

Introduzione alla Meccanica dei Continui.

di **Valter Moretti**

<https://moretti.maths.unitn.it/home.html>

Dipartimento di Matematica,
Università di Trento

Dispense scritte da Valter Moretti, liberamente scaricabili dal sito

<https://moretti.maths.unitn.it/dispense.html>

protette dal Creative Commons Attribuzione-Non commerciale-Non opere derivate 2.5 Italia
License.

Nessuno è autorizzato a vendere queste dispense

Indice

1	Fondamenti.	5
1.1	Generalità	5
1.2	Configurazioni, Campi di Velocità ed Accelerazione.	6
1.3	Tre Lemmi Tecnici.	8
1.4	Descrizione Euleriana e Lagrangiana, Derivata Materiale.	10
1.5	Flusso e Circolazione.	12
2	Equazione di Continuità, Incompressibilità, Classificazione dei tipi di Flusso.	15
2.1	Richiami di Teoria dell'Integrazione.	15
2.2	Conservazione della Massa ed Equazione di Continuità.	17
2.3	Un lemma tecnico.	20
2.4	Classificazione dei tipi di Flusso, Legge di Castelli.	21
3	Dinamica: il Tensore degli Sforzi di di Cauchy.	25
3.1	Impostazione generale della dinamica dei continui: gli sforzi.	25
3.2	Equazioni indefinite della dinamica.	26
3.3	Il Tensore degli Sforzi di Cauchy.	28
3.4	Le equazioni cardinali della dinamica dei continui in forma differenziale locale.	32
3.5	Relazioni Costitutive per i continui meccanici.	34
3.6	Bilanci energetici e velocità di deformazione.	35
3.7	Sistemi continui soggetti a forze di massa conservative.	37
4	Elementi di Meccanica dei Fluidi.	40
4.1	Fluidi ideali o perfetti, legge di Pascal.	40
4.2	Fluidi barotropici.	41
4.3	Statica dei fluidi barotropici.	43
4.4	Dinamica dei fluidi perfetti barotropici: Equazione di Eulero e Teorema di Bernoulli.	45
4.5	Rotazionalità dei fluidi ideali barotropici, Teorema di Thompson.	47
4.6	Bilancio dell'energia per fluidi ideali barotropici.	49
5	Fluidi viscosi di Navier-Stokes.	52
5.1	Non fisicità della dinamica dei fluidi ideali.	52
5.2	Il tensore degli sforzi di Navier-Stokes e le equazioni di N.-S.	53
5.3	Il numero di Reynolds.	60
5.4	Il segno del parametro η di Navier-Stokes: considerazioni energetiche.	61
5.5	Moto di Poiseuille per un fluido viscoso.	62
6	Introduzione alla teoria dell'elasticità lineare.	65
6.1	Tensori di deformazione di Cauchy-Green, Lagrangiano ed Euleriano.	66
6.2	Tensore di velocità di deformazione e tensore di deformazione Lagrangiano. Tensore di rotazionalità euleriano.	68

6.3	Linearizzazione e tensore di deformazione euleriano linearizzato.	70
6.4	Elasticità lineare per continui isotropi ed omogenei spaziotemporalmente.	73
6.5	Energia elastica.	75
6.6	Onde elastiche.	77

Ringraziamenti.

Vorrei ringraziare Barbara Patton e Riccardo Aramini per avere letto con cura queste dispense segnalandomi diversi errori di vario genere.

Convenzioni e Notazioni.

Nel seguito \mathbb{E}^3 denoterà **uno spazio euclideo tridimensionale** cioè uno spazio affine tridimensionale il cui spazio vettoriale modellatore V^3 , o spazio delle traslazioni, è dotato di un prodotto scalare (definito positivo). Se $P, Q \in \mathbb{E}^3$, $\overrightarrow{PQ} = Q - P \in V^3$ denota l'unico vettore di V^3 associato alla coppia Q, P secondo la struttura affine.

Ricordiamo che uno spazio affine con prodotto scalare ammette una struttura naturale di varietà differenziabile riemanniana, la cui struttura differenziabile è indotta dalle usuali coordinate globali cartesiane ed il cui tensore metrico è definito dal prodotto scalare in V^3 tramite la struttura affine. Per coordinate cartesiane **ortonormali** con origine $O \in \mathbb{E}^3$ intenderemo coordinate cartesiane con origine O , tali che il tensore metrico assuma punto per punto e nelle basi indotte dalle coordinate considerate in ogni spazio tangente, la forma canonica $g_{ij} = \delta_{ij}$.

Nel seguito i campi tensoriali o semplicemente i tensori (vettori inclusi), saranno denotati con il carattere grassetto Ξ, \mathbf{V} ecc. oppure in notazione indiciale $\Xi_{ij}{}^k, V^i$.

Ricordiamo che, dato che la metrica è di tipo ellittico, **in basi ortonormali**, le componenti covarianti e quelle controvarianti dei tensori coincidono numericamente:

$$\Xi_{ij}{}^k = \Xi_{ij\ k} = \Xi^i{}_{jk} \quad \text{ecc. .}$$

La derivata covariante (rispetto ad un campo vettoriale \mathbf{X}) riferita alla connessione di Levi-Civita associata alla metrica, sarà indicata in modo intrinseco $\nabla_{\mathbf{X}}\Xi$, oppure in modo indiciale tramite una virgola: $X^r \nabla_r \Xi_{ij}{}^k = X^r \Xi_{ij}{}^k{}_{,r}$.

Se f è un campo scalare, con le nostre notazioni varrà:

$$(\nabla f)_i = \nabla_i f = (df)_i = f_{,i} .$$

Se \mathbf{X} è un campo vettoriale, useremo i ben noti operatori detti **divergenza** e **rotore**:

$$\text{div } \mathbf{X} := X^i{}_{,i} ,$$

e

$$(\text{rot } \mathbf{X})^i := \epsilon^{ijk} X_{k,j}$$

rispettivamente. ϵ^{ijk} denota il solito pseudotensore di Ricci-Levi-Civita in tre dimensioni. In coordinate arbitrarie, $\epsilon_{ijk} = \sqrt{g}\eta_{ijk}$ con $\eta_{ijk} = 0$ se ci sono ripetizioni in (i, j, k) oppure $\eta_{ijk} = (-1)^{\#(ijk)}$ dove $\#(ijk)$ è l'ordine della permutazione $(1, 2, 3) \mapsto (i, j, k)$ e g è il determinante della matrice che esprime il tensore metrico nelle coordinate considerate.

Δ denota il solito operatore di Laplace-Beltrami che in coordinate locali è espresso da

$$\Delta = \nabla_i \nabla^i .$$

Per concludere, ricordiamo che il prodotto vettoriale di vettori è espresso in basi arbitrarie (non ortonormali in genere) tramite ϵ come:

$$(\mathbf{U} \wedge \mathbf{V})^i := \epsilon^{ijk} U_j V_k .$$

1 Fondamenti.

La Matematica in Fisica è come il maiale: non si butta mai via niente.

1.1 Generalità

Molti sistemi fisici appaiono descritti con ottima approssimazione come “sistemi continui”. Il prototipo di oggetto “continuo” è un insieme aperto e connesso di \mathbb{R}^n (con $n = 3$ nelle teorie non relativistiche), per cui le configurazioni dei sistemi fisici continui sono descritte in prima istanza assegnando insiemi omeomorfi ad aperti di \mathbb{R}^n , ovvero insiemi di punti in altri spazi (varietà differenziabili) con la stessa topologia degli aperti di \mathbb{R}^n . Gli insiemi aperti di cui sopra denotano le porzioni di spazio occupate ad ogni istante dal sistema continuo. Ovviamente, tale descrizione deve essere arricchita precisando tutte le altre proprietà del sistema fisico. Ciò viene fatto assegnando opportuni campi scalari e tensoriali sulle regioni occupate dal continuo corrispondenti alla densità di massa, campo di temperatura, campi di velocità, accelerazione, deformazioni, sforzi interni, flusso di calore e così via precisando la descrizione del sistema.

In questo senso un liquido o un solido sono sistemi continui se descritti con una certa approssimazione, senza cioè arrivare a descrivere la struttura granulare molecolare. Infatti, dal punto di vista fisico sappiamo che, corpi che sembrano essere continui in realtà non lo sono perché rivelano una natura molecolare ed atomica ad una più attenta analisi. Quindi, la descrizione in termini del modello continuo è utilizzabile (e con ottimi risultati) purchè non siano coinvolti processi fisici riguardanti la natura microscopica di tali corpi. A tal fine è importante precisare che una regione *microscopica* dal punto di vista della meccanica dei continui, ovvero una *particella materiale di continuo*, è in realtà una regione molto grande dal punto di vista atomico e molecolare. Tale regione è necessariamente supposta contenere una quantità di molecole dell'ordine del numero di Avogadro. In tal modo, quando la regione *microscopica* è in equilibrio termodinamico, può essere trattata con l'usuale descrizione termodinamica definendo grandezze termodinamiche intensive ed estensive su di essa. Variando la regione ossia il *punto* del continuo, ciascuna delle grandezze intensive definisce una funzione sufficientemente regolare definita su tutta la configurazione del continuo. Questo è il significato fisico di vari campi scalari e tensoriali definiti su un continuo.

Esistono altri sistemi fisici, diversi da quelli “materiali” che sono davvero intrinsecamente continui? Il *campo elettromagnetico* apparentemente è un sistema intrinsecamente continuo. In realtà è noto che anche questa affermazione non è vera. Esperimenti con campi elettromagnetici di intensità molto basse evidenziano una natura corpuscolare dei campi (fotoni).

Sembrerebbe che l'unico sistema davvero continuo sia lo spazio o meglio lo spaziotempo, una volta che la sua dinamica sia precisata tramite la Teoria della Relatività Generale. Attualmente però si specula sulla eventuale natura non continua dello spaziotempo stesso a scale molto piccole (scale di Planck $\sim 10^{-33}$ cm e 10^{-43} s) per esempio in teoria delle stringhe e generalizzazioni (“brane”).

In ogni caso il modello continuo dei corpi fisici è nella maggior parte delle applicazioni pratiche

di eccezionale utilità (es. nella progettazione di edifici, in meteorologia, in fluidodinamica). Ulteriormente i concetti fisico-matematici definiti in tale contesto (es. tensore degli sforzi, tensore energia-impulso in teorie relativistiche) si sono rivelati concetti estremamente potenti il cui utilizzo è andato ben oltre il modello classico del continuo, fino ad includere le teorie quantistiche relativistiche dei campi.

In queste note ci occuperemo di introdurre solamente la trattazione classica del modello dei continui rimanendo nell'ambito della Meccanica Classica.

1.2 Configurazioni, Campi di Velocità ed Accelerazione.

Supponiamo che lo *spazio euclideo* \mathbb{E}^3 (cioè uno spazio affine tridimensionale dotato di prodotto scalare definito positivo) sia lo spazio di quiete di un riferimento (inerziale) \mathcal{J} . Un *sistema continuo*, o più brevemente un *continuo* è definito in \mathcal{J} assegnando prima di tutto la sua *configurazione* ad ogni istante e le *evoluzioni* di essa nel tempo.

Assumiamo che al tempo $t = 0$ il continuo ammetta **configurazione iniziale** C_0 identificabile con un aperto connesso di \mathbb{E}^3 . Ulteriormente, la **configurazione all'istante** $t \in \mathbb{R}$, C_t , sarà un aperto di \mathbb{E}^3 . Ogni configurazione C_t erediterà da \mathbb{E}^3 una struttura naturale di varietà differenziabile Riemanniana che sottointenderemo d'ora in poi. Assumiamo ancora che, al variare del tempo, le configurazioni C_t siano collegate a C_0 da una classe di *diffeomorfismi* parametrizzati nel tempo $t \in \mathbb{R}$ dati da

$$X = X(t, X_0), \quad X_0 \in C_0, \quad X \in C_t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Se $t \in \mathbb{R}$ è fissato, il diffeomorfismo inverso di $X_0 \mapsto X(t, X_0)$ lo indicheremo con $X \mapsto X_0(t, X)$. (Si noti che ogni configurazione C_t dovrà essere diffeomorfa ed in particolare omeomorfa a C_0 , per cui ogni configurazione C_t sarà connessa.) La classe dei diffeomorfismi da C_0 ad ogni C_t sopra introdotta

$$\mathcal{F} := \{X(t, \cdot)\}_{t \in \mathbb{R}},$$

viene detta **flusso del continuo**.

N.B.: Per quanto riguarda la regolarità dei diffeomorfismi, possiamo pensarli di classe C^k con $k = \infty$, anche se la maggior parte di quanto seguirà sarà valido per $k \geq 2$. Come ulteriore richiesta di regolarità, supporremo che le funzioni $(t, X_0) \mapsto X = X(t, X_0)$ e $(t, X) \mapsto X_0 = X_0(t, X)$ siano differenziabili congiuntamente in tutte le variabili. (Anche in tal caso differenziabile significa C^∞ anche se la maggior parte di ciò che segue è valido con C^k , $k \geq 2$).

Ogni $X_0 \in C_0$ individua, indipendentemente dalla evoluzione successiva, una **particella materiale di continuo**. La curva, detta **linea di corrente**, $t \mapsto X(t, X_0)$ definisce la *storia* di tale particella di continuo. In base alla definizione data, fissati $t \in \mathbb{R}$ e $X \in C_t$, c'è esattamente una particella materiale di fluido, X_0 , che passa per X al tempo t . Questa si ottiene come $X_0 = X_0(t, X)$ usando la classe di diffeomorfismi associata al continuo.

Commento. Riguardo alle motivazioni fisiche delle definizioni matematiche date possiamo dire quanto segue. Prese due particelle materiali di continuo $X_0, X'_0 \in C_0$, le loro linee di corrente *non* possono mai intersecarsi. Questo fatto assunto come principio fisico fondamentale equivale alla iniettività delle applicazioni $X_0 \mapsto X(t, X_0)$. La surgettività equivale alla richiesta che le particelle di continuo in C_t siano quelle che erano contenute in C_0 . Il requisito di differenziabilità è da ritenersi una richiesta di carattere tecnico, motivata dal fatto che, nella pratica, tale requisito è soddisfatto dalla maggior parte dei corpi continui esistenti. La richiesta di connessione di C_0 è un requisito di semplicità: se il continuo fosse non connesso, potremmo sempre ridurci a studiarne separatamente ogni componente connessa.

Per comodità, si possono identificare i punti di C_t e C_0 con terne di reali usando sistemi di coordinate. Per esempio, $X \equiv (x^1, x^2, x^3)$ e $X_0 \equiv (x_0^1, x_0^2, x_0^3)$ possono essere riferiti allo stesso sistema di coordinate globali su $\mathbb{E}^3 \supset C_t, C_0$. Una scelta possibile di tali coordinate è quella di usare coordinate cartesiane ortonormali arbitrariamente assegnate su \mathbb{E}^3 . Tale scelta è comoda, ma non è necessaria dal punto di vista fisico o matematico.

Una volta fissata una particella materiale di continuo X_0 e la sua storia, possiamo calcolarne la velocità (rispetto a \mathcal{J}) al tempo t :

$$\mathbf{V}_{X_0}(t) := \frac{\partial}{\partial t} X(t, X_0). \quad (1)$$

In coordinate globali su \mathbb{E}^3 precisate sopra, si ha $\mathbf{V}_{X_0}(t) = V_{X_0}^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} |_{X(t, X_0)}$

$$V_{X_0}^i(t) := \frac{\partial}{\partial t} X^i(t, X_0). \quad (2)$$

Si osservi che il vettore $\mathbf{V}_{X_0}(t)$ è in $T_{X(t, X_0)}\mathbb{E}^3$ cioè è applicato al punto $X(t, X_0)$ che è la posizione che la particella di fluido X_0 occupa al tempo t .

Fissato t , al variare di X_0 viene a definirsi un **campo vettoriale di velocità** su C_t

$$\mathbf{V}(t, X) := \mathbf{V}_{X_0(t, X)}(t). \quad (3)$$

Per costruire il campo di velocità, in pratica, fissati t e X , si determina quale particella $X_0(t, X)$ si trova in X al tempo t e si calcola la velocità di tale particella usando la sua linea di corrente come prescritto in (1), quindi si definisce tale vettore come il vettore del campo di velocità in X al tempo t .

È possibile definire in modo del tutto analogo un **campo vettoriale di accelerazioni** su C_t

$$\mathbf{A}(t, X) := \mathbf{A}_{X_0(t, X)}(t), \quad (4)$$

dove $\mathbf{A}_{X_0}(t) = A_{X_0}^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} |_{X(t, X_0)}$ con

$$A_{X_0}^i(t) := \frac{d}{dt} V_{X_0}^i(t). \quad (5)$$

$\mathbf{A}(t, X)$ esprime l'accelerazione (rispetto a \mathcal{J}) della particella di fluido che al tempo t passa per X .

1.3 Tre Lemmi Tecnici.

Le definizioni date consentono di ottenere tre risultati tecnici che saranno utili in seguito.

Proposizione 1.1. *Supponiamo di avere precisato coordinate globali su \mathbb{E}^3 come detto sopra. Usando tali coordinate, per $t \in \mathbb{R}$ fissato, siano rispettivamente $\det J_t(X_0)$ e $\det J_{0t}(X)$ i determinanti delle matrici Jacobiane delle trasformazioni $X_0 \mapsto X(t, X_0)$ e $X \mapsto X_0(t, X)$. Allora varrà*

$$\det J_t(X_0) \det J_{0t}(X) = 1, \quad (6)$$

e inoltre

$$\det J_t(X_0) > 0 \quad e \quad \det J_{0t}(X) > 0, \quad (7)$$

ad ogni istante t e per ogni particella materiale di continuo o punto dello spazio euclideo.

Dimostrazione. (6) è ovvia dalla definizione data. Da essa segue che $J_t(X_0), J_{0t}(X) \neq 0$ ed in particolare tali determinanti avranno segno concorde. Per X_0 fissato, la funzione $t \mapsto \det J_t(X_0)$ è sicuramente continua e non si annulla mai. Di conseguenza il suo segno deve rimanere costante. Per $t = 0$, dato che la funzione $X_0 \mapsto X(t, X_0)$ si riduce all'identità, deve essere $\det J_{t=0}(X_0) = 1 > 0$ e quindi si deve avere $\det J_t(X_0) > 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e $X_0 \in C_0$. Concludiamo che $\det J_t(X_0) > 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, $X_0 \in C_0$, $X \in C_t$. Lo stesso risultato segue immediatamente per l'altro determinante. \square

Il secondo risultato tecnico che presentiamo riguarda il legame tra campo di velocità e determinante della matrice Jacobiana J_t .

Proposizione 1.2. *Per ogni $(t, X_0) \in \mathbb{R} \times C_0$ si ha l'identità*

$$\frac{\partial \det J_t(X_0)}{\partial t} = (\operatorname{div} \mathbf{V}(t, X))|_{X=X(t, X_0)} \det J_t(X_0).$$

Dimostrazione. Calcoliamo direttamente la derivata richiesta.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \det J_t(X_0)}{\partial t} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\det J_{t+h}(X_0) - \det J_t(X_0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \det \left(\frac{\partial X_{t+h}}{\partial X_t} \frac{\partial X_t}{\partial X_0} \right) - \det \left(\frac{\partial X_t}{\partial X_0} \right) \right\} = \\ &= \det \left(\frac{\partial X_t}{\partial X_0} \right) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \det \left(\frac{\partial X_{t+h}}{\partial X_t} \right) - 1 \right\} \\ &= \det J_t(X_0) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \det \left(\frac{\partial X_{t+h}}{\partial X_t} \right) - 1 \right\}. \end{aligned}$$

Sopra, la funzione $X_{t+h} = X_{t+h}(X_t)$ è stata definita semplicemente come

$$X_{t+h} = X(t+h, X_0(t, X_t)).$$

Per concludere è sufficiente provare che :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\det \left(\frac{\partial X_{t+h}}{\partial X_t} \right) - 1}{h} = (\operatorname{div} \mathbf{V}(t, X)) |_{X=X(t, X_0)}.$$

Scegliendo coordinate cartesiane in \mathbb{E}^3 , notiamo preventivamente che $X_{t+h} = X(t+h, X_0(t, X_t))$ implica subito, da (1)

$$\frac{\partial X_{t+h}^i}{\partial h} |_{h=0} = V^i(t, X_t(t, X_0)). \quad (8)$$

Rimanendo nelle coordinate dette e sviluppando con Taylor nella variabile h la funzione $f_j^i(h) = \frac{\partial X_{t+h}^i}{\partial X_t^j}$ attorno al punto $h = 0$ si ha

$$f_j^i(h) = f_j^i(0) + h(f_j^i)'(0) + hO_j^i(h),$$

dove $O_j^i(h) \rightarrow 0$ se $h \rightarrow 0$, ossia

$$\frac{\partial X_{t+h}^i}{\partial X_t^j} = \delta_j^i + h \frac{\partial^2 X_{t+h}^i}{\partial h \partial X_t^j} |_{h=0} + hO_j^i(h).$$

Nelle nostre ipotesi di flusso \mathcal{F} di classe C^k , $k \geq 2$, in tutte le variabili congiuntamente vale

$$\frac{\partial^2 X_{t+h}^i}{\partial h \partial X_t^j} |_{h=0} = \frac{\partial^2 X_{t+h}^i}{\partial X_t^j \partial h} |_{h=0} = \frac{\partial}{\partial X_t^j} \frac{\partial X_{t+h}^i}{\partial h} |_{h=0} = \left(\frac{\partial}{\partial X_t^j} V^i(t, X_t) \right)_{X_t=X_t(t, X_0)}.$$

dove abbiamo usato (8) nell'ultimo passaggio. In definitiva abbiamo ottenuto:

$$\frac{\partial X_{t+h}^i}{\partial X_t^j} = \delta_j^i + h \frac{\partial V^i(t, X_t)}{\partial X_t^j} |_{X_t=X_t(t, X_0)} + hO_j^i(h).$$

Dall'espressione del determinante di una matrice usando il simbolo η_{ijk} si ha che

$$\det \left[\frac{\partial X_{t+h}^i}{\partial X_t^j} \right]$$

uguaglia

$$\eta_{i_1 i_2 i_3} \left(\delta_1^{i_1} + h \frac{\partial V^{i_1}}{\partial X_t^{i_1}} + hO_1^{i_1}(h) \right) \left(\delta_2^{i_2} + h \frac{\partial V^{i_2}}{\partial X_t^{i_2}} + hO_2^{i_2}(h) \right) \left(\delta_3^{i_3} + h \frac{\partial V^{i_3}}{\partial X_t^{i_3}} + hO_3^{i_3}(h) \right).$$

Separando i termini proporzionali ad h^0 , h e quelli infinitesimi con ordine maggiore di h si ottiene che

$$\det \left[\frac{\partial X_{t+h}^i}{\partial X_t^j} \right] = \eta_{123} + \eta_{123} h \frac{\partial V^1}{\partial X_t^1} + \eta_{123} h \frac{\partial V^2}{\partial X_t^2} + \eta_{123} h \frac{\partial V^3}{\partial X_t^3} + hO(h),$$

dove $O(h) \rightarrow 0$ se $h \rightarrow 0$. Abbiamo in tal modo provato che:

$$\det \left[\frac{\partial X_{t+h}^i}{\partial X_t^j} \right] = 1 + h \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V^i(t, X_t)}{\partial X_t^i} \Big|_{X_t=X_t(t, X_0)} + hO(h).$$

Dunque

$$\frac{\det \left[\frac{\partial X_{t+h}^i}{\partial X_t^j} \right] - 1}{h} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V^i(t, X_t)}{\partial X_t^i} \Big|_{X_t=X_t(t, X_0)} + O(h),$$

da cui la nostra tesi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\det \left[\frac{\partial X_{t+h}^i}{\partial X_t^j} \right] - 1}{h} = (\operatorname{div} \mathbf{V}(t, X)) \Big|_{X=X(t, X_0)}.$$

□

Le diverse regioni occupate dal continuo C_t determinano nello “spaziotempo” $\mathbb{R} \times \mathbb{E}^3$ un insieme $\mathcal{C} := \cup_{t \in \mathbb{R}} \{t\} \times C_t$. Tale insieme risulta essere aperto come provato di seguito.

Proposizione 1.3. \mathcal{C} è un insieme aperto di $\mathbb{R} \times \mathbb{E}^3$.

Dimostrazione. Si consideri la funzione dall’aperto $\mathbb{R} \times C_0$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{E}^3$,

$$F : (t, X_0) \mapsto (t, X(t, X_0)).$$

Usando la Proposizione 1.1 risulta che F , espressa in coordinate globali di $\mathbb{R} \times \mathbb{E}^3$, ha determinante jacobiano non nullo per ogni $(t, X_0) \in \mathbb{R} \times C_0$. Infatti un calcolo diretto prova che, se $J_F(t, X)$ è la matrice Jacobiana di F , risulta $\det J_F(t, X_0) = \det J_t(X_0) > 0$. Come conseguenza, il teorema di Jacobi assicura in particolare che F è una funzione *localmente aperta*. In altre parole, F manda un intorno aperto $U_p \subset \mathbb{R} \times C_0$ di ogni $p \in \mathbb{R} \times C_0$ in un intorno aperto (in $\mathbb{R} \times \mathbb{E}^3$) di $F(p)$, $V_{F(p)} \subset F(\mathbb{R} \times C_0)$. Quindi $F(\mathbb{R} \times C_0)$ è un insieme aperto in $\mathbb{R} \times \mathbb{E}^3$ perché unione di aperti di $\mathbb{R} \times \mathbb{E}^3$. Ma $F(\mathbb{R} \times C_0) = \mathcal{C}$. □

1.4 Descrizione Euleriana e Lagrangiana, Derivata Materiale.

Consideriamo un generico campo tensoriale definito su C_t , $\Xi = \Xi(t, X)$. Lo stesso campo tensoriale può essere espresso facendo riferimento non alla configurazione attuale C_t , ma a quella iniziale C_0 , ossia:

$$\Xi_L(t, X_0) := \Xi(t, X(t, X_0)). \quad (9)$$

In tal caso si dice che è stata data la **rappresentazione Lagrangiana** Ξ_L del campo tensoriale. Al contrario, la rappresentazione usuale $\Xi = \Xi(t, X)$ è detta **rappresentazione Euleriana**. Ovviamente

$$\Xi(t, X) := \Xi_L(t, X_0(t, X)). \quad (10)$$

N.B.: Il tensore $\Xi_L(t, X_0)$ si deve comunque pensare come applicato in X , ossia appartenere all'algebra tensoriale generata da $T_X \mathbb{E}^3$ e $T_X^* \mathbb{E}^3$.

La descrizione Lagrangiana consente di descrivere come la grandezza rappresentata dal campo Ξ evolve su ogni linea di corrente associata ad ogni particella materiale $X_0 \in C_0$. Assumiamo esplicitamente che le coordinate scelte su \mathbb{E}^3 per rappresentare il continuo siano coordinate cartesiane ortonormali. Ha senso calcolare la derivata rispetto al tempo della rappresentazione Lagrangiana di Ξ . Essa corrisponde a calcolare la variazione delle componenti di Ξ per unità di tempo lungo la storia di una particella precisa di continuo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Xi_L(t, X_0).$$

Da (9), la derivata di sopra può essere espressa in rappresentazione Euleriana banalmente come

$$\frac{\partial}{\partial t} \Xi_L(t, X_0) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \Xi(t, X) + \nabla_{\mathbf{V}} \Xi(t, X) \right) |_{X=X(t, X_0)}. \quad (11)$$

Ritornando in rappresentazione Euleriana definiamo la **derivata materiale o Lagrangiana** del campo tensoriale Ξ come

$$\frac{D}{Dt} \Xi(t, X) := \frac{\partial}{\partial t} \Xi(t, X) + \nabla_{\mathbf{V}} \Xi(t, X). \quad (12)$$

Si osservi che $\nabla_{\mathbf{V}} \Xi(t, X)$ in componenti ortonormali cartesiane ha la forma $V_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Xi^A$ essendo $V_i = V^i$. Come ben noto, tali componenti sono più generalmente le componenti della derivata covariante di Ξ rispetto al campo vettoriale controvariante \mathbf{V} e rispetto alla connessione di Levi-Civita associata alla metrica euclidea di \mathbb{E}^3 . È immediato verificare che $\frac{\partial}{\partial t} \Xi(t, X)$, definito usando coordinate su \mathbb{E}^3 indipendenti dal tempo, è un tensore su C_t . Ciò prova che l'operatore $\frac{D}{Dt}$ produce campi tensoriali su C_t agendo su famiglie t' -differenziabili di campi tensoriali definite sulle configurazioni $C_{t'}$ in un intorno di t .

L'utilità della derivata materiale è la seguente: essa viene eseguita nella più comoda rappresentazione Euleriana, ma calcola comunque i tassi di variazione delle grandezze considerate lungo le storie delle singole particelle materiali, valendo per costruzione:

$$\left(\frac{D}{Dt} \Xi(t, X) \right) |_{X=X(t, X_0)} = \frac{\partial}{\partial t} \Xi_L(t, X_0). \quad (13)$$

Si verifica subito che

$$\mathbf{A}(t, X) = \frac{D}{Dt} \mathbf{V}(t, X). \quad (14)$$

1.5 Flusso e Circolazione.

Consideriamo ancora il flusso del continuo $(t, X_0) \mapsto X(t, X_0)$ ed il campo di velocità associato $\mathbf{V} = \mathbf{V}(t, X)$. Fissato $t \in \mathbb{R}$, le linee integrali di tale campo in C_t sono dette **linee di flusso**. Si osservi che esse non sono legate direttamente alle *linee di corrente* definite sopra. Le prime sono definite ad un tempo fissato, mentre le seconde sono curve parametrizzate in t a valori in \mathbb{E}^3 .

Si fissi $\gamma \subset C_t$, curva regolare che *non* è tangente alle linee di flusso che la intersecano. L'insieme di queste ultime, S_γ , è detto **superficie di flusso** generata da γ . Se γ è chiusa, la superficie di flusso da essa generata (assunta essere non degenere) è detta **tubo di flusso**.

Il flusso di un continuo è detto **stazionario** se

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}(t, X) = 0 \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R} \text{ e } X \in C_t.$$

Teorema 1.1. *Se il flusso di un continuo è stazionario allora le linee di corrente e le linee di flusso definiscono le stesse traiettorie in \mathbb{E}^3 .*

Dimostrazione. L'equazione differenziale per una linea di flusso al tempo t è, per definizione, con $u \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{du} X(u) = \mathbf{V}(t, X(u)).$$

L'equazione per una linea di corrente è invece

$$\frac{d}{dt} X(t) = \mathbf{V}_L(t, X_0),$$

ossia, passando in rappresentazione Euleriana

$$\frac{d}{dt} X(t) = \mathbf{V}(t, X(t)).$$

Se il flusso è stazionario, le due equazioni, per le linee di flusso e di corrente, sono rispettivamente date da

$$\frac{d}{du} X(u) = \mathbf{V}(X(u))$$

e

$$\frac{d}{dt} X(t) = \mathbf{V}(X(t)).$$

Pertanto identificando u con il tempo t della seconda, si ha la stessa famiglia di soluzioni. \square

Dato un continuo con campo di velocità \mathbf{V} , si definisce il **campo di vorticità**:

$$\Omega(t, X) := \text{rot} \mathbf{V}(t, X).$$

Analogamente alle linee di flusso e alle superfici di flusso al tempo t , si definiscono linee e superfici di vorticità.

Un flusso di un continuo è detto **irrotazionale** all'istante $t \in \mathbb{R}$ se a quell'istante il campo di vorticità è ovunque nullo su C_t . In caso contrario, il flusso è detto **rotazionale** o **vorticoso** all'istante considerato.

Se a $t \in \mathbb{R}$ fissato, $\gamma \subset C_t$ è una curva regolare semplice chiusa ed è fissato su di essa un senso di percorrenza,

$$C_\gamma := \oint_\gamma \mathbf{V} \cdot d\gamma$$

è detta **circolazione di \mathbf{V} su γ** .

Osservazione. Se all'istante t , c'è una linea di flusso chiusa, allora la circolazione di \mathbf{V} su tale linea è sicuramente non nulla.

Passiamo a studiare alcune proprietà locali della circolazione connesse al campo di vorticità. Ricordiamo che nelle nostre ipotesi, il campo di velocità è una funzione di classe C^1 almeno, per cui il campo di vorticità è una funzione continua.

Teorema 1.2. *Se all'istante $t \in \mathbb{R}$ il flusso di un continuo è irrotazionale allora, in quell'istante, la circolazione del campo di velocità è nulla su ogni curva regolare semplice chiusa $\gamma \subset A \subset C_t$ dove A è un aperto semplicemente connesso.*

Viceversa se, all'istante $t \in \mathbb{R}$ la circolazione del campo di velocità è nulla su ogni curva regolare semplice chiusa contenuta in C_t , allora il flusso è irrotazionale in quell'istante.

Dimostrazione. Se $A \subset C_t$ è un aperto semplicemente connesso e $\gamma \subset A$ è una curva regolare semplice e chiusa, c'è una superficie $S \subset A$ che ha per bordo γ . Il verso di percorrenza di γ determina una scelta per i versori normali a S , \mathbf{n} , usando l'orientazione di \mathbb{E}^3 (la “regola della mano destra”). Il teorema di Stokes (vedi **2.1** per il significato di $d\Sigma$) assicura che:

$$C_\gamma = \oint_\gamma \mathbf{V} \cdot d\gamma = \int_S \text{rot}\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, d\Sigma.$$

L'irrotazionalità del flusso (al tempo considerato) assicura che la circolazione C_γ sia nulla.

Veniamo alla seconda parte della tesi. Fissiamo una configurazione C_t in cui tutte le circolazioni siano nulle. Dato che \mathbb{E}^3 ammette una base per la topologia data dalle palle aperte sufficientemente piccole (che sono semplicemente connesse), ogni punto $X \in C_t$ è contenuto in una superficie piana S_X che ha per bordo una circonferenza massima di una sfera centrata in X stesso, la chiusura della palla B di cui la sfera è il bordo è contenuta in C_t e il verso del versore normale a tale superficie può essere fissato arbitrariamente. L'equazione di sopra, nelle ipotesi dette assicura che per ogni $X \in C_t$ e per ogni S_X come detto,

$$\int_{S_X} \text{rot}\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, d\Sigma = 0. \tag{15}$$

Supponiamo che $\text{rot}\mathbf{V}(t, X') \neq 0$ per qualche $X' \in C_t$. Allora scegliamo una superficie $S_{X'}$ come detto sopra tale che il versore normale ad essa sia parallelo a $\text{rot}\mathbf{V}(t, X')$ stesso. Risulterà

$rot\mathbf{V}(t, X') \cdot \mathbf{n} = k > 0$. Per la continuità di $X \mapsto rot\mathbf{V}(t, X) \cdot \mathbf{n}$, per ogni $\epsilon > 0$, esisterà un numero $\delta > 0$ per cui $|k - rot\mathbf{V}(t, X) \cdot \mathbf{n}| < \epsilon$ ovvero $-\epsilon < k - rot\mathbf{V}(t, X) \cdot \mathbf{n} < \epsilon$ in una palla aperta B' centrata in X' e con raggio δ . Dalla disuguaglianza scritta segue immediatamente che, se scegliamo ϵ tale che $k - \epsilon > 0$ (ed è sempre possibile essendo $k > 0$), in B' varrà anche $rot\mathbf{V}(t, X) \cdot \mathbf{n} > k - \epsilon > 0$. Restringendo $S_{X'}$ fino a quando il suo bordo coincide con un cerchio massimo della frontiera di B' , si avrebbe

$$\int_{S_{X'}} rot\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\Sigma \geq \int_{S_{X'}} (k - \epsilon) d\Sigma \geq (k - \epsilon)\pi\delta^2 > 0,$$

che contraddice (15) per $X = X'$. \square

Per concludere, ricordiamo la relazione tra irrotazionalità del campo \mathbf{V} e l'esistenza di una funzione potenziale delle velocità ϕ . Tali risultati saranno utili in seguito. La prova del seguente teorema è basata su noti teoremi di analisi su \mathbb{R}^n . (È sufficiente lavorare in coordinate cartesiane di \mathbb{E}^3).

Teorema 1.3. *Al tempo $t \in \mathbb{R}$, esiste una funzione a valori reali $\phi_t \in C^k(C_t)$ per $k \geq 1$ tale che*

$$\mathbf{V}(t, X) = \nabla\phi_t(X),$$

se e solo se $C_\gamma = 0$ per ogni curva $\gamma \subset C_t$ regolare semplice chiusa. In tal caso, se ulteriormente $k \geq 2$, il flusso è irrotazionale.

Viceversa se il flusso è irrotazionale al tempo $t \in \mathbb{R}$, per ogni aperto $A \subset C_t$ semplicemente connesso esiste una funzione $\phi_t : A \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi \in C^2(A)$ tale che $\mathbf{V}(t, X) = \nabla\phi_t(X)$ per ogni $X \in A$.

La funzione ϕ_t di cui si parla sopra, quando esiste, è detta **potenziale delle velocità al tempo t** in A o in tutto C_t .

2 Equazione di Continuità, Incompressibilità, Classificazione dei tipi di Flusso.

2.1 Richiami di Teoria dell'Integrazione.

In \mathbb{E}^3 possiamo definire una misura di Borel μ inducendola in modo ovvio da quella di Lebesgue in \mathbb{R}^3 una volta fissato un sistema di coordinate cartesiane ortonormali su \mathbb{E}^3 , $\phi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. $V \subset \mathbb{E}^3$ è misurabile secondo μ se e solo se $\phi(V)$ è tale secondo λ . Inoltre, se V è misurabile

$$\mu(V) := \lambda(\phi(V)),$$

dove λ è la misura di Lebesgue su \mathbb{R}^3 .

N.B. *Le proprietà di invarianza sotto il gruppo delle isometrie di \mathbb{R}^3 della misura di Lebesgue assicurano che la definizione di μ è indipendente dalla scelta delle coordinate cartesiane ortonormali scelte per definirla.*

Con la procedura standard ben nota dai corsi di analisi, si passa dalla misura di insiemi all'integrazione di funzioni misurabili. È immediato dimostrare che se $V \subset \mathbb{E}^3$ e $h : V \rightarrow \mathbb{C}$ sono μ -misurabili, allora

$$\int_V h d\mu = \int_{\phi(V)} h \circ \phi^{-1} d\lambda,$$

per ogni sistema di coordinate cartesiane ortonormali ϕ .

Per quanto ci riguarda, noi siamo interessati alla misura e all'integrazione su una particolare classe di insiemi che diremo *regolari*. Un insieme $V \subset \mathbb{E}^3$ è **regolare** se è aperto e la sua chiusura è compatta. (Si noti che ogni aperto è misurabile essendo la misura di Borel, inoltre ogni V regolare ha misura finita essendo a chiusura compatta). Si può provare che (vedi qualunque testo di teoria della misura) l'immagine $f(V)$ di un insieme regolare V secondo un diffeomorfismo $f : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ è ancora un insieme regolare. In particolare se $h \in L^1(f(V), \mu)$ vale la formula di cambiamento di variabile nell'integrazione

$$\int_{f(V)} h(Y) d\mu(Y) = \int_V h(f(X)) |\det J_f(X)| d\mu(X). \quad (16)$$

dove J_f è la matrice Jacobiana della trasformazione f riferita ad un qualsiasi sistema di coordinate globali su \mathbb{E}^3 .

(16) vale in particolare se h è una funzione continua limitata.

Passando a considerare superfici in \mathbb{E}^3 , le diremo **regolari** quando saranno tali (nel senso della geometria differenziale elementare) rispetto a coordinate cartesiane ortonormali. In altre parole, una superficie di \mathbb{E}^3 è detta regolare quando è una sottovarietà (embedded) di \mathbb{E}^3 (dotato della struttura di varietà differenziabile naturale indotta dalla sua struttura di spazio affine). In particolare la misura μ indurrà una misura, che indicheremo con $d\Sigma$, sulle superfici regolari.

I teoremi del calcolo integrale in più variabili si estendono direttamente da \mathbb{R}^3 ad \mathbb{E}^3 in modo ovvio. A titolo di esempio, se $V \subset \mathbb{E}^3$ è un insieme regolare la cui frontiera ∂V è una superficie regolare orientabile e se \mathbf{G} è un campo vettoriale differenziabile (C^1) definito in un intorno di V , allora il teorema della divergenza si esprime come:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{G}(X) d\mu(X) = \oint_{\partial V} \mathbf{G}(X) \cdot \mathbf{n}(X) d\Sigma(X),$$

dove $\mathbf{n}(X)$ è il versore normale a ∂V nel punto considerato $X \in \partial V$, uscente da V .

Si osservi ancora che se $V \subset \mathbb{E}^3$ è un insieme regolare tale che ∂V è una superficie regolare orientabile, allora ogni diffeomorfismo locale di \mathbb{E}^3 in \mathbb{E}^3 , con dominio che include \bar{V} , manda V in un insieme regolare la cui frontiera è una superficie regolare orientabile.

Per concludere proviamo il seguente risultato tecnico che ci sarà utile in seguito svariate volte.

Proposizione 2.1. *Se $U \subset \mathbb{E}^3$ è un aperto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ è continua allora i seguenti tre fatti sono equivalenti.*

- (a) *f è identicamente nulla su U ,*
- (b) *Per ogni insieme regolare $V \subset U$:*

$$\int_V f d\mu = 0,$$

- (c) *Per ogni insieme regolare con frontiera regolare $V' \subset U$:*

$$\int_{V'} f d\mu = 0.$$

Dimostrazione. Il fatto che (a) implichi (b) e (c) è ovvio essendo $f \upharpoonright_V$ identicamente nulla e l'integrale un funzionale lineare. Proviamo che (b) implica (a). Procediamo per assurdo. Supponiamo che ciò sia falso. Allora esisterà f soddisfacente (b) e un punto $X \in U$ in cui $f(X) \neq 0$. Senza perdere generalità assumiamo $f(X) > 0$ (nell'altro caso si procede analogamente). Sia $k := f(X) > 0$. Dato che f è continua, per ogni $\epsilon > 0$ esisterà $\delta > 0$ per cui $-\epsilon < k - f(Y) < \epsilon$ per ogni $Y \in B$, dove B è una palla aperta centrata in X e di raggio δ . Dato che $k > 0$, possiamo scegliere $\epsilon > 0$ tale che $k - \epsilon > 0$. In B varrà allora in particolare $f(Y) > k - \epsilon > 0$. Quindi varrà anche

$$\int_B f d\mu \geq \int_B (k - \epsilon) d\mu = (k - \epsilon)4\pi\delta^3/3 > 0,$$

Il risultato ottenuto contraddice l'ipotesi (b) dato che B è un insieme regolare, per cui la tesi è provata. Dato che le palle aperte sono insiemi regolari con frontiera regolare, la stessa dimostrazione prova anche che (c) implica (a). \square

2.2 Conservazione della Massa ed Equazione di Continuità.

Assumeremo d'ora in poi che, in aggiunta alle ipotesi matematiche fatte, che sia definita su $\cup_{t \in \mathbb{R}} \{t\} \times C_t$ una funzione differenziabile $\rho = \rho(t, X)$, con la particolarità che $\rho(t, X) > 0$ ovunque. Tale funzione sarà detta **densità di massa**. Diremo **porzione materiale di continuo** ogni insieme $V_0 \subset C_0$ che sia regolare. La **massa** della porzione V_0 al tempo t è definita come

$$M(V_t) := \int_{V_t} \rho(t, X) d\mu(X),$$

dove $V_t \subset C_t$ denota l'**evoluzione di V_0 secondo il flusso del continuo \mathcal{F}** , ossia

$$V_t := \{X(t, X_0) \mid X_0 \in V_0\}.$$

Il **principio di conservazione della massa** afferma che: *In assenza di trasformazioni fisico-chimiche all'interno del continuo, la massa di ogni porzione materiale di un continuo deve essere costante nel tempo*¹.

Nelle ipotesi di assenza di trasformazioni fisico chimiche, il principio di conservazione della massa sarà equivalente a dire che per ogni insieme regolare $V_0 \subset C_0$,

$$M(V_t) = M(V_0).$$

In altre parole, per ogni $t \in \mathbb{R}$ e per ogni insieme regolare $V_0 \subset C_0$ vale l'equazione di conservazione della massa in forma integrale:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho(t, X) d\mu(X) = 0. \quad (17)$$

Benché la (17) abbia un significato evidente non è affatto comoda da impiegarsi nei calcoli per cui è utile dedurre una forma differenziale che valga punto per punto e che sia equivalente alla (17) stessa. Tale nuova equazione che andiamo a ricavare prende il nome di **equazione di continuità della massa**.

Teorema 2.1. *La validità dell'equazione di conservazione (17) per ogni porzione materiale di continuo V_t e per ogni tempo $t \in \mathbb{R}$ è equivalente alla validità per ogni $(t, X) \in \mathcal{C}$ dell'**equazione di continuità per ρ** :*

$$\frac{D}{Dt} \rho(t, X) + \rho(t, X) \operatorname{div} \mathbf{V}(t, X) = 0. \quad (18)$$

¹Trasformazioni fisico-chimiche possono dar luogo ad un continuo di natura diversa sottraendo massa al continuo iniziale.

Dimostrazione. Per quanto visto sopra l'equazione (17) equivale a

$$\frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho(t, X(t, X_0)) |\det J_t(X_0)| d\mu(X_0) = 0 .$$

Nelle ipotesi fatte, usando il teorema della convergenza dominata di Lebesgue, è facile provare che è possibile passare la derivata sotto il segno di integrale (in (17) non è possibile perché t compare anche nel dominio di integrazione). (17) equivale dunque a²

$$\int_{V_0} \frac{\partial}{\partial t} \rho(t, X(t, X_0)) |\det J_t(X_0)| d\mu(X_0) = 0 ,$$

ovvero

$$\int_{V_0} \left\{ \frac{\partial \rho(t, X(t, X_0))}{\partial t} |\det J_t(X_0)| + \rho(t, X(t, X_0)) \frac{\partial |\det J_t(X_0)|}{\partial t} \right\} d\mu(X_0) = 0 .$$

Per la Proposizione 1.1 possiamo omettere il segno di valore assoluto attorno al determinante Jacobiano. Ciò è importante nel secondo addendo dell'integrale in cui si deriva una funzione contenente un valore assoluto (che non è differenziabile nell'origine).

$$\int_{V_0} \left\{ \frac{\partial \rho(t, X(t, X_0))}{\partial t} \det J_t(X_0) + \rho(t, X(t, X_0)) \frac{\partial \det J_t(X_0)}{\partial t} \right\} d\mu(X_0) = 0 .$$

Questa equazione deve valere per ogni scelta di V_0 . Essendo l'integrando una funzione continua, in base alla Proposizione 2.1, abbiamo provato che il principio di conservazione della massa equivale a

$$\frac{\partial \rho(t, X(t, X_0))}{\partial t} \det J_t(t, X_0) + \rho(t, X(t, X_0)) \frac{\partial \det J_t(X_0)}{\partial t} = 0 ,$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$ e $X_0 \in C_0$. Dato che $\det J_t(X_0) > 0$ ed usando la definizione derivata materiale, la stessa identità si riscrive

$$\left(\frac{D}{Dt} \rho(t, X) \right) |_{X=X(t, X_0)} + \rho(t, X(t, X_0)) \frac{1}{\det J_t(X_0)} \frac{\partial \det J_t(X_0)}{\partial t} = 0$$

In base alla Proposizione 1.2 la stessa equazione si riscrive,

$$\left(\frac{D}{Dt} \rho(t, X) + \rho(t, X) \operatorname{div} \mathbf{V}(t, X) \right) |_{X=X(t, X_0)} = 0 .$$

Dato che questa equazione vale per ogni $X_0 \in C_0$ e che $X_0 \mapsto X(t, X_0)$ è biettiva essa può anche essere equivalentemente scritta, per ogni $t \in \mathbb{R}$ e per ogni $X \in C_t$:

$$\frac{D}{Dt} \rho(t, X) + \rho(t, X) \operatorname{div} \mathbf{V}(t, X) = 0 ,$$

²Nella dimostrazione la derivata parziale indica una derivata totale rispetto alla completa dipendenza da t , anche attraverso la funzione $X(t, X_0)$.

che è la tesi. \square .

Passiamo a considerare altri modi di enunciare la legge di conservazione della massa equivalenti alla formulazione basata sull'equazione di continuità. Prima di tutto notiamo che, usando l'espressione (12), la (18) si può riscrivere come,

$$\frac{\partial \rho(t, X)}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{V}} \rho(t, X) + \rho(t, X) \operatorname{div} \mathbf{V}(t, X) = 0.$$

Valendo in generale $\nabla_{\mathbf{V}} f + f \operatorname{div} \mathbf{V} = \operatorname{div}(f \mathbf{V})$, otteniamo una forma equivalente dell'equazione di continuità (18),

$$\frac{\partial \rho(t, X)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho(t, X) \mathbf{V}(t, X)) = 0 \quad (19)$$

per $(t, X) \in \mathcal{C}$.

La (19) si presta ad una ulteriore formulazione del principio di conservazione della massa scritta in forma integrale. Si consideri un volume geometrico aperto e regolare $V \subset \mathbb{E}^3$ tale da soddisfare i requisiti di cui sotto. Supponiamo che ∂V sia una superficie chiusa e regolare, in modo tale da poter applicare il teorema della divergenza. Se integriamo a t costante la (19) su V otteniamo

$$\int_V \frac{\partial \rho(t, X)}{\partial t} d\mu + \int_V \operatorname{div}(\rho(t, X) \mathbf{V}(t, X)) d\mu = 0.$$

Usando il teorema della divergenza otteniamo che l'identità di sopra equivale a

$$\int_V \frac{\partial \rho(t, X)}{\partial t} d\mu + \oint_{\partial V} (\rho(t, X) \mathbf{V}(t, X)) \cdot \mathbf{n} d\Sigma = 0.$$

Sopra \mathbf{n} è il versore normale a ∂V orientato in modo uscente. Dato che \mathcal{C} è aperto per la Proposizione 1.3, prendiamo V piccolo a sufficienza e $\epsilon > 0$ anche, in modo che il cilindro aperto descritto da $]t - \epsilon, t + \epsilon[\times V$ sia tutto contenuto in \mathcal{C} . In tal caso la funzione di t , $t \mapsto \int_V \rho(t, X) d\mu$ è ben definita in $]t - \epsilon, t + \epsilon[$ e possiamo portare l'operatore di derivata fuori dal segno di integrale usando il teorema della convergenza dominata di Lebesgue. Otteniamo in tal modo:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(t, X) d\mu = - \oint_{\partial V} (\rho(t, X) \mathbf{V}(t, X)) \cdot \mathbf{n} d\Sigma. \quad (20)$$

L'equazione di sopra dice che la **variazione di massa per unità di tempo** in un fissato volume geometrico V è pari al **flusso entrante di massa** nell'istante considerato.

Per concludere precisiamo come si scriva l'equazione di bilancio della massa in assenza di conservazione. Semplicemente la (19) diventa:

$$\frac{\partial \rho(t, X)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho(t, X) \mathbf{V}(t, X)) = S(t, X),$$

dove la funzione S a secondo membro corrisponde ad una **sorgente di massa** (se $S < 0$ sempre, si parla più propriamente di **pozzo di massa**). La corrispondente di (20) è allora

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(t, X) d\mu = - \oint_{\partial V} (\rho(t, X) \mathbf{V}(t, X)) \cdot \mathbf{n} d\Sigma + \int_V S(t, X) d\mu .$$

N.B. *D'ora in poi considereremo solo continui in cui non avvengono trasformazioni fisico-chimiche, per i quali è supposto valere il principio di conservazione della massa. Quindi, d'ora in poi, l'equazione (17) sarà sempre tacitamente supposta valida.*

2.3 Un lemma tecnico.

Ragionando in modo praticamente identico a quanto fatto nella dimostrazione del Teorema 2.1 si ottiene il seguente utile risultato tecnico.

Per enunciare il teorema abbiamo bisogno della nozione di *integrale di un campo tensoriale su una regione integrabile di uno spazio euclideo*. Se $\mathbf{T} = \mathbf{T}(X)$ è un campo tensoriale definito sull'aperto A dello spazio euclideo \mathbb{E}^n (visto come varietà riemanniana), l'integrale di \mathbf{T} sull'insieme regolare V ,

$$\mathbf{T}_V := \int_V \mathbf{T}(X) d\mu(X) ,$$

è il tensore vettore nell'algebra tensoriale generata dallo spazio vettoriale V^n della struttura affine di \mathbb{E}^n le cui componenti sulla base dello spazio tensoriale di \mathbf{T}_V associata alla base ortonormale $\{e_1, \dots, e_n\} \subset V$ sono date da

$$T_V^A := \int_V T^A(X) d\mu(X) ,$$

essendo $T^A(X)$ la componente generica del tensore $\mathbf{T}(X) \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}(T_X \mathbb{E}^n)$ in coordinate cartesiane ortonormali generate dalla base $\{e_1, \dots, e_n\}$ e dalla scelta arbitraria di un'origine O .

Si verifica immediatamente che la definizione non dipende dalle dalla base ortonormale scelta.

Proposizione 2.2. *Se il campo $\Xi = \Xi(t, X)$ è differenziabile e definisce un campo tensoriale differenziabile su C_t per ogni $t \in \mathbb{R}$, allora (assumendo che valga l'equazione di continuità della densità di massa ρ) per ogni porzione materiale di continuo $V_0 \subset C_0$ vale*

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho(t, X) \Xi(t, X) d\mu = \int_{V_t} \rho(t, X) \frac{D}{Dt} \Xi(t, X) d\mu . \quad (21)$$

Dimostrazione. Ripetendo la dimostrazione del Teorema 2.1 si ha la seguente identità

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho(t, X) \Xi(t, X) d\mu &= \int_{V_0} \left[\frac{D}{Dt} (\rho(t, X) \Xi(t, X)) \right]_{X=X(t, X_0)} |J_t(X_0)| d\mu(X_0) \\ &+ \int_{V_0} [\rho(t, X) \Xi(t, X) \operatorname{div} \mathbf{V}(t, X)]_{X=X(t, X_0)} |J_t(X_0)| d\mu(X_0) . \end{aligned}$$

In altre parole

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho(t, X) \Xi(t, X) d\mu = \int_{V_t} \frac{D}{Dt} (\rho(t, X) \Xi(t, X)) d\mu + \int_{V_t} \rho(t, X) \Xi(t, X) \operatorname{div} \mathbf{V}(t, X) d\mu$$

D'altra parte per computo diretto si ha

$$\frac{D}{Dt} (\rho(t, X) \Xi(t, X)) = \rho(t, X) \frac{D}{Dt} \Xi(t, X) + \left(\frac{D}{Dt} \rho(t, X) \right) \Xi(t, X).$$

Inserendo tale risultato nell'integrale ed usando l'equazione di continuità (18) segue la tesi immediatamente. \square

Osservazione importante. Facciamo qualche commento sulla definizione di integrale di un campo tensoriale su un volume. Perché possiamo integrare, ovvero, in senso intuitivo, sommare tensori, come quelli punto per punto definiti dal campo $\rho \Xi$ di sopra, *applicati su punti diversi del continuo*? Tale possibilità è intrinsecamente legata al fatto che stiamo lavorando in uno spazio affine \mathbb{E}^3 . Se V^3 è lo spazio dei vettori della struttura dello spazio affine (ossia le traslazioni o vettori liberi), possiamo definire l'algebra tensoriale $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}(V^3)$ generata da V^3 . Come noto, per ogni $P \in \mathbb{E}^3$, c'è un isomorfismo naturale $\chi_P : T_P \mathbb{E}^3 \rightarrow V^3$ che identifica i vettori dei due spazi. Tale isomorfismo naturale semplicemente identifica le componenti dei vettori su una base in V^3 con le componenti dei vettori sulla base locale in $T_P \mathbb{E}^3$ associata alle coordinate cartesiane generate da tale base (indipendentemente dalla scelta dell'origine). Un analogo isomorfismo naturale si ottiene come $\chi_P^* : T_P^* \mathbb{E}^3 \rightarrow (V^3)^*$ usando le basi duali associate alle rispettive basi suddette. In tal modo, prendendo prodotti tensoriali di tali isomorfismi, si ottengono isomorfismi naturali tra spazi di tensori in $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}(T_P \mathbb{E}^3)$ e corrispondenti spazi di tensori in $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}(V^3)$. Per esempio $\chi_P^* \otimes \chi_P : T_P^* \mathbb{E}^3 \otimes T_P \mathbb{E}^3 \rightarrow (V^3)^* \otimes V^3$. Ogni tensore $\Xi(t, P)$ che compare nelle formule di sopra definisce un analogo tensore in $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}(V^3)$ indipendentemente dal punto P ed in tal modo tensori definiti nello stesso istante, ma applicati su punti diversi di \mathbb{E}^3 , si possono sommare e dar luogo ad un tensore di $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}(V^3)$. Più in generale si possono definire gli integrali di campi tensoriali usati sopra, producendo tensori in $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}(V^3)$, approssimando l'integrale con somme di Cauchy. Lasciamo i dettagli di questo discorso al lettore. È in ogni modo chiaro che la definizione alla quale si perviene per questa via deve risultare equivalente a quella data prima in cui l'integrale del campo tensoriale è definito in componenti integrandone le singole componenti *in coordinate cartesiane ortonormali*.

2.4 Classificazione dei tipi di Flusso, Legge di Castelli.

Un flusso è detto **solenoidale** al tempo t_0 quando vale, per il campo di velocità associato,

$$\operatorname{div} \mathbf{V}(t, X) = 0 \quad \text{per ogni } (t, X) \in \mathcal{C} \text{ con } t = t_0. \quad (22)$$

Il significato fisico della condizione di solenoidalità, quando vale ad ogni t , è chiarito dal seguente teorema.

Teorema 2.2. *Le seguenti proposizioni sono equivalenti per un continuo.*

(a) *Il flusso è solenoidale per ogni $t \in \mathbb{R}$.*

(b) *Il flusso preserva i volumi delle porzioni materiali di continuo, ovvero*

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} d\mu = 0, \quad (23)$$

denotando con V_t l'evoluzione secondo il flusso di un generico insieme regolare $V_0 \subset C_0$.

Se il continuo soddisfa anche il principio di conservazione della massa, (a) e (b) sono separatamente equivalenti alla seguente proposizione.

(c) *La densità di massa è costante lungo le linee di corrente.*

Dimostrazione. Ragionando esattamente come nella dimostrazione del teorema precedente, ponendo $\rho(t, X) = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, $X \in C_t$, si ha che la validità di (23) per ogni V_0 è equivalente a (18) e quindi (19) con $\rho(t, X) = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, $X \in C_t$. Questa è la prova che (a) e (b) sono equivalenti. Riguardo all'equivalenza con (c), notiamo che l'enunciato (c) si scrive in formule

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad \text{per ogni } (t, X) \in \mathcal{C}$$

In questa forma, l'equivalenza di (c) con (a) è immediatamente provata da (18) tenendo conto della positività di ρ . \square

Un flusso è detto **incompressibile** se e solo se vale

$$\rho(t, X) = \rho_0 \quad \text{costante per ogni } t \in \mathbb{R} \text{ e } X \in C_t. \quad (24)$$

Dall'equazione di continuità (19) segue subito che *un flusso incompressibile deve anche essere solenoidale ad ogni istante*. Il viceversa è falso.

Un continuo è detto **incompressibile** quando ammette solo flussi incompressibili. Per esempio l'acqua in condizioni normali è un continuo incompressibile.

Si consideri un tubo di flusso al tempo t dato da una superficie regolare Γ . Se S è una sezione del tubo di flusso, data a sua volta da una superficie regolare, la **portata del flusso attraverso S** (all'istante t), $\Phi(S)$ è definita come

$$\Phi_\Gamma(S) = \int_S \mathbf{V}(t, X) \cdot \mathbf{n} \, d\Sigma,$$

dove il vettore \mathbf{n} normale a S è orientato come \mathbf{V} . La **portata di massa attraverso S** è invece definita come

$$\Psi_\Gamma(S) := \int_S \rho(t, X) \mathbf{V}(t, X) \cdot \mathbf{n} \, d\Sigma.$$

Vale la **Legge di Castelli**.

Teorema 2.3. *Se un flusso è solenoidale all'istante t , dato un tubo di flusso regolare Γ , la portata del flusso riferita a Γ non dipende dalla sezione S nell'istante considerato. Se il flusso è ulteriormente incompressibile, lo stesso risultato sussiste per la portata di massa.*

Dimostrazione. Si consideri il volume U racchiuso nel tubo di flusso Γ tra due sezioni consecutive S e S' . Indichiamo con Γ' la superficie chiusa determinata da tali superfici. Usando il teorema della divergenza nelle ipotesi di solenoidalità, $div\mathbf{V} = 0$ per cui

$$\int_{\Gamma'} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, d\Sigma = \int_U div\mathbf{V} \, d\mu = 0.$$

\mathbf{n} è il versore normale a Γ' uscente. Il primo integrale in realtà non riceve contributo dalla superficie laterale del tubo di flusso in quanto, per costruzione \mathbf{n} e \mathbf{V} sono perpendicolari su di essa. L'integrale di superficie rimanente si spezza in due integrali eseguiti sulle due porzioni di superficie rimanenti, S ed S' le sezioni del tubo di flusso. Tenendo conto della differente orientazione di \mathbf{n} su di esse rispetto a \mathbf{V} ,

$$\int_{\Gamma'} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, d\Sigma = 0,$$

significa proprio la tesi:

$$\Phi_{\Gamma}(S) - \Phi_{\Gamma}(S') = 0.$$

Se il flusso è incompressibile, $\Psi_{\Gamma}(S) = \rho_0 \Phi_{\Gamma}(S)$ per ogni sezione, dove ρ_0 è una costante, per cui la prova della tesi è immediata. \square

Per concludere, rivediamo i vari tipi di flusso che abbiamo incontrato fino ad ora riassumendone le caratteristiche specifiche.

Flusso stazionario.:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}(t, X) = 0 \quad \text{per ogni } (t, X) \in \mathcal{C}.$$

Proprietà.: le linee di flusso coincidono con le linee di corrente.

Flusso irrotazionale.:

$$rot\mathbf{V}(t, X) = 0 \quad \text{per qualche } t \in \mathbb{R} \text{ e ogni } X \in C_t.$$

Proprietà.: (1) le circolazioni sono nulle localmente. (2) Localmente $\mathbf{V}(t, X) = \nabla\phi_t(X)$.

Flusso solenoidale.:

$$div\mathbf{V}(t, X) = 0 \quad \text{per qualche } t \in \mathbb{R} \text{ e ogni } X \in C_t.$$

Proprietà.: (1) Si conservano i volumi delle porzioni materiali di continuo. (2) Vale la legge di Castelli.

Flusso incompressibile.:

$$\rho(t, X) = \rho_0 \quad \text{costante per ogni } (t, X) \in \mathcal{C}$$

Proprietà.: (1) È solenoidale. (2) Vale la legge di Castelli anche per la portata di massa.

Esercizi 2.1.

2.1.1. Provare che $|\det J_f(X)|$ nella formula (16) non dipende dalle coordinate globali usate su \mathbb{E}^3 .

2.1.2. Provare che se il flusso di un continuo è tale che (1) la funzione densità di massa non dipende dalla particella materiale di continuo e (2) il flusso è solenoidale allora il flusso è incompressibile.

(Traccia per la soluzione. Dall'equazione di continuità (18) si ricava che nelle ipotesi di solenoidaltà $D\rho/Dt = 0$. Passando in rappresentazione Lagrangiana e assumendo l'ipotesi (1) segue facilmente la tesi.)

2.1.3. Mostrare che se un flusso è contemporaneamente solenoidale e irrotazionale, allora il campo di velocità si può esprimere localmente ed al tempo considerato come $\mathbf{V} = \nabla\phi_t(X)$ dove ϕ_t è una funzione armonica (cioè $\Delta\phi_t = 0$ in C_t). Cosa si può concludere riguardo alla analiticità delle componenti cartesiane del campo V al tempo t ?

3 Dinamica: il Tensore degli Sforzi di di Cauchy.

3.1 Impostazione generale della dinamica dei continui: gli sforzi.

Consideriamo una porzione materiale di continuo al tempo t , V_t . Facciamo l'ipotesi che ∂V_t sia una superficie regolare orientabile, in modo che sia ben definito il versore normale uscente \mathbf{n} in ogni punto. Le forze che agiscono su V_t si assumono di due tipi diversi: **forze di massa** e **sforzi**.

Le forze di massa sono individuate da una **densità di forza** definita su \mathcal{C} , ossia un campo vettoriale $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, X)$ differenziabile tale che la **forza di massa agente sulla porzione** V_t (al tempo t) è definita da

$$\mathbf{F}_{V_t} := \int_{V_t} \rho(t, X) \mathbf{f}(t, X) d\mu(X). \quad (25)$$

Si osservi che $[\mathbf{f}] = [F]/[M]$, per cui il campo \mathbf{f} ha le dimensioni di una accelerazione.

Un tipico caso di forze di massa sono le forze gravitazionali. Se $u = u(t, X)$ è il potenziale gravitazionale in X al tempo t , la forza di gravità su V_t è data dalla densità di forza:

$$\mathbf{f}(t, X) = -\nabla u(t, X). \quad (26)$$

(Si noti che se u non dipende dal tempo $\rho(t, X)u(X)$ coincide con la densità di energia potenziale.) In questo schema rientrano anche le forze elettromagnetiche (forza di Lorentz) se si assume che la densità di carica e quella di massa siano proporzionali secondo una costante che non dipende da t e X e ciò corrisponde all'assumere, dal punto di vista fisico, di avere un unico tipo di portatori di carica coincidenti con le stesse particelle (molecole) del continuo. Normalmente le forze di volume sono forze *esterne al sistema continuo*, cioè la coppia azione-reazione non è contenuta nel sistema continuo stesso. Tuttavia ci possono essere eccezioni come il caso di sopra in cui tali forze hanno natura elettromagnetica e pertanto punti di continuo vicini esercitano forze elettriche l'uno sull'altro (in tal caso, in presenza di campi di radiazione, non ha nemmeno senso parlare di coppia azione-reazione).

Gli sforzi, detti anche *stress*, hanno una natura più complicata. Descrivono matematicamente l'idea intuitiva che il resto del continuo agisca sulla porzione V_t attraverso forze superficiali esercitate su ∂V_t . In termini matematici si procede come segue. Indipendentemente da V_t , si assume che per ogni $t \in \mathbb{R}$, $X \in C_t$ e ogni versore $\mathbf{n} \in \mathbb{S}^2$, esista un vettore $\mathbf{S} = \mathbf{S}(t, X, \mathbf{n})$ detto **sforzo** o **stress in X al tempo t , riferito al versore \mathbf{n}** , tale che, variando $t \in \mathbb{R}$, $X \in C_t$, $\mathbf{n} \in \mathbb{S}^2$ definisca una funzione differenziabile. (In particolare per t, \mathbf{n} fissati $X \mapsto \mathbf{S}(t, X, \mathbf{n})$ è un campo vettoriale differenziabile su C_t). Se V_t è stato scelto come detto sopra e $\mathbf{n}(X)$ è il versore normale a ∂V_t uscente da V_t in ogni punto $X \in \partial V_t$, la **forza superficiale agente sulla porzione** V_t (al tempo t) è definita da

$$\mathbf{F}_{\partial V_t} = \oint_{\partial V_t} \mathbf{S}(t, X, \mathbf{n}(X)) d\Sigma(X). \quad (27)$$

Si osservi che $[\mathbf{S}] = [F]/[L^2]$, per cui il campo \mathbf{S} ha le dimensioni di una pressione.

Il **principio di azione e reazione** per gli sforzi è enunciato con la richiesta che, per ogni $t \in \mathbb{R}$, $X \in C_t$, $\mathbf{n} \in \mathbb{S}^2$, valga

$$\mathbf{S}(t, X, -\mathbf{n}) = -\mathbf{S}(t, X, \mathbf{n}). \quad (28)$$

Il significato fisico della richiesta matematica di sopra è il seguente. Supponiamo che \mathbf{n} sia perpendicolare alla superficie “infinitesima” $d\Sigma$ che appartiene sia alla frontiera di V_t che a quella di V'_t che quindi sono in contatto superficiale attraverso $d\Sigma$. Supponiamo ancora che \mathbf{n} sia uscente da V_t (e quindi $-\mathbf{n}$ sarà uscente da V'_t). $\mathbf{S}(t, X, \mathbf{n})d\Sigma$ rappresenta la forza che V'_t esercita su V_t attraverso $d\Sigma$, mentre $\mathbf{S}(t, X, -\mathbf{n})d\Sigma$ rappresenta la forza che V_t esercita su V'_t attraverso $d\Sigma$. Tali forze, dal punto di vista fisico devono essere uguali e contrarie se si vuole usare (in realtà estendere) lo schema concettuale della meccanica classica.

La funzione $(X, \mathbf{n}) \mapsto \mathbf{S}(t, X, \mathbf{n})$ è detta **stato tensionale del continuo** al tempo t .

Osservazione importante. Come già notato nel caso generale, le definizioni (25) e (27) fanno uso esplicitamente della struttura di spazio affine. Consideriamo la prima delle due per esempio. Ogni vettore $\mathbf{f}(t, X)$ è applicato in un punto diverso e non avrebbe senso definire una somma (e quindi l'integrale) di due di tali vettori essendo elementi di due spazi tangenti differenti. In realtà tutti questi vettori si possono pensare come appartenenti allo spazio vettoriale tridimensionale V^3 associato allo spazio affine. Cioè, dentro l'integrale in questione, la funzione $X \mapsto \mathbf{f}(t, X)$ è in realtà pensata come $X \mapsto \chi_X(\mathbf{f}(t, X))$, dove $\chi_X : T_X\mathbb{E}^3 \rightarrow V^3$ è l'isomorfismo naturale tra spazi vettoriali che mappa lo spazio tangente $T_X\mathbb{E}^3$ in V^3 . Infine l'integrale è eseguito componente per componente rispetto ad una base di V^3 (il risultato, per linearità, non dipende dalla base scelta) e \mathbf{F}_{V_t} è un vettore in V^3 che non ha senso pensare in un particolare spazio tangente di \mathbb{E}^3 : è quello che si dice un *vettore libero*.

3.2 Equazioni indefinite della dinamica.

Consideriamo un continuo caratterizzato dalla densità di massa ρ , il campo di forze di massa \mathbf{f} e per ogni t , lo stato tensionale $\mathbf{S}(t, X, \mathbf{n})$ che supponiamo soddisfare tutti i requisiti assegnati precedentemente. Ulteriori requisiti che connettono tutti questi ingredienti sono dati dalle due **equazioni indefinite della dinamica**, dette anche **equazioni cardinali della dinamica**. Il termine “indefinito” è riferito al fatto che tali equazioni sono scritte in termini integro-differenziali.

La prima equazione cardinale della dinamica dei continui richiede che per ogni $t \in \mathbb{R}$ e per ogni porzione materiale di continuo $V_0 \subset C_0$ con frontiera data da una superficie regolare a

tratti³ orientabile e tale che $\overline{V_0} \subset C_0$, valga:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho(t, X) \mathbf{V}(t, X) d\mu(X) = \int_{V_t} \rho(t, X) \mathbf{f}(t, X) d\mu(X) + \oint_{\partial V_t} \mathbf{S}(t, X, \mathbf{n}(X)) d\Sigma(X). \quad (29)$$

Sopra $\mathbf{n}(X)$ è il versore uscente da V_t normale a ∂V_t nel punto X . La richiesta $\overline{V_0} \subset C_0$ equivalente a $\overline{V_t} \subset C_t$, deriva dal fatto che vogliamo che $\partial V_t \subset C_t$ per poter scrivere il secondo integrale di sopra.

L'interpretazione fisica della (29) è ovvia: afferma che la variazione della quantità di moto per unità di tempo associata alla porzione V_0 uguaglia la somma delle forze totali agenti su tale porzione materiale di continuo. Si tratta della diretta generalizzazione ai sistemi continui della prima equazione cardinale della dinamica per i sistemi di punti materiali.

La seconda equazione cardinale della dinamica dei continui richiede che, fissato un punto $O \in \mathbb{E}^3$ arbitrario, per ogni $t \in \mathbb{R}$ e per ogni porzione materiale di continuo $V_0 \subset C_0$ con frontiera data da una superficie regolare orientabile e tale che $\overline{V_0} \subset C_0$, valga:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho(t, X) (X - O) \wedge \mathbf{V}(t, X) d\mu(X) &= \int_{V_t} \rho(t, X) (X - O) \wedge \mathbf{f}(t, X) d\mu(X) \\ &+ \oint_{\partial V_t} (X - O) \wedge \mathbf{S}(t, X, \mathbf{n}(X)) d\Sigma(X). \end{aligned} \quad (30)$$

Sopra $X - O$ è il vettore determinato dai punti O e X nello spazio affine \mathbb{E}^3 , altrimenti indicato come $\hat{O}X$.

L'interpretazione fisica della (30) è chiara: afferma che la variazione per unità di tempo del momento angolare rispetto al polo O (fisso nel riferimento \mathcal{J} considerato) associato alla porzione V_0 uguaglia la somma dei momenti, rispetto allo stesso polo, delle forze totali agenti su tale porzione materiale di continuo. Si tratta dalla diretta generalizzazione ai sistemi continui della seconda equazione cardinale della dinamica per i sistemi di punti materiali.

Un continuo in generale interagisce con l'esterno ad esso anche con forze superficiali. Questo significa che si dovrà tener conto, almeno in certi casi fisicamente rilevanti, di forze che agiscono sul continuo attraverso la superficie ∂C_t , supposta regolare. Si osservi che a rigore i punti di ∂C_t *non* sono punti del continuo. Ulteriormente le funzioni considerate fino ad ora come ρ , \mathbf{V} e \mathbf{S} *non* sono definite su ∂C_t . Ciò che accade al bordo del continuo può venire inglobato nella teoria in due modi differenti. Si può postulare di assegnare (almeno in parte) il comportamento del continuo sul bordo, come per esempio si fa studiando i liquidi viscosi assumendo che al bordo dei canali in cui scorre il liquido il campo di velocità sia nullo e che la densità di massa

³Cioè data dall'unione finita di porzioni chiuse superfici regolari Σ_i che si intersecano per mezzo delle sole frontiere date da curve regolari a tratti e tali che, sulle intersezioni delle Σ_i esistono i limiti del vettore normale a ciascuna Σ_i , ma in generale non coincidono se calcolati a partire da punti interni a differenti Σ_i . Un esempio di tale superficie regolare a tratti è banalmente la superficie di un cubo oppure di un tetraedro: le Σ_i sono le facce piane di tali superfici e le frontiere di esse in cui si interscano sono gli spigoli.

sia una funzione da determinare che ammetta limite finito verso il bordo. Alternativamente si può supporre che le equazioni (29) e (30) continuino a valere fino al bordo incluso assumendo opportune ipotesi di regolarità dei limiti verso il bordo di tutte le funzioni coinvolte nelle leggi di sopra (inclusando i limiti delle necessarie derivate).

Cercheremo ora di trascrivere le equazioni indefinite date sopra in termini differenziali e locali esattamente come abbiamo fatto per l'equazione della conservazione della massa che è stata trascritta come equazione di continuità della densità di massa.

Facendo uso di (21) nel primo membro della prima equazione cardinale (29), essa viene trascritta come

$$\int_{V_t} \rho(t, X) \left(\frac{D}{Dt} \mathbf{V}(t, X) - \mathbf{f}(t, X) \right) d\mu(X) = \oint_{\partial V_t} \mathbf{S}(t, X, \mathbf{n}(X)) d\Sigma(X). \quad (31)$$

Se fosse possibile esprimere il secondo membro come un integrale su V_t , per l'arbitrarietà di tale volume, potremmo riformulare l'equazione in termini dei soli integrandi. Vedremo come fare ciò tra poco dopo avere dimostrato il teorema di Cauchy. Per quanto riguarda la seconda equazione cardinale, notiamo che

$$\frac{D}{Dt}(X - O) = \frac{\partial}{\partial t}(X - O) + \nabla_{\mathbf{V}}(X - O) = \nabla_{\mathbf{V}}(X - O)$$

e ancora notando che in coordinate cartesiane ortonormali centrate in O (ma il risultato non dipende da tale scelta)

$$\nabla_{\mathbf{V}(t, X)}(X - O) = \mathbf{V}(t, X).$$

Facendo infine uso di (21) nel primo membro di (30) e notando che $\mathbf{V} \wedge \mathbf{V} = 0$, (30) si riduce alla forma equivalente

$$\int_{V_t} \rho(t, X) \left[(X - O) \wedge \left(\frac{D}{Dt} \mathbf{V}(t, X) - \mathbf{f}(t, X) \right) \right] d\mu(X) = \oint_{\partial V_t} (X - O) \wedge \mathbf{S}(t, X, \mathbf{n}(X)) d\Sigma(X). \quad (32)$$

Anche qui notiamo che se fosse possibile esprimere il secondo membro come un integrale su V_t , per l'arbitrarietà di tale volume, potremmo riformulare l'equazione in termini dei soli integrandi.

3.3 Il Tensore degli Sforzi di Cauchy.

Dimostriamo il teorema di Cauchy che prova che gli sforzi sono ottenibili da un tensore simmetrico. Tramite tale campo tensoriale, le equazioni della dinamica si possono esprimere in modo differenziale e locale.

Teorema 3.1 (Teorema di Cauchy)⁴. Si consideri un continuo con flusso \mathcal{F} , densità di massa ρ , densità di forze di massa \mathbf{f} , e funzione degli sforzi \mathbf{S} definiti da funzioni di classe $C^k(\mathcal{C})$ con $k \geq 2$ congiuntamente in tutte le variabili (incluso $\mathbf{n} \in \mathbb{S}^2$ per lo stato tensionale)⁵. Si supponga che su tutto \mathcal{C} sia soddisfatta l'equazione di continuità della densità di massa (18) unitamente alle due equazioni cardinali (29), (30) ed al principio di azione e reazione (28).

Sotto tali condizioni esiste un campo tensoriale $\sigma^{ij} = \sigma^{ij}(t, X)$ la cui regolarità in t, X è la stessa di $\mathbf{S}(t, X, \mathbf{n})$ tale che, per ogni $(t, X) \in \mathcal{C}$:

(a) la funzione $\mathbf{n} \mapsto \mathbf{S}(t, X, \mathbf{n})$ si esprime come

$$S^i(t, X, \mathbf{n}) = \sigma^i_j(t, X)n^j, \quad (33)$$

(b) $\sigma(t, X)$ è simmetrico cioè

$$\sigma^{ij}(t, X) = \sigma^{ji}(t, X). \quad (34)$$

Il tensore $\sigma(t, X)$ è detto **tensore degli sforzi di Cauchy**.

Dimostrazione di (a). Consideriamo un istante fissato arbitrariamente $t \in \mathbb{R}$ e un punto fissato arbitrariamente $X \in C_t$. Scegliamo un sistema di coordinate cartesiane ortonormali centrate in X che d'ora in poi indicheremo con O . Consideriamo un versore \mathbf{n} che possiamo sempre pensare con componenti strettamente positive n^i , $i = 1, 2, 3$ rispetto agli assi detti, eventualmente ruotando gli assi di riferimento. Consideriamo il segmento $P(\epsilon) = O + \epsilon \mathbf{n}$ con $\epsilon \in]0, h]$ e $h > 0$ costante e consideriamo la classe di tetraedri chiusi $\{T_\epsilon\}_{\epsilon \in]0, h]}$ contenuti nell'ottante di coordinate non negative rispetto ai tre assi coordinati e ottenuti intersecando i piani perpendicolari a \mathbf{n} con i piani coordinati. Scegliamo h piccolo a sufficienza, in modo che tali tetraedri siano tutti sottoinsiemi di C_t . Sia $\Sigma(\mathbf{n})_\epsilon$ la base di T_ϵ relativa all'altezza $O - P(\epsilon)$ e si indichi con $\Sigma(\mathbf{e}_i)_\epsilon$ la faccia di T_ϵ perpendicolare al versore di base \mathbf{e}_i .

Dalla prima equazione cardinale (31) (in cui abbiamo usato anche l'equazione di continuità) per il volume materiale T_ϵ abbiamo che

$$\frac{1}{\overline{\Sigma(\mathbf{n})}_\epsilon} \int_{T_\epsilon} \rho(t, X) \left(\frac{D}{Dt} \mathbf{V}(t, X) - \mathbf{f}(t, X) \right) d\mu(X) = \frac{1}{\overline{\Sigma(\mathbf{n})}_\epsilon} \oint_{\partial T_\epsilon} \mathbf{S}(t, X, \mathbf{n}(X)) d\Sigma(X) \quad (35)$$

dove, d'ora in poi, $\overline{\Sigma}$ indica l'area della superficie Σ . Ora calcoleremo il limite per $\epsilon \rightarrow 0^+$ di entrambi i membri. In tale limite il tetraedro T_ϵ diventa il punto O . Consideriamo il primo membro dell'identità di sopra. In riferimento alla componente j -esima. Vale

$$\frac{1}{\overline{\Sigma(\mathbf{n})}_\epsilon} \left| \int_{T_\epsilon} \rho(t, X) \left(\frac{D}{Dt} V^j - f^j \right) d\mu \right| \leq \frac{1}{\overline{\Sigma(\mathbf{n})}_\epsilon} \int_{T_\epsilon} \left| \rho(t, X) \left(\frac{D}{Dt} V^j - f^j \right) \right| d\mu.$$

⁴In realtà l'enunciato provato da Cauchy è la linearità di \mathbf{S} in \mathbf{n} , la nozione di tensore è successiva all'opera di Cauchy.

⁵Queste ipotesi di differenziabilità possono essere indebolite notevolmente, ma sarebbe più complicato enunciare il teorema. Di fatto, leggendo la dimostrazione del teorema e tenendo conto delle equazioni che devono essere soddisfatte dalle singole funzioni, si ricavano le ipotesi minimali.

Usando il teorema della media integrale (tenendo conto che gli integrandi sono continui e che il dominio di integrazione è compatto e connesso), la disuguaglianza di sopra diventa:

$$\frac{1}{\overline{\Sigma(\mathbf{n})}_\epsilon} \left| \int_{T_\epsilon} \rho(t, X) \left(\frac{D}{Dt} V^j - f^j \right) d\mu \right| \leq \frac{\mu(T_\epsilon)}{\overline{\Sigma(\mathbf{n})}_\epsilon} \left| \rho(t, X) \left(\frac{D}{Dt} V^j - f^j \right) \right|_{(t, X_\epsilon)}$$

dove $X_\epsilon \in T_\epsilon$ è un punto opportuno. Si noti che $\mu(T_\epsilon) = \epsilon \overline{\Sigma(\mathbf{n})}_\epsilon / 3$, per cui:

$$\frac{1}{\overline{\Sigma(\mathbf{n})}_\epsilon} \left| \int_{T_\epsilon} \rho(t, X) \left(\frac{D}{Dt} V^j - f^j \right) d\mu \right| \leq \frac{\epsilon}{3} K_t,$$

essendo, a t fissato,

$$K_t = \sup_{X \in T_h} \left| \rho(t, X) \left(\frac{D}{Dt} V^j - f^j \right) \right|,$$

che è finito nelle nostre ipotesi. Concludendo, nel limite per $\epsilon \rightarrow 0^+$, il primo membro di (35) si annulla. Come conseguenza di (35) dovrà anche valere:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\overline{\Sigma(\mathbf{n})}_\epsilon} \oint_{\partial T_\epsilon} \mathbf{S}(t, X, \mathbf{n}(X)) d\Sigma(X) = 0. \quad (36)$$

Ovvero, esplicitando l'integrale scritto sopra:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\overline{\Sigma(\mathbf{n})}_\epsilon} \left\{ \int_{\Sigma(\mathbf{n})_\epsilon} \mathbf{S}(t, X, \mathbf{n}) d\Sigma(X) + \sum_{i=1}^3 \int_{\Sigma(\mathbf{e}_i)_\epsilon} \mathbf{S}(t, X, -\mathbf{e}_i) d\Sigma(X) \right\} = 0.$$

Considerando la componente j -esima ed usando nuovamente il teorema della media, otteniamo che, per opportuni punti $X_{j,\epsilon} \in \Sigma(\mathbf{n})_\epsilon$ e $X_{j,\epsilon,i}$

$$\frac{1}{\overline{\Sigma(\mathbf{n})}_\epsilon} \int_{\Sigma(\mathbf{n})_\epsilon} S^j(t, X, \mathbf{n}) d\Sigma(X) = S^j(t, X_{j,\epsilon}, \mathbf{n}),$$

e

$$\frac{1}{\overline{\Sigma(\mathbf{n})}_\epsilon} \int_{\Sigma(\mathbf{e}_i)_\epsilon} S^j(t, X, -\mathbf{e}_i) d\Sigma(X) = \frac{\overline{\Sigma(\mathbf{e}_i)_\epsilon}}{\overline{\Sigma(\mathbf{n})}_\epsilon} S^j(t, X_{j,\epsilon,i}, -\mathbf{e}_i).$$

Con banali considerazioni geometriche⁶ si trova subito che

$$\frac{\overline{\Sigma(\mathbf{e}_i)_\epsilon}}{\overline{\Sigma(\mathbf{n})}_\epsilon} = n^i,$$

⁶Si osservi che $\frac{\overline{\Sigma(\mathbf{e}_i)_\epsilon}}{\overline{\Sigma(\mathbf{n})}_\epsilon}$ è il coseno dell'angolo tra la superficie $\Sigma(\mathbf{e}_i)_\epsilon$ e la superficie $\Sigma(\mathbf{n})_\epsilon$ normale a n . Se si considera il triangolo rettangolo di vertici O , $O + \epsilon n$ ed il punto che si trova su $\Sigma(\mathbf{n})_\epsilon$ e sulla retta per O che ha come versore la proiezione (normalizzata) di n sul piano normale a \mathbf{e}_i , il coseno dell'angolo suddetto coincide con il coseno direttore i -esimo del versore n in quanto i due angoli corrispondenti coincidono.

per cui (36) si può riscrivere, facendo uso di (28):

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ S^j(t, X_{j,\epsilon}, \mathbf{n}) - \sum_{i=1}^3 n^i S^j(t, X_{j,\epsilon,i}, \mathbf{e}_i) \right\} = 0.$$

Dato che i tetraedri si riducono a O per $\epsilon \rightarrow 0^+$ e che tutte le funzioni considerate sono continue si conclude che

$$\mathbf{S}(t, O, \mathbf{n}) = \sum_{i=1}^3 n^i \mathbf{S}(t, O, \mathbf{e}_i). \quad (37)$$

Dato che il punto O era generico, torniamo ad indicarlo con $X \in C_t$. Se estendiamo la definizione della funzione $\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{S}(t, X, \mathbf{n})$ a vettori (non solo versori), ponendo $\mathbf{S}(t, X, \mathbf{0}) := \mathbf{0}$ e, per $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{S}(t, X, \mathbf{v}) := |\mathbf{v}| \mathbf{S}(t, X, \mathbf{v}/|\mathbf{v}|)$, si verifica subito che, se $\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i$, in virtù della (37)

$$\mathbf{S}(t, X, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^3 u^i \mathbf{S}(t, X, \mathbf{e}_i). \quad (38)$$

Dalla (38) otteniamo infine immediatamente che sussiste la relazione:

$$\mathbf{S}(t, X, \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha \mathbf{S}(t, X, \mathbf{u}) + \beta \mathbf{S}(t, X, \mathbf{v}),$$

per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_X \mathbb{E}^3$. Quindi $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{S}(t, X, \mathbf{u})$ è un' applicazione lineare da $T_X \mathbb{E}^3$ in $T_X \mathbb{E}^3$ ed è quindi descrivibile, per un noto teorema di calcolo tensoriale, da un tensore di $T_X \mathbb{E}^3 \otimes T_X^* \mathbb{E}^3$. In rappresentazione astratta indiciale, in particolare:

$$S^j(t, X, \mathbf{n}) = \sigma^j_i(t, X) n^i. \quad (39)$$

Si osservi che tenendo fisso $\mathbf{n} \in \mathbb{S}^2$, l'identità di sopra mostra che il campo tensoriale individuato dal tensore di Cauchy σ deve avere la stessa regolarità, in (t, X) di $\mathbf{S}(t, X, \mathbf{n})$. Abbiamo concluso la dimostrazione del punto **(a)**. La dimostrazione di **(b)** è basata sulla seconda equazione cardinale. La daremo tra poco dopo avere riscritto le equazioni cardinali usando σ e solo la parte **(a)**. \square

Commenti.

(1) Fissiamo un base per $T_X \mathbb{E}^3$, $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,2,3}$ non necessariamente ortonormale. Da teoremi noti di calcolo tensoriale,

$$\mathbf{S}(t, X, \mathbf{e}_k) = \langle \mathbf{S}(t, X, \mathbf{e}_k), \mathbf{e}^{*i} \rangle \mathbf{e}_i$$

ossia

$$S^j(t, X, \mathbf{e}_k) = \langle \mathbf{S}(t, X, \mathbf{e}_k), \mathbf{e}^{*j} \rangle$$

per cui usando (39) a primo membro

$$\sigma^j_i(t, X) \delta_k^i = \langle \mathbf{S}(t, X, \mathbf{e}_k), \mathbf{e}^{*j} \rangle$$

ossia

$$\sigma_k^j(t, X) = \langle \mathbf{S}(t, X, \mathbf{e}_k), \mathbf{e}^{*j} \rangle. \quad (40)$$

Se la base usata è ortonormale, tenendo conto dell'identificazione naturale tra spazio tangente e cotangente individuata dal prodotto scalare, l'identità di sopra si scrive equivalentemente⁷:

$$\sigma_k^j(t, X) = (\mathbf{S}(t, X, \mathbf{e}_k) | \mathbf{e}_j) = \mathbf{S}(t, X, \mathbf{e}_k) \cdot \mathbf{e}_j. \quad (41)$$

Tali identità sono utili nel calcolo effettivo del tensore degli sforzi.

(2) Si fissino $t \in \mathbb{R}$ e $X \in C_t$. Il tensore degli sforzi $\sigma(t, X)$, è rappresentato da una matrice reale simmetrica in una base *ortonormale* dello spazio tangente $[\sigma]$ di elementi $\sigma_{ij} = \sigma^i_j$. Tale matrice si potrà quindi diagonalizzare in \mathbb{R}^3 tramite una rotazione: $R[\sigma]R^t = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. In altre parole, leggendo il risultato in $T_X \mathbb{E}^3$, esisteranno in $T_X \mathbb{E}^3$ al tempo t , tre vettori mutuamente ortogonali e normalizzati $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ (corrispondenti alla base ortonormale in cui la matrice di σ è in forma diagonale) detti **direzioni principali** tali che (senza somma su i !)

$$\sigma(\mathbf{f}_i) = \lambda_i \mathbf{f}_i.$$

Le forze di superficie relative ai piani normali a ciascun \mathbf{f}_i sono quindi esercitate lungo la stessa direzione normale. Si noti che le direzioni principali dipendono dal tempo t e dal posto X .

3.4 Le equazioni cardinali della dinamica dei continui in forma differenziale locale.

Torniamo alle equazioni cardinali della dinamica (31) e (32) e trascriviamole in termini locali facendo uso della parte (a) del teorema di Cauchy. La prima equazione si può riscrivere, usando coordinate cartesiane ortonormali:

$$\int_{V_t} \rho(t, X) \left(\frac{D}{Dt} V^i(t, X) - f^i(t, X) \right) d\mu(X) = \oint_{\partial V_t} \sigma^i_j(t, X) n^j d\Sigma(X).$$

Usando il teorema della divergenza (in coordinate cartesiane), l'identità di sopra si può riscrivere

$$\int_{V_t} \rho(t, X) \left(\frac{D}{Dt} V^i(t, X) - f^i(t, X) \right) d\mu(X) = \int_{V_t} \frac{\partial}{\partial x^j} \sigma^{ij}(t, X) d\mu(X).$$

⁷Si consideri uno spazio vettoriale reale di dimensione n , dotato di un prodotto scalare (definito positivo), $\langle \cdot | \cdot \rangle$, e sia $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ una base ortonormale. Se \mathbf{f}_i indica il vettore covariante ottenuto da \mathbf{e}_i tramite l'isomorfismo naturale tra lo spazio vettoriale ed il suo duale dovuto al prodotto scalare, deve essere $\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{f}_i \rangle = \langle \mathbf{e}_k | \mathbf{e}_i \rangle = \delta_{ik}$. Ma l'identità $\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{f}_i \rangle = \delta_{ik}$ definisce univocamente, come noto, la base duale $\mathbf{e}^{*1}, \dots, \mathbf{e}^{*n}$ associata a $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$. In altre parole, per basi propriamente ortonormali risulta $\mathbf{f}_i = \mathbf{e}^{*i}$. Di conseguenza $(a | \mathbf{e}_j) = (a^i \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j) = a^i \langle \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j \rangle = a^i \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}^{*j} \rangle = \langle a, \mathbf{e}^{*j} \rangle$. Ossia, in uno spazio vettoriale reale di dimensione n dotato di un prodotto scalare, per un generico vettore controvariante a vale $(a | \mathbf{e}_j) = \langle a, \mathbf{e}^{*j} \rangle$, in riferimento ad una qualsiasi base *ortonormale* $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$.

Per l'arbitrarietà di t e V_t , usando la Proposizione 2.1, l'identità di sopra equivale alla richiesta che per ogni $(t, X) \in \mathcal{C}$,

$$\frac{D}{Dt}V^i(t, X) - f^i(t, X) - \frac{1}{\rho(t, X)} \frac{\partial}{\partial x^j} \sigma^{ij}(t, X) = 0,$$

dove abbiamo tenuto conto della positività di ρ . In coordinate arbitrarie ed indicando con $\Xi_{,j}$ la derivata covariante rispetto alla j -esima coordinata $\nabla_j \Xi$, l'identità di sopra diventa la prima equazione cardinale dei continui **in forma differenziale e locale**:

$$\frac{D}{Dt}V^i(t, X) - f^i(t, X) - \frac{1}{\rho(t, X)} \sigma^{ij}{}_{,j}(t, X) = 0. \quad (42)$$

Passiamo ora a (32). Essa si riscrive, usando il tensore degli sforzi ed in coordinate cartesiane ortonormali centrate in O :

$$\int_{V_t} \rho(t, X) \left[\epsilon_{ijk} x^j \left(\frac{D}{Dt}V^k(t, X) - f^k(t, X) \right) \right] d\mu(X) = \oint_{\partial V_t} \epsilon_{ijk} x^j \sigma_l^k(t, X) n^l(X) d\Sigma(X),$$

dove abbiamo introdotto lo pseudotensore di Ricci ϵ_{ijk} che è costante in coordinate cartesiane ortogonali. Usando un'altra volta il teorema della divergenza ed il fatto che le componenti di ϵ sono costanti nelle coordinate dette, troviamo analogamente a quanto visto per la prima equazione cardinale, che la validità dell'identità integrale trovata per ogni t e volume materiale regolare con frontiera regolare equivale a

$$\epsilon_{ijk} \left[x^j \frac{D}{Dt}V^k - x^j f^k - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x^l} (x^j \sigma^{kl}) \right] = 0$$

ovvero:

$$\epsilon_{ijk} \left[x^j \frac{D}{Dt}V^k - x^j f^k - \frac{1}{\rho} (\delta_l^j \sigma^{kl} + x^j \sigma^{kl}{}_{,l}) \right] = 0$$

ovvero:

$$\epsilon_{ijk} x^j \left[\frac{D}{Dt}V^k - f^k - \frac{\sigma^{kl}{}_{,l}}{\rho} \right] = \frac{1}{\rho} \epsilon_{ijk} \sigma^{kj}.$$

Si noti che assumendo la prima equazione cardinale nella forma (42), il primo membro risulta essere nullo e la seconda equazione cardinale si riduce a:

$$\epsilon_{ijk} \sigma^{kj} = 0.$$

Moltiplicando per ϵ^{pqi} e ricordando che

$$\epsilon^{pqi} \epsilon_{ijk} = \delta_j^p \delta_k^q - \delta_k^p \delta_j^q,$$

l'identità trovata si riduce a

$$(\delta_j^p \delta_k^q - \delta_k^p \delta_j^q) \sigma^{kj} = 0,$$

ossia, per ogni $(t, X) \in \mathcal{C}$, vale la seconda equazione cardinale dei continui **in forma differenziale e locale**:

$$\sigma^{qp}(t, X) = \sigma^{pq}(t, X). \quad (43)$$

La simmetria di un tensore non dipende dalle coordinate per cui quanto trovato vale in ogni sistema di coordinate. Questo risultato, tra le altre cose, prova la seconda parte del Teorema 3.1. Si osservi che procedendo a ritroso, abbiamo subito che (43) implica la seconda equazione cardinale (32) se si assume la prima equazione cardinale. In definitiva:

la coppia di equazioni differenziali locali (42) e (43) sono equivalenti alla coppia di equazioni integrodifferenziali (29) e (30).

Osservazione. Le equazioni cardinali della dinamica scritte in termini differenziali e locali non necessitano della struttura di spazio affine per avere senso, al contrario di quelle indefinite (integrodifferenziali) come notato precedentemente. In effetti le (42) e (43) si prestano a generalizzazioni in ambiti lontani dalla fisica classica. In particolare nella teoria della relatività generale in cui il tensore degli sforzi è sostituito dalla sua diretta generalizzazione data dal tensore energia-impulso. In tal caso la struttura di spazio affine sulla varietà ambiente è impossibile in base agli stessi principi della teoria relativistica generale.

3.5 Relazioni Costitutive per i continui meccanici.

Riassumendo tutto quanto visto in questo capitolo, un continuo generico è individuato da un flusso differenziabile $\mathcal{F} = \{X_t(t, \cdot)\}_{t \in \mathbb{R}}$, una densità di massa differenziabile ρ , un campo differenziabile di (densità di) forze di massa \mathbf{f} un campo tensoriale degli sforzi σ . Per ogni $t \in \mathbb{R}$, $X \in C_t$ devono essere verificate le seguenti equazioni in forma locale differenziale:

l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, X) + (\rho(t, X) V^i(t, X))_{,i} = 0;$$

la prima equazione cardinale della dinamica:

$$\frac{D}{Dt} V^i(t, X) - f^i(t, X) - \frac{1}{\rho(t, X)} \sigma^{ij}(t, X)_{,j} = 0;$$

la seconda equazione cardinale della dinamica:

$$\sigma^{ij}(t, X) = \sigma^{ji}(t, X).$$

A tali condizioni bisogna aggiungere, come vincolo, la richiesta di positività della densità di massa per ogni $t \in \mathbb{R}$, $X \in C_t$:

$$\rho(t, X) > 0,$$

unitamente ad ulteriori condizioni valide al bordo del continuo di cui si è detto precedentemente.

Il problema della dinamica è quello di determinare il flusso del continuo, o più debolmente il campo di velocità da cui, almeno localmente, si determina il flusso⁸. In tale problema si considerano funzioni assegnate, unitamente alle condizioni al contorno, le sole forze di massa \mathbf{f} (nel caso di continuo incompressibile sussiste l'ulteriore vincolo di densità costante il cui valore è assegnato che deve essere soddisfatto dalle soluzioni trovate e sussiste sempre il vincolo di positività di ρ .) Le grandezze da determinarsi sono di conseguenza, per ogni tempo e punto, non solo le 3 componenti del campo di velocità, ma anche la densità di massa e le 9 componenti del tensore degli sforzi. In tutto $3 + 1 + 9 = 13$ funzioni incognite. Le equazioni assegnate sopra invece coinvolgono $1 + 3 + 3 = 7$ equazioni indipendenti tra funzioni scalari. Di conseguenza sono necessarie altre $13 - 7 = 6$ equazioni al fine di produrre, almeno in linea di principio, un sistema di equazioni differenziali deterministico.

Deve essere chiaro, d'altra parte che le equazioni scritte sopra valgono per ogni genere di continuo, per cui le equazioni che mancano specificheranno il tipo di continuo che si intende considerare. Tali relazioni sono dette **equazioni costitutive** del continuo. Usualmente descrivono delle relazioni funzionali (differenziali o integrodifferenziali) tra le 6 componenti indipendenti del tensore degli sforzi e altri oggetti dinamici (i tensori di deformazione o di velocità di deformazione del continuo stesso).

Noi abbiamo considerato solo continui meccanici e non termodinamici. In questo secondo caso altre grandezze ed altre equazioni entrano in gioco. È chiaro che in tal caso i principi generali della termodinamica devono essere estesi a sistemi continui così come abbiamo fatto per i principi della dinamica.

3.6 Bilanci energetici e velocità di deformazione.

Consideriamo una porzione materiale di continuo $V_0 \subset C_0$ data dal solito insieme aperto regolare con frontiera regolare. L'**energia cinetica** di tale porzione al tempo $t \in \mathbb{R}$ è definita come la diretta generalizzazione al caso continuo della definizione data nel caso di insiemi discreti di punti materiali:

$$T(V_t) := \int_{V_t} \frac{1}{2} \rho(t, X) \mathbf{V}(t, X)^2 d\mu(X). \quad (44)$$

In meccanica dei sistemi discreti sussiste il cosiddetto "Teorema delle forze vive" che afferma che la derivata temporale dell'energia cinetica del sistema uguaglia la potenza complessiva delle forze che agiscono sul sistema (interne ed esterne). Per ottenere un teorema analogo, calcoliamo la derivata temporale del primo membro facendo uso della Proposizione 2.2.

$$\frac{dT(V_t)}{dt} = \int_{V_t} \frac{2}{2} \rho V_i \frac{DV^i}{Dt} d\mu.$$

⁸Una volta noto il campo di velocità in rappresentazione euleriana, $\mathbf{V} = \mathbf{V}(t, X)$, si devono considerare il sistema di equazioni differenziali $dy^i/dt = V(t, y^1(t), y^2(t), y^3(t))$, $i = 1, 2, 3$, che ammette soluzioni uniche almeno localmente. Tali soluzioni, viste come funzioni di t e della condizione iniziale $X_0 = (X_0^1, X_0^2, X_0^3)$ daranno luogo ad una trasformazione differenziabile (nelle nostre ipotesi di regolarità) $y^i = y^i(t, X_0)$ con $X_0^i = y^i(0, X_0)$. Il flusso è allora dato (localmente) dalla trasformazione $X^i = y^i(t, X_0)$, $i = 1, 2, 3$.

Facendo uso della prima equazione cardinale (42),

$$\begin{aligned} \frac{dT(V_t)}{dt} &= \int_{V_t} (\rho f^i V_i + \sigma^{ij}{}_{,j} V_i) d\mu = \\ &= \int_{V_t} \rho f^i V_i d\mu - \int_{V_t} \sigma^{ij} V_{i,j} d\mu + \int_{V_t} (\sigma^{ij} V_i)_{,j} d\mu . \end{aligned}$$

Usando il teorema della divergenza, l'ultimo integrale si riscrive

$$\oint_{\partial V_t} \sigma^{ij} V_i n_j d\Sigma ,$$

mentre il secondo si riscrive, data la simmetria di σ^{ij} ,

$$\int_{V_t} \sigma^{ij} \frac{1}{2} (V_{i,j} + V_{j,i}) d\mu .$$

In definitiva troviamo l'**equazione delle forze vive per i continui**:

$$\frac{dT(V_t)}{dt} = \Pi_{V_t}^{(\text{vol.})} + \Pi_{V_t}^{(\text{sup.est.})} - \int_{V_t} D_{ij}(t, X) \sigma^{ij}(t, X) d\mu(X) , \quad (45)$$

dove abbiamo introdotto il campo tensoriale detto di **velocità di deformazione**, $(t, X) \in \mathcal{C}$,

$$D_{ij}(t, X) := \frac{1}{2} (V_{i,j}(t, X) + V_{j,i}(t, X)) , \quad (46)$$

mentre

$$\Pi_{V_t}^{(\text{vol.})} := \int_{V_t} \rho(t, X) f^i(t, X) V_i(t, X) d\mu(X) ,$$

e

$$\Pi_{V_t}^{(\text{sup.est.})} := \oint_{\partial V_t} \sigma^{ij}(t, X) n_j(X) V_i(t, X) d\Sigma(X) ,$$

sono rispettivamente la **potenza dissipata dalle forze di massa nel volume** V_t e la **potenza dissipata dalle forze esterne sulla superficie** ∂V_t al tempo t .

L'integrale

$$\Pi_{V_t}^{(\text{stress})} := - \int_{V_t} D_{ij}(t, X) \sigma^{ij}(t, X) d\mu(X) ,$$

rappresenta invece la **potenza delle forze interne di stress dissipata nel volume** V_t al tempo t .

Esercizi 3.1.

3.1.1 Mostrare che (45) equivale all'equazione differenziale locale meno illuminante:

$$\frac{D}{Dt} \mathcal{J}(t, X) = \rho f^i V_i + \sigma^{ij}{}_{,j} V_i - \frac{\rho}{2} V^i V_i \text{div} \mathbf{V} ,$$

dove

$$\mathcal{T}(t, X) := \frac{\rho}{2} V^i(t, X) V_i(t, X),$$

è la **densità di energia cinetica**.

La potenza dissipata dalle forze interne è nulla in particolare quando il tensore di velocità di deformazione si annulla identicamente. In ogni caso la dissipazione di energia da parte delle forze interne è dovuta al fatto che il volume di continuo considerato si deforma. È importante notare che la deformazione *non include* i *moti rigidi* del continuo: se il flusso del continuo corrisponde ad un moto rigido, anche in un solo istante, non si ha deformazione e non si ha dissipazione di energia da parte delle forze interne di stress in quell'istante. Vale infatti il teorema seguente.

Teorema 3.2. *Se all'istante t l'atto di moto del continuo è rigido, ossia, per ogni $X \in C_t$ e per qualche $X_0 \in \mathbb{E}^3$ e per vettori (costanti) $\omega, \mathbf{V}_0 \in V^3$,*

$$\mathbf{V}(t, X) = \mathbf{V}_0 + \omega \wedge (X - X_0),$$

allora

$$D_{ij}(t, X) = 0,$$

per ogni $X \in C_t$ e di conseguenza $\Pi_V^{(\text{stress})}(t) = 0$ per ogni porzione materiale di continuo regolare.

Dimostrazione. Nelle ipotesi fatte, usando coordinate cartesiane ortonormali centrate in X_0 :

$$V_{i,p} = 0 + \epsilon_{ijk} \omega^j X^k,_{,p} = \epsilon_{ijp} \omega^j,$$

da cui

$$V_{i,p} + V_{p,i} = \epsilon_{ijp} \omega^j + \epsilon_{pji} \omega^j = 0$$

per l'antisimmetria di ϵ . \square

3.7 Sistemi continui soggetti a forze di massa conservative.

Consideriamo l'equazione delle forze vive (45) nel caso in cui le forze di massa siano conservative, ovvero $\mathbf{f} = -\nabla u$, dove la funzione differenziabile $u = u(X)$ non dipende da t e definita su \mathbb{E}^3 . Introduciamo la **densità di energia meccanica**

$$\epsilon_c(t, X) := \frac{\mathbf{V}(t, X)^2}{2} + u(X), \quad (47)$$

definita per $t \in \mathbb{R}$, $X \in C_t$. Notiamo ancora che, se $V_0 \subset C_0$ è una porzione materiale di continuo regolare, vale

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho u \, d\mu = \int_{V_t} \rho \frac{Du}{Dt} \, d\mu.$$

Ma $\frac{Du}{Dt} = \mathbf{V} \cdot \nabla u$ in quanto l'altro addendo, $\frac{\partial u}{\partial t}$, è nullo per definizione. Concludiamo che $\frac{Du}{Dt} = -\mathbf{V} \cdot \mathbf{f}$ e quindi:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho u \, d\mu = -\Pi_{V_t}^{(\text{vol.})}.$$

Inserendo il risultato e la definizione di ϵ_c nella (45) otteniamo l'**equazione di bilancio energetico per i continui soggetti a forze conservative**:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho(t, X) \epsilon_c(t, X) \, d\mu(X) = \Pi_{V_t}^{(\text{sup.est.})} - \int_{V_t} D_{ij}(t, X) \sigma^{ij}(t, X) \, d\mu(X). \quad (48)$$

scrivibile in modo esplicito come:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho(t, X) \epsilon_c(t, X) \, d\mu(X) &= \oint_{\partial V_t} \sigma^{ij}(t, X) n_j(X) V_i(t, X) \, d\Sigma(X) \\ &- \int_{V_t} D_{ij}(t, X) \sigma^{ij}(t, X) \, d\mu(X). \end{aligned} \quad (49)$$

In tale formula si vede che, in generale la densità di energia meccanica *non* si conserva “inseguendo una porzione materiale di continuo”, ma è dissipata dalle forze di volume e dalle forze interne del continuo. La (49) non è quindi un'equazione di conservazione o di continuità, ma solo un'equazione di bilancio. Per ottenere una qualche forma di equazione di continuità (cioè di conservazione) di qualche forma di energia, bisogna aggiungere a ϵ_c un contributo energetico che dipende dalle forze interne del continuo, ma ciò non è sempre possibile. Ci sono casi particolari in cui è invece possibile definire una energia totale conservata: il caso dei *fluidi barotropici* ed il caso dei *continui elastici*. Non è invece mai possibile nel caso di presenza di *forze viscosi* (fluidi viscosi).

Al solito, usando il teorema della divergenza nel primo integrale a secondo membro, usando le Proposizioni 2.1 e 2.2, una forma equivalente della (49) scritta in termini locali è:

$$\rho(t, X) \frac{D}{Dt} \epsilon_c(t, X) + \sigma^{ij}(t, X) D_{ij}(t, X) - (\sigma^{ij}(t, X) V_i(t, X))_{,j} = 0, \quad (50)$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$ e $X \in C_t$.

Per concludere diamo ancora una versione integrale della (49) usando un volume geometrico fissato. Prima di tutto, usando l'equazione di continuità della massa è facile provare che (50) equivale a

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \epsilon_c) + \text{div}(\rho \epsilon_c \mathbf{V}) + \sigma^{ij} D_{ij} - (\sigma^{ij} V_i)_{,j} = 0,$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$ e $X \in C_t$. Fissiamo ora un insieme regolare con frontiera regolare, $V \subset \mathbb{E}^3$, sufficientemente piccolo perchè abbia senso quanto segue. Integrando l'equazione trovata su V ed usando il teorema della divergenza, si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \epsilon_c \, d\mu = - \oint_{\partial V} \mathbf{J}_c(t, X) \cdot \mathbf{n} \, d\Sigma - \int_V D_{ij} \sigma^{ij} \, d\mu,$$

dove \mathbf{n} è al solito uscente e abbiamo introdotto il **vettore di flusso di energia meccanica**:

$$\mathbf{J}_c := \rho(t, X)\epsilon_c(t, X)\mathbf{V}(t, X) - \sigma(\mathbf{V}(t, X)).$$

L'equazione trovata mostra che l'energia meccanica nel volume fisso V può variare sia a causa del flusso di energia che entra/ esce in tale volume, ma anche a causa di un termine di sorgente dovuto alle forze interne al continuo stesso.

4 Elementi di Meccanica dei Fluidi.

4.1 Fluidi ideali o perfetti, legge di Pascal.

Un continuo è detto un **fluido** quando, *in condizioni di equilibrio*, (cioè quando il campo di velocità è nullo e tutte le funzioni definite sul fluido indipendenti dal tempo) gli sforzi sono normali alle superfici corrispondenti. Ossia, per ogni $X \in C_t = C_0$ e per ogni $\mathbf{n} \in \mathbb{S}^2$,

$$\mathbf{S}(X, \mathbf{n}) = s(X, \mathbf{n})\mathbf{n}.$$

Ulteriormente, è richiesto che lo sforzo sia sempre **compressivo**, ossia, per ogni $X \in C_t = C_0$ e per ogni $\mathbf{n} \in \mathbb{S}^2$,

$$s(X, \mathbf{n}) \leq 0.$$

Un fluido è detto **ideale** o **perfetto**, quando la relazione di sopra sussiste per qualsiasi tipo di flusso: per ogni $X \in C_t$, $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{S}^2$,

$$\mathbf{S}(t, X, \mathbf{n}) = s(t, X, \mathbf{n})\mathbf{n}.$$

Si richiede ancora che lo sforzo sia compressivo.

Commento. Il fatto che lo sforzo sia compressivo significa che la densità di forza superficiale che il resto del continuo esercita su una porzione materiale V_t attraverso la superficie di essa, è sempre diretta verso l'interno di V_t stesso.

Il teorema di Cauchy ha una conseguenza immediata per i fluidi, il cosiddetto **principio di Pascal** che assicura che la pressione **non dipende dalla direzione \mathbf{n}** .

Teorema 4.1. *Ogni fluido ha tensore degli sforzi all'equilibrio dato da*

$$\sigma^{ij}(X) = -p(X)g^{ij}(X)$$

dove g è il tensore metrico. In particolare, in coordinate cartesiane ortonormali

$$\sigma^{ij}(X) = -p(X)\delta^{ij}.$$

I fluidi ideali, indipendentemente dal flusso hanno un tensore degli sforzi della forma

$$\sigma^{ij}(t, X) = -p(t, X)g^{ij}(X).$$

In particolare, in coordinate cartesiane ortonormali

$$\sigma^{ij}(t, X) = -p(t, X)\delta^{ij}.$$

*La funzione p , detta **pressione** non dipende da \mathbf{n} ed è sempre non negativa in entrambi i casi.*

Dimostrazione. Dimostriamo la tesi per il primo caso, la prova è la stessa nel secondo caso. Fissiamo un punto $X \in C_t$ e siano $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ delle direzioni principali per $\sigma(p)$ (che danno luogo ad una base ortonormale). Sarà allora vero che (dove non c'è la somma su $i!$),

$$\sigma^{ij}(X) = \lambda_{(i)}(X)\delta^{ij}$$

Scegliamo $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$. Dovrà essere

$$\sigma(X)\mathbf{n} = s(X, \mathbf{n})\mathbf{n},$$

ovvero in componenti

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_{(i)}(X) = \frac{1}{\sqrt{3}}s(X, \mathbf{n}),$$

per $i = 1, 2, 3$. Ciò implica in particolare che, per il punto X , $\lambda_{(1)} = \lambda_{(2)} = \lambda_{(3)}$. Di conseguenza, sarà

$$\sigma^{ij}(X) = -p(X)\delta^{ij}$$

dove $-p \leq 0$ è il valore comune dei tre autovalori. \square

4.2 Fluidi barotropici.

Un fluido è detto **barotropico** quando all'equilibrio, soddisfa una *relazione costitutiva* del tipo:

$$\rho(X) = g(p(X)),$$

dove $g : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ è una funzione differenziabile nota. Un fluido ideale è detto **barotropico** quando, *per ogni flusso*, soddisfa una *relazione costitutiva* del tipo:

$$\rho(t, X) = g(p(t, X)),$$

dove $g : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ è una funzione differenziabile nota indipendente dal flusso.

Si osservi che quindi un fluido barotropico è soggetto a 7 equazioni costitutive date dalle 6 relazioni indipendenti in $\sigma_i^j = -p\delta_i^j$ più la relazione di barotropicità $\rho = g(p)$. In realtà viene introdotta anche la nuova variabile p . In definitiva si hanno, riprendendo il discorso generale fatto precedentemente sul numero di variabili e di equazioni in un continuo generico: $13 + 1 = 14$ variabili e $7 + 7 = 14$ equazioni di vario genere. In linea di principio il sistema determina il flusso del fluido (o almeno il campo di velocità) una volta assegnate opportune condizioni al contorno.

D'ora in poi scriveremo semplicemente $\rho = \rho(p)$ invece di $\rho = g(p)$ ogni volta che ciò non provoca fraintendimenti. Per i fluidi barotropici si introduce il **potenziale barotropico**:

$$\mathcal{P}(p) := \int_{p_0}^p \frac{dp'}{\rho(p')}, \quad (51)$$

essendo p_0 un valore di pressione arbitrario (\mathcal{P} è definito a meno di una costante arbitraria). La dipendenza di ρ da p usata sopra è quella dovuta alla funzione g . Abbiamo scritto sopra $\rho(p)$ invece di $g(p)$ per evitare notazioni complicate.

Si osservi che la funzione $p \mapsto \mathcal{P}(p)$ è sicuramente invertibile con inversa differenziabile. Ciò è una conseguenza del fatto che $\rho(p') > 0$ per ipotesi per cui

$$\frac{d\mathcal{P}}{dp} = (\rho(p))^{-1} > 0$$

che implica che la funzione $p \mapsto \mathcal{P}(p)$ sia crescente e quindi invertibile, con inversa differenziabile:

$$\frac{dp}{d\mathcal{P}} = \left(\frac{d\mathcal{P}}{dp} \right)^{-1} > 0.$$

Una relazione utile è la seguente che segue subito dal primo teorema del calcolo

$$(\mathcal{P}(p(t, X)))_{,i} = \frac{1}{\rho(t, X)} p(t, X)_{,i}. \quad (52)$$

Esempi 4.1.

4.1.1. Un esempio banale di fluido ideale barotropico è un fluido ideale incompressibile come l'acqua in condizioni normali (trascurando l'evaporazione). In tal caso la funzione g è costante: $\rho = \rho_0$. Il potenziale barotropico vale semplicemente (a meno di costanti)

$$\mathcal{P}(p) = \frac{p}{\rho_0}.$$

4.1.2. Un esempio meno banale è dato da un gas ideale in condizioni isoterme (tale situazione si ha in condizioni opportune in meteorologia studiando porzioni ristrette di atmosfera). In tal caso vale l'equazione dei gas perfetti:

$$pV = KNT,$$

dove T è la temperatura costante, K è la costante di Boltzmann e N è il numero di particelle. La relazione equivale a

$$p(t, X) = CT\rho(t, X),$$

dove, essendo C e T costanti, si ha una relazione di tipo barotropico. Il potenziale barotropico vale, se p_0 è una qualsiasi pressione di riferimento,

$$\mathcal{P}(p) = CT \ln \frac{p}{p_0}.$$

4.1.3. Consideriamo un modello di gas più sofisticato che soddisfi l'equazione di Van der Waals a temperatura fissata:

$$\left(p + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = RT.$$

Sopra v è il *volume specifico* che è proporzionale a $1/\rho$. Ridefinendo il significato delle costanti, l'equazione di Van der Waals può essere riscritta:

$$(p + a\rho^2) \left(\frac{1}{\rho} - b \right) = RT.$$

Le costanti $a, b > 0$ caratterizzano il tipo di gas, R è la costante dei gas perfetti e T la solita temperatura assoluta che è supposta essere tenuta costante. È ben noto che se T è grande, le curve $p = p(v)$ (equivalente a $p = p(\rho)$) tendono ad assumere la forma caratteristica delle isoterme dei gas perfetti: iperboli. In tal caso la relazione $p = p(\rho)$ può essere invertita in $\rho = \rho(p)$ ed il gas può considerarsi un continuo barotropico. Quando la temperatura si abbassa fino ad una temperatura detta *critica*, T_c , dipendente dal tipo di gas, la curva $p = p(v)$ ammette un punto di flesso a tangente orizzontale. Diminuendo ancora la temperatura, il punto di flesso si separa in un minimo relativo, un flesso ed un massimo relativo (nell'ordine detto procedendo da sinistra verso destra sull'asse v) che coesistono nella curva $p = p(v)$. In tal caso compare una banda sull'asse p , compresa tra il minimo relativo ed il massimo relativo suddetti, in cui ad un valore di p sono attribuibili 3 valori di v e quindi di ρ . Per temperature minori di T_c non ha quindi matematicamente senso il modello di fluido barotropico. Dal punto di vista fisico la ragione è chiarissima. Temperature $T < T_c$ corrispondono alla coesistenza di due fasi del gas: quella gassosa e quella liquida. Il sistema fisico, può essere un miscuglio instabile in cui le due fasi coesistono senza separarsi, ma la separazione avviene rapidamente in seguito ad una perturbazione esterna (le gocce d'acqua che formano la pioggia coesistevano, prima della separazione, nelle nuvole in forma di miscuglio instabile di acqua e vapore acqueo detto "moisture"). Quindi sotto la temperatura critica non ha senso il modello di continuo usato fino ad ora. Al più si potrebbe usare un modello costituito da due continui coesistenti con possibilità di travaso di massa da uno all'altro (per cui l'equazione di continuità per ciascuno dei due continui necessiterebbe di un termine di pozzo/sorgente dipendente dall'altro continuo).

4.3 Statica dei fluidi barotropici.

Riguardo alla statica dei fluidi barotropici abbiamo il seguente risultato.

Teorema 4.2. *Condizione necessaria affinché il flusso di fluido barotropico sottoposto ad un campo di forze di massa $\mathbf{f} = \mathbf{f}(X)$, sia in equilibrio (ossia il campo di velocità sia nullo e tutte i campi scalari e tensoriali definiti su di esso siano indipendenti dal tempo) è che \mathbf{f} sia conservativo, ossia sia il gradiente di un campo scalare.*

In particolare vale

$$f^i(X) = \frac{1}{\rho} p(X),^i. \quad (53)$$

*In tal caso le superfici equipotenziali sono anche superfici **isobare** (ossia a pressione costante) e **isopicnotiche** (ossia a densità costante).*

Dimostrazione. La prima equazione cardinale (42), nell'ipotesi $\mathbf{V} = 0$ identicamente, si scrive

$$f^i = -\frac{1}{\rho} \sigma^{ij}, j.$$

Usando il Teorema 4.1, l'equazione si riscrive

$$f^i = \frac{1}{\rho} (p \delta^{ij}), j,$$

ovvero

$$f^i = \frac{1}{\rho} p,^i.$$

Usando infine (52), dopo avere espresso \mathcal{P} in funzione di p , che non dipende da t per ipotesi, si ha che la funzione \mathcal{P} che risolve il problema statico soddisfa

$$\mathcal{P},^i = f^i.$$

Ma questa equazione ci dice anche che f è il gradiente di un campo scalare che non dipende da t , ossia \mathbf{f} è conservativa. Essendo le superfici equipotenziali normali a \mathbf{f} esse devono coincidere con le superfici su cui \mathcal{P} è costante. Dato che, come visto, la funzione $p \mapsto \mathcal{P}(p)$ è invertibile, le superfici equipotenziali coincideranno con quelle a p costante. Infine dato che $\rho = \rho(p)$ per la barotropia, le superfici saranno anche a ρ costante. \square

Esercizi 4.1.

4.1.1 Considerare un fluido incompressibile all'equilibrio nel campo gravitazionale uniforme $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$. Ricavare la **legge di Stevino**

$$p(x, y, z) = p_0 - \rho_0 g z,$$

dove z è la quota verticale, ρ_0 la densità costante del fluido e p_0 la pressione alla quota $z = 0$. (*Suggerimento.* Usare l'equazione dell'equilibrio (53).)

4.1.2 Considerare un fluido compressibile dato da un gas ideale all'equilibrio nel campo gravitazionale uniforme $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$, tenuto alla temperatura costante T_0 . Dimostrare che

$$p(x, y, z) = p_0 e^{-\frac{gz}{CT_0}},$$

dove z è la quota verticale, C una costante dipendente dal gas e p_0 la pressione alla quota $z = 0$. (*Suggerimento.* Usare l'equazione dell'equilibrio (53) tenendo conto dell'equazione dei gas perfetti $p = CT\rho$.)

4.4 Dinamica dei fluidi perfetti barotropici: Equazione di Eulero e Teorema di Bernoulli.

Dalle definizioni date è immediato verificare che la prima equazione cardinale per un fluido ideale ha la forma:

$$\rho \frac{DV^i}{Dt} = \rho f^i - p,^i .$$

Sotto l'ipotesi di fluido barotropico possiamo usare (52), ottenendo

$$\frac{DV^i}{Dt} = f^i - \mathcal{P},^i .$$

È possibile esplicitare il primo membro in altro modo utile per alcune applicazioni sotto l'ipotesi che \mathbf{f} sia data dal gradiente di un potenziale:

$$f^i(t, X) = -u(t, X),^i .$$

Esplicitando il primo membro della prima equazione cardinale scritta sopra, si ha che essa è riscrivibile come:

$$\frac{\partial V^i}{\partial t} + V^j V^i,^j = -(u + \mathcal{P}),^i .$$

Ci serve un risultato tecnico per procedere.

Proposizione 4.1. *Per un campo differenziabile \mathbf{V} su \mathbb{E}^3 , vale l'identità*

$$V^j V^i,^j = \frac{1}{2}(V^k V_k),^i + ([rot\mathbf{V}] \wedge \mathbf{V})_i . \quad (54)$$

Dimostrazione. Il primo addendo a secondo membro si esplicita banalmente in:

$$V^k V_{k,i} .$$

Passiamo al secondo addendo. Esplicitando in coordinate cartesiane ortonormali il rotore ed il prodotto vettoriale si ha:

$$([rot\mathbf{V}] \wedge \mathbf{V})_i = \epsilon_{ijk} (\epsilon^{jqr} V_{r,q}) V^k = -\epsilon_{jik} \epsilon^{jqr} V_{r,q} V^k = -(\delta_i^q \delta_k^r - \delta_k^q \delta_i^r) V_{r,q} V^k .$$

Quindi otteniamo:

$$([rot\mathbf{V}] \wedge \mathbf{V})_i = -V_{k,i} V^k + V_{i,k} V^k .$$

Raccogliendo i risultati ottenuti, il secondo membro di (54) è

$$V^k V_{k,i} + (-V_{k,i} V^k + V_{i,k} V^k) = V_{i,k} V^k = V^j V^i,^j .$$

Questa è la tesi. \square

Concludiamo che la prima equazione cardinale della dinamica per fluidi ideali barotropici sottoposti a campi di forze di massa derivabili da un potenziale prende la forma dell'**equazione di Eulero**:

$$\frac{\partial \mathbf{V}(t, X)}{\partial t} + (\text{rot} \mathbf{V}(t, X)) \wedge \mathbf{V}(t, X) = -\nabla \left(u(t, X) + \mathcal{P}(p(t, X)) + \frac{\mathbf{V}(t, X)^2}{2} \right). \quad (55)$$

Il campo scalare $B(t, X) := u(t, X) + \mathcal{P}(p(t, X)) + \frac{\mathbf{V}(t, X)^2}{2}$ è detto **trinomio di Bernoulli**.

N.B. In questa equazione la dipendenza di \mathcal{P} da p è supposta nota e \mathbf{V} e p stesso sono i campi incogniti. L'equazione deve essere associata a **(1)** l'equazione di continuità e **(2)** alla relazione nota $\rho = \rho(p)$ usata per determinare la funzione \mathcal{P} . Il numero di equazioni scalari è $3 + 1 = 4$ e il numero delle funzioni scalari incognite è ancora 4 (le 3 componenti di \mathbf{V} e la pressione p). In linea di principio le funzioni incognite sono determinabili dalle equazioni unitamente a condizioni al contorno.

L'equazione di Eulero ha come conseguenza il noto teorema di Bernoulli ed alcune altre leggi empiriche della fluidodinamica che ora diventano teoremi. Le *superfici di vortice* usate nel teorema si definiscono analogamente a quelle di flusso usando il campo di vorticità al posto di quello di velocità.

Teorema 4.3 (di Bernoulli). *Si consideri un fluido ideale barotropico soggetto a forze di massa conservative e se ne consideri un flusso stazionario con p indipendente dal tempo. Sotto tali ipotesi:*

- (a) *lungo le linee di flusso (o corrente) si conserva il trinomio di Bernoulli B ;*
- (b) *le superfici a B costante sono anche superfici di flusso e di vortice;*
- (c) *se ulteriormente il flusso è irrotazionale, il trinomio di Bernoulli è costante su tutta la configurazione.*

Dimostrazione. Le equazioni di Eulero (55) si scrivono, se \mathbf{V} non dipende dal tempo esplicitamente (flusso stazionario)

$$(\text{rot} \mathbf{V}(X)) \wedge \mathbf{V}(X) = -\nabla B(X),$$

dove il trinomio di Bernoulli non dipende da t perché p e u non dipendono da t . Consideriamo una linea di flusso, in coordinate arbitrarie, $x^i = x^i(u)$ che quindi soddisfa

$$\frac{dx^i}{du} = V^i(x(u)).$$

La variazione di B su di essa è:

$$\frac{dB(x^i(u))}{du} = V^i(x(u)) B_{,i}(x(u)) = -\mathbf{V} \cdot (\text{rot} \mathbf{V}(X)) \wedge \mathbf{V}(X) = 0. \quad (56)$$

Questo perché i due fattori del prodotto scalare di sopra sono perpendicolare per costruzione. **(a)** risulta quindi essere provato. Per quanto riguarda **(b)** notiamo che ogni superficie a B costante

ammette $B_{,i}$ come vettore normale, ma per la stessa (56), tale superficie è parallela sia a \mathbf{V} che a $\text{rot}\mathbf{V}$ e ciò prova **(b)**. Se infine $\text{rot}\mathbf{V} = 0$, (56) prova che $\nabla B = 0$ per cui, essendo la configurazione connessa, $B = B(X)$ è una funzione costante su di essa. Con questo anche **(c)** è provato. \square

Esempi. 4.2.

4.2.1. Se prendiamo un contenitore largo ma non troppo alto, aperto in cima, e lo riempiamo di acqua, praticando un piccolo foro alla base del contenitore, l'acqua esce ad una velocità iniziale pari a $\sqrt{2gh}$, dove h è l'altezza del pelo dell'acqua e g l'accelerazione di gravità. La velocità è la stessa che ha un corpo che cade da un'altezza h quando tocca il suolo (trascurando gli attriti). Questa è la **Legge di Torricelli**. Il fenomeno si ha quando il contenitore è tanto largo e il buco tanto piccolo, che si può trascurare l'abbassamento del livello dell'acqua a causa della fuoriuscita dal foro e quando l'acqua è praticamente immobile se non nelle immediate vicinanze del foro. Il fenomeno è spiegabile con il teorema di Bernoulli. Assumiamo che nelle nostre ipotesi, dentro il recipiente il fluido si trovi in situazione stazionaria e irrotazionale. Siamo nel caso **(c)** del teorema di sopra. Assumiamo ancora che, dato che il contenitore non è troppo alto, la pressione p_0 dell'aria e quindi dell'acqua sia la stessa sul pelo dell'acqua e immediatamente fuori dal foro nel getto dell'acqua. Definiamo nullo il potenziale gravitazionale alla quota del foro. Il campo di velocità nel punto X vicino al pelo dell'acqua è nullo ed il trinomio di Bernoulli vale $B(X) = gh + \frac{p_0}{\rho_0}$. Nel foro invece il valore del trinomio è semplicemente $B(X') = \mathbf{V}^2/2 + \frac{p_0}{\rho_0}$. Uguagliando i due valori segue la legge di Torricelli.

4.2.2. Come secondo esempio consideriamo il cosiddetto **effetto Venturi**. Prendiamo un condotto orizzontale a sezioni normali circolari in cui scorre acqua in flusso stazionario e supponiamo che il condotto abbia sezioni di area differente di raggi $r < R$ rispettivamente. Assumiamo che i centri dei due cerchi abbiano la stessa quota. Si può verificare sperimentalmente che, quando l'acqua scorre la pressione nel centro della sezione di raggio minore è minore di quella nella sezione di raggio maggiore (effetto Venturi). Anche in questo caso il teorema di Bernoulli spiega l'effetto. In base alla *legge di Castelli* vista precedentemente e tenendo conto del fatto che l'acqua è incompressibile in condizioni normali, si ha subito che il modulo della velocità dell'acqua nella sezione di raggio minore deve essere maggiore del modulo della velocità nella sezione di raggio maggiore per conservare la portata. La costanza del valore del trinomio di Bernoulli su una linea di corrente che connette i centri (alla stessa quota) delle sezioni implica immediatamente l'effetto Venturi.

4.5 Rotazionalità dei fluidi ideali barotropici, Teorema di Thompson.

Se è dato un fluido ideale barotropico e se il flusso è irrotazionale allora il campo di forze di massa è localmente ottenuto come gradiente di un potenziale. Infatti, la prima equazione cardinale, procedendo come per dedurre le equazioni di Eulero, risulta essere:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\text{rot}\mathbf{V}) \wedge \mathbf{V} = \mathbf{f} - \nabla \left(\mathcal{P} + \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right).$$

Se il flusso è irrotazionale allora l'equazione si riduce a

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \mathbf{f} - \nabla \left(\mathcal{P} + \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right).$$

Calcolando ancora il rotore ad ambo membri (sotto l'ipotesi di \mathbf{V} di classe C^2 per poter scambiare le derivate spaziali con quella temporale), si trova

$$0 = \text{rot} \mathbf{f} - \nabla \wedge \nabla \left(\mathcal{P} + \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right).$$

Ma l'ultimo addendo è nullo come è immediato provare ($\text{rot grad} = 0$), per cui \mathbf{f} ammette almeno localmente potenziale.

Se quindi il campo di forze di massa *non è conservativo* il flusso *non può essere irrotazionale*. Cosa dire riguardo al flusso quando il campo di forze è conservativo, può essere non irrotazionale?

Il seguente Teorema di Thompson chiarisce quando un fluido ideale barotropico ha flusso irrotazionale.

Teorema 4.4 (di Thompson). *Si consideri un fluido ideale barotropico sottoposto a forze di massa conservative. Sia $\gamma \subset C_0$ una curva regolare chiusa di particelle di fluido e $\gamma_t \subset C_t$ la sua evoluzione al generico tempo $t \in \mathbb{R}$ secondo il flusso. Vale*

$$\frac{d}{dt} \oint_{\gamma_t} \mathbf{V} \cdot d\gamma = 0.$$

In particolare il campo di velocità ammette potenziale (quindi è irrotazionale) ad un arbitrario tempo $t \in \mathbb{R}$ se e solo se ammette potenziale al tempo $t = 0$.

Dimostrazione. L'ultima parte del teorema segue subito dalla prima in base al Teorema 1.2, per cui ci riduciamo a dimostrare la sola equazione scritta nella tesi. L'equazione di γ_t sarà $X = X(t, X_0(s))$, dove $X_0 = X_0(s)$ è l'equazione di γ_0 . Quindi introducendo coordinate cartesiane ortonormali x^1, x^2, x^3 :

$$\oint_{\gamma_t} \mathbf{V} \cdot d\gamma = \oint_{\gamma_0} \delta_{ij} \frac{\partial x^j(t, x_0(s))}{\partial t} \frac{\partial x^i}{\partial x_0^k} \frac{dx_0^k}{ds} ds.$$

Possiamo derivare il primo membro passando il segno di derivata sotto l'integrale del secondo membro ottenendo:

$$\frac{d}{dt} \oint_{\gamma_t} \mathbf{V} \cdot d\gamma = \oint_{\gamma_0} \frac{DV_i}{Dt} \frac{\partial x^i}{\partial x_0^k} dx_0^k - \oint_{\gamma_0} V_i \frac{\partial V^i}{\partial x_0^k} dx_0^k.$$

Procedendo oltre

$$\frac{d}{dt} \oint_{\gamma_t} \mathbf{V} \cdot d\gamma = \oint_{\gamma_0} \frac{DV}{Dt} \cdot d\gamma - \frac{1}{2} \oint_{\gamma_0} \frac{\partial V_i V^i}{\partial x_0^k} dx_0^k.$$

Il secondo integrale è nullo per costruzione, per cui, usando la prima equazione cardinale che nelle ipotesi fatte è:

$$\frac{DV}{Dt} = -\nabla(u + \mathcal{P}) ,$$

otteniamo

$$\frac{d}{dt} \oint_{\gamma_t} \mathbf{V} \cdot d\gamma = - \oint_{\gamma_0} \frac{\partial}{\partial x^k} (u + \mathcal{P}) dx^k = 0 .$$

Questa è la tesi. \square

Il teorema ha un importante corollario.

Corollario 4.1 *Nelle ipotesi del Teorema 4.4, se $\Sigma \subset C_0$ è una superficie di vortice regolare allora la sua evoluzione secondo il flusso è una superficie di vortice ad ogni istante.*

Dimostrazione. Una superficie regolare Σ_t è di vortice in C_t se e solo se per ogni curva regolare chiusa $\gamma_t \subset C_t$,

$$\oint_{\gamma_t} \mathbf{V} \cdot d\gamma = 0 .$$

Lasciamo la prova di ciò per esercizio. A questo punto la tesi è immediata notando che $\gamma_0 \subset \Sigma_0$ se e solo se $\gamma_t \subset \Sigma_t$ e che la circolazione non cambia evolvendo contemporaneamente secondo il flusso la curva e la superficie. \square

4.6 Bilancio dell'energia per fluidi ideali barotropici.

Consideriamo un continuo perfetto soggetto a forze conservative. L'equazione di bilancio energetico (49) è in tal caso per ogni porzione materiale di continuo regolare con frontiera regolare

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \epsilon_c d\mu = \int_{V_t} p \operatorname{div} \mathbf{V} d\mu - \oint_{\partial V_t} p \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\Sigma . \quad (57)$$

dove abbiamo usato la forma del tensore degli sforzi di un fluido ideale $\sigma^{ij} = -pg^{ij}$.

Assumeremo che il fluido perfetto sia anche barotropico, in tal caso l'equazione di bilancio di sopra assume una forma più semplice se si definisce opportunamente un'energia per le forze interne al continuo. A tal fine definiamo la **densità di energia barotropica**

$$u_b(t, X) := \mathcal{P}(p(t, X)) - \frac{p(t, X)}{\rho(p(t, X))} . \quad (58)$$

Proposizione 4.2. *La densità di energia barotropica soddisfa l'identità, per ogni $t \in \mathbb{R}$, $X \in C_t$,*

$$\rho(t, X) \frac{D}{Dt} u_b(t, X) = -p(t, X) \operatorname{div} \mathbf{V}(t, X) . \quad (59)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Dt} u_b &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dp} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla u_b \\
&= \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dp} \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \left[\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dp} \nabla p - \frac{\nabla p}{\rho} \right] \\
&= \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dp} \left[\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla p \right] = \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dp} \frac{Dp}{Dt} = \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt}.
\end{aligned}$$

Usando infine l'equazione di continuità della massa si ha:

$$\frac{D}{Dt} u_b = -\frac{p}{\rho^2} \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = -\rho^{-1} p \operatorname{div} \mathbf{V},$$

che è la tesi. \square

Se inseriamo (59) in (57) otteniamo l'equazione di bilancio energetico per un fluido ideale barotropico:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho(t, X) \epsilon_{cb}(t, X) d\mu = - \oint_{\partial V_t} p(t, X) \mathbf{V}(t, X) \cdot \mathbf{n}(X) d\Sigma, \quad (60)$$

dove abbiamo introdotto la **densità di energia meccanica totale**:

$$\epsilon_{cb}(t, X) := \frac{\mathbf{V}(t, X)^2}{2} + u(X) + u_b(t, X).$$

La forma locale di (60) è:

$$\rho(t, X) \frac{D}{Dt} \epsilon_{cb}(t, X) + \operatorname{div} (p(t, X) \mathbf{V}(t, X)) = 0.$$

Se infine introduciamo il **vettore di flusso energetico**

$$\mathbf{J}_{cb}(t, X) := (\rho(t, X) \epsilon_{cb}(t, X) + p(t, X)) \mathbf{V}(t, X),$$

la forma integrale dell'equazione di bilancio, in riferimento a un volume geometrico fisso V è (lo si provi per esercizio):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho(t, X) \epsilon_{cb}(t, X) d\mu + \oint_{\partial V} \mathbf{J}_{cb}(t, X) \cdot \mathbf{n}(X) d\Sigma = 0. \quad (61)$$

Esercizi 4.2.

4.2.1. Mostrare che se un fluido ideale barotropico è contenuto in un contenitore di volume V fissato, allora qualunque sia il flusso del fluido, si conserva l'energia totale

$$E = \int_V \rho(t, X) \epsilon_{cb}(t, X) d\mu(X).$$

(*Suggerimento.* Notare che il campo di velocità sulle pareti del contenitore deve essere tangente ad esse.)

4.2.2 Quanto vale u_b per un fluido incompressibile?

4.2.3. Mostrare che, per un fluido incompressibile in regime stazionario (tutte le funzioni che lo caratterizzano sono cioè indipendenti dal tempo), l'equazione (61) unitamente alla legge di Castelli implicano che la quantità (trinomio di Bernoulli) $\rho V^2/2 + \rho u + p$ sia costante sulle linee di flusso.

(Questa è una dimostrazione semplificata di parte del teorema di Bernoulli che normalmente si trova sui testi di fisica elementare. In essa si vede che l'equazione di Bernoulli, nel caso specifico in esame ha un significato energetico.)

5 Fluidi viscosi di Navier-Stokes.

5.1 Non fisicità della dinamica dei fluidi ideali.

I fluidi reali non sono in generale sempre incompressibili, ma possono considerarsi tali con una buona approssimazione, però hanno caratteristiche che comunque li differenziano dal modello ideale (barotropico) visto precedentemente. Il punto cruciale è la *viscosità* che esiste in natura nei fluidi, completamente trascurata nel modello ideale basato sulle equazioni di Eulero. La viscosità è responsabile di forze, che si esercitano tra porzioni di fluido contigue, che non sono dirette normalmente alle superfici di separazione, ma hanno componenti tangenziali. Il tensore degli sforzi non può essere espresso semplicemente come (in coordinate cartesiane ortonormali): $-p\delta^{ij}$, ma necessita di un'aggiunta di un termine non diagonale responsabile delle forze di taglio di cui sopra. La pressione p non è quindi più in grado da sola di rendere conto della dinamica (anche se per la statica è sufficiente). Chiunque abbia osservato l'acqua scorrere in un canale può avere osservato che, in regime non turbolento, il campo di velocità ad una quota fissata ha modulo nullo ai bordi del canale dove l'acqua è ferma, mentre è massimo al centro del canale. Lo stesso fenomeno di rallentamento del campo di velocità all'interno del fluido si ha avvicinandosi al fondo del canale abbassando la quota di osservazione. La responsabilità di ciò è da attribuirsi proprio alla parte non diagonale del tensore degli sforzi che frena le linee di corrente (in particolare vicino ai bordi del canale in cui i bordi stessi agiscono sul fluido frenandolo). Mostriamo che il modello di fluido ideale non è in grado di rendere conto di tali fenomeni nemmeno lontanamente.

Consideriamo un canale a cielo aperto di lunghezza e larghezza infinita ma profondità finita H pieno d'acqua trattata come fluido ideale incompressibile. Il liquido arriva fino all'orlo. In tale canale, sia x l'asse di scorrimento del fluido ideale e y la direzione trasversa, mentre z è l'asse verticale. L'origine degli assi è sul fondo del canale. Il flusso è assunto stazionario e sottoposto al campo gravitazionale costante. Se assumiamo completa omogeneità lungo l'asse trasversale y il campo di velocità avrà la forma:

$$\mathbf{V}(X) = V(x, z)\mathbf{e}_x .$$

Vogliamo determinare tale campo unitamente al campo di pressione $p = p(x, y, z)$, usando il modello di fluido ideale incompressibile (e quindi barotropico). Le equazioni da usare sono l'equazione di continuità, che si riduce alla solenoidalità del flusso

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = 0 ,$$

e le equazioni di Eulero nel caso stazionario, nel campo gravitazionale e per un fluido incompressibile:

$$(\operatorname{rot}\mathbf{V}) \wedge \mathbf{V} = -\nabla \left(\frac{\mathbf{V}^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} + gz \right) .$$

La prima delle due equazioni implica che il campo \mathbf{V} può solo essere funzione di z . Inserendo

$$\mathbf{V}(X) = V(z)\mathbf{e}_x$$

nella seconda troviamo le tre equazioni rispettivamente per l'asse z , x e y :

$$\begin{aligned} -V \frac{dV}{dz} &= -V \frac{dV}{dz} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g, \\ 0 &= \frac{\partial p}{\partial x}, \\ 0 &= \frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned}$$

In definitiva otteniamo che $p(x, y, z) = p_0 - \rho_0 g z$, dove $p_0 = p_{\text{atm.}} + \rho_0 g H$ essendo $p_{\text{atm.}}$ la pressione atmosferica. Il campo $\mathbf{V} = V(z)\mathbf{e}_x$ risulta essere *completamente indeterminato*. Se imponiamo la condizione di irrotazionalità $\text{rot}\mathbf{V} = 0$, ossia $dV/dz = 0$ (che può essere imposta nelle condizioni iniziali in un modello realistico in cui la stazionarietà vale solo in un periodo di tempo definito)⁹ otteniamo banalmente che $V = \text{costante}$.

È evidente che il risultato trovato non rende affatto conto di quanto accade nella realtà in cui il campo di velocità in generale dipende dalla quota e tende ad annullarsi in prossimità del fondo del canale. Questa condizione non può essere imposta come condizione al contorno, perchè annullerebbe il campo di velocità ovunque nel caso di irrotazionalità, o non lo determinerebbe comunque in assenza del requisito di irrotazionalità. I fluidi ideali soddisfacenti l'equazione di Eulero sono stati definiti da Von Neumann "acqua secca".

5.2 Il tensore degli sforzi di Navier-Stokes e le equazioni di N.-S.

Cerchiamo un modello di tensore degli sforzi per un fluido (*non ideale*) che abbia un significato fisico più profondo. Il tensore degli sforzi dovrà avere una forma, in coordinate cartesiane ortonormali

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij}.$$

Il termine σ'_{ij} è responsabile delle forze di taglio, cioè non normali alle superfici di continuo. L'idea intuitiva che vogliamo sviluppare è che tali forze, o meglio sforzi, si esercitino quando parti con velocità differenti, sia pure infinitesimamente differenti, vengono a contatto. σ'_{ij} non dovrà quindi avere forma diagonale (diversamente dall'altro addendo che produce solo sforzi normali) e si dovrà annullare per $\mathbf{V} = 0$ ovunque, in cui si ricade nella situazione statica. È chiaro che σ'_{ij} dovrà dipendere dal gradiente di \mathbf{V} ovvero dal tensore:

$$G_{ij} := V_{i,j}.$$

Se infatti il gradiente di \mathbf{V} è nullo anche se \mathbf{V} non è il campo nullo, possiamo trovare un riferimento in cui il campo di velocità è nullo e tutte le parti del continuo sono in quiete relativa: in tale riferimento dovrebbero essere assenti le forze di taglio. D'altra parte tali forze si devono pensare come *forze vere* e non *forze inerziali* ed essendo le forze vere *invarianti* al cambiare

⁹In un modello non stazionario in cui si raggiunge la stazionarietà dopo un pò di tempo, la condizione di irrotazionalità può essere pensata imposta al tempo $t = 0$ rimanendo valida per sempre per il teorema di Thompson.

del riferimento gli sforzi di taglio sarebbero nulli anche nel riferimento iniziale. Nel modello più semplice possibile di tensore degli sforzi possiamo assumere la *dipendenza lineare* di esso dal tensore G_{ij} per avere l'annullamento per $\mathbf{V} \equiv 0$. Ulteriormente assumeremo anche la dipendenza sia *locale* perché ci si aspetta che i fenomeni di attrito viscoso siano originati negli stessi punti ed istanti in cui le parti di fluido a diversa velocità (con differenze sia pure infinitesime) vengono a contatto. Notare che quindi la località è intesa anche in senso *temporale*: il continuo *non ha memoria del suo passato per quanto riguarda la relazione deformazione-sforzo*. In tal modo giungiamo a postulare una forma del tipo:

$$\sigma'_{ij}(t, X) = N_{ij}{}^{pq}(t, X)G_{pq}(t, X),$$

dove il campo tensore $N_{ij}{}^{pq}(t, X)$ non conterrà il campo di velocità o le sue derivate e sarà simmetrico in i, j perché tale è il primo membro dell'identità di sopra.

Volendo affinare il nostro modello, ci aspettiamo che le forze di taglio siano presenti solo quando il continuo si deforma realmente, cioè le parti vicine hanno velocità differenti anche infinitesimamente, e non quando si ha un moto globale rigido del continuo. In questo caso potremmo trovare sempre un riferimento (in generale non inerziale) in cui il continuo, e tutte le sue parti sono in quiete (in particolare reciprocamente) annullando gli sforzi di taglio, che come detto non dipendono dal riferimento. Sappiamo che il tensore di velocità di deformazione:

$$D_{ij} := \frac{1}{2} (V_{i,j} + V_{j,i}),$$

ha la proprietà di annullarsi quando l'atto di moto è rigido (Teorema 3.2). Si verifica subito che l'analogo tensore:

$$R_{ij} := \frac{1}{2} (V_{i,j} - V_{j,i}),$$

non gode di tale proprietà. Il tensore G_{ij} si decompone come $G_{ij} = D_{ij} + R_{ij}$. In base al discorso appena fatto dobbiamo concludere che solo la parte simmetrica può prendere parte nell'espressione $\sigma'_{ij} = N_{ij}{}^{pq}G_{pq}$. In altre parole cerchiamo una forma di σ' del tipo:

$$\sigma'_{ij}(t, X) = N_{ij}{}^{pq}(t, X)D_{pq}(t, X).$$

Si noti che ciò è del tutto equivalente ad assumere la simmetria di $N_{ij}{}^{pq}$ anche negli indici p, q . Passiamo a discutere la natura del campo $N_{ij}{}^{pq}(t, X)$. Imponiamo il requisito di *isotropia* del continuo. Questo significa che, ad ogni tempo, fissato $X \in C_t$ non ci devono essere direzioni privilegiate attorno a X per quanto riguarda la relazione tra $D_{ij}(t, X)$ e $\sigma'_{ij}(t, X)$. In altre parole, facendo agire il gruppo delle rotazioni (*rotazioni proprie*, escludiamo qui le *riflessioni*¹⁰)

¹⁰Il gruppo ortogonale $O(3)$ è decomposto in due insiemi aperti disgiunti (le sue componenti connesse): $SO(3)$, detto gruppo ortogonale speciale, e $SO_P(3)$. Il primo insieme è un sottogruppo ed è costituito dalle matrici ortogonali (dette rotazioni proprie) il cui determinante vale 1, il secondo sottoinsieme non è un sottogruppo non contenendo l'identità ed è costituito dalle matrici ortogonali (dette rotazioni improprie) il cui determinante vale -1 . Tale insieme si ottiene da $SO(3)$ moltiplicando i suoi elementi per la matrice $P := -I$ (inversione di parità). Le rotazioni improprie contengono una riflessione e pertanto non si possono generalmente attuare su un corpo rigido senza distruggerlo e ricostruirlo. Le rotazioni proprie si possono attuare nella pratica semplicemente cambiando la posizione dell'osservatore per mezzo della rotazione inversa.

su $D_{ij}(t, X)$, cioè ruotando il continuo attorno ad X con una rotazione arbitraria, $\sigma'_{ij}(t, X)$ deve trasformarsi con la stessa rotazione. Riguardo a $N^{ij}_{pq}(t, X)$, ciò significa che, *in coordinate cartesiane ortonormali*:

$$N_{ij}{}^{pq}(t, X)R_p{}^r R_q{}^s = R_i{}^p R_j{}^q N_{pq}{}^{rs}(t, X), \quad (62)$$

per ogni matrice di rotazione $R \in SO(3)$. Dalla definizione di $SO(3)$, $RR^t = I$ e da (62) seguono subito le identità:

$$\sum_{u=1}^3 N_{ij}{}^{uu} = R_i{}^p R_j{}^q \sum_{s=1}^3 N_{pq}{}^{ss}. \quad (63)$$

Tenendo conto che la matrice di coefficienti $\sum_{u=1}^3 N_{ij}{}^{uu}$ è simmetrica e quindi ha forma diagonale in qualche base ortonormale, l'invarianza di tale matrice diagonale sotto qualunque rotazione come espresso in (63) implica facilmente che¹¹

$$\sum_{u=1}^3 N_{ij}{}^{uu} = \lambda \delta_{ij}. \quad (64)$$

In modo analogo, sommando su $i = j$ in (62) si prova che:

$$\sum_{u=1}^3 N_{uu}{}^{pq} = \mu \delta^{pq}. \quad (65)$$

Lo spazio su cui agisce la trasformazione lineare N , cioè lo spazio che contiene tutti i possibili tensori D_{ij} , è quello dei tensori covarianti doppi simmetrici $(V^{3*} \otimes V^{3*})_S$. Vale a tal proposito la seguente utile proposizione.

Proposizione 5.1. *Lo spazio dei tensori simmetrici di rango $(0, 2)$, $(V^{3*} \otimes V^{3*})_S$ ha una decomposizione come somma diretta di due sottospazi che sono invarianti ed irriducibili sotto l'azione del gruppo delle rotazioni $SO(3) \otimes SO(3)$. Tali sottospazi sono rispettivamente, lo spazio dei tensori simmetrici a traccia nulla S e lo spazio S' dei tensori della forma νg_{ij} ($\nu \delta_{ij}$ in coordinate cartesiane ortonormali).*

Traccia di dimostrazione. Il fatto che tali sottospazi siano invarianti separatamente sotto l'azione del gruppo delle rotazioni (cioè un elemento $s \in S$ oppure $s \in S'$ viene trasformato in un elemento \tilde{s} , $\tilde{s}_{ij} = R_i{}^p R_j{}^q s_{pq}$, che appartiene ancora a, rispettivamente, S oppure S' per ogni $R \in SO(3)$) è una semplice conseguenza del fatto che la traccia t_k^k di un tensore t_{ij} coincide con quella del tensore t'_{ij} ottenuto da t_{ij} dall'azione di un elemento qualsiasi della rappresentazione del gruppo delle rotazioni: $t'_{ij} = R_i{}^p R_j{}^q t_{pq}$. La dimostrazione di questo fatto è ovvia dalla proprietà

¹¹Basta considerare rotazioni di $SO(3)$ che scambiano alternativamente (a meno di segni) i versori della base ortonormale in cui la matrice è diagonale.

$\sum_i R_i^p R_i^q = \delta^{pq}$. Il fatto che S' sia irriducibile sotto l'azione del gruppo delle rotazioni – ossia S' non contenga ulteriori *sottospazi propri* (cioè diversi da S' stesso e dal sottospazio contenente solo il vettore nullo) invarianti sotto l'azione delle rotazioni – è ovvio avendo S' dimensione 1. Il fatto che anche S sia irriducibile sotto l'azione del gruppo delle rotazioni è un fatto un pò più difficile da provare. La prova si basa sul fatto che se esistesse un sottospazio proprio di S invariante sotto le rotazioni, S sarebbe decomponibile come somma diretta di due sottospazi S_1, S_2 propri invarianti sotto rotazioni. In tal caso i proiettori P_1, P_2 su ciascuno di tali spazi dovrebbero commutare con gli elementi della rappresentazione considerata del gruppo delle rotazioni in S . Per computo diretto si verifica che gli unici due proiettori $P_i : S \rightarrow S$ che godono di questa proprietà sono l'identità $P_1 = I$ e l'operatore nullo $P_2 = 0$ e pertanto i due sottospazi S_1 e S_2 sono quelli impropri: S stesso e $\{0\}$.

Ulteriormente, se $t \in (V^{3*} \otimes V^{3*})_S$, possiamo sempre decomporre linearmente t come somma di un elemento di S ed uno di S' nel modo seguente:

$$t_{ij} = \left(t_{ij} - \frac{1}{3} t_k^k \delta_{ij} \right) + \frac{1}{3} t_k^k \delta_{ij}.$$

Questo comporta che $(V^{3*} \otimes V^{3*})_S = S + S'$. D'altra parte si verifica subito che $S \cap S' = \{0\}$ dove 0 è il tensore nullo. Concludiamo che $(V^{3*} \otimes V^{3*})_S$ è somma diretta di S e S' , cioè $(V^{3*} \otimes V^{3*})_S = S \oplus S'$. \square

Torniamo alla trasformazione lineare associata al tensore N . Dalla simmetria degli indici di $N_{ij}{}^{pq}$ è immediato verificare che N trasforma tensori simmetrici in tensori simmetrici. Cioè:

$$N : (V^{3*} \otimes V^{3*})_S \rightarrow (V^{3*} \otimes V^{3*})_S.$$

Si può dire molto di più usando anche (64) e (65).

Proposizione 5.2. *Il tensore N visto come trasformazione lineare*

$$N : (V^{3*} \otimes V^{3*})_S \rightarrow (V^{3*} \otimes V^{3*})_S$$

ammette come spazi invarianti S ed S' .

Dimostrazione. Se $t \in S'$ cioè $t_{ij} = a \delta_{ij}$, allora $(Nt)_{ij} = a N_{ij}{}^{pq} \delta_{pq} = a \lambda \delta_{ij}$, dove abbiamo usato (64). Quindi $(Nt) \in S'$ se $t \in S'$. Ossia S' è invariante sotto N . Si osservi ora che per un generico tensore $t \in (V^{3*} \otimes V^{3*})_S$, la traccia di Nt vale $N_i{}^i{}^{pq} t_{pq} = \mu t_p^p$ dove abbiamo usato (65). In particolare, se la traccia di t è nulla, deve essere tale anche quella di Nt . In altre parole, anche S è invariante sotto N . \square

Abbiamo la seguente proposizione conclusiva.

Proposizione 5.3. *Il tensore N visto come trasformazione lineare*

$$N : S \oplus S' \rightarrow S \oplus S'$$

si riduce alla moltiplicazione per un fissato scalare in ognuno dei due sottospazi invarianti S ed S' . (Lo scalare dipende in generale dal sottospazio scelto).

Dimostrazione. Su S' , che ha dimensione 1 per costruzione, l'azione di N si deve ridurre alla moltiplicazione per uno scalare. Vediamo come N agisce su S . S ha dimensione $5 = 6 - 1$ essendo $\dim((V^{3*} \otimes V^{3*})_S) = 6$ (spazio delle matrici reali simmetriche 3×3) e $(V^{3*} \otimes V^{3*})_S = S \oplus S'$ con $\dim(S') = 1$. La restrizione di N a S è ancora una trasformazione lineare che può essere rappresentata come una matrice reale 5×5 su una base arbitraria di S . Tale matrice ha almeno un autovalore ϵ reale¹². Varrà cioè che esiste un sottospazio di S , E_ϵ , tale che

$$Nt = \epsilon t$$

per ogni $t \in E_\epsilon$.

Ma possiamo dire di più: E_ϵ stesso dovrà allora essere anche un sottospazio invariante sotto l'azione di $SO(3) \otimes SO(3)$ dato che N commuta con gli elementi di tale gruppo per (62). Infatti usando (62), se $t \in E_\epsilon$,

$$N_{pq}{}^{ij} R_i{}^r R_j{}^s t_{rs} (= R_p{}^i R_q{}^j N_{ij}{}^{rs} t_{rs}) = R_p{}^i R_q{}^j \epsilon t_{ij}.$$

Abbiamo trovato un sottospazio E_ϵ di S che come S stesso è invariante sotto l'azione delle rotazioni. Ma dato che S è irriducibile, E_ϵ non può essere un sottospazio proprio di S : E_ϵ deve necessariamente coincidere con S stesso oppure ridursi al sottospazio banale $\{0\}$. Il secondo caso è impossibile visto che E_ϵ contiene qualche autovettore e per definizione gli autovettori non sono mai nulli. Concludiamo che $S = E_\epsilon$ e quindi, per ogni $t \in S$ deve accadere che

$$Nt = \epsilon t,$$

dove ϵ è un numero reale che non dipende da t , ma solo da N . \square

Il tensore D_{ij} ammette la decomposizione, nei due sottospazi detti e in coordinate ortonormali cartesiane,

$$D_{ij} = \left(D_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} D_k^k \right) + \frac{1}{3} \delta_{ij} D_k^k.$$

Concludiamo che dovrà essere, tenendo conto di come N agisce nei due spazi detti,

$$\sigma'_{pq}(t, X) = \alpha(t, X) \left(D_{pq} - \frac{1}{3} \delta_{pq} D_k^k \right) + \beta(t, X) \frac{1}{3} \delta_{pq} D_k^k.$$

I coefficienti $\alpha(t, X)$ e $\beta(t, X)$ dipenderanno dal continuo. Sotto l'ipotesi di *omogeneità spaziale* ed *omogeneità temporale* ed indipendenza dalla pressione e dalla densità, assumeremo che tali

¹²Se il polinomio caratteristico non avesse soluzioni reali, le soluzioni dovrebbero essere raggruppabili a coppie di numeri complessi coniugati, dato che il polinomio stesso è reale. Ma il fatto che le soluzioni siano 5 non permette ciò.

coefficienti siano delle costanti¹³.

In definitiva, raggruppando i termini in altro modo, il tensore degli sforzi complessivo, sotto le ipotesi di linearità, isotropia ed omogeneità spaziale e temporale (indipendenza dalla pressione e dalla densità) diventa il **tensore di Navier-Stokes per i continui viscosi** (in coordinate cartesiane ortonormali):

$$\sigma_{ij}(t, X) = -p(t, X)\delta_{ij} + 2\eta D_{ij}(t, X) + \zeta\delta_{ij}D_k^k(t, X), \quad (66)$$

dove i coefficienti *costanti* η e ζ sono i coefficienti di Navier-Stokes e caratterizzano il continuo viscoso. Il primo è detto **coefficiente di viscosità dinamica**. Si noti che $D_k^k = \text{div}\mathbf{V}$, per cui per i fluidi incompressibili come l'acqua, l'ultimo addendo del tensore di Navier-Stokes è assente. Tale termine rende conto degli attriti interni al continuo sotto trasformazioni che dilatano il volume isotropicamente. Si osservi che non fornisce contributi di taglio al tensore degli sforzi, ma semplicemente un contributo dinamico alla pressione. I contributi agli sforzi di taglio sono invece dovuti al secondo addendo nell'espressione di σ_{ij} . L'unità di misura di η è detta *Poise* e vale $1\text{gr}/(1\text{cm}\ 1\text{s})$. $\eta_{\text{H}_2\text{O}} \sim 1.8 \cdot 10^{-2}$ *Poise*.

Osservazione. Una volta assegnati i coefficienti η e ζ , la forma del tensore degli sforzi di Navier-Stokes fornisce le *equazioni costitutive* del fluidi di Navier-Stokes. Le grandezze incognite per un fluido viscoso di Navier-Stokes sono le 3 componenti del campo di velocità, la pressione e la densità di massa: 5 grandezze. Le equazioni sono: le 3 equazioni che si ottengono dalla prima equazione cardinale usando la forma del tensore di N-S, l'equazione di continuità ed una ulteriore equazione che coinvolge la pressione. In definitiva ci sono tante equazioni quante incognite ed il problema del moto (determinazione campo di velocità in funzione del tempo e dello spazio) è risolvibile in linea di principio assegnando condizioni iniziali ed al contorno.

Passiamo all'equazione del moto dei fluidi con tensore degli sforzi di Navier-Stokes. Usando la prima equazione cardinale dei continui (42) unitamente alla Proposizione 4.1 (analogamente a quanto fatto per ricavare l'equazione di Eulero) troviamo che:

$$\left(\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho(\text{rot}\mathbf{V}) \wedge \mathbf{V} + \rho \nabla \left(\frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) \right)^i = \rho f^i - p_{,i} + \sigma'^{ij}_{,j}.$$

dove

$$\sigma'_{ij} := 2\eta D_{ij} + \zeta\delta_{ij}D_k^k.$$

Sviluppando il secondo membro, tenendo conto di $D_{ij} = \frac{1}{2}(V_{i,j} + V_{j,i})$ e del fatto che, come già notato $D_k^k = \text{div}\mathbf{V}$, si ottengono le famose **equazioni di Navier-Stokes** che devono valere per ogni $t \in \mathbb{R}$ e $X \in C_t$:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\text{rot}\mathbf{V}) \wedge \mathbf{V} \right) = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \eta \Delta \mathbf{V} - \rho \nabla \left(\frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) + (\zeta + \eta) \nabla (\text{div}\mathbf{V}), \quad (67)$$

¹³Potrebbero infatti essere funzione di pressione e densità del fluido nel punto ed all'istante considerato, tramite una funzione che non dipende esplicitamente dal punto e dall'istante.

dove si è usata la notazione usuale $(\Delta \mathbf{V})^i := V^i{}_{,j}{}^j$ per l'operatore Laplaciano. Questa equazione si trova anche scritta come (mostrare per esercizio che in effetti quanto segue è equivalente all'equazione di sopra) con ovvie notazioni,

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right) = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \eta \Delta \mathbf{V} + (\zeta + \eta) \nabla (\operatorname{div} \mathbf{V}), \quad (68)$$

Nel caso di fluido incompressibile con densità ρ_0 , (67) diventa ogni $t \in \mathbb{R}$ e $X \in C_t$:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\operatorname{rot} \mathbf{V}) \wedge \mathbf{V} = \mathbf{f} - \frac{\nabla p}{\rho_0} + \nu \Delta \mathbf{V} - \nabla \left(\frac{\mathbf{V}^2}{2} \right), \quad (69)$$

dove $\nu := \eta/\rho_0$ è il **coefficiente di viscosità cinematica**. Alternativamente, la (69) si può riscrivere

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \mathbf{f} - \frac{\nabla p}{\rho_0} + \nu \Delta \mathbf{V}, \quad (70)$$

Osservazioni.

(1) I termini $\Delta \mathbf{V}$ e $\nabla(\operatorname{div} \mathbf{V})$, non sono invarianti per il cambiamento del segno al parametro temporale. Tale fatto è proprio ciò che ci si aspetta quando sono presenti fenomeni dissipativi che introducono processi irreversibili.

(2) Il problema dell'esistenza ed unicità delle soluzioni (in senso forte, cioè date da funzioni regolari) dell'equazione di Navier-Stokes (in tre dimensioni spaziali), per esempio per un fluido in moto in una regione Γ , unitamente a condizioni al bordo $(\mathbf{V}(t, \partial\Gamma), t \in \mathbb{R})$ ed iniziali $(\mathbf{V}(t=0, X)$ regolari, $X \in \Gamma)$ è un problema matematico tuttora aperto e di grande rilevanza nella matematica pura.

Esercizi 5.1.

5.1.1. Si assuma di lasciare cadere l'ipotesi di dipendenza lineare del tensore degli sforzi σ_{ij} da D_{ij} assumendo in ogni caso località isotropia ma ammettendo una possibile dipendenza *polinomiale* di σ_{ij} dal tensore D_{ij} tramite un polinomio di grado (finito) arbitrario con termine costante nullo (in modo tale che la parte viscosa del tensore degli sforzi si annulli per $D_{ij} = 0$) ed a coefficienti costanti. Mostrare che, in tal caso, l'espressione più generale per σ_{ij} in coordinate arbitrarie è

$$-p(t, X)g_{ij} + 2\eta D_{ij}(t, X) + \zeta g_{ij} D_k^k(t, X) + \gamma D_i^k D_{kj}, \quad (71)$$

con γ costante.

Traccia di Soluzione. Ammettendo una dipendenza polinomiale da D_{ik} , lavorando in coordinate cartesiane ortonormali il termine aggiunto all'espressione di Navier-Stokes per σ_{ij} è un polinomio a coefficienti costanti di potenze della matrice i cui elementi sono i coefficienti D_{ik} . È immediato verificare che tali potenze producono tensori che rispettano il vincolo di isotropia (Si osservi che il prodotto righe per colonne corrisponde a contrazioni tensoriali e non c'è ambiguità nella scelta degli indici da contrarre). Tuttavia bisogna tenere conto del fatto che la matrice i

cui coefficienti sono le componenti D_{ik} è una matrice quadrata del terzo ordine ed è pertanto soluzione del suo polinomio caratteristico che è del terzo ordine. In tal modo tutti i termini in potenze di D_{ij} di ordine superiore al secondo possono essere espressi come un polinomio, a coefficienti costanti, di secondo grado in D_{ij} .

5.1.2. Mostrare che, in riferimento all'esercizio precedente, la richiesta di coefficienti costanti nella dipendenza polinomiale di σ_{ij} da D_{ij} è una richiesta più forte dell'omogeneità spaziotemporale ed indipendenza dalla pressione e dalla densità. (Nel caso trattato nel testo la richiesta di dipendenza lineare *unitamente* all'omogeneità ed all'indipendenza dalla pressione e dalla densità, implica la costanza dei coefficienti di Navier-Stokes.)

Traccia di Soluzione. Si consideri, per esempio, la possibile dipendenza polinomiale isotropa del quarto ordine:

$$\sigma_{ij} = -p(t, X)g_{ij} + 2\eta D_{ij}(t, X) + \zeta g_{ij} D_k^k(t, X) + \epsilon D^{pq} D_{pq} D_i^k D_{ki}, \quad (72)$$

soddisfa la richiesta di omogeneità spaziotemporale, ma i coefficienti del polinomio non sono costanti. Si osservi che non si può ricondurre tale polinomio ad uno del secondo ordine in D_{ij} .

5.3 Il numero di Reynolds.

Per concludere facciamo qualche commento sul cosiddetto *numero di Reynolds*. Supponiamo di dover risolvere il problema di determinare il flusso di un fluido viscoso incompressibile sottoposto a forze di massa conservative, in cui è presente una lunghezza caratteristica L (per es. il diametro di un ostacolo). Sia U la velocità caratteristica del problema (es. il modulo della velocità lontano dall'ostacolo). Introduciamo le variabili adimensionali $x' = x/L$, $t' = tU/L$, $\mathbf{V}' = \mathbf{V}/U$. L'equazione di Navier-Stokes con forza di massa conservativa $\mathbf{f} = -\nabla u$, nelle nuove variabili diventa:

$$\frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial t'} + (\text{rot}' \mathbf{V}') \wedge \mathbf{V}' = -\nabla' \left(p' + \frac{\mathbf{V}'^2}{2} \right) + \frac{1}{R} \Delta' \mathbf{V}', \quad (73)$$

dove gli operatori differenziali primati sono riferiti alle coordinate cartesiane ortogonali adimensionali introdotte sopra, $p' := \frac{u+p/\rho_0}{U^2}$ e

$$R := \frac{LU}{\nu} = \frac{LU\rho_0}{\eta}$$

è il **numero di Reynolds**.

Se $R \gg 1$ il termine di viscosità $\frac{1}{R} \Delta' \mathbf{V}'$ nell'equazione di Navier-Stokes di sopra è trascurabile. Le equazioni tornano ad essere quelle di Eulero. Tuttavia è noto che a causa dei termini non lineari dell'equazione di Eulero, le soluzioni sono *instabili*¹⁴. Questa instabilità è sperimentalmente evidenziata dal fatto che nei sistemi fisici costituiti da fluidi viscosi con grande numero di Reynolds il moto del fluido presenta il fenomeno fisico detto *turbolenza*, per cui è di fatto

¹⁴Per chiarire questa affermazione in termini rigorosi bisognerebbe studiare le soluzioni in opportuni spazi funzionali in funzione delle condizioni iniziali/al contorno.

impossibile associare un campo di velocità al fluido. Se $R \ll 1$, dal punto di vista sperimentale il moto del fluido è tale che il campo di velocità (e quindi il flusso) risulta essere ben definibile. Tale situazione usualmente corrisponde a “velocità piccole” in molti casi particolari. Ciò ci autorizza a trascurare i termini quadratici nella velocità nell’equazione di Navier-Stokes (69). Se si aggiunge la richiesta di stazionarietà, nel caso di forze di massa conservative, si arriva all’**equazione di Stokes**:

$$\nabla \left(u + \frac{p}{\rho_0} \right) = \nu \Delta \mathbf{V}, \quad (74)$$

che descrive fluidi molto viscosi in regime di velocità basse. Tale equazione è ben nota e risolta in molti casi particolari.

5.4 Il segno del parametro η di Navier-Stokes: considerazioni energetiche.

Fino ad ora non abbiamo assunto che il segno del parametro η di Navier-Stokes fosse positivo. Proviamo ora che deve essere così con alcune considerazioni basate sui bilanci energetici e su ciò che accade nella pratica lavorando con continui viscosi. Consideriamo un fluido incompressibile viscoso che assumeremo essere descritto dalle equazioni di Navier-Stokes nel caso incompressibile. Tale fluido sia sottoposto al campo gravitazionale e rinchiuso in un recipiente rappresentato da un insieme $V \subset \mathbb{E}^3$ regolare con frontiera regolare completamente pieno di fluido. Sulle pareti del recipiente il campo di velocità ammette limite sempre nullo (questa è la *condizione di aderenza* che si impone con i fluidi viscosi). Assumeremo che anche il tensore degli sforzi ammetta un limite finito sulle pareti del recipiente. L’esperienza mostra che (per i liquidi viscosi), se al tempo $t = 0$ il campo di velocità nel fluido non è nullo, e se non avvengono sollecitazioni dall’esterno, dopo un certo tempo il campo di velocità si sarà ridotto al campo nullo. L’energia cinetica iniziale sarà stata trasformata in energia interna termodinamica. Dato che l’energia cinetica $T_t(V)$ passa da un valore positivo a quello nullo, ci dovrà essere almeno un istante in cui $\frac{dT_t(V)}{dt} < 0$. Mostriamo che tale fatto implica che il coefficiente η sia strettamente positivo. Useremo la teoria sviluppata in **3.6**. Consideriamo il teorema delle forze vive (45):

$$\frac{dT_t(V)}{dt} = \Pi_{V,t}^{(\text{vol.})} + \Pi_{V,t}^{(\text{sup.est.})} + \Pi_{V,t}^{(\text{stress})}, \quad (75)$$

dove

$$\Pi_{V,t}^{(\text{vol.})} := \int_V \rho(t, X) f^i(t, X) V_i(t, X) d\mu(X),$$

e

$$\Pi_{V,t}^{(\text{sup.est.})} := \oint_{\partial V} \sigma^{ij}(t, X) n_j(X) V_i(t, X) d\Sigma(X),$$

e

$$\Pi_{V,t}^{(\text{stress})} := - \int_V D_{ij}(t, X) \sigma^{ij}(t, X) d\mu(X).$$

Facendo uso del tensore di Navier-Stokes (66) nel caso incompressibile, ossia $D_k^k = 0$ identicamente, si ha

$$\Pi_{V,t}^{(\text{stress})} = -2\eta \int_V D^{ij} D_{ij} d\mu.$$

Ulteriormente, dal fatto che $\mathbf{f}(X) = -\nabla u(X)$

$$\Pi_{V,t}^{(\text{vol.})} := - \int_V \rho \nabla u(X) \cdot \mathbf{V} d\mu = - \int_V \text{div}(\rho u \mathbf{V}) d\mu + \int_V u \text{div}(\rho \mathbf{V}) d\mu.$$

I due termini dopo l'ultimo segno di uguaglianza sono entrambi nulli: il primo si annulla trasformandolo in un integrale di superficie e tenendo conto che il campo di velocità è nullo sulla superficie, il secondo integrale, può essere scritto come

$$\rho \int_V u \text{div} \mathbf{V} d\mu$$

dato che ρ è costante, e si annulla perché $\text{div} \mathbf{V} = 0$ per la stessa incompressibilità insieme all'equazione di continuità della massa. Concludiamo che $\Pi_{V,t}^{(\text{vol.})} = 0$ sempre. Ma vale anche $\Pi_{V,t}^{(\text{sup.est.})} = 0$, nuovamente per il fatto che il campo di velocità si annulla su ∂V .

In definitiva possiamo riscrivere la (75) come

$$\frac{dT_t(V)}{dt} = -2\eta \int_V D^{ij} D_{ij} d\mu. \quad (76)$$

Dato che l'integrando a secondo membro è ovunque non negativo (in coordinate cartesiane ortonormali si riduce a $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (D_{ij})^2$), e dato che per qualche t il primo membro è negativo, la costante η deve essere strettamente positiva.

5.5 Moto di Poiseuille per un fluido viscoso.

Considereremo ora il moto di un fluido incompressibile viscoso di Navier-Stokes in regime stazionario all'interno di una condotta orizzontale chiusa molto larga e molto lunga in presenza di gravità. Sia h l'altezza della condotta lungo l'asse z e poniamo l'asse x lungo la condotta. L'asse y è trasversale alla condotta, l'origine degli assi O si trova sul fondo della condotta. Sia A un punto sull'asse x positivo. Supponiamo che $p(O)$ e $p(A) < p(O)$ ¹⁵ siano pressioni note e che valga la **condizione di aderenza** per cui il campo di velocità si annulla in ogni punto sul bordo del condotto, cioè a $z = 0$ e $z = h$. Il coefficiente di Navier-Stokes $\nu > 0$ è noto. Ammetteremo invarianza lungo l'asse y , cioè una forma per il campo di velocità del tipo

$$\mathbf{V} = V(x, z) \mathbf{e}_x.$$

Il campo di pressione dipenderà anche esso dalle sole x e z :

$$p = p(x, z)$$

¹⁵La progressiva caduta di pressione è dovuta alle forze viscosse.

Ci interessa determinare il campo di velocità e il campo di pressione assumendo quindi valide:

$$\text{incompressibilità: } \rho = \rho_0 \text{ costante (nota) e } \operatorname{div} \mathbf{V} = 0 ,$$

$$\text{Navier-Stokes stazionaria: } (\operatorname{rot} \mathbf{V}) \wedge \mathbf{V} = -\nabla \left[\frac{\mathbf{V}^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right] + \nu \Delta \mathbf{V} .$$

La prima equazione implica che $V = V(z)$ e non si ha dipendenza da x . La seconda si trascrive, lungo le componenti x , y e z rispettivamente:

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{d^2 V}{dz^2} , \quad (77)$$

$$0 = 0 , \quad (78)$$

$$0 = -g - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} . \quad (79)$$

(79) ha come soluzione generale

$$p(x, z) = -g\rho_0 z + f(x) ,$$

dove la funzione f è arbitraria. Inserendo tale equazione in (77) si ha l'equazione:

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{df}{dx} = \nu \frac{d^2 V}{dz^2} .$$

Dato che f è funzione di x solamente, mentre V lo è solamente di z , dovrà esistere una costante C che uguaglia separatamente i due membri dell'identità di sopra, da cui la soluzione generale:

$$f(x) = \rho_0 C x + C_1$$

e

$$V(z) = \frac{C}{\nu} \frac{z^2}{2} + C_2 z + C_3 .$$

Imponendo $p(0, 0) = p(O)$ nota e $p(a, 0) = p(A) < P(O)$ nota si determinano $C_1 = P(O)$ e $C = -\frac{P(O)-P(A)}{\rho_0 a} < 0$. C_2 e C_3 si ottengono imponendo sulle funzioni di sopra, con C e C_1 dette, la condizione di aderenza, ossia $V(h) = V(0) = 0$. Ciò determina $C_3 = 0$ e $C_2 = \frac{P(O)-P(A)}{2\nu a \rho_0} h$. La soluzione finale è:

$$p(x, z) = p(O) - \frac{P(O) - P(A)}{a} x - g\rho_0 z , \quad (80)$$

$$V(z) = \frac{P(O) - P(A)}{2\nu a \rho_0} (-z^2 + zh) . \quad (81)$$

Come deve essere, il campo di velocità si annulla ai bordi del canale ed ha valore massimo a metà dell'altezza del canale. La pressione, ad una fissata quota, decresce linearmente. È chiaro

che il modello cessa di avere validità quando la pressione diventa negativa. A titolo di esempio si può calcolare una componente non diagonale del tensore degli sforzi,

$$\sigma_{zx} = \sigma_{xz} = 2\eta D_{xz} = \frac{P(O) - P(A)}{2a}(h - 2z)$$

decrece linearmente con la quota annullandosi a quota $h/2$ e poi cambiando segno. Si noti che i limiti verso il bordo del canale sono ben definiti.

6 Introduzione alla teoria dell'elasticità lineare.

In questo capitolo faremo uso della seguente specifica notazione. Un generico sistema di coordinate globali (non ortonormali se non è esplicitamente detto) su \mathbb{E}^3 avrà funzioni coordinate y^1, y^2, y^3 . Indicheremo con Φ la metrica di tale spazio, che in coordinate arbitrarie sarà quindi scritta come

$$\Phi = g_{ij} dy^i \otimes dy^j,$$

mentre, se le coordinate sono cartesiane ortonormali varrà al solito:

$$\Phi = \delta_{ij} dy^i \otimes dy^j.$$

Riguardo al flusso del continuo, per comodità indicheremo con $\Psi_t : C_0 \rightarrow C_t$ il diffeomorfismo che manda la configurazione iniziale al tempo 0 in quella attuale al tempo t . In altre parole, modificando leggermente la notazione introdotta nel primo capitolo,

$$X = \Psi_t(X_0) := X(t, X_0).$$

Deve essere chiaro che X_0 e X sono punti di \mathbb{E}^3 e non coordinate o terne di coordinate. Nel sistema di coordinate y^1, y^2, y^3 , le coordinate di un punto di continuo X della configurazione attuale saranno indicate con X^1, X^2, X^3 . Nello *stesso sistema di coordinate*, le coordinate di un punto X_0 di continuo della configurazione iniziale saranno indicate con X_0^1, X_0^2, X_0^3 . Come ben noto, Ψ_t individua un'applicazione lineare (il differenziale o *push forward*)

$$\Psi_{t*} : T_{X_0}C_0 \rightarrow T_X C_t,$$

che in coordinate agisce semplicemente come

$$\Psi_{t*} : u_0^i \mapsto u^i := \frac{\partial X^i}{\partial X_0^j} u_0^j.$$

Sopra $u_0 = u_0^i \frac{\partial}{\partial y^i}|_{X_0}$ mentre $u = u^i \frac{\partial}{\partial y^i}|_X$ dove ovviamente $X = \Psi_t(X_0)$. Associata a tale applicazione c'è quella detta *pull back*, Ψ_t^* , definita dalla richiesta che

$$\langle \Psi_{t*} u_0, \omega \rangle = \langle u_0, \Psi_t^* \omega \rangle,$$

per ogni $u_0 \in T_{X_0}C_0$ e ogni $\omega \in T_X^*C_t$, e che procede in senso inverso tra gli spazi cotangenti:

$$\Psi_t^* : T_X^*C_t \rightarrow T_{X_0}^*C_0.$$

Il pull-back assume la forma in componenti, con ovvie notazioni,

$$\Psi_t^* : \omega_i \mapsto \omega_{0i} := \frac{\partial X^j}{\partial X_0^i} \omega_j.$$

Il push forward ed il pull back si estendono, attraverso il prodotto tensoriale, ad applicazioni multilineari che trasformano rispettivamente tensori controvarianti e tensori covarianti di ordine

arbitrario in tensori dello stesso tipo ma applicati ad un diverso punto delle varietà considerate. Indicheremo tali applicazioni multilineari con la stessa notazione usata per le corrispondenti applicazioni lineari. In questo modo, ad esempio,

$$\Psi_{t*} : \Xi_0^{ik} \mapsto \Xi^{ik} := \frac{\partial X^i}{\partial X_0^j} \frac{\partial X^k}{\partial X_0^p} \Xi_0^{jp} ,$$

dove Ξ_0 è un tensore doppio controvariante applicato in X_0 mentre Ξ è applicato in $X = \Psi_t(X_0)$.

6.1 Tensori di deformazione di Cauchy-Green, Lagrangiano ed Euleriano.

In riferimento alle notazioni suddette, consideriamo tre punti $O_0, X_0, Y_0 \in C_0$ nella configurazione iniziale di un continuo ed i corrispondenti punti nella configurazione attuale C_t, O, X, Y . Indichiamo con $u_0, v_0 \in T_{O_0}C_0$ i vettori $X_0 - O_0$ e $Y_0 - O_0$ e con $u, v \in T_OC$ i vettori determinati analogamente dai punti O, X, Y . La distanza tra O_0 e X_0 è data da

$$d(O_0, X_0) = \sqrt{g_{ij}(O_0)u_0^i u_0^j}$$

mentre l'angolo α_0 tra i vettori u_0 e v_0 è tale che

$$\cos \alpha_0 = \frac{g_{lm}(O_0)u_0^l v_0^m}{\sqrt{g_{ij}(O_0)u_0^i u_0^j} \sqrt{g_{pq}(O_0)v_0^p v_0^q}} .$$

Una misura della *deformazione* che ha subito il continuo nel passare dal tempo $t = 0$ al tempo t la otteniamo per confronto della distanza e dell'angolo suddetti, con quelli corrispondenti per i punti O, X, Y della configurazione attuale. Scegliamo le nostre coordinate y^1, y^2, y^3 come coordinate cartesiane ortonormali con origine O_0 . Sviluppando la funzione Ψ_t con Taylor nel punto O_0 nelle coordinate dette, si ha

$$X^i = \Psi_t^i(O_0) + \frac{\partial \Psi_t^i}{\partial y^j} \Big|_{O_0} X_0^j + \dots .$$

dove i punti indicano infinitesimi di ordine maggiore di 1 quando $|X_0 - O_0| \rightarrow 0$. Si osservi che con la scelta fatta delle coordinate vale: $u_0^i = X_0^i$. Cambiando notazione

$$X^i = O^i + (\Psi_{t*})^i \Big|_{O_0} j u_0^j + \dots ,$$

e similmente

$$Y^i = O^i + (\Psi_{t*})^i \Big|_{O_0} j v_0^j + \dots .$$

In altre parole, in prima approssimazione (se i punti considerati sono vicini) si ha che

$$\mathbf{u} \cong \Psi_{t*} \mathbf{u}_0 \quad \text{e} \quad \mathbf{v} \cong \Psi_{t*} \mathbf{v}_0 ,$$

per cui, con la stessa approssimazione

$$d(O, X)^2 \cong g_{ij}(O) \frac{\partial X^i}{\partial X_0^h} \frac{\partial X^j}{\partial X_0^k} u_0^h u_0^k$$

ossia

$$d(O, X)^2 \cong (\Psi_t^* \Phi)(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0),$$

e similmente

$$\cos \alpha \cong \frac{(\Psi_t^* \Phi)(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)}{\sqrt{(\Psi_t^* \Phi)(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0)(\Psi_t^* \Phi)(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_0)}}.$$

Il nuovo prodotto scalare su C_0 , dato dal tensore $\Psi_t^* \Phi$, permette di valutare all'approssimazione detta la deformazione che si ha nel continuo al variare del tempo da 0 a t , usando solo i vettori della configurazione iniziale. Il tensore (campo tensoriale definito su C_0)

$$\mathbf{G}^* := \Psi_t^* \Phi$$

è detto **tensore di deformazione destro di Cauchy-Green**. In definitiva, rimanendo nella configurazione iniziale, le piccole deformazioni delle distanze e degli angoli si ottengono usando il tensore di deformazione destro di Cauchy-Green come

$$d(O, X)^2 \cong G_{ij}^* u_0^i u_0^j,$$

e similmente

$$\cos \alpha \cong \frac{G_{ij}^* u_0^i v_0^j}{\sqrt{G_{pq}^* u_0^p u_0^q G_{rs}^* v_0^r v_0^s}}.$$

C'è un analogo tensore detto **tensore di deformazione sinistro di Cauchy-Green** definito, sulla configurazione attuale C_t invece che quella iniziale tramite il push forward, come

$$\mathbf{G}_* := \Psi_{t*} \hat{\Phi},$$

dove il campo controvariante doppio simmetrico $\hat{\Phi}$ è costruito in componenti riferite a coordinate arbitrarie y^1, y^2, y^3 con la metrica ad indici rialzati

$$\hat{\Phi} = g^{ij} \frac{\partial}{\partial y^i} \otimes \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

Tensori più utili per valutare le deformazioni si ottengono sottraendo ai tensori di Cauchy-Green la metrica ed il tensore $\hat{\Phi}$ rispettivamente. Si hanno in tal modo, rispettivamente il **tensore di deformazione lagrangiano** (definito su C_0) ed il **tensore di deformazione Euleriano** (definito su C_t):

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &:= \frac{1}{2} (\mathbf{G}^* - \Phi), \\ \mathbf{E} &:= \frac{1}{2} (\mathbf{G}_* - \hat{\Phi}). \end{aligned}$$

In riferimento a coordinate globali y^1, y^2, y^3 su \mathbb{E}^3 si ha dunque che

$$\begin{aligned} L_{ij}(X_0) &:= \frac{1}{2} (G_{ij}^*(X_0) - g_{ij}(X_0)) , \\ E^{ij}(X) &:= \frac{1}{2} (G^{ij}(X) - g^{ij}(X)) . \end{aligned}$$

Osservazione. Se diffeomorfismo Ψ_t è in realtà un' *isometria*, cioè si passa da C_0 a C_t con una rototraslazione¹⁶ per cui le distanze tra le particelle materiali di continuo sono mantenute (e quindi $(\Psi_t^*\Phi)(X) = \Phi(X_0)$), allora $G_{ij}^* = g_{ij}$ per cui $L_{ij} = 0$ identicamente. Si verifica facilmente che la stessa cosa accade per E^{ij} sotto le stesse ipotesi.

6.2 Tensore di velocità di deformazione e tensore di deformazione Lagrangiano. Tensore di rotazionalità euleriano.

Abbiamo già introdotto il tensore di velocità di deformazione:

$$D_{ij}(t, X) = \frac{1}{2} (\nabla_i V_j(t, X) + \nabla_j V_i(t, X)) .$$

Ora ne studieremo la relazione con il tensore di deformazione Lagrangiano mostrando che

$$(\Psi_t^* D)_{ij}(t, X_0) = \frac{\partial}{\partial t} L_{ij}(t, X_0) .$$

Dal punto di vista fisico questo significa che conoscere il pull back del campo di velocità di deformazione ad un istante t_0 significa conoscere il tensore di deformazione Lagrangiana al prim'ordine nel tempo intorno a t_0 considerato come tempo iniziale. Ridefinendo $t_0 = 0$, la relazione di sopra mostra infatti che, tenendo conto che $L_{ij}(0, X_0) = 0$,

$$L_{ij}(t, X_0) = t(\Psi_t^* D)_{ij}(t, X_0) + tO(t)_{X_0} .$$

dove $O(t)_{X_0} \rightarrow 0$ per $t \rightarrow 0$.

Per provare la prima relazione lavoriamo in coordinate cartesiane ortonormali y^1, y^2, y^3 . In tal caso, applicando la definizione di \mathbf{L} ,

$$L_{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta_{pq} \frac{\partial X^p}{\partial X_0^i} \frac{\partial X^q}{\partial X_0^j} - \delta_{ij} \right) .$$

Di conseguenza:

$$\frac{\partial L_{ij}(t, X_0)}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\delta_{pq} \frac{\partial^2 X^p}{\partial t \partial X_0^i} \frac{\partial X^q}{\partial X_0^j} + \delta_{pq} \frac{\partial X^p}{\partial X_0^i} \frac{\partial^2 X^q}{\partial t \partial X_0^j} \right) . \quad (82)$$

¹⁶Non è necessario che per ogni $t' \in (0, t)$ $\Psi_{t'}$ sia una rototraslazione, è sufficiente che ciò accada solo per t .

D'altra parte in coordinate cartesiane ortonormali

$$D_{ij}(t, X) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_j(t, X)}{\partial y^i} + \frac{\partial V_i(t, X)}{\partial y^j} \right) .$$

Applicando il pull back si ottiene

$$(\Psi_t^* D)_{ij}(t, X_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_p(t, X(t, X_0))}{\partial y^q} \frac{\partial X^q}{\partial X_0^i} \frac{\partial X^p}{\partial X_0^j} + \frac{\partial V_q(t, X(t, X_0))}{\partial y^p} \frac{\partial X^q}{\partial X_0^i} \frac{\partial X^p}{\partial X_0^j} \right) ,$$

ossia

$$(\Psi_t^* D)_{ij}(t, X_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_p(t, X(t, X_0))}{\partial X_0^i} \frac{\partial X^p}{\partial X_0^j} + \frac{\partial V_q(t, X(t, X_0))}{\partial X_0^j} \frac{\partial X^q}{\partial X_0^i} \right) .$$

Tenendo conto che, nelle nostre coordinate

$$\frac{\partial V_p(t, X(t, X_0))}{\partial X_0^i} = \frac{\partial V^p(t, X(t, X_0))}{\partial X_0^i} ,$$

e che, dalla definizione di cappo di velocità

$$\frac{\partial V^p(t, X(t, X_0))}{\partial X_0^i} = \frac{\partial^2 X^p}{\partial t \partial X_0^i} ,$$

otteniamo

$$(\Psi_t^* D)_{ij}(t, X_0) = \frac{1}{2} \left(\delta_{pq} \frac{\partial^2 X^p}{\partial t \partial X_0^i} \frac{\partial X^q}{\partial X_0^j} + \delta_{pq} \frac{\partial X^p}{\partial X_0^i} \frac{\partial^2 X^q}{\partial t \partial X_0^j} \right) .$$

che, per (82), significa

$$(\Psi_t^* D)_{ij}(t, X_0) = \frac{\partial}{\partial t} L_{ij}(t, X_0) .$$

Questo era quanto volevamo provare.

Accanto al tensore di velocità di deformazione esiste un secondo tensore detto **tensore di rotazionalità euleriano**. Esso si ottiene facendo la differenza tra la derivata covariante del campo di velocità (in rappresentazione Euleriana ed in forma covariante) ed il campo di velocità di deformazione:

$$R_{ij}(t, X) = \frac{1}{2} (\nabla_i V_j(t, X) - \nabla_j V_i(t, X)) .$$

Ovviamente dunque

$$\nabla_i V_j = D_{ij} + R_{ij} .$$

Osservazione. Dato che la connessione di Levi-Civita ha torsione nulla, nella definizione di \mathbf{R} si possono usare direttamente le derivate ordinarie invece di quelle covarianti:

$$R_{ij}(t, X) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_j(t, X)}{\partial y^i} - \frac{\partial V_i(t, X)}{\partial y^j} \right) .$$

Vediamo di spiegare il significato fisico del campo di rotazionalità euleriano. Fissiamo un punto O in C_t ed esaminiamo il moto del continuo nell'intorno di O all'istante considerato. Lavorando in coordinate cartesiane ortonormali con origine in O stesso e sviluppando con Taylor al prim'ordine il campo di velocità in O otteniamo:

$$V^i(t, X) = V^i(t, O) + X^p \frac{\partial V^i}{\partial y^p} \Big|_O + |X - O| O^i (|X - O|)$$

dove $O^i(z) \rightarrow 0$ se $z \rightarrow 0$. Tale sviluppo può essere riscritto come

$$V_i(t, X) = V_i(t, O) + X^p D_{pi}(t, O) + X^p R_{pi}(t, O) + |X - O| O_i (|X - O|).$$

Se il campo di velocità di deformazione è nullo in O all'istante considerato, l'espressione di sopra si riscrive

$$\mathbf{V}(t, X) = \mathbf{V}(t, O) + \boldsymbol{\omega} \wedge (X - O) + |X - O| \mathbf{O} (|X - O|),$$

dove si è posto

$$\omega^i := \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} R_{jk}(t, O).$$

In altre parole, per velocità di deformazione nulla in un punto O di continuo ad un istante, il moto del continuo vicino a tale punto e nello stesso istante appare come un moto traslatorio con velocità costante $\mathbf{V}(t, O)$ sovrapposto ad un moto rotatorio attorno al punto O con velocità angolare costante data dal tensore di rotazionalità euleriano valutato in O .

Si verifica facilmente che se in un istante t l'atto di moto del continuo è rigido con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ allora, su tutto il continuo $D_{ij} \equiv 0$ in quell'istante mentre, nello stesso istante \mathbf{R} è costante e vale

$$R_{ij} = \epsilon_{ijk} \omega^k,$$

che risulta essere l'inversa della relazione precedente.

6.3 Linearizzazione e tensore di deformazione euleriano linearizzato.

Per studiare l'elasticità è utile introdurre un ulteriore tensore di deformazione che ha senso nel regime di piccoli spostamenti e piccole variazioni (spaziotemporali) degli spostamenti delle particelle materiali di continuo nel passare dalla configurazione iniziale C_0 a quella attuale C_t . Per ogni punto $X \in C_t$ consideriamo il vettore spostamento $\mathbf{u}(t, X) = X - X_0$ che assumeremo essere applicato in X (non in X_0) al tempo t . In tal modo, assegnato il flusso del continuo, risulta essere definito un campo vettoriale, detto **campo degli spostamenti**, $C_t \ni X \mapsto \mathbf{u}(t, X) \in T_X C_t$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Tale campo è differenziabile congiuntamente in t e X . Dato che $X^i = u^i + X_0^i$ si ha anche che

$$\frac{\partial X^i}{\partial X_0^p} = \frac{\partial u^i}{\partial X_0^p} + \delta_p^i, \quad (83)$$

dove abbiamo supposto di esprimere u^i come $u^i(t, X(t, X_0))$.

Una proprietà utile del campo \mathbf{u} è la seguente. Per definizione di derivata materiale

$$\frac{Du^i}{Dt}\Big|_{X(t, X_0)} = \frac{\partial}{\partial t} u^i(t, X(t, X_0)) = \frac{\partial}{\partial t} (X^i(t, X_0) - X_0) = V^i(t, X(t, X_0)) + 0.$$

Quindi la derivata materiale del campo di spostamento coincide con il campo di velocità (in rappresentazione euleriana):

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt}(t, X) = \mathbf{V}(t, X). \quad (84)$$

Nella teoria dell'elasticità lineare si usa un'approssimazione detta *lineare*, o anche *linearizzazione*. In tale approssimazione, *nelle equazioni del moto*, i prodotti del campo di spostamento con esso stesso ovvero i prodotti di derivate (covarianti) spaziali e/o temporali del campo di spostamento con altrettante derivate del campo \mathbf{u} o componenti dello stesso campo vengono trascurate. Nel resto del capitolo faremo uso di tale approssimazione. Come prima applicazione della procedura di linearizzazione notiamo che, in tale approssimazione,

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt}(t, X) \cong \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cong \mathbf{V}(t, X). \quad (85)$$

Infatti esplicitando il primo membro di (84) in coordinate cartesiane ortonormali si ha

$$V^i = \frac{\partial u^i}{\partial t} + V^k \frac{\partial u^i}{\partial y^k}. \quad (86)$$

Di conseguenza deve valere:

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} + \left(\frac{\partial u^k}{\partial t} + V^h \frac{\partial u^k}{\partial y^h} \right) \frac{\partial u^i}{\partial y^k} = V^i.$$

Trascurando i termini quadratici nelle derivate del campo di spostamento si ha proprio

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} \cong V^i,$$

che implica (85).

Come seconda applicazione esprimiamo il tensore di deformazione euleriano in funzione del campo degli spostamenti e quindi introduciamo un nuovo ed utile tensore che approssima \mathbf{E} in regime linearizzato. Lavoriamo in coordinate cartesiane ortonormali y^1, y^2, y^3 . In tali coordinate risulta essere dalla definizione di \mathbf{E} , che lo ricordiamo è applicato in X ,

$$E^{ij}(t, X) = \frac{1}{2} \left(\delta^{pq} \frac{\partial X^i}{\partial X_0^p} \frac{\partial X^j}{\partial X_0^q} - \delta^{ij} \right),$$

da cui, usando (83),

$$E_{ij}(t, X) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_0^j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_0^i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial X_0^p} \frac{\partial u_j}{\partial X_0^q} \delta^{pq}.$$

Trascurando i termini quadratici nelle variazioni di \mathbf{u} si ricava

$$E_{ij}(t, X) \cong \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_0^j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_0^i} \right). \quad (87)$$

D'altra parte usando ancora (83)

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_0^j} = \frac{\partial u_i}{\partial X^k} \frac{\partial X^k}{\partial X_0^j} = \frac{\partial u_i}{\partial X^k} \left(\frac{\partial u^k}{\partial X_0^j} + \delta_j^k \right).$$

Nella solita approssimazione di trascurare i termini quadratici in \mathbf{u} o nelle sue variazioni, si ha che vale

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_0^j} = \frac{\partial u_i}{\partial X^j}.$$

Sostituendo in (87) possiamo concludere che, *nell' approssimazione linearizzata*, vale l'espressione approssimata di \mathbf{E} in forma covariante:

$$E_{ij}(t, X) \cong \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X^j} + \frac{\partial u_j}{\partial X^i} \right), \quad (88)$$

ovvero,

$$\mathbf{E}(t, X) \cong \mathbf{e}(t, X),$$

dove, in un sistema di coordinate arbitrario, il tensore doppio simmetrico covariante \mathbf{e} applicato in X al tempo t :

$$e_{ij} := \frac{1}{2} (\nabla_j u_i + \nabla_i u_j), \quad (89)$$

è detto **tensore di deformazione euleriano linearizzato**.

Si osservi che da (85) vale anche, sempre in regime linearizzato e in coordinate ortonormali,

$$\frac{\partial e_{ij}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial X^j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial t \partial X^i} \right) \cong \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial X^j} + \frac{\partial V_j}{\partial X^i} \right);$$

ossia, indipendentemente dalle coordinate scelte:

$$\frac{D\mathbf{e}}{Dt} \cong \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} \cong \mathbf{D}, \quad (90)$$

dove si è tenuto conto che, per (86), il calcolo della derivata materiale invece di quella parziale temporale introdurrebbe termini quadratici trascurabili nella nostra approssimazione.

6.4 Elasticità lineare per continui isotropi ed omogenei spaziotemporalmente.

Molti corpi continui, in regime di piccoli spostamenti e piccole variazioni degli spostamenti (che ci autorizza ad usare l'approssimazione lineare) si comportano secondo le leggi dell'*elasticità lineare*. Questo significa che il tensore degli sforzi σ soddisfa un'equazione costitutiva detta *di Hooke* in cui σ risulta essere una funzione lineare del tensore di deformazione euleriana linearizzato. È importante precisare che la vera trattazione dell'elasticità andrebbe fatta tenendo conto delle proprietà termodinamiche del continuo stesso, nel seguito supporremo sempre che, dal punto di vista fisico i corpi che considereremo siano a temperatura costante e non sottoposti a flussi di calore (isolamento adiabatico). In caso contrario le leggi dell'elasticità che ora enunceremo devono essere modificate. Nelle ipotesi fatte, la trasformazione lineare che manda \mathbf{e} in σ è un tensore, \mathbf{H} detto **tensore di Hooke**. In componenti

$$\sigma_{ij}(t, X) = H(t, X)_{ij}{}^{pq} e_{pq}(t, X).$$

Il tensore di Hooke ha in ogni punto di continuo 81 componenti. In realtà possiamo sempre assumere la simmetria dei due indici alti e dobbiamo assumere la simmetria dei due indici bassi dal momento che sia σ_{ij} che e_{pq} sono simmetrici. Ulteriormente, nelle ipotesi di *continuo isotropo ed omogeneo nello spazio e nel tempo*, seguendo la stessa procedura usata per ottenere il tensore degli sforzi di Navier-Stokes, ci si riduce alla relazione semplificata, valida in coordinate cartesiane ortonormali:

$$\sigma_{ij}(t, X) = \alpha \left(e_{ij}(t, X) - \frac{1}{3} \delta_{ij} e_k^k(t, X) \right) + \frac{\beta}{3} \delta_{ij} e_k^k(t, X),$$

essendo α e β delle costanti determinate dal continuo.

Val la pena di notare che le ipotesi di isotropia sono fisicamente molto più forti che le analoghe ipotesi nel caso del fluido di Navier-Stokes. Non è per nulla facile immaginarsi un fluido anisotropo, mentre è molto facile immaginare un continuo elastico anisotropo: si pensi ad un blocco cubico elastico che reagisce in modo diverso, cioè dando luogo a diversa deformazione, a seconda se sia stirato, con la stessa forza ai bordi, nella direzione Nord-Sud piuttosto che in quella Est-Ovest.

Riguardo all'omogeneità spaziale e temporale, questa dipende fortemente dalle condizioni termodinamiche. Cambiamenti di temperatura anche solo locali possono alterare (ed in genere accade) le proprietà elastiche del mezzo in modo tale che, di fatto α e β vengono a dipendere dal posto ed al tempo.

Per ragioni storiche si preferisce usare parametri differenti da α, β . Questi parametri sono detti **parametri di Lamé**: $\mu = \alpha/2$ e $\lambda = (\beta - \alpha)/3$. Con questa scelta il tensore degli sforzi assume la forma, valida in ogni sistema di coordinate

$$\sigma_{ij}(t, X) = 2\mu e_{ij}(t, X) + \lambda g_{ij}(X) e_k^k(t, X). \quad (91)$$

dove g_{ij} è il tensore metrico. La forma del tensore di Hooke è allora la seguente, per semplicità in coordinate cartesiane ortonormali,

$$H_{ij}{}^{pq} = \mu \left(\delta_i^p \delta_j^q + \delta_j^p \delta_i^q \right) + \lambda \delta_{ij} \delta^{pq}, \quad (92)$$

(in coordinate arbitrarie è sufficiente rimpiazzare δ_{ij} e δ^{pq} con, rispettivamente, $g_{ij}(X)$ e $g^{pq}(X)$). Questo tensore, per costruzione, è invariante per rotazioni di $SO(3)$, ma, come è facile verificare, lo è anche per rotazioni improprie (con determinante negativo). Oltre alla simmetria negli indici alti e bassi separatamente, il tensore di Hooke ha anche la proprietà di simmetria che si evince direttamente dalla (92):

$$H_{ij\ pq} = H_{pq\ ij} . \quad (93)$$

Esempio 3.1.

3.1.1. Consideriamo una sbarra di materiale elastico (isotermo ed adiabaticamente isolato) di forma di parallelepipedo a sezione quadrata di area A e altezza di riposo L_0 . Supponiamo che la base inferiore sia trattenuta ferma alla quota $z = 0$, mentre l'altra sia sottoposta a trazione uniforme nella direzione dell'altezza. Supponiamo nota la forza di modulo F esercitata su tale base tramite una densità superficiale di forza uniforme. Supponiamo di conoscere i parametri di Lamé del continuo e di volere calcolare il vettore di spostamento di un punto che si trova all'altezza z nella configurazione finale $C = C_t$. Trattiamo, in prima approssimazione, il problema come un problema unidimensionale trascurando le deformazioni delle basi ed assumendo costante ρ la densità di massa del continuo. In coordinate cartesiane ortonormali $y^1, y^2, y^3 = x, y, z$, l'equazione della statica del continuo è:

$$\sigma_{ij, \ j} - \rho g \delta_i^z = 0 . \quad (94)$$

Si osservi che la forza F (e similmente la forza esercitata sulla faccia tenuta ferma a quota $z = 0$) non rientra nell'equazione in alcun modo: l'equazione vale per i punti interni alla configurazione di continuo, la forza F rientra unicamente come condizione al contorno.

Ci interessa la direzione z , ossia $i = z$ sopra. Vale anche, da (91),

$$\sigma_{ij}(z) = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial y^j} + \frac{\partial u_j}{\partial y^i} \right) + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial y^k} ,$$

che nelle nostre ipotesi, considerando σ_{zz} , si riduce a

$$\sigma_{zz} = 2\mu \frac{du^z}{dz} + \lambda \frac{du^z}{dz} = (2\mu + \lambda) \frac{du^z}{dz} .$$

L'equazione (94) diventa in tal modo, se $\nu := 2\mu + \lambda$

$$\nu \frac{d^2 u^z}{dz^2} - \rho g = 0 ,$$

che si risolve in

$$u^z(z) = \frac{\rho g}{2\nu} z^2 + cz + c'$$

dove c e c' sono costanti da determinare. Abbiamo infatti due relazioni che devono ancora essere soddisfatte: (1) la base inferiore rimane ferma per cui

$$u^z(0) = 0 .$$

Da questa segue che $c' = 0$. (2) La forza totale sulla base superiore è diretta lungo \mathbf{e}_z e vale $F = A\sigma_{zz}$ dove σ_{zz} deve essere positivo. In formule, se U è l'allungamento dell'estremo superiore del parallelepipedo,

$$F = \nu A \frac{du^z}{dz} = \nu A \frac{\rho g}{\nu} (L_0 + U) + \nu A c ,$$

ossia

$$c = \frac{F - A\rho g(L_0 + U)}{\nu A} .$$

c e quindi la funzione u^z è determinata se si conosce l'allungamento U dell'estremo superiore del blocco. Questo si determina nel modo seguente. Sostituendo l'espressione trovata di c nella stessa funzione $u^z = u^z(z)$ valutata proprio per $z = U + L_0$ deve valere:

$$U = \frac{\rho g}{2\nu} (L_0 + U)^2 + c(L_0 + U)$$

si ha

$$U = \frac{\rho g}{2\nu} (L_0 + U)^2 + \frac{F(L_0 + U)}{\nu A} - \frac{A\rho}{\nu A} g(L_0 + U)^2$$

ossia

$$\frac{A\rho g}{2} (L_0 + U)^2 - F(L_0 + U) + \nu AU = 0 ,$$

che si riscrive

$$\frac{\rho g}{2} (L_0 + U)^2 + \left[\nu - \frac{F}{A} \right] (L_0 + U) - \nu L_0 = 0 .$$

Questa equazione determina due valori per $U + L_0$ di cui solo uno dei due è positivo ed è quello (con le nostre ipotesi) fisicamente sensato. (L'altra soluzione è relativa all'analogo problema per il blocco di continuo "appeso" per una faccia alla quota $z = 0$ e sottoposto anche alla forza F , sull'altra faccia, diretta come nel caso precedente: per questo problema le equazioni sono le stesse del caso da noi studiato.) La conoscenza della funzione u^z a questo punto determina anche il valore delle tensioni interne $\sigma_{zz}(z)$ ad ogni quota z .

6.5 Energia elastica.

Prima di passare a studiare le equazioni del moto occupiamoci dell'equazione di bilancio energetico. Come sappiamo (vedi sezione 3.6) vale l'equazione delle forze vive per ogni porzione di continuo

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \frac{\rho}{2} \mathbf{V}^2 d\mu = - \int_{V_t} \sigma^{ij} D_{ij} d\mu + \Pi^{(\text{vol.})} + \Pi^{(\text{sup.est.})} .$$

Nel caso in esame (continuo elastico lineare isotropo ed omogeneo) è possibile rappresentare in altro modo la potenza dissipata dagli sforzi interni, cioè il primo integrale a secondo membro.

Infatti usando la (90) nel nostro regime di approssimazione lineare (scrivendo $=$ invece di \cong ovunque) e lavorando in coordinate cartesiane ortonormali:

$$\sigma^{ij} D_{ij} = \sigma^{ij} \frac{De_{ij}}{Dt} = H^{ijpq} e_{pq} \frac{De_{ij}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} H_{ijpq} e^{ij} e^{pq} \right). \quad (95)$$

Se assumiamo di lavorare con continui elastici in cui si possono trascurare le variazioni di densità ρ (questo è generalmente possibile per piccole variazioni della configurazione), possiamo introdurre la **densità di energia potenziale elastica**

$$u_E(t, X) := \frac{1}{2\rho} H_{ijpq} e^{ij}(t, X) e^{pq}(t, X). \quad (96)$$

L'incompressibilità dei mezzi elastici non è un'ipotesi artificiosa: chiunque abbia cercato di comprimere o allungare un blocco di materiale elastico premendone o tirando le facce esterne si è accorto che la sezione del blocco parallela alle facce si allarga nel caso di compressione o si restringe nel caso di stiramento. Questi sono effetti del fatto che la densità del materiale rimanga costante e quindi venga conservato il volume come conseguenza dell'equazione di continuità.

Per definizione, tenendo conto di (95) e del fatto che ρ è una costante, vale

$$\rho \frac{D}{Dt} u_E = D_{ij} \sigma^{ij}$$

Di conseguenza l'equazione di bilancio energetico può scriversi, per ogni porzione materiale di continuo V_t

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \left(\frac{\rho}{2} \mathbf{V}^2 + \rho u_E \right) d\mu = \Pi^{(\text{vol.})} + \Pi^{(\text{sup.est.})}.$$

Nel caso il continuo non sia sottoposto a sollecitazioni esterne, l'energia meccanica totale

$$E = \int_{C_t} \left(\frac{\rho}{2} \mathbf{V}^2 + \rho u_E \right) d\mu$$

si conserva nel tempo.

L'introduzione dell'energia meccanica permette di fare delle considerazioni sulla stabilità di un sistema costituito da un continuo elastico lineare in cui la densità di massa è costante. Se la densità di energia potenziale elastica fosse illimitata inferiormente in qualche punto, in linea di principio, per un continuo elastico non sollecitato esternamente, sarebbe possibile accrescere arbitrariamente l'energia cinetica a spese dell'energia potenziale elastica mantenendo costante il valore di E , ottenendo soluzioni "esplosive" in cui il campo di velocità diverge con il crescere del tempo¹⁷. Tali fatti non si osservano in natura. Mostriamo che la richiesta che la densità di energia potenziale elastica sia limitata inferiormente uniformemente comporta delle limitazioni

¹⁷Si potrebbe fare un discorso più rigoroso studiando effettivamente le soluzioni dell'equazione del moto e la loro stabilità nel formalismo hamiltoniano dei campi usando il funzionale dell'energia meccanica totale come hamiltoniana del sistema, tuttavia volendo restare su un piano elementare non andremo oltre alla motivazioni euristiche suddette.

sui valori assumibili dai coefficienti di Lamé. Mettiamoci in coordinate ortonormali cartesiane. L'espressione (96) può essere scritta in termini espliciti, facendo uso dell'espressione (92) per il tensore di Hooke, come

$$u_E = \frac{1}{2\rho} \left(2\mu e^{ij} e_{ij} + \lambda e_k^k e_h^h \right)$$

Questa può vedersi come una forma quadratica nello spazio delle matrici simmetriche 3×3 . È conveniente decomporre lo spazio delle matrici suddette come somma diretta dello spazio delle matrici simmetriche a traccia nulla e dello spazio delle matrici proporzionali alla matrice identità. Introduciamo pertanto i coefficienti $v_{ij} := e_{ij} - \delta_{ij} \frac{1}{3} e_k^k$ che sono per costruzione linearmente indipendenti dai coefficienti $\delta_{ij} e_k^k$ e che appartengono al primo dei due spazi detti. Quindi $e_{ij} = v_{ij} + \delta_{ij} e_k^k / 3$ è la decomposizione diretta di cui sopra. Usando tale decomposizione si ha

$$u_E = \frac{1}{2\rho} \left[2\mu \left(v_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij} e_k^k \right) \left(v^{ij} + \frac{1}{3} \delta^{ij} e_k^k \right) + \lambda e_k^k e_h^h \right]$$

e quindi, tenendo conto che $v_{ij} \delta^{ij} = 0$ per costruzione,

$$u_E = \frac{1}{2\rho} \left[2\mu v_{ij} v^{ij} + \left(\frac{2\mu}{3} + \lambda \right) e_k^k e_h^h \right]$$

In altri termini

$$u_E = \frac{1}{\rho} \left[\mu \sum_{i,j=1}^3 (v_{ij})^2 + \left(\frac{\mu}{3} + \frac{\lambda}{2} \right) \sum_{k=1}^3 (e_{kk})^2 \right].$$

dove la quantità $\sum_{i,j=1}^3 (v_{ij})^2$ e la quantità $\sum_{k=1}^3 (e_{kk})^2$ sono indipendenti e possono assumere, a priori, qualunque valore non negativo. Di conseguenza u_E è uniformemente limitata dal basso se e solo se contemporaneamente $\mu \geq 0$ e $\mu/3 + \lambda/2 \geq 0$. Il limite inferiore di u_E è proprio 0. Concludiamo che:

Teorema 6.1. *Per un continuo elastico lineare isotropo ed omogeneo (spaziotemporalmente) con densità di massa costante, la densità di energia potenziale elastica è ovunque limitata dal basso (per ogni scelta del campo \mathbf{e} definito sulla configurazione attuale C_t per qualsiasi t) se e solo se i parametri di Lamé del continuo soddisfano*

$$\mu \geq 0, \tag{97}$$

$$\lambda \geq -2\mu/3. \tag{98}$$

In tal caso, il limite inferiore della densità di energia elastica è il valore nullo.

6.6 Onde elastiche.

Consideriamo un continuo elastico lineare del tipo di quelli studiati nel paragrafo precedente (in particolare con densità di massa costante). Supponiamo che il continuo non sia sottoposto a forze

esterne di alcun genere nei suoi punti interni. Tuttavia ammettiamo che il continuo sia “tenuto fermo” in un riferimento inerziale tramite l’applicazione di forze sulla superficie esterna. Tali forze lasciano comunque libertà ai punti interni di oscillare. In tal caso le equazioni del moto per i punti interni sono semplicemente

$$\rho \frac{DV^i}{Dt} = \sigma^{ij}{}_{,j} .$$

Nell’approssimazione lineare abbiamo che partendo da (86) e trascurando i termini quadratici nel campo degli spostamenti e delle sue derivate come visto precedentemente:

$$\rho \frac{DV^i}{Dt} = \rho \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} .$$

Da cui l’equazione del moto è, in coordinate cartesiane ortonormali,

$$\rho \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} = \mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial y^j} \left(\frac{\partial u^i}{\partial y^j} + \delta^{iq} \frac{\partial u^j}{\partial y^q} \right) + \lambda \delta^{ir} \frac{\partial}{\partial y^r} \left(\frac{\partial u_k}{\partial y^k} \right) .$$

In forma implicita, l’equazione del moto vale

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u} = \frac{\mu + \lambda}{\rho} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) . \quad (99)$$

Il numero $Y := \mu/\rho$ è detto **modulo di Young** del materiale.¹⁸ Mostriamo che l’equazione (99) assume come soluzioni particolari onde trasversali e onde longitudinali, quando il continuo è supposto definito in una regione grandissima, nel limite tutto lo spazio \mathbb{E}^3 . Fissiamo un sistema di coordinate cartesiane ortonormali x^1, x^2, x^3 con origine O e base di vettori ortonormali $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$. \mathbf{x} indicherà il vettore di componenti (x^1, x^2, x^3) e \cdot il prodotto scalare. In tal modo identificheremo lo spazio V^3 dei vettori liberi su \mathbb{E}^3 con \mathbb{R}^3 stesso. Considereremo delle forme di soluzione che possono essere decomposte in trasformata di Fourier le cui componenti appartengono allo spazio delle funzioni di Schwartz:

$$\mathbf{u}(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \sum_{i=1}^3 u^i(t, \mathbf{k}) \mathbf{e}_i(\mathbf{k})$$

Scegliamo i versori $\mathbf{e}_i(\mathbf{k})$ in modo che, se $\mathbf{k} \neq 0$:

$$\mathbf{e}_3(\mathbf{k}) := \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} ,$$

¹⁸Val la pena di notare che le equazioni (99) si ottengono nella formulazione lagrangiana della teoria dei campi (usando \mathbf{u} come campo) dalla densità di lagrangiana, con ρ costante,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \rho u_E(\mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) ,$$

che ammette come densità di funzione hamiltoniana proprio la densità di energia meccanica (cinetica + elastica).

mentre $\mathbf{e}_1(\mathbf{k})$ e $\mathbf{e}_2(\mathbf{k})$ sono tali da formare (in modo differenziabile al variare di \mathbf{k}) una base ortonormale destrorsa insieme a $\mathbf{e}_3(\mathbf{k})$ per ogni scelta di $\mathbf{k} \in V^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Possiamo riscrivere la forma di \mathbf{u} , cambiando un poco la notazione, come

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left(u(t, \mathbf{k})\mathbf{e}_3(\mathbf{k}) + \sum_{\alpha=1}^2 u^\alpha(t, \mathbf{k})\mathbf{e}_\alpha(\mathbf{k}) \right). \quad (100)$$

Assumendo che sia possibile derivare sotto il segno di integrale, si ha facilmente che, se il doppio punto indica la derivata seconda temporale:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left(\ddot{u}(t, \mathbf{k})\mathbf{e}_3(\mathbf{k}) + \sum_{i=\alpha}^2 \ddot{u}^\alpha(t, \mathbf{k})\mathbf{e}_\alpha(\mathbf{k}) \right), \quad (101)$$

$$\Delta \mathbf{u} = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left(\mathbf{k}^2 u(t, \mathbf{k})\mathbf{e}_3(\mathbf{k}) + \sum_{i=\alpha}^2 \mathbf{k}^2 u^\alpha(t, \mathbf{k})\mathbf{e}_\alpha(\mathbf{k}) \right), \quad (102)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathbf{k}^2 u(t, \mathbf{k})\mathbf{e}_3(\mathbf{k}). \quad (103)$$

Inserendo queste espressioni in (99) e raccogliendo i vari fattori dei tre versori nell'integrando si ottiene l'equazione equivalente a (99), che deve valere per ogni t e \mathbf{x}

$$0 = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left[\left(\ddot{u}^\alpha(t, \mathbf{k}) + \frac{2\mu + \lambda}{\rho} \mathbf{k}^2 u(t, \mathbf{k}) \right) \mathbf{e}_3(\mathbf{k}) + \sum_{\alpha=1}^2 \left(\ddot{u}(t, \mathbf{k}) + \frac{\mu}{\rho} \mathbf{k}^2 u^\alpha(t, \mathbf{k}) \right) \mathbf{e}_\alpha(\mathbf{k}) \right].$$

Dato che la trasformata di Fourier è biettiva e lineare, l'integrando deve essere nullo. Usando l'indipendenza lineare dei tre versori \mathbf{e}_i otteniamo le tre equazioni ($\alpha = 1, 2$):

$$\ddot{u}(t, \mathbf{k}) + \frac{2\mu + \lambda}{\rho} \mathbf{k}^2 u(t, \mathbf{k}) = 0, \quad (104)$$

$$\ddot{u}^\alpha(t, \mathbf{k}) + \frac{\mu}{\rho} \mathbf{k}^2 u^\alpha(t, \mathbf{k}) = 0. \quad (105)$$

La soluzione generale ha la forma ($\alpha = 1, 2$):

$$u(t, \mathbf{k}) = u_+(\mathbf{k}) e^{i\sqrt{\frac{2\mu+\lambda}{\rho}}|\mathbf{k}|t} + u_-(\mathbf{k}) e^{-i\sqrt{\frac{2\mu+\lambda}{\rho}}|\mathbf{k}|t}, \quad (106)$$

$$u^\alpha(t, \mathbf{k}) = u_+^\alpha(\mathbf{k}) e^{i\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}|\mathbf{k}|t} + u_-^\alpha(\mathbf{k}) e^{-i\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}|\mathbf{k}|t}. \quad (107)$$

Dove le 6 funzioni u_\pm, u_\pm^α sono supposte appartenere allo spazio di Schwartz su \mathbb{R}^3 . Se assumiamo esplicitamente che

$$\mu \geq 0, \quad (108)$$

$$\lambda \geq -2\mu. \quad (109)$$

(e ciò è anche conseguenza dei vincoli ottenuti per avere la limitatezza uniforme della densità di energia elastica) le due soluzioni formali trovate producono soluzioni delle equazioni differenziali iniziali che hanno un'interpretazione in termini di onde. Affinché le soluzioni che si ottengono sostituendo in (100) le espressioni trovate per u , u^α siano funzioni reali è necessario e sufficiente (lasciamo la prova al lettore) che

$$u_+(\mathbf{k}) = -\overline{u_-(-\mathbf{k})} \quad (110)$$

e, per $\alpha = 1, 2$,

$$u_{\alpha+}(\mathbf{k}) = -\overline{u_{\alpha-}(-\mathbf{k})} \quad (111)$$

dove la barra indica il complesso coniugato. Sotto tali ipotesi abbiamo due classi di soluzioni formali *reali* delle equazioni del moto date da

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \sqrt{\frac{2\mu+\lambda}{\rho}}|\mathbf{k}|t)} u_+(\mathbf{k}) \mathbf{e}_3(\mathbf{k}) + c.c. , \quad (112)$$

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}|\mathbf{k}|t)} \sum_{\alpha=1}^2 u_+^\alpha(\mathbf{k}) \mathbf{e}_\alpha(\mathbf{k}) + c.c. , \quad (113)$$

dove *c.c.* indica il complesso coniugato del termine dell'addendo già scritto. Queste soluzioni sono in realtà solo soluzioni *formali* delle equazioni differenziali di partenza, perché non abbiamo ancora giustificato la procedura di scambiare l'integrazione con gli operatori differenziali usata all'inizio. È facile verificare ogni componente (rispetto alla base $e_i(\mathbf{k})$) di ogni integrando in (112) e (113) è nello spazio di Schwartz per ogni fissato $t \in \mathbb{R}$ purché le funzioni u_+ e u_+^α siano tali: i termini dovuti ai fattori esponenziali sono numeri complessi di modulo 1. Teniamo conto del fatto che le componenti dei versori $\mathbf{e}_i(\mathbf{k})$ sulla base fissa $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ (usata per descrivere le coordinate cartesiane ortonormali iniziali) sono sicuramente funzioni limitate. Come conseguenza si che le componenti delle funzioni integrande, rispetto a tale base fissa, sono sicuramente almeno $L^1(\mathbb{R}^3)$ per ogni fissato $t \in \mathbb{R}$ ¹⁹. La trasformata di Fourier è di ogni componente (rispetto alla base fissa) è allora ben definita e sono ben definite le componenti del campo $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ rispetto alla base fissa, in quanto ottenuto tramite trasformata di Fourier in (112) e (113). Usando il teorema della convergenza dominata di Lebesgue si prova abbastanza facilmente che, per le funzioni definite in (112) e (113), i passaggi di derivazione sotto il segno di integrale usati precedentemente sono possibili. Conseguentemente le soluzioni formali trovate sono effettivamente soluzioni delle equazioni differenziali iniziali.

La (112) definisce un'onda *longitudinale* (sovrapposizione di Fourier di onde piane con oscillazioni lungo il vettore d'onda \mathbf{k}) con velocità di propagazione data da

$$v_l = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho}} ,$$

¹⁹Con qualche precauzione ulteriore sulla scelta delle funzioni $u_+^{(\alpha)}$ si può verificare che, rispetto alla base fissa, le componenti degli integrandi di (112) e (113) sono nello spazio di Schwartz su \mathbb{R}^3 . Dato che la trasformata di Fourier manda lo spazio di Schwartz in se stesso, ciò implica che le componenti dei campi $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ sono, per ogni t nello stesso spazio di funzioni nella variabile \mathbf{x} .

mentre la (113) definisce un' *onda trasversale* (sovrapposizione di Fourier di onde piane con oscillazioni in direzioni perpendicolari al vettore d'onda \mathbf{k}) con velocità di propagazione data da

$$v_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Si osservi che la velocità di propagazione, nei due casi, non dipende da $|\mathbf{k}|$ per cui il mezzo è detto *non dispersivo*²⁰. È facile verificare per computo diretto che le onde di forma (112) verificano l'identità (per ogni t e \mathbf{x})

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) = \Delta \mathbf{u}(t, \mathbf{x}),$$

mentre le onde (113) verificano

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = 0.$$

Ricordando che tali funzioni \mathbf{u} sono soluzioni dell'equazione del moto (99), concludiamo che le soluzioni che descrivono onde longitudinali (112) sono equivalentemente soluzioni del sistema

$$\Delta \mathbf{u} - \frac{1}{v_l^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0, \quad (114)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \Delta \mathbf{u}, \quad (115)$$

mentre le soluzioni che descrivono onde trasversali (113) sono equivalentemente soluzioni del sistema

$$\Delta \mathbf{u} - \frac{1}{v_t^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0, \quad (116)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (117)$$

dove riconosciamo in (114) e (116) la famosa *equazione delle onde di D'Alembert*.

Esercizi 6.1.

6.1.1. In riferimento all'espressione (106) (oppure (107)), determinare il legame tra le funzioni \mathbf{u}_{\pm} (ovvero $\mathbf{u}_{\alpha\pm}$) e le condizioni iniziali $\mathbf{u}(0, \mathbf{x})$ e $\partial \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) / \partial t|_{t=0}$ assegnate per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. In particolare mostrare che effettivamente valgono le (110) (ovvero (111)) se le condizioni iniziali sono funzioni reali.

²⁰Tecnicamente, la velocità di gruppo coincide con quella di fase.