Omega^2)[\cos^2 \theta + (\cos \theta + \cos \phi)^2] - mg\ell[2\sin \theta + \sin \phi].$$

È chiaro che  $\mathcal{L}|_{\mathcal{R}}$  non dipende esplicitamente dal tempo e quindi la funzione di Hamilton  $\mathcal{H}$  associata è un integrale primo per la prima parte del teorema di Jacobi. D'altra parte, nel riferimento  $\mathcal{R}$ , i vincoli non dipendono dal tempo e le coordinate libere sono solidali con tale riferimento. La seconda parte del teorema di Jacobi implica allora che  $\mathcal{H} = \mathcal{E}|_{\mathcal{R}}$  energia meccanica calcolata nel riferimento  $\mathcal{R}$ : la somma di energia cinetica e dell'energia potenziale di tutte le forze attive conservative che agiscono sul sistema in  $\mathcal{R}$ . Il calcolo diretto con la definizione di funzione di Hamilton o la semplice somma di energia cinetica ed energia potenziale in  $\mathcal{R}$  produce:

$$\mathcal{H} = m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}\ell^2\dot{\phi}^2 + m\ell^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta - \phi) + \frac{\ell^2}{2}(k - m\Omega^2)[\cos^2 \theta + (\cos \theta + \cos \phi)^2] - mg\ell[2\sin \theta + \sin \phi]. \quad (1.347)$$

Nel caso in cui  $k = m\Omega^2$  e  $g = 0$ , la lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{R}}$  si semplifica in

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{R}} = m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}\ell^2\dot{\phi}^2 + m\ell^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta - \phi)$$

Se passiamo in coordinate  $\Theta = (\theta + \phi)/2$  e  $\Phi = (\theta - \phi)/2$ , senza eseguire il calcolo, è evidente che  $\mathcal{L}|_{\mathcal{R}}$  non risulterà funzione di  $\Theta$  e di conseguenza il momento coniugato associato sarà un integrale primo  $I = \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{R}}}{\partial \Theta}$ . Dato che  $\theta = \Theta + \Phi$  e  $\phi = \Theta - \Phi$ , alterando  $\Theta \rightarrow \Theta + \Delta\Theta$  i due punti ruotano rigidamente di  $\Delta\Theta$  attorno all'asse  $y$  in  $\mathcal{R}$  perché l'angolo tra  $Q-P$  e  $P-O$  vale  $\phi - \theta$  (o  $\pi + (\theta - \phi)$  a seconda di quale si considera) ed è pertanto costante se alteriamo  $\theta$  e  $\phi$  della stessa costante additiva  $\Delta\Theta$ . La coordinata  $\Theta$  è quindi una coordinata rotazionale attorno all'asse  $y$ . Per noti teoremi l'integrale primo  $I$  associato a  $\Theta$  è dunque (a meno del segno) la componente lungo  $\mathbf{e}_y$  del momento angolare totale del sistema di punti valutato in  $\mathcal{R}$  rispetto al polo  $O$ .

(3) Dato che il sistema è completamente descritto dalla lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{R}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{R}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}$  con  $\mathcal{U}|_{\mathcal{R}}$  energia potenziale e si lavora in coordinate libere solidali con  $\mathcal{R}$  stesso, le configurazioni di equilibrio rispetto a  $\mathcal{R}$  si ottengono come punti singolari della funzione energia potenziale (dove abbiamo posto  $g = 0$  come richiesto):

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{R}}(\theta, \phi) = \frac{\ell^2}{2}(k - m\Omega^2)[\cos^2\theta + (\cos\theta + \cos\phi)^2].$$

Annullando il gradiente di tale funzione tenendo conto che  $\frac{\ell^2}{2}(k - m\Omega^2) \neq 0$  per ipotesi, abbiamo le equazioni:

$$(2\cos\theta + \cos\phi)\sin\theta = 0, \quad (\cos\theta + \cos\phi)\sin\phi = 0.$$

Le soluzioni si ottengono annullando i fattori delle due equazioni facendo tutti i casi possibili. Annullando simultaneamente i fattori  $\sin\theta$  e  $\sin\phi$  abbiamo la prima classe di 4 configurazioni di equilibrio

$$(\theta, \phi) = (0, 0), (0, \pi), (\pi, 0), (\pi, \pi)$$

Annullando  $\sin\theta$  nella prima equazione e  $\cos\theta + \cos\phi$  nella seconda equazione, abbiamo la seconda classe di 2 configurazioni di equilibrio

$$(\theta, \phi) = (0, \pi), (\pi, 0)$$

Annullando  $\sin\phi$  nella seconda equazione e  $2\cos\theta + \cos\phi$  nella prima equazione, abbiamo la terza classe di 4 soluzioni

$$(\theta, \phi) = (\pm\pi/3, \pi), (\pm 2\pi/3, 0)$$

Annullando  $2\cos\theta + \cos\phi$  nella prima equazione e  $\cos\theta + \cos\phi$  nella seconda troviamo la quarta classe di 4 soluzioni:

$$(\theta, \phi) = (\pm\pi/2, \pm\pi/2).$$

Per studiare la stabilità possiamo studiare gli autovalori della matrice Hessiana. Consideriamo la configurazione  $(\theta, \phi) = (0, 0)$  in cui i punti  $P$  e  $Q$  sono allineati (sull'asse  $x$ ). In tale configurazione (scriviamo  $\mathcal{U}$  al posto di  $\mathcal{U}|_{\mathcal{R}}$  per semplicità):

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta \partial \phi} \Big|_{(0,0)} = \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \phi \partial \theta} \Big|_{(0,0)} = \ell^2 (k - m\Omega^2) \sin \theta \sin \phi \Big|_{(0,0)} = 0$$

mentre

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta^2} \Big|_{(0,0)} = -\ell^2 (k - m\Omega^2) (2 \cos 2\theta + \cos \phi \cos \theta) \Big|_{(0,0)} = -3\ell^2 (k - m\Omega^2)$$

e

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \phi^2} \Big|_{(0,0)} = -\ell^2 (k - m\Omega^2) (\cos \theta \cos \phi + \cos 2\phi) \Big|_{(0,0)} = -2\ell^2 (k - m\Omega^2).$$

Pertanto la matrice Hessiana risulta essere diagonale e le ultime due derivate scritte sono i suoi autovalori. La conclusione è che la configurazione  $(\theta, \phi) = (0, 0)$  è stabile nel passato e nel futuro se  $m\Omega^2 > k$  per il teorema di Lagrange-Dirichlet ed è instabile nel passato e nel futuro se  $m\Omega^2 < k$  per un teorema noto (essendo il sistema completamente determinato da una lagrangiana del tipo  $\mathcal{T} - \mathcal{U}$  senza presenza di componenti lagrangiane di forze non conservative a secondo membro delle equazioni di Eulero-Lagrange). Il caso  $m\Omega^2 = k$  è già stato escluso per ipotesi.

(4) La lagrangiana (1.346) ha la struttura

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{R}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^t M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}(\mathbf{q})$$

dove  $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{\theta}, \dot{\phi})^t$  e la matrice simmetrica  $M(\mathbf{q})$  è definita da

$$M(\mathbf{q}) := m\ell^2 \begin{bmatrix} 2 & \cos(\theta - \phi) \\ \cos(\theta - \phi) & 1 \end{bmatrix}.$$

La trasformazione di Legendre si può scrivere come, se  $\mathbf{p} = (p_\theta, p_\phi)^t$ ,

$$\mathbf{p} = M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}},$$

e quindi la sua inversa è

$$\dot{\mathbf{q}} = M(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{p}, \tag{1.348}$$

dove, per esempio applicando la regola di Cramer

$$M(\mathbf{q})^{-1} := \frac{1}{m\ell^2(2 - \cos^2(\theta - \phi))} \begin{bmatrix} 1 & -\cos(\theta - \phi) \\ -\cos(\theta - \phi) & 2 \end{bmatrix}.$$

La funzione di Hamilton come sappiamo dal punto (2) è

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^t M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}(\mathbf{q}) \tag{1.349}$$

Dato che vale la (1.348), sostituendo (1.348) in (1.349) abbiamo che in variabili di Hamilton:

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}(M(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{p})^t M(\mathbf{q})M(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{p} + \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\mathbf{p}^t M(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{p} + \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}(\mathbf{q}).$$

Cioè, dato che  $M(\mathbf{q})^{-1}$  è simmetrica,

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}\mathbf{p}^t M(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{p} + \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}(\mathbf{q}).$$

Esplicitando l'ovvio calcolo,

$$\mathcal{H}(\theta, \phi, p_\theta, p_\phi) = \frac{p_\theta^2 + 2p_\phi^2 - 2p_\theta p_\phi \cos(\theta - \phi)}{2m\ell^2(2 - \cos^2(\theta - \phi))} + \frac{\ell^2}{2}(k - m\Omega^2)[\cos^2 \theta + (\cos \theta + \cos \phi)^2] - mgl[2 \sin \theta + \sin \phi].$$

### ESERCIZIO 31

Si consideri la terna di assi ortonormali destrorsi  $x, y, z$  nel sistema di riferimento *non inerziale*  $\mathcal{R}$ . Un punto materiale  $P_1$  di massa  $m > 0$  nota può muoversi lungo la curva di equazione  $y = 0$ ,  $z = ax^3/3$ , dove  $a > 0$  è un parametro noto. Un secondo punto materiale  $P_2$  ancora della stessa massa  $m$  si può muovere lungo l'asse  $z$ , i vincoli sono supposti ideali. Il sistema  $\mathcal{R}$  ruota attorno all'asse  $z$  con velocità angolare uniforme  $\Omega \mathbf{e}_z$  dove  $\Omega > 0$  è nota, rispetto al *riferimento inerziale*  $\mathcal{R}_0$ . Sui due punti agiscono le seguenti forze vere oltre alle reazioni vincolari:

(i) la forza di una molla ideale di peso nullo, lunghezza nulla a riposo e costante elastica  $k > 0$  nota che unisce i due punti;

(ii) la forza di gravità  $-mg \mathbf{e}_z$ , dove  $g > 0$  è nota.

(iii) la forza viscosa  $-\gamma \mathbf{v}_{P_2}|_{\mathcal{R}}$  che agisce solo su  $P_2$ , dove  $\gamma \geq 0$  è nota.

Usando come coordinate libere la quota  $z$  di  $P_2$  e l'ascissa  $x$  di  $P_1$ , si risolvano i seguenti problemi.

(1) Provare che  $\mathcal{L}|_{\mathcal{R}} = \mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0}$  e scrivere le equazioni di E-L del sistema verificando che risultino le stesse nei due sistemi di riferimento. Si scriva infine la formula che determina la reazione vincolare su  $P_2$  in funzione di  $x$  e  $z$ .

(2) Provare che, se  $\gamma = 0$ , esiste un integrale primo e spiegarne il significato fisico. Mostrare che se  $\gamma > 0$  la funzione trovata cessa di essere un integrale primo.

(3) Determinare le configurazioni di equilibrio rispetto al riferimento  $\mathcal{R}$  in funzione dei parametri  $m, a, k, \Omega, g > 0$  e  $\gamma \geq 0$ . Si dimostri che esiste sempre una configurazione di equilibrio stabile per una scelta opportuna dei valori dei parametri suddetti ed una instabile per altri valori. Si calcolino le reazioni vincolari sui due punti materiali quando i due punti sono fermi in  $\mathcal{R}$  in una configurazione di equilibrio a scelta.

(4) Per  $\gamma = 0$  si risponda ai seguenti quesiti.

(i) Si supponga di tenere fissi tutti i parametri  $a > 0, m > 0, g > 0, k > 0$  e di fare crescere  $\Omega > 0$  con valori sempre più grandi. Cosa possiamo concludere riguardo alla stabilità delle configurazioni di equilibrio quando  $\Omega$  è abbastanza grande? (Es. sono tutte stabili, tutte instabili, alcune stabili ed altre instabili.)

(ii) Si supponga di tenere fissi tutti i parametri  $a > 0, m > 0, g > 0, \Omega > 0$  e di fare crescere  $k > 0$  con valori sempre più grandi. Cosa possiamo concludere riguardo alla stabilità delle configurazioni di equilibrio quando  $k$  è abbastanza grande? (Es. sono tutte stabili, tutte instabili, alcune stabili ed altre instabili.)

(5) Per  $\gamma = 0$  si passi in formulazione di Hamilton scrivendo la trasformazione di Legendre, la funzione di Hamilton e le equazioni di Hamilton del sistema.

**Soluzione.**

(1) Nel riferimento  $\mathcal{R}$  la velocità di  $P_1$  è

$$\mathbf{v}_1|_{\mathcal{R}} = \dot{x} \mathbf{e}_x + ax^2 \dot{x} \mathbf{e}_z$$

per cui, applicando le formue di cambiamento di riferimento,

$$\mathbf{v}_1|_{\mathcal{R}_0} = \dot{x} \mathbf{e}_x + ax^2 \dot{x} \mathbf{e}_z + \Omega x \mathbf{e}_y .$$

L'energia cinetica in  $\mathcal{R}_0$  è quindi, tenendo anche conto dell'energia cinetica di  $P_2$ ,

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{R}_0} = \frac{m}{2} [\dot{z}^2 + \dot{x}^2(1 + ax^2)^2 + \Omega^2 x^2] .$$

L'energia potenziale è data dalla somma dell'energia gravitazionale e di quella della molla:

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{R}_0} = mg[z + ax^3/3] + \frac{k}{2} [x^2 + (z - ax^3/3)^2] .$$

Concludiamo che la lagrangiana nel riferimento  $\mathcal{R}_0$  ha la forma

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0} = \frac{m}{2} [\dot{z}^2 + \dot{x}^2(1 + ax^2)^2 + \Omega^2 x^2] - mg[z + ax^3/3] - \frac{k}{2} [x^2 + (z - ax^3/3)^2] .$$

Nel riferimento  $\mathcal{R}$ , oltre alle forze attive già considerate, appaiono anche la forza di Coriolis e la forza centrifuga. La prima non è conservativa ed ha componenti lagrangiane nulle, come si verifica subito, dato che è sempre perpendicolare a  $\mathbf{v}_i|_{\mathcal{R}}$  e quindi è normale alle due guide. La forza centrifuga è conservativa ed ha un'energia potenziale pari a quella di una molla repulsiva di costante  $-\Omega^2 m$  attaccata all'asse  $z$  sempre alla stessa quota del punto che la subisce. Pertanto  $P_2$  non risente di tale forza mentre per  $P_1$  bisogna tenere conto dell'energia potenziale

$$-m\Omega^2 x^2/2 .$$

In altre parole, dato che,

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{R}} = \frac{m}{2} [x^2(1 + ax^2)^2 + \dot{z}^2] ,$$

abbiamo, come richiesto:

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{R}} = \frac{m}{2} [x^2(1 + ax^2)^2 + \dot{z}^2] - mg[z + ax^3/3] - \frac{k}{2} [x^2 + (z - ax^3/3)^2] + \frac{m}{2} \Omega^2 x^2 = \mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0} .$$

Tenedo conto che la forza viscosa ha solo componente lagrangiana

$$\mathcal{Q}_z = -\gamma \mathbf{v}_2|_{\mathcal{R}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial z} = -\gamma \dot{z} ,$$

Le due equazioni di E-L non banali sono allora:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0}}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0}}{\partial z} = -\gamma \dot{z}$$

e

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0}}{\partial x} = 0.$$

Concretamente:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + \gamma \frac{dz}{dt} + mg + k(z - ax^3/3) = 0$$

e

$$m(1 + a^2 x^4) \frac{d^2 x}{dt^2} + 2max^3 \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + mga x^2 + (k - m\Omega^2)x - k(z - ax^3/3) = 0.$$

Nel riferimento  $\mathcal{R}$  l'equazione newtoniana del moto per  $P_2$  è

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} \mathbf{e}_z = -mg \mathbf{e}_z - k((z - ax^3/3) \mathbf{e}_z - x \mathbf{e}_x) - m\Omega \mathbf{e}_z \wedge (\Omega \mathbf{e}_z \wedge z \mathbf{e}_z) - 2m\Omega \mathbf{e}_z \wedge \frac{dz}{dt} \mathbf{e}_z + \phi$$

che si semplifica in

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} \mathbf{e}_z = -mg \mathbf{e}_z - k((z - ax^3/3) \mathbf{e}_z - x \mathbf{e}_x) + \phi_x \mathbf{e}_x + \phi_y \mathbf{e}_y - \gamma \frac{dz}{dt} \mathbf{e}_z + \phi_z \mathbf{e}_z.$$

Decomponendo sui tre assi ed usando l'equazione di Eulero-Lagrange per la variabile  $z$  concludiamo che:

$$\phi_x = -kx, \quad \phi_y = 0, \quad \phi_z = 0.$$

**(2)** Osserviamo che  $\mathcal{L}|_{\mathcal{R}}$  non dipende esplicitamente dal tempo. Se le componenti lagrangiane delle forze non conservative sono nulle, possiamo applicare il teorema di Jacobi e concludere che esiste un integrale primo dato dalla funzione di Hamilton  $\mathcal{H}$ . Nel riferimento  $\mathcal{R}$  i vincoli sono indipendenti dal tempo e le coordinate sono solidali con i vincoli. Pertanto possiamo anche applicare la seconda parte del teorema di Jacobi concludendo che  $\mathcal{H} = \mathcal{E}|_{\mathcal{R}}$ , l'energia meccanica totale in  $\mathcal{R}$ :

$$\mathcal{E}|_{\mathcal{R}} = \mathcal{H} = \frac{m}{2} [\dot{x}^2(1 + ax^2)^2 + \dot{z}^2] + mg[z + ax^3/3] + \frac{k}{2} [x^2 + (z - ax^3/3)^2] - \frac{m}{2} \Omega^2 x^2. \quad (1.350)$$

Nel riferimento  $\mathcal{R}_0$  i vincoli dipendono dal tempo per cui non si può arrivare alla stessa conclusione. Come ben noto, in caso di presenza di forze non conservative, nelle ipotesi fatte

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{\text{soluzioni E-L}} \mathcal{E}|_{\mathcal{R}} = \mathcal{Q}_z \dot{z} = -\gamma \dot{z}^2 \leq 0.$$

Quindi, se  $\gamma > 0$  la funzione trovata cessa di essere un integrale primo.

**(3)** Le configurazioni di equilibrio si ottengono come, come gli zeri del gradiente della funzione energia potenziale  $\mathcal{U}|_{\mathcal{R}}(x, z)$  (dato che le forze non conservative si annullano per  $\dot{x} = \dot{z} = 0$ ) con

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{R}}(x, z) = mg[z + ax^3/3] + \frac{k}{2} (z - ax^3/3)^2 + \frac{1}{2} (k - m\Omega^2)x^2$$

Vale

$$\frac{\partial \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}}{\partial z} = mg + k(z - ax^3/3)$$

da cui in particolare, annullando il secondo membro,  $(z - ax^3/3) = -\frac{mg}{k}$  e

$$\frac{\partial \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}}{\partial x} = mgax^2 + (k - m\Omega^2)x - ka(z - ax^3/3)x^2 .$$

Annullando i secondi membri e ricordando che  $(z - ax^3/3) = -\frac{mg}{k}$  nella seconda equazione, troviamo il sistema di equazioni in  $(x, z)$ :

$$z - ax^3/3 + \frac{mg}{k} = 0 , \quad mgax^2 + (k - m\Omega^2)x + mgax^2 = 0$$

le cui due soluzioni corrispondono ad altrettante configurazioni di equilibrio:

$$(x_1, z_1) = (0, -mg/k) , \quad (x_2, z_2) = \left( \frac{m\Omega^2 - k}{2mag} , \frac{(m\Omega^2 - k)^3}{24m^3a^2g^3} - mg/k \right) .$$

Per studiare la stabilità consideriamo la matrice Hessiana valutata nelle due soluzioni. Se entrambi gli autovalori sono positivi si ha stabilità nel futuro e nel passato, se almeno un autovalore è negativo abbiamo instabilità nel futuro e nel passato e se qualche autovalore è nullo non possiamo concludere nulla con i metodi elementari. Gli elementi della matrice Hessiana sono

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}}{\partial z^2} = k , \quad \frac{\partial^2 \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}}{\partial x \partial z} = -kax^2$$

e

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}}{\partial x^2} = (k - m\Omega^2) + 2magx - 2kax(z - ax^3/3) + ka^2x^4 .$$

Valutati sulla configurazione  $(x_1, z_1)$ , si trova:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}}{\partial z^2} = k , \quad \frac{\partial^2 \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}}{\partial x \partial z} = 0$$

e

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}}{\partial x^2} = (k - m\Omega^2) .$$

Quindi entrambi gli autovalori sono positivi se  $k > m\Omega^2$  e dunque, per  $\gamma = 0$ , tale configurazione è stabile nel passato e nel futuro nello stesso modo tale configurazione, sempre per  $\gamma = 0$ , è invece instabile se  $k < m\Omega^2$ . In questa configurazione, assunta come di quiete nel riferimento  $\mathcal{R}$ , le uniche forze agenti sono nella direzione verticale e pertanto si trovano immediatamente le reazioni vincolari sui due punti imponendo che la somma delle forze lungo  $z$  su ciascuno di essi sia nulla.

$$\phi_2 = (-mg + kmg/k) \mathbf{e}_z = 0 \mathbf{e}_z , \quad \phi_1 = -(-mg - kmg/k) \mathbf{e}_z = 2mg \mathbf{e}_z .$$

(4) Il calcolo diretto della traccia e del determinante della matrice Hessiana calcolata in  $(x_2, z_2)$  fornisce:

$$\text{tr}(H(x_2, z_2)) = m\Omega^2 + \frac{k}{16m^4a^2g^4}(m\Omega^2 - k)^4$$

e

$$\det(H(x_2, z_2)) = k(m\Omega^2 - k) + \frac{k^2}{16m^4a^2g^4}(m\Omega^2 - k)^4 - \frac{k^2}{16m^4a^2g^4}(m\Omega^2 - k)^4 = k(m\Omega^2 - k).$$

È allora evidente che se teniamo fissi tutti i parametri (a valori strettamente positivi) e facciamo crescere  $k \rightarrow +\infty$  allora  $\text{tr}(H(x_2, z_2)) \rightarrow +\infty$  e  $\det(H(x_2, z_2)) \rightarrow -\infty$ . Tenuto conto di quanto ottenuto in (3), si conclude che per  $k$  abbastanza grande un autivalore di  $H(x_2, z_2)$  è positivo e l'altro è negativo e pertanto la configurazione di equilibrio  $(x_2, z_2)$  è, differentemente da  $(x_1, z_1)$ , instabile nel futuro e nel passato. È anche chiaro che se teniamo fissi tutti i parametri (a valori strettamente positivi) e facciamo crescere  $\Omega \rightarrow +\infty$  allora abbiamo ancora  $\text{tr}(H(x_2, z_2)) \rightarrow +\infty$  e  $\det(H(x_2, z_2)) \rightarrow +\infty$ . Tenuto conto di quanto ottenuto in (3), si conclude che per  $\Omega$  abbastanza grande entrambi gli autovalori di  $H(x_2, z_2)$  sono positivi e pertanto la configurazione di equilibrio  $(x_2, z_2)$  è stabile nel futuro e nel passato. Viceversa la configurazione  $(x_1, z_1)$  risulta essere instabile come si evince dal calcolo svolto nel punto (3).

(5) La trasformazione di Legendre è

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m(1 + ax^2)^2 \dot{x}, \quad p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

da cui, usando l'espressione già trovata per la funzione di hamilton (1.350):

$$\mathcal{H} = \frac{p_x^2}{2m(1 + ax^2)^2} + \frac{p_z^2}{2m} + mg[z + ax^3/3] + \frac{k}{2} [x^2 + (z - ax^3/3)^2] - \frac{m}{2} \Omega^2 x^2.$$

Le equazioni di Hamilton sono quindi, le due banali che hanno solo informazioni cinematiche,

$$\frac{dx}{dt} = \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} = \right) \frac{p_x}{m(1 + ax^2)^2}, \quad \frac{dz}{dt} = \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_z} = \right) \frac{p_z}{m}$$

e quelle che includono la dinamica:

$$\frac{dp_x}{dt} = \left( -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = \right) \frac{axp_x^2}{m(1 + ax^2)^3} - mga^2x^2 - k - (m\Omega^2)x + k(z - ax^3/3)ax^2$$

$$\frac{dp_z}{dt} = \left( -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = \right) -mg - k(z - ax^3/3).$$

### ESERCIZIO 32

Si consideri una terna ortonormale destrorsa  $x, y, z$  di origine  $O$  in quiete nel sistema di riferimento  $\mathcal{R}$ . Un punto materiale  $P$  di massa  $m > 0$  nota si può muovere lungo l'asse  $x$  privo di attrito. Un secondo punto materiale  $Q$  è connesso a  $P$  tramite un'asta rigida senza peso di lunghezza  $\ell > 0$  assegnata e può muoversi rimanendo nel piano  $xz$ . Tutti i vincoli sono supposti ideali. Il riferimento  $\mathcal{R}$  ruota con velocità angolare costante  $\Omega > 0$  nota attorno all'asse  $z$  rispetto ad un sistema di riferimento inerziale  $\mathcal{R}_0$ . Sui due punti agiscono le seguenti forze vere attive:

- (a) la forza peso  $-mg \mathbf{e}_z$  dove  $g > 0$  è nota;
- (b) la forza di una molla ideale di peso nullo, lunghezza nulla a riposo e con costante elastica  $k > 0$  nota che connette  $Q$  e  $O$ ;
- (c) la forza di una molla ideale di peso nullo, lunghezza nulla a riposo e con costante elastica ancora  $k > 0$  che connette  $P$  e  $O$ ;
- (d) una forza viscosa  $\mathbf{f} = -\gamma \mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}}$  agente su  $P$  e dove  $\gamma \geq 0$ .

Usando le due coordinate libere:  $s \in \mathbb{R}$  data dall'ascissa di  $P$  lungo  $x$  e l'angolo  $\theta \in (-\pi, \pi]$  che il segmento  $Q - P$  individua rispetto ad un asse verticale per  $P$  parallelo all'asse  $z$  e diretto verso il basso, si risolvano i seguenti quesiti.

(1) Si scrivano le lagrangiane del sistema di punti materiali sia nel riferimento  $\mathcal{R}$  che nel riferimento  $\mathcal{R}_0$  e si verifichi che sono uguali. Si scrivano quindi le equazioni di Eulero-Lagrange dedotte da tali lagrangiane.

(2) Per  $\gamma = 0$  si determini un integrale primo del sistema e se ne spieghi il significato fisico. Si calcoli la derivata temporale di tale funzione valutata su un moto del sistema quando  $\gamma > 0$  mostrando che risulta essere non positiva.

(3) Assumendo  $k = m\Omega^2$ , si discuta al variare dei valori dei parametri ( $m, k, \ell, g > 0, \gamma \geq 0$ ) se esistono soluzioni del problema del moto della forma  $s(t) = at + b$  e  $\theta(t) = c$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$  e opportuni valori delle costanti  $a, b, c \in \mathbb{R}$  da determinarsi.

(4) Assumendo sia  $\gamma = 0$  che  $k = m\Omega^2$ , si determinino le configurazioni di equilibrio del sistema di punti rispetto al riferimento  $\mathcal{R}$  al variare dei valori dei parametri  $m, \ell, k, g > 0$  e se ne studi la stabilità (si tenga conto del punto 3).

(5) Per  $\gamma = 0$  si passi in formulazione di Hamilton con i seguenti passi:

- (i) scrivere la trasformazione di Legendre che esprime  $(p_s, p_\theta)$  in funzione di  $(\dot{s}, \dot{\theta})$  (a  $s$  e  $\theta$  fissati);
- (ii) invertire tale trasformazione ottenendo  $(\dot{s}, \dot{\theta})$  in funzione di  $(p_s, p_\theta)$  (a  $s$  e  $\theta$  fissati);
- (iii) scrivere la funzione di Hamilton  $\mathcal{H}$  espressa nelle variabili hamiltoniane  $s, \theta, p_s, p_\theta$ .

**Soluzione.** (1) Valgono le identità

$$P - O = s \mathbf{e}_x, \quad Q - O = (s + \ell \sin \theta) \mathbf{e}_x - \ell \cos \theta \mathbf{e}_z$$

che producono immediatamente le velocità nel riferimento  $\mathcal{R}$  dei due punti:

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} = \dot{s} \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{v}_Q|_{\mathcal{R}} = (\dot{s} + \dot{\theta} \ell \cos \theta) \mathbf{e}_x + \ell \dot{\theta} \sin \theta \mathbf{e}_z \quad (1.351)$$

da cui si trova subito l'energia cinetica

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{R}} = m\dot{s}^2 + \frac{m}{2}\dot{\theta}^2 \ell^2 + m\ell\dot{s}\dot{\theta} \cos \theta. \quad (1.352)$$

Nel riferimento  $\mathcal{R}$  le forze attive sono tutte conservative eccetto la forza viscosa e quella di Coriolis. L'energia potenziale delle forze conservative è pari alla somma dell'energia potenziale gravitazionale, quella delle due molle e quella centrifuga rappresentate dai tre addendi del secondo membro della formula seguente:

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{R}} = -mgl \cos \theta + \frac{k}{2} (s^2 + (s + \ell \sin \theta)^2 + \ell^2 \cos^2 \theta) - \frac{m\Omega^2}{2} (s^2 + (s + \ell \sin \theta)^2)$$

cioè

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{R}} = -mgl \cos \theta + \frac{k - m\Omega^2}{2} (s^2 + (s + \ell \sin \theta)^2) + \frac{k}{2} \ell^2 \cos^2 \theta. \quad (1.353)$$

Concludiamo che la lagrangiana in  $\mathcal{R}$  è data da

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{R}} = m\dot{s}^2 + \frac{m}{2}\dot{\theta}^2 \ell^2 + m\ell\dot{s}\dot{\theta} \cos \theta + mgl \cos \theta - \frac{k - m\Omega^2}{2} (s^2 + (s + \ell \sin \theta)^2) - \frac{k}{2} \ell^2 \cos^2 \theta \quad (1.354)$$

Passiamo alla lagrangiana valutata nel riferimento inerziale  $\mathcal{R}_0$ . Vale come ben noto:

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}_0} = \mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} + \Omega \mathbf{e}_z \wedge (P - O), \quad \mathbf{v}_Q|_{\mathcal{R}_0} = \mathbf{v}_Q|_{\mathcal{R}} + \Omega \mathbf{e}_z \wedge (Q - O)$$

da cui

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}_0} = \dot{s} \mathbf{e}_x + \Omega s \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{v}_Q|_{\mathcal{R}_0} = (\dot{s} + \dot{\theta} \ell \cos \theta) \mathbf{e}_x + \Omega (s + \ell \sin \theta) \mathbf{e}_y + \ell \dot{\theta} \sin \theta \mathbf{e}_z. \quad (1.355)$$

quadrando ciascuno dei due vettori, moltiplicando il risultato per  $m/2$  si ha l'espressione dell'energia cinetica in  $\mathcal{R}_0$  che, con qualche calcolo, risulta essere

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{R}_0} = m\dot{s}^2 + \frac{m}{2}\dot{\theta}^2 \ell^2 + m\ell\dot{s}\dot{\theta} \cos \theta + \frac{m\Omega^2}{2} (s^2 + (s + \ell \sin \theta)^2). \quad (1.356)$$

Nel riferimento inerziale  $\mathcal{R}_0$  le forze attive sono tutte conservative non appare la forza centrifuga, pertanto l'energia potenziale è la stessa che in  $\mathcal{R}$  togliendo la parte dovuta alla forza centrifuga:

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{R}_0} = -mgl \cos \theta + \frac{k}{2} (s^2 + (s + \ell \sin \theta)^2 + \ell^2 \cos^2 \theta). \quad (1.357)$$

È evidente, confrontando le espressioni trovate per le energie cinetiche ed energie potenziali, che le lagrangiane nei due sistemi di riferimento sono identiche:

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{R}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{R}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{R}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{R}_0} - \mathcal{U}|_{\mathcal{R}_0} = \mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0} .$$

Passando a discutere le equazioni di Eulero-Lagrange, se deve osservare che nel riferimento  $\mathcal{R}$  appare una forza non conservativa che non appare in  $\mathcal{R}_0$ : la forza di Coriolis, di cui bisogna tenere conto nelle equazioni di E.-L. tramite componenti lagrangiane. Tuttavia le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono nulle dato che essa è perpendicolare alle velocità in  $\mathcal{R}$  per sua stessa definizione, che significa in particolare perpendicolare al piano  $xz$ , mentre  $\frac{\partial P}{\partial s}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial s}$  e  $\frac{\partial Q}{\partial \theta}$  sono paralleli a tale piano dato che sono derivate di curve che giacciono in tale piano. Le componenti lagrangiane della forza viscosa (che appare sia in  $\mathcal{R}$  che in  $\mathcal{R}_0$  essendo una forza vera) applicata su  $P$  sono invece, usando (1.351) in particolare,

$$\mathcal{Q}_s = \frac{\partial P}{\partial s} \cdot (-\gamma \mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}}) = -\gamma \dot{s} , \quad \frac{\partial P}{\partial \theta} \cdot (-\gamma \mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}}) = 0 . \quad (1.358)$$

Possiamo a questo punto scrivere le equazioni di Eulero Lagrange indifferentemente in  $\mathcal{R}$  o in  $\mathcal{R}_0$ , essendo sicuri che risulteranno le stesse dato che le lagrangiane sono identiche e le componenti lagrangiane non nulle delle forze non conservative anche. Usando la lagrangiana (1.354) e l'espressione (1.358) per le componenti lagrangiane della forza viscosa troviamo, per la coppia di equazioni banali:  $\dot{s} = \frac{ds}{dt}$  e  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$  e per le rimanenti due:

$$2m \frac{d^2 s}{dt^2} + m\ell \frac{d}{dt} \dot{\theta} \cos \theta = (m\Omega^2 - k)(2s + \ell \sin \theta) - \gamma \dot{s} \quad (1.359)$$

e

$$m\ell^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + m\ell \frac{d}{dt} \dot{s} \cos \theta = -m\ell \dot{s} \dot{\theta} \sin \theta - mgl \sin \theta + \ell(m\Omega^2 - k)((s + \ell \sin \theta) \cos \theta) + k\ell^2 \sin \theta \cos \theta . \quad (1.360)$$

**(2)** Nel riferimento  $\mathcal{R}$  la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo per cui esiste una funzione dell'atto di moto, l'integrale primo di Jacobi  $\mathcal{H}$ , che si conserva sui moti del sistema quando tutte le forze attive sono conservative, cioè  $\gamma = 0$ . Possiamo trascurare la forza di Coriolis dato che non prende parte alle equazioni di E-L avendo componenti lagrangiane nulle come visto sopra. In tale riferimento i vincoli non dipendono esplicitamente dal tempo e le coordinate libere sono solidali con  $\mathcal{R}$ , la seconda parte del teorema di Jacobi assicura allora che l'integrale primo di Jacobi coincida con l'energia meccanica totale in  $\mathcal{R}$ :  $\mathcal{H} = \mathcal{T}|_{\mathcal{R}} + \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}$  e quindi da (1.353) e (1.352)

$$\mathcal{H} = m\dot{s}^2 + \frac{m}{2} \dot{\theta}^2 \ell^2 + m\ell \dot{\theta} \dot{s} \cos \theta - mgl \cos \theta + \frac{k - m\Omega^2}{2} (s^2 + (s + \ell \sin \theta)^2) + \frac{k}{2} \ell^2 \cos^2 \theta . \quad (1.361)$$

Nel caso in cui  $\gamma > 0$ , da un teorema noto sappiamo che

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} |_{\text{soluzioni EL}} = \sum_k \mathcal{Q}_k \dot{q}^k = \mathcal{Q}_s \dot{s} = -\gamma \dot{s}^2 \leq 0 ,$$

dove abbiamo usato (1.358).

(3) Nel caso  $m\Omega^2 = k$  le equazioni del moto si semplificano in:

$$2m \frac{d^2 s}{dt^2} + m\ell \frac{d}{dt} \dot{\theta} \cos \theta = -\gamma \dot{s} \quad (1.362)$$

e

$$m\ell^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + m\ell \frac{d}{dt} \dot{s} \cos \theta = -m\ell \dot{s} \dot{\theta} \sin \theta - mgl \sin \theta + k\ell^2 \sin \theta \cos \theta. \quad (1.363)$$

Sostituendo forme di soluzione del tipo  $s(t) = at + b$  e  $\theta(t) = c$  con  $a, b, c$  costanti, troviamo che deve essere:

$$0 = -\gamma a \quad (1.364)$$

e

$$0 = -mgl \sin c + k\ell^2 \sin c \cos c. \quad (1.365)$$

Ricordiamo che  $m, g, \ell, k > 0$  mentre  $\gamma \geq 0$  (e anche che  $\Omega = \sqrt{k/m}$  è fissato). Supponiamo che funzioni del del tipo detto siano soluzioni, allora devono soddisfare le equazioni del moto. Imponendo ciò abbiamo i seguenti casi.

**Se**  $\gamma > 0$ , l'unica possibilità nella prima equazione è  $a = 0$ . Nella seconda equazione deve invece essere, dato che  $\ell > 0$ ,

$$\sin c(mg - k\ell \cos c) = 0$$

e abbiamo le seguenti soluzioni:  $c = 0, \pi$  sempre alle quali si aggiungono  $c = \pm \arccos(\frac{mg}{k\ell})$  se  $\frac{mg}{k\ell} \leq 1$ . La costante  $b$  può essere scelta arbitrariamente in  $\mathbb{R}$ .

**Se**  $\gamma = 0$ , la prima equazione fornisce  $\forall a \in \mathbb{R}$ . Nella seconda equazione deve ancora essere essendo  $\ell > 0$ ,

$$\sin c(mg - k\ell \cos c) = 0$$

e abbiamo di nuovo le seguenti soluzioni:  $c = 0, \pi$  sempre alle quali si aggiungono  $c = \pm \arccos(\frac{mg}{k\ell})$  se  $\frac{mg}{k\ell} \leq 1$ . La costante  $b$  può essere scelta arbitrariamente in  $\mathbb{R}$ . È chiaro che ogni scelta dei valori vista produce una soluzione procedendo a ritroso nelle formule, pertanto abbiamo trovato tutti e soli i casi possibili per  $a, b, c$ .

(4) Le configurazioni di equilibrio in  $\mathcal{R}$ , per  $\gamma = 0$  (e  $m\Omega^2 = k$ ) si ottengono annullando il gradiente di

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{R}} = -mgl \cos \theta + \frac{k}{2} \ell^2 \cos^2 \theta.$$

Ciò sono le soluzioni  $(s_0, \theta_0)$  d el sistema

$$\frac{\partial \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}}{\partial s} \Big|_{(s_0, \theta_0)} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}}{\partial \theta} \Big|_{(s_0, \theta_0)} = 0.$$

Dato che  $\mathcal{U}|_{\mathcal{R}}$  non dipende da  $s$  concludiamo che  $s_0$  è qualunque numero in  $\mathbb{R}$ . La seconda equazione esplicitata fornisce

$$-mgl \sin \theta_0 + k\ell^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 = 0,$$

che abbiamo studiato sopra ed ha soluzioni:  $\theta_0 = 0, \pi$  sempre alle quali si aggiungono  $\theta_0 = \pm \arccos(\frac{mg}{k\ell})$  se  $\frac{mg}{k\ell} \leq 1$ . Le configurazioni di equilibrio sono pertanto per ogni scelta di  $s_0 \in \mathbb{R}$ ,  $(s_0, 0)$ ,  $(s_0, \pi)$  alle quali si aggiungono  $(s_0, \arccos(\frac{mg}{k\ell}))$ ,  $(s_0, -\arccos(\frac{mg}{k\ell}))$  quando  $\frac{mg}{k\ell} \leq 1$ . La stabilità è facile da studiare se si applica direttamente la definizione altrimenti risulta essere indecidibile, eccetto il caso in cui l'unico elemento non nullo della partice hessiana sia negativo che attesta instabilità nel passato e nel futuro, se si vuole usare il criterio degli autovalori della matrice Hessiana di dell'energia potenziale. È chiaro invece che tutte queste configurazioni di equilibrio sono instabili perché, per il risultato del punto (3) nel caso  $\gamma = 0$ , possiamo sempre trovare un moto della forma  $s(t) = at + s_0$ ,  $\theta(t) = \theta_0$  che per tempi sufficientemente grandi nel futuro o nel passato esce da qualunque intorno dell'atto di moto  $(s_0, \theta_0, 0, 0)$  pur essendo, per  $t = 0$ , arbitrariamente vicino a  $(s_0, \theta_0, 0, 0)$  scegliendo la velocità  $a$  piccola a piacere ma non nulla.

(5) La lagrangiana (1.354) ha la struttura

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{R}} = \dot{\mathbf{q}}^t M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}(\mathbf{q})$$

dove  $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{s}, \dot{\theta})^t$  e la matrice simmetrica  $M(\mathbf{q})$  è definita da

$$M(\mathbf{q}) := m \begin{bmatrix} 1 & \frac{\ell}{2} \cos \theta \\ \frac{\ell}{2} \cos \theta & \frac{\ell^2}{2} \end{bmatrix}.$$

La trasformazione di Legendre si può scrivere come, se  $\mathbf{p} = (p_s, p_\theta)^t$ ,

$$\mathbf{p} = 2M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}},$$

e quindi la sua inversa è

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}M(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{p}, \quad (1.366)$$

dove, per esempio applicando la regola di Cramer

$$M(\mathbf{q})^{-1} := \frac{4}{m\ell^2(2 - \cos^2 \theta)} \begin{bmatrix} \frac{\ell^2}{2} & -\frac{\ell}{2} \cos \theta \\ -\frac{\ell}{2} \cos \theta & 1 \end{bmatrix}.$$

La funzione di Hamilton come sappiamo dal punto (2) è

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^t M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}(\mathbf{q}) \quad (1.367)$$

Dato che vale la (1.348), sostituendo (1.366) in (1.367) abbiamo che in variabili di Hamilton:

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{4}(M(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{p})^t M(\mathbf{q}) M(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{p} + \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}(\mathbf{q}) = \mathbf{p}^t M(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{p} + \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}(\mathbf{q}).$$

Cioè, dato che  $M(\mathbf{q})^{-1}$  è simmetrica,

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{4}\mathbf{p}^t M(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{p} + \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}(\mathbf{q}).$$

Esplicitando l'ovvio calcolo,

$$\mathcal{H}(s, \theta, p_s, p_\theta) = \frac{p_s^2 + \frac{2}{\ell^2} p_\theta^2 - \frac{2}{\ell} p_\theta p_\phi \cos \theta}{2m(2 - \cos^2 \theta)} - mg\ell \cos \theta + \frac{k - m\Omega^2}{2} (s^2 + (s + \ell \sin \theta)^2) + \frac{k}{2} \ell^2 \cos^2 \theta.$$

### ESERCIZIO 33

Si consideri un sistema di assi ortonormali  $xyz$ , destrorsi di origine  $O$ , solidali con il riferimento *non* inerziale  $\mathcal{R}$ . Due punti materiali  $P$  e  $P'$ , entrambi di massa  $m > 0$  nota, sono rispettivamente vincolati a muoversi su due circonferenze  $\Gamma$  e  $\Gamma'$  prive di attrito e di equazione  $\Gamma: x^2 + z^2 = R^2, y = 0$  e  $\Gamma': x^2 + z^2 = 4R^2, y = 0$ , dove  $R > 0$  è noto.

Il riferimento  $\mathcal{R}$  ruota rispetto al riferimento inerziale  $\mathcal{R}_0$  con  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}|\mathcal{R}_0} = \Omega \mathbf{e}_z$ , dove  $\Omega > 0$  è una costante assegnata.

Sui punti  $P$  e  $P'$  agiscono le seguenti forze attive vere:

(i) la forza di una molla ideale di peso nullo, lunghezza nulla a riposo e costante  $k > 0$  nota che congiunge  $P$  e  $P'$ ;

(ii) la forza peso  $-mg \mathbf{e}_z$  con  $g \geq 0$  nota che agisce su  $P$  e  $P'$

(iii) la forza viscosa  $-\gamma \mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}}$  che agisce sul punto  $P$ , dove  $\gamma \geq 0$  è assegnato.

Usando come coordinate libere gli angoli polari  $\theta \in [-\pi, \pi]$  e  $\theta' \in [-\pi, \pi]$  che rispettivamente  $P - O$  e  $P' - O$  individuano rispetto a  $\mathbf{e}_x$  si risolvano i seguenti quesiti.

**(1)** (a) Calcolare la lagrangiana del sistema in  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}_0$  mostrando che sono uguali. (b) Dimostrare che in  $\mathcal{R}$  la forza di Coriolis ha componenti lagrangiane nulle. (c) Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange del sistema di punti.

**(2)** Provare che, se  $\gamma = 0$ , esiste un integrale primo e spiegarne il significato fisico in relazione ai riferimenti considerati. Dimostrare che, se  $\gamma > 0$ , la funzione trovata cessa di essere un integrale primo.

**(3)** (a) Dire tra le seguenti configurazioni quali sono configurazioni di equilibrio rispetto a  $\mathcal{R}$  assumendo  $g = 0$  ed al variare di  $m, \Omega, k, R > 0$  e  $\gamma \geq 0$ :

$(\theta, \theta') = (0, 0), (\pi/4, -\pi/4), (\pi, 0), (\pi/2, -\pi/2)$ .

(b) Per  $g = \gamma = 0$ , studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio determinate sopra al variare di  $m, \Omega, k, R > 0$ .

**(4)** (a) Per  $\gamma = 0$ , scrivere la trasformazione di Legendre, passare in formulazione di Hamilton e scrivere le equazioni di Hamilton del sistema. (b) Provare, usando la formulazione di Hamilton direttamente, che la funzione di Hamilton è un integrale primo senza usare il teorema di Jacobi lagrangiano.

**Soluzione** (1)(a) Calcoliamo  $\mathcal{L}|_{\mathcal{R}}$ . I vettori posizione di  $P$  e  $P'$  in  $\mathcal{R}$  sono dati da

$$P - O = R \cos \theta \mathbf{e}_x + R \sin \theta \mathbf{e}_z, \quad P' - O = 2R \cos \theta' \mathbf{e}_x + 2R \sin \theta' \mathbf{e}_z \quad (1.368)$$

da cui si ricava

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} = \dot{\theta}R(-\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_z), \quad \mathbf{v}_{P'}|_{\mathcal{R}} = 2R\dot{\theta}'(-\sin \theta' \mathbf{e}_x + \cos \theta' \mathbf{e}_z). \quad (1.369)$$

Quadrando, sommando e moltiplicando per  $m/2$  abbiamo subito che

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{R}} = \frac{mR^2}{2}(\dot{\theta}^2 + 4\dot{\theta}'^2).$$

L'energia potenziale è somma dell'energia potenziale della molla, gravitazionale e di quella dovuta alla forza centrifuga. Partiamo dalla prima.

$$\mathcal{U}^{(molla)}|_{\mathcal{R}} = \frac{k}{2}(P - P')^2 = \frac{kR^2}{2}[(\cos \theta - 2 \cos \theta')^2 + (\sin \theta' - 2 \sin \theta')^2] = \frac{kR^2}{2}(5 - 4 \cos(\theta - \theta'))$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che

$$\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' = \cos(\theta - \theta')$$

e dell'identità trigonometrica fondamentale  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ . Possiamo nel seguito trascurare la costante additiva  $\frac{5kR^2}{2}$ . Il potenziale delle forze gravitazionali è dato da

$$\mathcal{U}^{(grav)}|_{\mathcal{R}} = mgR(\sin \theta + 2 \sin \theta').$$

La forza centrifuga è conservativa come è noto, quando  $\omega$  è costante, ed ha energia potenziale pari a quella di una molla repulsiva di costante  $-m\Omega^2$  attaccata all'asse di rotazione alla stessa altezza dei punti che subiscono la forza centrifuga:

$$\mathcal{U}^{(cent)}|_{\mathcal{R}} = -\frac{m\Omega^2}{2}R^2(\cos^2 \theta + 4 \cos^2 \theta').$$

Mettendo tutti insieme i contributi, trascurando costanti additive, la lagrangiana in  $\mathcal{R}$  risulta essere

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{R}} = \frac{mR^2}{2}(\dot{\theta}^2 + 4\dot{\theta}'^2) + 2kR^2 \cos(\theta - \theta') - mgR(\sin \theta + 2 \sin \theta') + \frac{m\Omega^2}{2}R^2(\cos^2 \theta + 4 \cos^2 \theta'). \quad (1.370)$$

Passiamo al calcolo della lagrangiana nel riferimento inerziale  $\mathcal{R}_0$ . In questo caso, applicando le solute formule per il calcolo della velocità al variare del riferimento,

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}_0} = \mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} + \Omega \mathbf{e}_z \wedge (P - O), \quad \mathbf{v}_{P'}|_{\mathcal{R}_0} = \mathbf{v}_{P'}|_{\mathcal{R}} + \Omega \mathbf{e}_z \wedge (P' - O)$$

dove, tenendo conto di (1.368) e (1.369), abbiamo subito che

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}_0} = \dot{\theta}R(-\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_z) + \Omega R \cos \theta \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{v}_{P'}|_{\mathcal{R}_0} = 2R\dot{\theta}'(-\sin \theta' \mathbf{e}_x + \cos \theta' \mathbf{e}_z) + \Omega 2R \cos \theta' \mathbf{e}_y. \quad (1.371)$$

Quadrando, moltiplicando per  $m/2$  e sommando abbiamo l'energia cinetica in  $\mathcal{R}_0$ :

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{R}_0} = \frac{mR^2}{2}(\dot{\theta}^2 + 4\dot{\theta}'^2) + \frac{m\Omega^2}{2}R^2(\cos^2\theta + 4\cos^2\theta').$$

Nel sistema di riferimento  $\mathcal{R}_0$  le forze attive conservative sono quella gravitazionale e quella della molla che hanno la stessa rispettiva energia potenziale che abbiamo ricavato in  $\mathcal{R}$ . La lagrangiana calcolata nel riferimento  $\mathcal{R}_0$  risulterà quindi essere la stessa che nel riferimento  $\mathcal{R}$  con un semplice riordinamento dei termini che assumono anche significato fisico diverso (l'energia potenziale della forza centrifuga in  $\mathcal{R}$  risulta essere parte dell'energia cinetica in  $\mathcal{R}_0$ ):

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0} = \frac{mR^2}{2}(\dot{\theta}^2 + 4\dot{\theta}'^2) + \frac{m\Omega^2}{2}R^2(\cos^2\theta + 4\cos^2\theta') + 2kR^2 \cos(\theta - \theta') - mgR(\sin\theta + 2\sin\theta') = \mathcal{L}|_{\mathcal{R}}.$$

(b) La forza di Coriolis  $\mathbf{f}^{(Coriolis)}$  agisce in  $\mathcal{R}$  su  $P$  e  $P'$  e, per definizione, ha direzione perpendicolare al piano che contiene  $\Omega \mathbf{e}_z$  e  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}}$  (rispettivamente  $\mathbf{v}_{P'}|_{\mathcal{R}}$ ). In altre parole, tenendo conto di (1.369),  $\mathbf{f}_P^{(Coriolis)}$  e  $\mathbf{f}_{P'}^{(Coriolis)}$  sono dirette lungo  $\mathbf{e}_y$  (con segno arbitrario ed eventualmente possono anche essere nulle). Tenendo conto di (1.368) troviamo allora:

$$\mathcal{Q}_\theta^{(Coriolis)} = \frac{\partial P - O}{\partial \theta} \cdot \mathbf{f}_P^{(Coriolis)} + \frac{\partial P' - O}{\partial \theta} \cdot \mathbf{f}_{P'}^{(Coriolis)} = 0 + \mathbf{0} \cdot \mathbf{f}_{P'}^{(Coriolis)} = 0$$

e

$$\mathcal{Q}_{\theta'}^{(Coriolis)} = \frac{\partial P - O}{\partial \theta'} \cdot \mathbf{f}_P^{(Coriolis)} + \frac{\partial P' - O}{\partial \theta'} \cdot \mathbf{f}_{P'}^{(Coriolis)} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{f}_P^{(Coriolis)} + 0 = 0.$$

(c) Le equazioni di Eulero-Lagrange si ottengono tenendo anche conto delle componenti lagrangiane della forza viscosa che agisce solo su  $P$ :

$$\mathcal{Q}_\theta = -\gamma \mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} \cdot \frac{\partial P - O}{\partial \theta} = -\gamma R^2 \dot{\theta}, \quad \mathcal{Q}_{\theta'} = -\gamma \mathbf{v}_{P'}|_{\mathcal{R}} \cdot \frac{\partial P - O}{\partial \theta'} = 0. \quad (1.372)$$

e risultano essere, con i soliti calcoli ed usando una delle due lagrangiane (uguali) trovate:

$$mR^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -2kR^2 \sin(\theta - \theta') - mgR \cos\theta - m\Omega^2 R^2 \sin\theta \cos\theta - \gamma R^2 \frac{d\theta}{dt},$$

$$4mR^2 \frac{d^2\theta'}{dt^2} = 2kR^2 \sin(\theta - \theta') - 2mgR \cos\theta' - 4m\Omega^2 R^2 \sin\theta \cos\theta'.$$

(2) Se  $\gamma = 0$  il sistema è completamente descritto dalla lagrangiana (1.370) (la forza di Coriolis può essere totalmente ignorata dato che ha componenti lagrangiane nulle). In tal caso possiamo applicare la prima parte del teorema di Jacobi che ci assicura che la funzione di Hamilton  $\mathcal{H}$  ricavata da  $\mathcal{L}|_{\mathcal{R}}$  (che coincide con quella ricavata da  $\mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0} = \mathcal{L}|_{\mathcal{R}}$  ovviamente) è un integrale primo. Dato che i vincoli nel riferimento  $\mathcal{R}$  sono indipendenti dal tempo e le coordinate lagrangiane sono solidali con  $\mathcal{R}$ , tenuto conto del fatto che la Lagrangiana è della forma  $\mathcal{T}|_{\mathcal{R}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}$  con  $\mathcal{U}|_{\mathcal{R}}$  energia potenziale di tutte le forze conservative, la seconda parte del teorema di Jacobi prova che  $\mathcal{H} = \mathcal{E}|_{\mathcal{R}} := \mathcal{T}|_{\mathcal{R}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}$ , cioè la funzione di Hamilton coincide

con l'energia meccanica totale valutata nel riferimento non inerziale. Si osservi che tale fatto è falso se si rimpiazza  $\mathcal{R}$  con  $\mathcal{R}_0$ . Nel caso in cui  $\gamma \neq 0$  e quindi le equazioni di E-L hanno a secondo membro il contributo di  $\mathcal{Q}_\theta$ , come sappiamo dalla teoria, vale l'identità

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H} |_{\text{soluzioni eq. E.L.}} = \sum_{k=1}^n \dot{q}^k \mathcal{Q}_k^{(n.c.)}.$$

Nel caso in esame il secondo memebro vale  $-\gamma R \dot{\theta}^2$  per (1.372) e pertanto  $\mathcal{H}$  cessa di essere un integrale primo, perché sul moto generico abbiamo che  $\dot{\theta} \neq 0$  insieme a  $\gamma \neq 0$  per ipotesi.

(3)(a) Le configurazioni di Equilibrio nel riferimento  $\mathcal{R}$ , rispetto al quale le coordinate sono solidali, sono date dai punti  $(\theta_0, \theta'_0)$  tali che, presi  $(\theta_0, \theta'_0)$  come condizioni iniziali insieme a  $(\dot{\theta}(0), \dot{\theta}'(0)) = (0, 0)$ , le uniche soluzioni del problema del moto siano la  $(\theta(t), \theta'(t)) = (\theta_0, \theta'_0)$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Come noto dalla teoria, visto che la lagrangiana ha la struttura  $\mathcal{T}|_{\mathcal{R}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}$  con  $\mathcal{U}|_{\mathcal{R}}$  energia potenziale di tutte le forze conservative e che l'unica forza non conservativa che appare nelle equazioni di E.L. ha componenti lagrangiane che si annullano per  $(\dot{\theta}(0), \dot{\theta}'(0)) = (0, 0)$ , dal teorema di unicità delle soluzioni di problema di Cauchy, le configurazioni di equilibrio risultano essere tutte e sole quelle che annullano il gradiente dell'energia potenziale. Sappiamo che, per  $g = 0$

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{R}}(\theta, \theta') = -2kR^2 \cos(\theta - \theta') - \frac{m\Omega^2}{2} R^2 (\cos^2 \theta + 4 \cos^2 \theta'). \quad (1.373)$$

da cui abbiamo

$$\frac{\partial \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}}{\partial \theta} = 2kR^2 \sin(\theta - \theta') + \frac{m\Omega^2}{2} R^2 \sin 2\theta$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}}{\partial \theta'} = -2kR^2 \sin(\theta - \theta') + 2m\Omega^2 R^2 \sin 2\theta'$$

dove abbiamo sfruttato la nota identità  $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$ . Le configurazioni di equilibrio devono quindi soddisfare le richieste

$$0 = 2kR^2 \sin(\theta_0 - \theta'_0) + \frac{m\Omega^2}{2} R^2 \sin 2\theta_0$$

e

$$0 = -2kR^2 \sin(\theta_0 - \theta'_0) + 2m\Omega^2 R^2 \sin 2\theta'_0.$$

Le candidate configurazioni di equilibrio  $(\theta_0, \theta'_0) = (0, 0), (\pi, 0), (\pi/2, -\pi/2)$  soddisfano le due identità scritte comunque fissiamo  $R, m, \Omega, k > 0$  e  $\gamma \geq 0$ . Invece, per  $(\theta_0, \theta'_0) = (\pi/4, -\pi/4)$ , troviamo

$$0 = 2kR^2 \sin(\pi/2) + \frac{m\Omega^2}{2} R^2 \sin(\pi/2)$$

e

$$0 = -2kR^2 \sin(\pi/2) - 2m\Omega^2 R^2 \sin(\pi/2).$$

Cioè, dato che  $R^2 \neq 0$  e  $\sin(\pi/2) = 1$

$$0 = 2k + \frac{m\Omega^2}{2}$$

e

$$0 = -2k - 2m\Omega^2.$$

Sommando membro a membro vediamo subito che dovrebbe allora essere  $-3m^2\Omega^2/2 = 0$ , che però non è possibile per ipotesi essendo  $m, \Omega \neq 0$ . Quindi  $(\theta_0, \theta'_0) = (\pi/4, -\pi/4)$  non può essere configurazione di equilibrio comunque si scelgano i parametri  $R, m, \Omega, k > 0$  e  $\gamma \geq 0$ .

(b) Per l'analisi della la stabilità a  $\gamma = 0$  possiamo studiare gli autovalori  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  della matrice hessiana di  $\mathcal{U}|_{\mathcal{E}}$  nelle tre configurazioni di equilibrio considerate. Ricordando che  $\det H = \lambda_1 \lambda_2$  e  $\text{tr} H = \lambda_1 + \lambda_2$  possiamo studiarne gli autovalori riferendoci al segno del determinante e della traccia della matrice hessiana. Da (1.373) abbiamo subito:

$$H(\theta, \theta') = \begin{bmatrix} 2kR^2 \cos(\theta - \theta') + m\Omega^2 R^2 \cos(2\theta) & -2kR^2 \cos(\theta - \theta') \\ -2kR^2 \cos(\theta - \theta') & 2kR^2 \cos(\theta - \theta') + 4m\Omega^2 R^2 \cos(2\theta') \end{bmatrix}.$$

Sostituendo le configurazioni suddette abbiamo quando segue.

$$H(0, 0) = \begin{bmatrix} 2kR^2 + m\Omega^2 R^2 & -2kR^2 \\ -2kR^2 & 2kR^2 + 4m\Omega^2 R^2 \end{bmatrix},$$

da cui  $\text{tr} H(0, 0) = R^2(4k + 5m\Omega^2) > 0$  e  $\det H(0, 0) = 2R^4 m\Omega^2(2m\Omega^2 + 5k) > 0$  comunque scegliamo  $R, m, \Omega, k > 0$ . Concludiamo che entrambi gli autovalori di  $H(0, 0)$  sono sempre positivi e quindi  $(0, 0)$  è configurazione di equilibrio stabile nel passato e nel futuro.

$$H(\pi, 0) = \begin{bmatrix} -2kR^2 + m\Omega^2 R^2 & 2kR^2 \\ 2kR^2 & -2kR^2 + 4m\Omega^2 R^2 \end{bmatrix},$$

da cui  $\text{tr} H(\pi, 0) = R^2(-4k + 5m\Omega^2)$  e  $\det H(\pi, 0) = 2R^4 m\Omega^2(2m\Omega^2 - 5k)$  per  $R, m, \Omega, k > 0$ . Quindi  $\text{tr} H(\pi, 0) \geq 0$  se e solo se  $k \leq 5m\Omega^4/4$ , mentre  $\det H(\pi, 0) \geq 0$  se e solo se  $k \leq 2m\Omega^4/5$ . Concludiamo che,

(i) se  $k < 2m\Omega^2/5$  vale  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$  e  $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$  e quindi entrambi gli autovalori sono positivi: la configurazione  $(\pi, 0)$  è stabile nel passato e nel futuro;

(ii) se  $k = 2m\Omega^2/5$  vale  $\lambda_1 \lambda_2 = 0$  e quindi almeno un autovalore è nullo e  $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$ : un autovalore è nullo e l'altro è positivo. In tal caso, con i teoremi a disposizione, non possiamo concludere nulla sulla stabilità di  $(\pi, 0)$ ;

(iii) se  $2m\Omega^2/5 < k$  vale  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$  e quindi un autovalore è negativo e l'altro è positivo: la configurazione  $(\pi, 0)$  è instabile nel passato e nel futuro.

$$H(\pi/2, -\pi/2) = \begin{bmatrix} -2kR^2 - m\Omega^2 R^2 & 2kR^2 \\ 2kR^2 & -2kR^2 - 4m\Omega^2 R^2 \end{bmatrix}.$$

In questo caso  $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}H(\pi/2, -\pi/2) < 0$  comunque scegliamo  $R, m, \Omega, k > 0$ . Almeno un autovalore è sempre negativo e quindi la configurazione  $(\pi/2, -\pi/2)$  è instabile nel passato e nel futuro.

(3) La funzione di Hamilton, come sappiamo dal punto (2), coincide con l'energia meccanica totale in  $\mathcal{R}$ . Quindi, usando variabili di Lagrange,

$$\mathcal{H}(\theta, \theta', \dot{\theta}, \dot{\theta}') = \frac{mR^2}{2}(\dot{\theta}^2 + 4\dot{\theta}'^2) - 2kR^2 \cos(\theta - \theta') + mgR(\sin \theta + 2 \sin \theta') - \frac{m\Omega^2}{2}R^2(\cos^2 \theta + 4 \cos^2 \theta').$$

La trasformazione di Legendre si ricava subito dalla (1.370):

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{R}}}{\partial \dot{\theta}} = mR^2 \dot{\theta}, \quad p_{\theta'} = \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{R}}}{\partial \dot{\theta}'} = 4mR^2 \dot{\theta}'.$$

Invertendola banalmente ed inserendo la funzione inversa nell'espressione trovata per la funzione di Hamilton abbiamo che

$$\mathcal{H}(\theta, \theta', p_\theta, p_{\theta'}) = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{p_{\theta'}^2}{8mR^2} - 2kR^2 \cos(\theta - \theta') + mgR(\sin \theta + 2 \sin \theta') - \frac{m\Omega^2}{2}R^2(\cos^2 \theta + 4 \cos^2 \theta').$$

Le equazioni di Hamilton sono di conseguenza:

$$\frac{d\theta}{dt} \left( = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} \right) = \frac{p_\theta}{mR^2}, \quad \frac{d\theta'}{dt} \left( = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{\theta'}} \right) = \frac{p_{\theta'}}{4mR^2},$$

e

$$\begin{aligned} \frac{dp_\theta}{dt} \left( = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} \right) &= -2kR^2 \sin(\theta - \theta') - mgR \cos \theta - \frac{m\Omega^2 R^2}{2} \sin(2\theta) \\ \frac{dp_{\theta'}}{dt} \left( = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta'} \right) &= 2kR^2 \sin(\theta - \theta') - 2mgR \cos \theta' - 2m\Omega^2 R^2 \sin(2\theta'). \end{aligned}$$

(b) Sappiamo dalla teoria che nella formulazione di Hamilton (in variabili hamiltoniane) vale l'identità

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} \Big|_{\text{soluzione eq. Hamilton}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}.$$

Dato che  $\mathcal{H}(\theta, \theta', p_\theta, p_{\theta'})$  scritto sopra non dipende esplicitamente dal tempo abbiamo che  $\mathcal{H}$  è un integrale primo perché il secondo membro dell'identità di sopra è identicamente nullo.

### ESERCIZIO 34

Si consideri la terna di assi destrorsa  $xyz$  con origine  $O$  solidale con il riferimento *non* inerziale  $\mathcal{R}$  che ruota attorno all'asse  $z$  rispetto al riferimento inerziale  $\mathcal{R}_0$  con  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}|\mathcal{R}_0} = \Omega \mathbf{e}_z$ , dove  $\Omega > 0$  è costante ed assegnata.

Un punto materiale  $P$  di massa  $m > 0$  nota è libero di muoversi lungo la circonferenza liscia, di raggio  $R > 0$  noto in quiete in  $\mathcal{R}$ , di centro  $O$  e giacente nel piano verticale  $xz$ .

Su  $P$  agiscono le seguenti forze vere attive:

- (i) la forza peso  $-mg \mathbf{e}_z$  con  $g > 0$ ;
- (ii) la forza di una molla ideale di costante  $K > 0$  nota, peso nullo e lunghezza nulla a riposo, con un estremo in  $P$  e l'altro nel punto di coordinate  $(0, 0, R)$  (punto superiore di intersezione tra la circonferenza e l'asse  $z$ );
- (iii) la forza viscosa  $-\gamma \mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}}$ , dove  $\gamma \geq 0$  è una costante nota.

Usando come coordinata libera di  $P$  l'angolo  $\theta \in (-\pi, \pi)$  delle coordinate polari piane nel piano  $xz$  calcolata rispetto all'asse  $x$ , si risolvano i seguenti problemi.

**(1)** (a) Dimostrare che in  $\mathcal{R}$  la forza di Coriolis ha componenti lagrangiane nulle. (b) Calcolare la lagrangiana relativa al riferimento non inerziale  $\mathcal{R}$  verificando che coincide con quella calcolata rispetto a  $\mathcal{R}_0$ . (c) Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange per  $P$ .

**(2)** (a) Provare che, se  $\gamma = 0$ , esiste un integrale primo. (b) Spiegarne il significato fisico in relazione ai riferimenti considerati. (c) Provare che, se  $\gamma > 0$ , la funzione trovata cessa di essere integrale primo.

**(3)** Risolvere il problema del moto con le condizioni iniziali  $\theta(0) = -\pi/2$  e  $\dot{\theta}(0) = 0$ .

**(4)** (a) Determinare le configurazioni di equilibrio nel riferimento  $\mathcal{R}$  al variare dei valori dei parametri  $\Omega, m, K, R, g > 0$  assumendo  $\gamma = 0$ . (b) studiarne la stabilità al variare dei parametri  $\Omega, m, K, R, g > 0$  assumendo  $\gamma = 0$ . (c) Determinare le componenti della reazione vincolare  $\boldsymbol{\phi}$  rispetto alla terna  $x, y, z$  quando il punto  $P$  è fermo in una configurazione di equilibrio scelta a piacere.

**(5)** (a) Assumendo  $\gamma = 0$  scrivere la trasformazione di Legendre, passare in formulazione di Hamilton e (b) scrivere le equazioni di Hamilton del sistema. (c) Provare che la funzione di Hamilton trovata è un integrale primo senza tornare in formulazione di Lagrange ma usando la sola formulazione di Hamilton.

(1)(a) La forza di Coriolis in  $\mathcal{R}$  è proporzionale a  $\omega \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} = \Omega \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}}$ . Dato che il punto  $P$  è vincolato a rimanere nel piano  $xz$  la sua velocità  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}}$  giacerà in tale piano e pertanto la forza di Coriolis risulterà essere ortogonale a tale piano. D'altra parte  $\frac{\partial P}{\partial \theta}$  appartiene al piano  $xz$ , dato che il punto  $P$  è vincolato a rimanere in tale piano. Il prodotto scalare tra  $\frac{\partial P}{\partial \theta}$  e la forza di Coriolis è dunque zero. Tale prodotto scalare è la componente lagrangiana della forza di Coriolis. (b) La lagrangiana in  $\mathcal{R}$  ha la struttura

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{R}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{R}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}$$

dove l'energia cinetica è banalmente

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{R}} = \frac{m}{2} R^2 \dot{\theta}^2$$

mentre l'energia potenziale include tutte le forze attive conservative, quindi anche l'energia potenziale della forza centrifuga, che è pari a quella di una molla (repulsiva) di costante  $-m\Omega^2$ , attaccata con un estremo a  $P$  e con l'altro all'asse di rotazione  $z$  alla stessa quota di  $P$ :

$$-\frac{m\Omega^2}{2} R^2 \cos^2 \theta .$$

L'energia potenziale della forza di gravità è invece

$$mgz_P = mgR \sin \theta .$$

L'energia potenziale della molla è infine

$$\frac{1}{2} K \|P - (0, 0, R)\|^2 = \frac{K}{2} R^2 (\cos^2 \theta + (\sin \theta - 1)^2) = -KR^2 \sin \theta + C ,$$

dove la costante, che trascureremo, è:

$$C = \frac{K}{2} R^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + 1) = KR^2 .$$

In conclusione

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{R}} = \frac{m}{2} R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m\Omega^2}{2} R^2 \cos^2 \theta + (KR^2 - mgR) \sin \theta .$$

Per calcolare la lagrangiana rispetto a  $\mathcal{R}_0$  dobbiamo osservare che in esso non appare la forza centrifuga e l'energia cinetica è

$$\frac{m}{2} \mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}_0} = \frac{m}{2} (\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} + \Omega \mathbf{e}_z \wedge (P - O))^2 .$$

Dato che è

$$P - O = R \cos \theta \mathbf{e}_x + R \sin \theta \mathbf{e}_z ,$$

il calcolo diretto mostra che  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} \perp \Omega \mathbf{e}_z \wedge (P - O)$  e

$$(\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} + \Omega \mathbf{e}_z \wedge (P - O))^2 = R^2 \dot{\theta}^2 + mR^2 \Omega^2 \cos^2 \theta .$$

In definitiva

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{R}_0} = \frac{m}{2}R^2\dot{\theta}^2 + \frac{m\Omega^2}{2}R^2 \cos^2 \theta .$$

Pertanto, dato che i contributi all'energia potenziale in  $\mathcal{R}_0$  sono gli stessi che in  $\mathcal{R}$ , escludendo però l'energia potenziale della forza centrifuga, risulta:

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{R}} = \mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0} .$$

(c) Per scrivere le equazioni di Eulero Lagrange dobbiamo ancora tenere conto delle componenti lagrangiane delle forze attive. La forza di Coriolis non ha componenti lagrangiane in  $\mathcal{R}$  e non esiste in  $\mathcal{R}_0$ , mentre la forza viscosa ha componente lagrangiana

$$\mathcal{Q} = -\gamma \mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta} = -\gamma R^2 \dot{\theta} (\sin \theta \mathbf{e}_x - \sin \theta \mathbf{e}_y) \cdot (\sin \theta \mathbf{e}_x - \sin \theta \mathbf{e}_y) = -\gamma R^2 \dot{\theta} .$$

Le equazioni di E-L saranno allora:

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{R}}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{R}}}{\partial \theta} = -\gamma R^2 \dot{\theta} .$$

Esplicitamente:

$$mR^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma R^2 \frac{d\theta}{dt} + m\Omega^2 R^2 \sin \theta \cos \theta - (KR^2 - mgR) \cos \theta = 0 . \quad (1.374)$$

(2)(a) Se  $\gamma = 0$ , il sistema è completamente determinato da una lagrangiana che non dipende esplicitamente dal tempo. Per la prima parte del teorema di Jacobi esiste l'integrale primo di Jacobi dato da

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} - \mathcal{L} = \frac{m}{2}R^2\dot{\theta}^2 - \frac{m\Omega^2}{2}R^2 \cos^2 \theta - (KR^2 - mgR) \sin \theta , \quad (1.375)$$

dove  $\mathcal{L} = \mathcal{L}|_{\mathcal{R}} = \mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0}$ . (b) Il significato fisico di  $\mathcal{H}$  segue dalla seconda parte del teorema di Jacobi: in  $\mathcal{R}$  i vincoli sono indipendenti dal tempo (e invece dipendono dal tempo in  $\mathcal{R}_0$ ) e la coordinata  $\theta$  è solidale con  $\mathcal{R}$ . Da ciò segue che  $\mathcal{H} = \mathcal{E}|_{\mathcal{R}}$ , l'energia meccanica totale di  $P$  in  $\mathcal{R}$ . (c) Nel caso esistano componenti lagrangiane vale una ben nota relazione generale che nel nostro caso si specializza a:

$$\left. \frac{d\mathcal{H}}{dt} \right|_{\text{soluzione eq. E.L.}} = \dot{\theta} \mathcal{Q} = -\gamma R^2 \dot{\theta}^2 \leq 0 .$$

Pertanto, se  $\gamma > 0$ , la funzione di Hamilton cessa di essere un integrale primo perché, escluso il moto banale a  $\theta$  costante (in qualche configurazione di equilibrio se ne esistono) il secondo membro è non nullo.

(3) La funzione  $\theta(t) := -\pi/2$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$  soddisfa sia le condizioni iniziali che l'equazione differenziale (1.374): questa è dunque l'unica soluzione dato che l'equazione differenziale si

puó immediatamente riscrivere in forma normale e tutte le funzioni dote che appaiono sono infinitamente differenziabili (sono tutte costanti).

(4) (a) Dato che la coordinata  $\theta$  è solidale con  $\mathcal{R}$  in cui tutte le forze attive (che hanno componenti lagrangiane) sono date da un'energia potenziale le configurazioni di equilibrio rispetto a  $\mathcal{R}$  sono date da tutti e soli i punti di stazionarietà dell'energia potenziale:

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{R}}(\theta) = -\frac{m\Omega^2}{2}R^2 \cos^2 \theta - (KR^2 - mgR) \sin \theta .$$

Dobbiamo dunque trovare gli angoli  $\theta_0$  che, per  $m, R, g, \Omega > 0$ , risolvono:

$$\mathcal{U}'|_{\mathcal{R}}(\theta_0) = m\Omega^2 R^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 - (KR^2 - mgR) \cos \theta_0 = 0 .$$

Questa equivale a

$$[m\Omega^2 R^2 \sin \theta_0 - (KR^2 - mgR)] \cos \theta_0 = 0 .$$

Abbiamo dunque una prima coppia di soluzioni:

$$\theta_0^\pm := \pm\pi/2 .$$

siste anche una seconda coppia si trova da

$$\sin \theta_0 = \frac{KR - mg}{m\Omega^2 R} \tag{1.376}$$

ed è

$$\theta_0^> := \arcsin\left(\frac{KR - mg}{m\Omega^2 R}\right) , \quad \theta_0^< := \pi - \arcsin\left(\frac{KR - mg}{m\Omega^2 R}\right) \quad \text{ammesso che } \left|\frac{KR - mg}{m\Omega^2 R}\right| \leq 1 .$$

Per studiare la stabilità possiamo studiare il segno della derivata seconda nelle configurazioni di equilibrio trovate. Osservando che  $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin(2\theta)$ ,

$$\mathcal{U}''|_{\mathcal{R}}(\theta_0) = m\Omega^2 R^2 \cos(2\theta_0) + (KR^2 - mgR) \sin \theta_0 .$$

Valendo  $\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$ ,

$$\mathcal{U}''|_{\mathcal{R}}(\theta_0) = m\Omega^2 R^2 (1 - 2 \sin^2 \theta_0) + (KR^2 - mgR) \sin \theta_0 . \tag{1.377}$$

Concludiamo che

$$\mathcal{U}''|_{\mathcal{R}}(\theta_0^\pm) = -m\Omega^2 R^2 \pm (KR^2 - mgR)$$

e dunque:

$\theta_0^-$  è configurazione di equilibrio instabile (nel passato e nel futuro) se  $KR < m(g - \Omega^2 R)$  ed è invece stabile nel passato e nel futuro se  $KR > m(g - \Omega^2 R)$ . Non possiamo dire nulla nel caso rimasto con i teoremi a disposizione.

$\theta_0^+$  è stabile (nel passato e nel futuro) se  $KR > m(g + \Omega^2 R)$ , è instabile (nel passato e nel futuro) se  $KR < m(g + \Omega^2 R)$ . Non possiamo dire nulla nel caso rimasto con i teoremi a

disposizione.

Analogamente, usando (1.377) e (1.376),

$$\begin{aligned}\mathcal{U}|_{\mathcal{R}}''(\theta_0^{><}) &= m\Omega^2 R^2 \left( 1 - 2 \left( \frac{KR - mg}{m\Omega^2 R} \right)^2 \right) + R(KR - mg) \frac{KR - mg}{m\Omega^2 R} \\ &= m\Omega^2 R^2 \left( 1 - \frac{KR - mg}{m\Omega^2 R} \right).\end{aligned}$$

Tali configurazioni sono stabili se

$$KR - mg < m\Omega^2 R$$

e instabili se

$$KR - mg > m\Omega^2 R.$$

Osserviamo però che  $\theta_0^{><}$  esistono solo sotto le ipotesi

$$-1 \leq \frac{KR - mg}{m\Omega^2 R} \leq 1,$$

per il secondo caso (instabilità) non è ammesso. Il caso

$$\frac{KR - mg}{m\Omega^2 R} = 1.$$

non è decidibile con la teoria a disposizione.

(c) Calcoliamo la reazione vincolare quando il punto materiale  $P$  è fermo in  $\mathcal{R}$  nella configurazione di equilibrio stabile  $\theta_0^+ = \pi/2$ . In tal caso la forza della molla, quella centrifuga e quella di Coriolis sono nulle. Dato che l'accelerazione in  $\mathcal{R}$  di  $P$  è nulla, dalla seconda legge della dinamica, possiamo concludere che la somma delle due rimanenti forze  $\phi_P - mg \mathbf{e}_z$  deve essere nulla. Pertanto

$$\phi_P = -mh \mathbf{e}_z.$$

(5) (a) La trasformazione di Legendre produce

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mR^2 \dot{\theta}.$$

La funzione di Hamilton è data dunque da, esprimendo  $\dot{\theta}$  in funzione di  $p$ ,

$$\mathcal{H}(\theta, p) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} - \mathcal{L} = \frac{p^2}{2mR^2} - \frac{m\Omega^2}{2} R^2 \cos^2 \theta - (KR^2 - mgR) \sin \theta.$$

(b) Le equazioni di Hamilton sono allora

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{mR^2}$$

e

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -\frac{m\Omega^2}{2} R^2 \sin \theta \cos \theta + (KR^2 - mgR) \cos \theta .$$

(c) Dalla teoria generale:

$$\left. \frac{d\mathcal{H}}{dt} \right|_{\text{soluzione eq. Hamilton}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} .$$

Ma le stesse equazioni di Hamilton

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} , \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta}$$

se inserite nel secondo membro producono:

$$\left. \frac{d\mathcal{H}}{dt} \right|_{\text{soluzione eq. Hamilton}} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dp}{dt} - \frac{dp}{dt} \frac{d\theta}{dt} = 0 .$$

### ESERCIZIO 35

Si consideri la terna di assi destrorsa  $xyz$  con origine  $O$  solidale con il riferimento *non* inerziale  $\mathcal{R}$  che ruota attorno all'asse  $z$  rispetto al riferimento inerziale  $\mathcal{R}_0$  con  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}|\mathcal{R}_0} = \Omega \mathbf{e}_z$ , dove  $\Omega > 0$  è costante ed assegnata.

Un punto materiale  $P$  di massa  $m > 0$  nota è libero di muoversi lungo la retta di equazione  $z = x$  in quiete in  $\mathcal{R}$  giacente nel piano verticale  $xz$ . Un secondo punto  $Q$  ancora di massa  $m$  è libero di muoversi lungo a retta di equazione  $z = x + h$  in quiete in  $\mathcal{R}$  giacente nel piano verticale  $xz$  dove  $h > 0$  è una costante nota,

Su  $P$  e  $Q$  agiscono le seguenti forze vere attive:

- (i) la forza peso  $-mg \mathbf{e}_z$  con  $g > 0$  che agisce su entrambi;
- (ii) la forza di una molla ideale di costante  $K > 0$  nota, peso nullo e lunghezza nulla a riposo, con un estremo in  $P$  e l'altro in  $Q$ ;
- (iii) la forza viscosa  $-\gamma \mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}}$ , che agisce su  $P$ , dove  $\gamma \geq 0$  è una costante nota.

Usando come coordinata libera di  $P$  la sua ascissa  $x$  e come coordinata libera di  $Q$  la sua ascissa  $x'$ , si risolvano i seguenti problemi.

**(1)** (a) Dimostrare che in  $\mathcal{R}$  la forza di Coriolis (che agisce su entrambi i punti in  $\mathcal{R}$ ) ha componenti lagrangiane  $\mathcal{Q}_x^C = \mathcal{Q}_{x'}^C = 0$ . (b) Calcolare la lagrangiana relativa al riferimento non inerziale  $\mathcal{R}$  verificando che coincide con quella calcolata rispetto a  $\mathcal{R}_0$  (a meno eventualmente di costanti additive). (c) Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange per  $P$  e  $Q$ .

**(2)** (a) Provare che, se  $\gamma = 0$ , esiste un integrale primo. (b) Spiegarne il significato fisico in relazione ai riferimenti considerati. (c) Provare che, se  $\gamma > 0$ , la funzione trovata cessa di essere integrale primo.

**(3)** (a) Provare che, per  $\gamma = 0$  e con  $h, m, \Omega, K, g > 0$  non possono esistere soluzioni del problema del moto in cui  $x(t) = x'(t)$  per  $t$  che varia sull'intervallo dominio della soluzione (qualunque esso sia). (b) Provare che, per ogni scelta di  $\gamma \geq 0$  e  $h, m, \Omega, K, g > 0$ , non possono esistere configurazioni di equilibrio  $(x_0, x'_0)$  rispetto a  $\mathcal{R}$  tali che  $x_0 = x'_0$ .

**(4)** (a) Determinare le configurazioni di equilibrio nel riferimento  $\mathcal{R}$  al variare dei valori dei parametri  $\Omega, m, K, g > 0$  assumendo  $\gamma = 0$  e  $h = mg/K$ . (b) studiarne la stabilità al variare dei parametri  $\Omega, m, K, g > 0$  assumendo  $\gamma = 0$  e  $h = mg/K$ .

**(5)** (a) Assumendo  $\gamma = 0$  scrivere la trasformazione di Legendre, passare in formulazione di Hamilton e (b) scrivere le equazioni di Hamilton del sistema. (c) Provare che la funzione di Hamilton trovata è un integrale primo senza tornare in formulazione di Lagrange, ma usando la sola formulazione di Hamilton.

**SOLUZIONE**

(1)(a) La forza di Coriolis in  $\mathcal{R}$  su  $P$  è proporzionale a  $\omega \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} = \Omega \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}}$ . Dato che il punto  $P$  è vincolato a rimanere nel piano  $xz$  la sua velocità  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}}$  giacerà in tale piano e pertanto la forza di Coriolis risulterà essere ortogonale a tale piano. D'altra parte  $\frac{\partial P}{\partial x}$  appartiene al piano  $xz$ , dato che il punto  $P$  è vincolato a rimanere in tale piano. Il prodotto scalare tra  $\frac{\partial P}{\partial x}$  e la forza di Coriolis è dunque zero. Dato che  $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$  possiamo concludere che  $\mathcal{Q}_x^C = \mathbf{f}_P^{(C)} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \mathbf{f}_Q^{(C)} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ . Con un analogo ragionamento si verifica che  $\mathcal{Q}_{x'}^C = 0$

(b) La lagrangiana in  $\mathcal{R}$  ha la struttura

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{R}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{R}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}$$

dove l'energia cinetica è banalmente

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{R}} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{x}'^2)$$

mentre l'energia potenziale include tutte le forze attive conservative, quindi anche l'energia potenziale della forza centrifuga, che per  $P$  è pari a quella di una molla (repulsiva) di costante  $-m\Omega^2$ , attaccata con un estremo a  $P$  e con l'altro all'asse di rotazione  $z$  alla stessa quota di  $P$ . Per quanto riguarda  $Q$  vale un'analogia identità. L'energia potenziale centrifuga totale sarà allora:

$$-\frac{m\Omega^2}{2}(x^2 + x'^2).$$

L'energia potenziale totale della forza di gravità è invece

$$mg(z_P + z_Q) = mg(x + x') + C$$

dove la costante  $C = mgh$  sarà trascurata. L'energia potenziale della molla è infine

$$\frac{1}{2}K\|P - Q\|^2 = \frac{K}{2}((x - x')^2 + (x - x' - h)^2) = K(x - x')^2 - Kh(x - x') + C,$$

dove la costante  $C$  sarà trascurata. In conclusione

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{R}} = m(\dot{x}^2 + \dot{x}'^2) + \frac{m\Omega^2}{2}(x^2 + x'^2) - K(x - x')^2 + Kh(x - x') - mg(x + x').$$

Per calcolare la lagrangiana rispetto a  $\mathcal{R}_0$  dobbiamo osservare che in esso non appare la forza centrifuga e l'energia cinetica di  $P$  è

$$\frac{m}{2}\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}_0} = \frac{m}{2}(\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} + \Omega \mathbf{e}_z \wedge (P - O))^2.$$

Dato che è

$$P - O = x \mathbf{e}_x + x \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} = \dot{x}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z)$$

il calcolo diretto mostra che  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} \perp \Omega \mathbf{e}_z \wedge (P - O)$  e

$$(\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} + \Omega \mathbf{e}_z \wedge (P - O))^2 = 2\dot{x}^2 + \Omega^2 x^2.$$

Nello stesso modo si trova

$$Q - O = x' \mathbf{e}_x + (x' + h) \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} = \dot{x}'(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z)$$

e dunque

$$(\mathbf{v}_Q|_{\mathcal{R}} + \Omega \mathbf{e}_z \wedge (Q - O))^2 = 2\dot{x}'^2 + \Omega^2 x'^2.$$

In definitiva:

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{R}_0} = m(\dot{x}^2 + \dot{x}'^2) + \frac{m\Omega^2}{2}(x^2 + x'^2).$$

Pertanto, dato che i contributi all'energia potenziale in  $\mathcal{R}_0$  sono gli stessi che in  $\mathcal{R}$ , escludendo però l'energia potenziale della forza centrifuga, risulta:

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{R}} = \mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0}.$$

(c) Per scrivere le equazioni di Eulero Lagrange dobbiamo ancora tenere conto delle componenti lagrangiane delle forze attive. La forza di Coriolis non ha componenti lagrangiane in  $\mathcal{R}$  e non esiste in  $\mathcal{R}_0$ , mentre la forza viscosa ha componente lagrangiana

$$\mathcal{Q}_x = -\gamma \mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} \cdot \frac{\partial P}{\partial \dot{x}} = -\gamma \dot{x}, \quad \mathcal{Q}_{x'} = -\gamma \mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} \cdot \frac{\partial P}{\partial \dot{x}'} = 0.$$

Le equazioni di E-L saranno allora:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{R}}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{R}}}{\partial x} = -\gamma \dot{x}, \quad (1.378)$$

$$\frac{dx'}{dt} = \dot{x}', \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{R}}}{\partial \dot{x}'} - \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{R}}}{\partial x'} = 0. \quad (1.379)$$

Esplicitamente:

$$2m \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} - m\Omega^2 x + 2K(x - x') - Kh + mg = 0. \quad (1.380)$$

$$2m \frac{d^2 x'}{dt^2} - m\Omega^2 x' - 2K(x - x') + Kh + mg = 0. \quad (1.381)$$

(2)(a) Se  $\gamma = 0$ , il sistema è completamente determinato da una lagrangiana che non dipende esplicitamente dal tempo. Per la prima parte del teorema di Jacobi esiste l'integrale primo di Jacobi dato da

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \dot{x} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}'} \dot{x}' - \mathcal{L} = m(\dot{x}^2 + \dot{x}'^2) - \frac{m\Omega^2}{2}(x^2 + x'^2) + K(x - x')^2 - Kh(x - x') + mg(x + x'), \quad (1.382)$$

dove  $\mathcal{L} = \mathcal{L}|_{\mathcal{R}} = \mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0}$ . (b) Il significato fisico di  $\mathcal{H}$  segue dalla seconda parte del teorema di Jacobi: in  $\mathcal{R}$  i vincoli sono indipendenti dal tempo (e invece dipendono dal tempo in  $\mathcal{R}_0$ ) e le coordinate  $x, x'$  sono solidali con  $\mathcal{R}$ . Da ciò segue che  $\mathcal{H} = \mathcal{E}|_{\mathcal{R}}$ , l'energia meccanica totale di

$P$  in  $\mathcal{R}$ . (c) Nel caso esistano componenti lagrangiane vale una ben nota relazione generale che nel nostro caso si specializza a:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} \Big|_{\text{soluzione eq. E.L.}} = \dot{x}\mathcal{Q}_x + \dot{x}'\mathcal{Q}_{x'} = -\gamma\dot{x}^2 \leq 0 .$$

Pertanto, se  $\gamma > 0$ , la funzione di Hamilton cessa di essere un integrale primo perché, escluso moti banali a  $x$  costante (se ne esistono) il secondo membro è non nullo.

(3) (a) Sostituendo  $x(t) = x'(t)$  in (1.380) e (1.381) con  $\gamma = 0$  abbiamo:

$$2m\frac{d^2x}{dt^2} - m\Omega^2x - Kh + mg = 0 ,$$

$$2m\frac{d^2x}{dt^2} - m\Omega^2x + Kh + mg = 0 .$$

Sottraendo la seconda dalla prima troviamo subito che  $2Kh = 0$  che è impossibile perché  $K, h > 0$ , pertanto il tipo di soluzioni cercate non esiste. (b) Dato che le coordinate  $x$  e  $x'$  sono solidali con  $\mathcal{R}$ , una configurazione di equilibrio rispetto a  $\mathcal{R}$  soddisfano necessariamente  $x(t) = x'(t) = x_0$  costante per cui le derivate prime e seconde in  $t$  sono sempre nulle. Sostituendo in (1.380) e (1.381) abbiamo

$$-m\Omega^2x_0 - Kh + mg = 0 ,$$

$$-m\Omega^2x_0 + Kh + mg = 0 .$$

La differenza della seconda e della prima producono  $2Kh = 0$  che come già detto è impossibile.

(4) (a) Dato che  $\gamma = 0$  e le coordinate  $x$  e  $x'$  sono solidali con  $\mathcal{R}$  in cui tutte le forze attive (che hanno componenti lagrangiane) sono date da un'energia potenziale, le configurazioni di equilibrio rispetto a  $\mathcal{R}$  sono date da tutti e soli i punti di stazionarietà dell'energia potenziale:

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{R}}(x, x') = -\frac{m\Omega^2}{2}(x^2 + x'^2) + K(x - x')^2 - Kh(x - x') + mg(x + x') .$$

Assumendo, come precisato, che  $h = mg/K$  abbiamo:

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{R}}(x, x') = -\frac{m\Omega^2}{2}(x^2 + x'^2) + K(x - x')^2 + 2mgx' .$$

Dobbiamo dunque trovare le coppie  $x, x'$  che, per  $m, K, g, \Omega > 0$ , risolvono:

$$\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial x}|_{\mathcal{R}} = -m\Omega^2x + 2K(x - x') = 0 , \quad \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial x'}|_{\mathcal{R}} = -m\Omega^2x' - 2K(x - x') + 2mg = 0 : .$$

Questo sistema di equazioni equivale a

$$(2K - m\Omega^2)x - 2Kx' = 0 , \tag{1.383}$$

$$(2K - m\Omega^2)x' - 2Kx = -2mg . \tag{1.384}$$

che si può scrivere

$$AX = B$$

dove  $X := (x, x')^t$ ,  $B := (0, -2mg)^t$  e

$$A := \begin{bmatrix} (2K - m\Omega^2) & -2K \\ -2K & (2K - m\Omega^2) \end{bmatrix}$$

Pertanto se  $\det A = 0$ , cioè  $(2K - m\Omega^2)^2 - 2K^2 = 0$  che significa  $m\Omega^2 = 4K$ , allora non ci sono configurazioni di equilibrio. Negli altri casi abbiamo le configurazioni di equilibrio  $x_0, x'_0$  date da:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{m\Omega^2(m\Omega^2 - 4K)} \begin{bmatrix} (2K - m\Omega^2) & 2K \\ 2K & (2K - m\Omega^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2mg \end{bmatrix}$$

cioè

$$x_0 = \frac{4gK}{\Omega(4K - m\Omega^2)}, \quad x'_0 = \frac{2g(2K - m\Omega^2)}{\Omega(4K - m\Omega^2)}.$$

(b) Passiamo allo studio della stabilità. La matrice hessiana di  $\mathcal{U}|_{\mathcal{E}}$  è costante e vale:

$$H = \begin{bmatrix} (2K - m\Omega^2) & -2K \\ -2K & (2K - m\Omega^2) \end{bmatrix}$$

Se  $h_1$  e  $h_2$  sono gli autovalori abbiamo quindi che

$$h_1 h_2 = \det H = m\Omega^2(m\Omega^2 - 4K), \quad h_1 + h_2 = \text{tr} H = 4K - 2m\Omega^2.$$

Sappiamo già che se  $m\Omega^2 = 4K$  allora non ci sono configurazioni di equilibrio. Consideriamo i rimanenti casi dove  $m, \Omega, K > 0$ .

- (i) Se  $m\Omega^2 < 4K$  allora il prodotto degli autovalori è negativo per cui un autovalore è necessariamente negativo (e l'altro positivo) per cui la configurazione di equilibrio è instabile nel passato e nel futuro.
- (ii) Se  $m\Omega^2 > 4K$  e  $4K - 2m\Omega^2 \geq 0$  avremmo un assurdo  $m\Omega^2 \geq 2m\Omega^2$  per cui questa situazione non può aversi.
- (iii) Se  $m\Omega^2 > 4K$  e  $4K - 2m\Omega^2 < 0$  il prodotto degli autovalori è positivo, ma la loro somma è negativa questo significa che entrambi gli autovalori sono negativi e la configurazione di equilibrio è instabile nel passato e nel futuro.

Lo stesso risultato si ha calcolando direttamente gli autovalori della matrice hessiana. L'equazione per essi è

$$(2k - m\Omega^2 - \lambda)^2 - 4K^2 = 0$$

che ha soluzione

$$\lambda_1 = -m\Omega^2, \quad \lambda_2 = 4K - m\Omega^2.$$

In ogni caso c'è sempre almeno un autovalore negativo se  $m, \Omega, K > 0$ .

La conclusione è che (se  $Kh = mg$ ) le configurazioni di equilibrio, quando esistono, sono sempre instabili nel passato e nel futuro comunque fissiamo  $m, \Omega, g, K > 0$ .

(5) (a) La trasformazione di Legendre produce

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = 2m\dot{x}, \quad p' = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}'} = 2m\dot{x}'.$$

La funzione di Hamilton è data dunque da, esprimendo  $\dot{\theta}$  in funzione di  $p$ ,

$$\mathcal{H}(x, p, x', p') = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}'} \dot{x}' - \mathcal{L} = \frac{p^2 + p'^2}{4m} - \frac{m\Omega^2}{2}(x^2 + x'^2) + K(x-x')^2 - Kh(x-x') + mg(x+x').$$

(b) Le equazioni di Hamilton sono allora

$$\frac{dx}{dt} \left( = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \right) = \frac{p}{2m}, \quad \frac{dx'}{dt} \left( = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p'} \right) = \frac{p'}{2m}$$

e

$$\frac{dp}{dt} = \left( -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \right) = m\Omega^2 x - 2K(x-x') + Kh - mg, \quad \frac{dp'}{dt} = \left( -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x'} \right) = m\Omega^2 x + 2K(x-x') - Kh - mg.$$

(c) Dalla teoria generale:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} \Big|_{\text{soluzione eq. Hamilton}} = \sum_k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \frac{dp_k}{dt} + \sum_k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^k} \frac{dq^k}{dt} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t},$$

dove l'ultima derivata è nulla perché  $\mathcal{H}$  non dipende esplicitamente da  $t$ . Le stesse equazioni di Hamilton

$$\frac{dq^k}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^k}$$

se inserite nel secondo membro producono:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} \Big|_{\text{soluzione eq. Hamilton}} = \sum_k \left( \frac{dq^k}{dt} \frac{dp_k}{dt} - \frac{dp_k}{dt} \frac{dq^k}{dt} \right) = 0.$$

### ESERCIZIO 36

Si consideri un sistema di assi cartesiani  $x, y, z$  di origine  $O$  solidali con il riferimento  $\mathcal{R}$  non inerziale che ruota attorno all'asse  $z$  rispetto ad un riferimento inerziale  $\mathcal{R}_0$  in modo tale che  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}|\mathcal{R}_0} = \Omega \mathbf{e}_z$  dove  $\Omega > 0$  è nota.

Un punto materiale  $P$  di massa  $m > 0$  nota si può muovere lungo l'asse  $z$  pensato come liscio ed è connesso ad un secondo punto materiale  $Q$  tramite un'asta rigida senza peso di lunghezza  $\ell > 0$  nota. Il punto  $Q$  ha ancora massa  $m$  e può muoversi nel piano  $x, z$  considerando tale vincolo come ideale.

Sul sistema di punti materiali  $P$  e  $Q$  agiscono le seguenti forze vere attive:

- (i) la forza peso  $-mg \mathbf{e}_z$  con  $g > 0$  che agisce su entrambi i punti;
- (ii) la forza di una molla ideale di costante  $K > 0$  nota, peso nullo e lunghezza nulla a riposo, con un estremo in  $P$  e l'altro in  $O$ ;
- (iii) la forza di una molla ideale di costante  $K > 0$  nota, peso nullo e lunghezza nulla a riposo, con un estremo in  $Q$  e l'altro nel punto geometrico  $Q'$  sull'asse  $z$  che si trova sempre alla stessa quota di  $Q$ .

Usando le seguenti coordinate libere: la quota  $z$  di  $P$  e l'angolo  $\theta \in (-\pi, \pi]$  (con  $-\pi \equiv \pi$ ) che  $Q - P$  forma rispetto all'asse di  $\mathbf{e}_z$ , orientato positivamente rispetto a  $\mathbf{e}_y$ , si risponda ai seguenti quesiti relativi alla dinamica del sistema dei due punti materiali  $P$  e  $Q$ .

**(1)** (a) Dimostrare che in  $\mathcal{R}$  la forza di Coriolis (che agisce su entrambi i punti) ha componenti lagrangiane nulle. (b) Calcolare la lagrangiana relativa al riferimento non inerziale  $\mathcal{R}$  verificando che coincide con quella calcolata rispetto a  $\mathcal{R}_0$ . (c) Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange per il sistema di punti  $P$  e  $Q$ .

**(2)** (a) Provare che esiste un integrale primo e spiegarne il significato fisico. (b) Provare che l'energia meccanica totale nel riferimento  $\mathcal{R}_0$  non è un integrale primo. (Questa domanda non appariva nell'esame svolto in classe).

**(3)** (a) Determinare le configurazioni di equilibrio nel riferimento  $\mathcal{R}$  al variare dei valori dei parametri  $\Omega, m, \ell, K, g > 0$ . (b) Studiarne la stabilità al variare dei parametri  $\Omega, m, \ell, K, g > 0$ .

**(4)** (a) Usando  $\mathcal{L}|\mathcal{R}$  scrivere la trasformazione di Legendre dalle coordinate  $\theta, z, \dot{\theta}, \dot{z}$  alle coordinate di Hamilton  $\theta, z, p_\theta, p_z$ . (b) Scrivere la funzione di Hamilton  $\mathcal{H}$  in funzione delle variabili di Hamilton  $\theta, z, p_\theta, p_z$ .

## SOLUZIONE

Calcoliamo prima di tutto i vettori posizione in  $\mathcal{R}$ .

$$P - O = z \mathbf{e}_z, \quad Q - O = l \sin \theta \mathbf{e}_x + (z + l \cos \theta) \mathbf{e}_z$$

da cui abbiamo i vettori velocità in  $\mathcal{R}$ :

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}} = \dot{z} \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{v}_Q|_{\mathcal{R}} = \dot{\theta} l \cos \theta \mathbf{e}_x + (\dot{z} - \dot{\theta} l \sin \theta) \mathbf{e}_z. \quad (1.385)$$

(1) (a) Facendo uso delle (1.385) e tenendo conto di  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}}|_{\mathcal{R}_0} = \Omega \mathbf{e}_z$ , la forza di Coriolis che è definita come  $-2m\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}}|_{\mathcal{R}_0} \wedge \mathbf{v}|_{\mathcal{R}}$  su  $P$  è data da:

$$-2m\Omega \mathbf{e}_z \wedge \dot{z} \mathbf{e}_z = 0,$$

mentre su  $Q$  vale:

$$-2m\Omega \mathbf{e}_z \wedge [\dot{\theta} l \cos \theta \mathbf{e}_x + (\dot{z} - \dot{\theta} l \sin \theta) \mathbf{e}_z] = -2m\Omega l \cos \theta \mathbf{e}_y.$$

Pertanto le sue componenti lagrangiane sono nulle. Infatti:

$$\mathcal{Q}_z = \frac{\partial P - O}{\partial z} \cdot 0 + \frac{\partial Q - O}{\partial z} \cdot [-2m\Omega l \cos \theta \mathbf{e}_y] = \mathbf{e}_z \cdot [-2m\Omega l \cos \theta \mathbf{e}_y] = 0$$

e

$$\mathcal{Q}_\theta = \frac{\partial P - O}{\partial \theta} \cdot 0 + \frac{\partial Q - O}{\partial \theta} \cdot [-2m\Omega l \cos \theta \mathbf{e}_y] = [l \cos \theta \mathbf{e}_x - l \sin \theta \mathbf{e}_z] \cdot [-2m\Omega l \cos \theta \mathbf{e}_y] = 0.$$

(b) La lagrangiana nel riferimento  $\mathcal{R}_0$  si ottiene come  $\mathcal{T}|_{\mathcal{R}_0} - \mathcal{U}|_{\mathcal{R}_0}$ . L'energia cinetica usa le velocità riferite al riferimento  $\mathcal{R}_0$ :

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}_0} = \dot{z} \mathbf{e}_z + \Omega \mathbf{e}_z \wedge z \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{v}_Q|_{\mathcal{R}_0} = \dot{\theta} l \cos \theta \mathbf{e}_x + (\dot{z} - \dot{\theta} l \sin \theta) \mathbf{e}_z + \Omega \mathbf{e}_z \wedge [l \sin \theta \mathbf{e}_x + (z + l \cos \theta) \mathbf{e}_z].$$

Cioè:

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{R}_0} = \dot{z} \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{v}_Q|_{\mathcal{R}_0} = \dot{\theta} l \cos \theta \mathbf{e}_x + (\dot{z} - \dot{\theta} l \sin \theta) \mathbf{e}_z + \Omega l \sin \theta \mathbf{e}_y.$$

Da cui:

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{R}_0} = m\dot{z}^2 + \frac{m\ell^2}{2}\dot{\theta}^2 - m\ell\dot{\theta}\dot{z}\sin\theta + \frac{m\Omega^2\ell^2}{2}\sin^2\theta. \quad (1.386)$$

L'energia potenziale in  $\mathcal{R}_0$  è la somma dell'energia potenziale gravitazionale  $mg(z + z + l \cos \theta)$  e di quella delle molle  $\frac{K}{2}(z^2 + \ell^2 \sin^2 \theta)$ . Quindi

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{R}_0}(\theta, z) = mg(2z + l \cos \theta) + \frac{K}{2}(z^2 + \ell^2 \sin^2 \theta). \quad (1.387)$$

Mettendo tutto insieme:

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0} = m\dot{z}^2 + \frac{m\ell^2}{2}\dot{\theta}^2 - m\ell\dot{\theta}\dot{z}\sin\theta + \frac{m\Omega^2\ell^2}{2}\sin^2\theta - mg(2z + l \cos \theta) - \frac{K}{2}(z^2 + \ell^2 \sin^2 \theta).$$

La lagrangiana nel sistema di riferimento  $\mathcal{R}$  si ottiene ancora come  $\mathcal{T}|_{\mathcal{R}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}$ . Ora

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{R}} = m\dot{z}^2 + \frac{m\ell^2}{2}\dot{\theta}^2 - m\ell\dot{\theta}\dot{z}\sin\theta,$$

che abbiamo ottenuto da  $\mathcal{T}|_{\mathcal{R}_0}$  ponendo  $\Omega = 0$ . L'energia potenziale è la stessa di prima ma deve tenere anche conto della forza inerziale conservativa centrifuga che appare in  $\mathcal{R}$  che è pari a quella di una molla di costante elastica negativa  $-m\Omega^2$  attaccata all'asse di rotazione alla stessa quota del punto materiale soggetto alla forza centrifuga. Il contributo è quindi dovuto al solo punto  $Q$ , dato che  $P$  giace sempre sull'asse  $z$  per cui la forza centrifuga che agisce su di esso è nulla. L'energia potenziale centrifuga vale dunque

$$-\frac{m\Omega^2}{2}\ell^2\sin^2\theta.$$

In definitiva:

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{R}}(\theta, z) = mg(2z + \ell\cos\theta) + \frac{K}{2}(z^2 + \ell^2\sin^2\theta) - \frac{m\Omega^2\ell^2}{2}\sin^2\theta \quad (1.388)$$

e quindi, come voluto:

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{R}} = m\dot{z}^2 + \frac{m\ell^2}{2}\dot{\theta}^2 - m\ell\dot{\theta}\dot{z}\sin\theta - mg(2z + \ell\cos\theta) - \frac{K}{2}z^2 + (m\Omega^2 - K)\frac{\ell^2}{2}\sin^2\theta = \mathcal{L}|_{\mathcal{R}_0}. \quad (1.389)$$

(c) Possiamo scrivere le equazioni di E-L usando la lagrangiana (1.389):

$$2m\frac{d^2z}{dt^2} - m\ell\frac{d^2\theta}{dt^2}\sin\theta - m\ell\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\cos\theta + 2mg + Kz = 0$$

$$m\ell^2\frac{d^2\theta}{dt^2} - m\ell\frac{d^2z}{dt^2}\sin\theta - mg\ell\sin\theta + (K - m\Omega^2)\ell^2\sin\theta\cos\theta = 0.$$

Si osservi che due termini  $m\ell\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt}\cos\theta$  appaiono uno in  $\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}$  e l'altro in  $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}$  e quindi si elidono a vicenda nelle equazioni di EL moto finali per  $\theta$ .

(2) (a) La lagrangiana (1.389) non dipende esplicitamente dal tempo per cui, in base alla prima parte del teorema di Jacobi, la funzione di Hamilton  $\mathcal{H}$  è un integrale primo. La lagrangiana può sempre essere vista come  $\mathcal{L}|_{\mathcal{R}}$ . Nel riferimento  $\mathcal{R}$  tutte le forze attive sono coservative (esclusa la forza di Coriolis che non entra nelle equazioni di Eulero-Lagrange perché ha componenti lagrangiane nulle), i vincoli non dipendono esplicitamente dal tempo e le coordinate  $\theta$  e  $z$  sono solidali con  $\mathcal{R}$ . Possiamo pertanto usare anche la seconda parte del teorema di Jacobi e concludere che la funzione di Hamilton coincide con l'energia meccanica totale in  $\mathcal{R}$ :

$$\mathcal{H} = \mathcal{E}|_{\mathcal{R}} = m\dot{z}^2 + \frac{m\ell^2}{2}\dot{\theta}^2 - m\ell\dot{\theta}\dot{z}\sin\theta + mg(2z + \ell\cos\theta) + \frac{K}{2}z^2 + (K - m\Omega^2)\frac{\ell^2}{2}\sin^2\theta.$$

(b) L'energia meccanica totale nel riferimento  $\mathcal{R}_0$  è data da  $\mathcal{E}|_{\mathcal{R}_0} = \mathcal{T}|_{\mathcal{R}_0} + \mathcal{U}|_{\mathcal{R}_0}$ , cioè:

$$\mathcal{E}|_{\mathcal{R}_0} = m\dot{z}^2 + \frac{m\ell^2}{2}\dot{\theta}^2 - m\ell\dot{\theta}\dot{z}\sin\theta + mg(2z + \ell\cos\theta) + \frac{K}{2}z^2 + (K + m\Omega^2)\frac{\ell^2}{2}\sin^2\theta.$$

Di conseguenza:

$$\mathcal{E}|_{\mathcal{R}} - \mathcal{E}|_{\mathcal{R}_0} = -m\Omega^2\ell^2 \sin^2 \theta$$

Se come  $\mathcal{E}|_{\mathcal{R}}$  anche  $\mathcal{E}|_{\mathcal{R}_0}$  fosse un integrale primo si avrebbe che su ogni soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange  $\sin^2 \theta(t)$  dovrebbe essere costante, cioè in particolare

$$-m\Omega^2\ell^2\dot{\theta}(0) \sin \theta(0) \cos \theta(0) = 0.$$

Tenendo conto che  $m\Omega^2\ell^2 \neq 0$ , siamo però liberi di assegnare condizioni iniziali a  $t = 0$  per cui il primo membro dell'identità di sopra non è nullo e, in base al teorema di esistenza ed unicità esisterà una soluzione (unica) che soddisfa tali condizioni iniziali (aggiungendo arbitrarie condizioni iniziali per la coordinata  $z$ ). Concludiamo che è impossibile che  $\mathcal{E}|_{\mathcal{R}_0}$  sia integrale primo.

(3) (a) Nel riferimento  $\mathcal{R}$  tutte le forze attive sono conservative eccetto la forza di Coriolis che comunque non entra mai nelle equazioni. Possiamo pertanto usare la teoria per le lagrangiane del tipo  $\mathcal{T}|_{\mathcal{R}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}$ . Le configurazioni di equilibrio si ottengono annullando il gradiente di  $\mathcal{U}|_{\mathcal{R}}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}}{\partial z} &= 2mg + Kz = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}}{\partial \theta} &= -mgl \sin \theta + (K - m\Omega^2)\ell^2 \sin \theta \cos \theta = 0. \end{aligned} \quad (1.390)$$

Abbiamo pertanto che ogni possibile configurazione di equilibrio ha quota  $z_0 = -\frac{2mg}{K}$ , mentre le coordinate angolari delle possibili configurazioni di equilibrio si ottengono risolvendo l'equazione:

$$[(K - m\Omega^2)\ell \cos \theta - mg] \sin \theta = 0, \quad (1.391)$$

dove  $\theta \in (-\pi, \pi]$  con  $-\pi \equiv \pi$ .

Abbiamo subito le seguenti soluzioni  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = \pi$  che si ottengono annullando il secondo fattore  $\sin \theta$  del primo membro di (1.391). Annullando il primo fattore del primo membro di (1.391) abbiamo che:

$$\cos \theta = \frac{mg}{\ell(K - m\Omega^2)},$$

Questo è possibile solo se  $K \neq m\Omega^2$  e  $\left| \frac{mg}{\ell(K - m\Omega^2)} \right| \leq 1$ . In tal caso abbiamo le ulteriori soluzioni:

$$\theta_3 := \arccos \frac{mg}{\ell(K - m\Omega^2)}, \quad \theta_4 := -\arccos \frac{mg}{\ell(K - m\Omega^2)}.$$

Queste sono tutte le possibili soluzioni di (1.391). Abbiamo quindi al più 4 configurazioni di equilibrio distinte individuate dalle coordinate  $(\theta_i, z_0)$  con  $i = 1, 2, 3, 4$ , e le ultime due configurazioni esistono solo se  $K \neq m\Omega^2$  e

$$\left| \frac{mg}{\ell(K - m\Omega^2)} \right| \leq 1. \quad (1.392)$$

Si osservi che se vale l'uguaglianza nell'identità di sopra allora le due configurazioni di equilibrio  $\theta_3, \theta_4$  sono del tipo delle prime due, cioè valgono  $0$  e  $\pi \equiv -\pi$ .

(b) Passiamo a studiare la stabilità delle configurazioni  $(\theta_i, z_0)$  usando la matrice hessiana di  $\mathcal{U}|_{\mathcal{R}}$  calcolata nelle configurazioni di equilibrio. La matrice hessiana è diagonale, dato che le derivate seconde miste di  $\mathcal{U}|_{\mathcal{R}}$  sono nulle. Gli autovalori sono dunque dati dai termini diagonali:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}}{\partial z^2} \Big|_{(\theta_i, z_0)} &= K > 0, \\ \frac{\partial^2 \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}}{\partial \theta^2} \Big|_{(\theta_i, z_0)} &= -mg\ell \cos \theta_i + (K - m\Omega^2)\ell^2(2 \cos^2 \theta_i - 1), \end{aligned} \quad (1.393)$$

dove, per il calcolo della derivata seconda in (1.393) partendo dall'espressione della derivata prima in (1.390), abbiamo usato le identità  $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$  e  $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$ . Di conseguenza abbiamo i seguenti casi per lo studio della stabilità delle configurazioni di equilibrio  $(\theta_i, z_0)$  che tengono conto che uno dei due autovalori della matrice hessiana è sempre positivo.

$(\theta_1, z_0)$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}}{\partial \theta^2} \Big|_{(\theta_1, z_0)} = -mg\ell + (K - m\Omega^2)\ell^2,$$

e quindi la configurazione di equilibrio  $(\theta_1, z_0)$  è stabile per  $\ell K > mg + m\Omega^2\ell$ , instabile per  $\ell K < mg + m\Omega^2\ell$  e non possiamo dire nulla con la teoria che conosciamo nel caso di uguaglianza dei due termini.

$(\theta_2, z_0)$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}}{\partial \theta^2} \Big|_{(\theta_2, z_0)} = mg\ell + (K - m\Omega^2)\ell^2.$$

e quindi la configurazione di equilibrio  $(\theta_2, z_0)$  è stabile per  $\ell K + mg > m\Omega^2\ell$ , instabile per  $\ell K + mg < m\Omega^2\ell$  e non possiamo dire nulla con la teoria che conosciamo nel caso di uguaglianza dei due termini.

$(\theta_3, z_0)$  Dobbiamo tenere conto del fatto che in (1.393)  $\cos \theta_3 = \frac{mg}{\ell(K - m\Omega^2)}$ . Abbiamo allora:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}}{\partial \theta^2} \Big|_{(\theta_3, z_0)} &= -mg\ell \frac{mg}{\ell(K - m\Omega^2)} + (K - m\Omega^2)\ell^2 \left[ 2 \left( \frac{mg}{\ell(K - m\Omega^2)} \right)^2 - 1 \right] \\ &= \frac{(mg)^2 - \ell^2(K - m\Omega^2)^2}{K - m\Omega^2}. \end{aligned}$$

Abbiamo a questo punto alcuni casi.

– Se  $K > m\Omega^2$

allora la configurazione di equilibrio  $(\theta_3, z_0)$  è stabile  $(mg)^2 > \ell^2(K - m\Omega^2)^2$  è instabile se  $(mg)^2 < \ell^2(K - m\Omega^2)^2$  e non possiamo dire nulla con la teoria che conosciamo nel caso di uguaglianza dei due termini. In realtà il primo caso è impossibile perché viola la condizione (1.392). Pertanto ci sono solo i due ultimi casi.

– Se  $K < m\Omega^2$

la configurazione di equilibrio  $(\theta_3, z_0)$  è stabile  $(mg)^2 < \ell^2(K - m\Omega^2)^2$  è instabile se  $(mg)^2 > \ell^2(K - m\Omega^2)^2$  e non possiamo dire nulla con la teoria che conosciamo nel caso di uguaglianza dei due termini. Di nuovo il secondo caso è in realtà impossibile dato che viola la condizione (1.392).

$(\theta_4, z_0)$  Dato che in (1.393)  $\cos \theta_4 = \frac{mg}{\ell(K - m\Omega^2)} = \cos \theta_3$  la discussione è identica al caso di  $\theta_3$  dato che

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}}{\partial \theta^2} \right|_{(\theta_4, z_0)} &= -mgl \frac{mg}{\ell(K - m\Omega^2)} + (K - m\Omega^2)\ell^2 \left[ 2 \left( \frac{mg}{\ell(K - m\Omega^2)} \right)^2 - 1 \right] \\ &= \frac{(mg)^2 - \ell^2(K - m\Omega^2)^2}{K - m\Omega^2} = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}}{\partial \theta^2} \right|_{(\theta_3, z_0)}. \end{aligned}$$

(4) Possiamo scrivere la lagrangiana (1.389) in forma matriciale come

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{R}} = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{q}}^t A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}(\mathbf{q})$$

dove  $\mathcal{U}|_{\mathcal{R}}$  è definito in (1.388),  $\mathbf{q} := (\theta, z)^t$  e  $\dot{\mathbf{q}} := (\dot{\theta}, \dot{z})^t$  e la matrice  $A$  ha la forma

$$A(\mathbf{q}) := \begin{bmatrix} \ell^2 & -\ell \sin \theta \\ -\ell \sin \theta & 2 \end{bmatrix}.$$

Pertanto la trasformazione di Legendre è, tenendo conto che  $A = A^t$ ,

$$\mathbf{p} = \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L}|_{\mathcal{R}} = mA\dot{\mathbf{q}},$$

che si inverte in:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{m} A^{-1} \mathbf{p}$$

dove, usando la regola di Cramer,

$$A^{-1} = \frac{1}{\ell^2(2 - \sin^2 \theta)} \begin{bmatrix} 2 & \ell \sin \theta \\ \ell \sin \theta & \ell^2 \end{bmatrix}.$$

La funzione di Hamilton è l'energia meccanica totale in  $\mathcal{R}$  come già provato, per cui:

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{q}}^t A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}(\mathbf{q}).$$

Usando la trasformazione di Legendre trovata possiamo riscrivere questa funzione nelle variabili di Hamilton:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= \frac{m}{2} m^{-1} (A^{-1} \mathbf{p})^t A m^{-1} A^{-1} \mathbf{p} + \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}(\mathbf{q}) \\ &= \frac{1}{2m} (A^{-1} \mathbf{p})^t A A^{-1} \mathbf{p} + \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2m} (A^{-1} \mathbf{p})^t \mathbf{p} + \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}(\mathbf{q}) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2m} \mathbf{p}^t (A^{-1})^t \mathbf{p} + \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^t A^{-1} \mathbf{p} + \mathcal{U}|_{\mathcal{R}}(\mathbf{q}).$$

Dove abbiamo usato il fatto che  $A^{-1} = (A^{-1})^t$ . Esplicitamente:

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{2p_\theta^2 + \ell^2 p_z^2 + 2\ell p_\theta p_z \sin \theta}{2m\ell^2(2 - \sin^2 \theta)} + mg(2z + \ell \cos \theta) + \frac{K}{2}(z^2 + \ell^2 \sin^2 \theta) - \frac{m\Omega^2 \ell^2}{2} \sin^2 \theta.$$