

Guida all' Astrofisica Galattica

Lorenzo Zaninetti
zaninetti@ph.unito.it
Dipartimento di Fisica Generale
Edizione I
5 settembre 2018

Introduzione

I primi capitoli di queste dispense (1–5) vogliono essere un ponte fra le dispense dello studente [Marchetti 1990] ed i testi avanzati. Comunque alcune tematiche non sono affatto banali e del software molto specialistico è stato sviluppato per tracciare i diagrammi HR , oppure relazioni B-V contro T , correzione bolometrica , etc. Queste dispense vanno consultate insieme alla HOME-PAGE dell' autore a www.ph.unito.it/~zaninett seguendo il percorso *ASTRONOMIA VIRTUALE*. Dal capitolo 6 in poi viene riportato materiale trovato in rete.

Indice

Introduzione	iii
1 Le scale di Base	1
1.1 Grandezze astronomiche	1
1.1.1 Valutazione della massa del Sole	5
1.1.2 Valutazione del raggio solare	5
1.2 Distanze stellari	6
2 Processi Radiativi	9
2.1 Il flusso della radiazione	10
2.1.1 Flusso da una sorgente isotropa	10
2.2 Intensità specifica	11
2.2.1 Flusso netto e momento del flusso	11
2.2.2 Densità di energia radiante	12
2.2.3 Pressione di radiazione in un campo isotropo	14
2.2.4 Costanza Intensità	14
2.2.5 Sfera uniforme	15
2.3 Trasferimento della radiazione	16
2.3.1 Emissione	16
2.3.2 Assorbimento	17
2.3.3 Equazione del trasferimento radiativo	18
2.3.4 Solo Emissione	19
2.3.5 Solo Assorbimento	19
2.3.6 Profondità ottica e funzione sorgente	20
2.3.7 Libero cammino medio	21
2.3.8 La forza della radiazione	22
2.4 La radiazione termica	23
2.4.1 Radiazione di corpo nero	23
2.4.2 Legge di Kirchhoff per l'emissione termica	24

2.5	Lo spettro di Planck	25
2.5.1	Proprietà della legge di Planck	27
2.5.2	La legge di Rayleigh-Jeans	28
2.5.3	La legge di Wien	29
2.5.4	Monotonicità con la temperatura	29
2.5.5	La legge dello spostamento di Wien	29
2.5.6	La relazione fra le costanti fondamentali	30
2.6	Temperature caratteristiche	31
2.6.1	Temperatura di brillantezza	31
2.6.2	Temperatura di colore	32
2.6.3	Temperatura effettiva	32
3	Astronomia Stellare	33
3.1	La Radiazione Stellare	33
3.2	Sistemi di magnitudine	35
3.3	Temperatura effettiva e di colore	39
3.4	La magnitudine assoluta	40
3.5	La magnitudine bolometrica	41
3.6	Luminosità, raggi e masse stellari	42
3.7	B-V contro T, teorico	44
3.7.1	B-V analitico	44
3.7.2	B-V numerico	45
3.8	Correzione bolometrica numerica	46
3.9	Correzione bolometrica analitica	46
3.10	I primi 100 pc	47
3.11	Diagramma HR	47
3.12	Diagramma HR in ammassi	49
3.13	Diagramma a due colori	50
3.14	Relazione massa-luminosità	53
4	Spettroscopia Stellare	57
4.1	L' Atomo di idrogeno	57
4.2	Classificazione degli spettri stellari	64
4.2.1	Il sistema MK	68
5	Il sole , trattamento semplice	73
5.1	Il Sole - quadro generale	73
5.2	Struttura del Sole	75

6	Il sole , trattamento dettagliato	77
6.1	Equazione del moto fluida	77
6.2	Stima delle proprietà solari	79
6.2.1	Un esempio : il collasso libero	80
6.2.2	Dettagli sull' equilibrio idrostatico	81
6.3	Considerazioni sull'energia	82
6.4	Qualche limite analitico	83
6.5	Trasporto dell' energia	84
7	Evoluzione Stellare: Le equazioni Lagrangiane	87
7.1	Termodinamica di una miscela	89
7.1.1	Specificando la composizione	89
7.2	Quantità termodinamiche	92
7.3	Le equazioni in forma Lagrangiana	93
8	La convezione	97
8.1	Criteri per la apparizione della convezione	97
8.2	Seconda analisi della instabilità convettiva	99
8.3	Efficienza nel trasporto di calore	101
8.4	Turbolenza	103
A	Costanti	107
B	Calibrazioni	111

Capitolo 1

Le scale di Base

In questo capitolo si forniscono le nozioni basilari che sono necessarie per poter procedere nello studio dei corpi celesti, cercando di non perdere del tutto di vista l'evoluzione storica dell'astronomia. In un primo momento si definiscono le grandezze principalmente usate in questa scienza, poi si volge lo sguardo al sistema solare.

1.1 Grandezze astronomiche

Fin dai tempi antichi, lo studio e la valutazione del moto degli astri, ha suscitato negli uomini un vivo interesse. Le prime misure quantitative giungono dai tempi dell'antica Grecia e portano la firma di astronomi famosi quali Eratostene, Anassagora e Aristarco di Samo. Fu proprio Aristarco [Heath 1991] a suggerire un metodo ingegnoso per misurare la distanza fra Terra e Sole: la grandezza che oggi è chiamata *Unità di grandezza astronomica* ed è indicata con il simbolo UA, vedi figura 1.1

Poichè la dimensione angolare della Luna e del Sole non cambiano apprezzabilmente con il tempo se ne deduce che essi mantengono distanze costanti dalla Terra (le orbite sono circolari). Dalla figura 1.2 è chiaro che

$$\frac{D_{\odot}}{D_{\ominus}} = \cos(\theta) \quad , \quad (1.1)$$

dove 2θ è l'angolo sotteso alla terra fra la posizione della luna al primo quarto e quella al terzo quarto, dove D_{\odot} è la distanza terra-luna e D_{\ominus} la distanza terra-sole.

Sfortunatamente l'angolo θ risulta essere troppo vicino a 90°

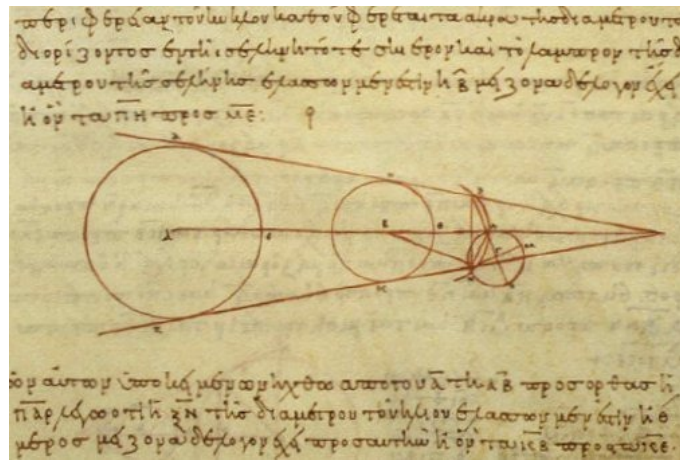


Figura 1.1: Calcoli di Aristarco sulle dimensioni relative di Terra , Sole e Luna

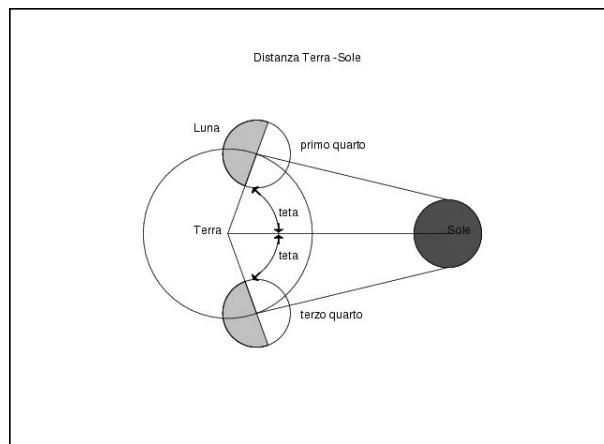


Figura 1.2: Contesto distanza Terra-Sole

per essere misurato con metodi elementari. Misure moderne che adoperano le riflessioni radar trovano $\frac{D_{\odot}}{D_{\oplus}} = 2.6 \cdot 10^{-3}$. Cosicché il sole è 390 più distante della luna.

Quindi per ottenere UA è sufficiente conoscere la distanza Terra-Luna . Essa si ottiene facilmente in conseguenza a due considerazioni:

1. dalla Terra, Luna e Sole appaiono circa uguali
2. durante l'eclissi di Luna , il cono d'ombra proiettato dalla Terra contiene la Luna due volte

Si ha

$$D_{\odot} \approx 70R_t \quad , \quad (1.2)$$

Dove R_t è il raggio terrestre . Il raggio terrestre si può calcolare con il metodo di Eratostene: egli notò che quando il sole ad Assuan era allo zenith (che è sullo stesso meridiano, ma più a nord) era inclinato di un angolo δ . Nota la distanza fra le due città si ha il raggio della Terra ;

$$R_t = \frac{D_{\odot}}{\delta} \quad , \quad (1.3)$$

con δ espresso in radianti.

I risultati sono :

$$\begin{aligned} R_t &= 6300 \text{ Km} \\ D_{\odot} &= 400000 \text{ Km} \\ UA &= 1.510^8 \text{ Km} \end{aligned}$$

L'UA viene oggi calcolata con un metodo differente: si considera la Terra e un asteroide in opposizione, vedi figura 1.3 Sia a l'unità astronomica, a_p la distanza dell'asteroide dal Sole e x la distanza tra Terra e l' asteroide. Per la terza legge di Keplero che dice che, per un corpo in orbita intorno al sole, la distanza al cubo è proporzionale al periodo al quadrato, si ha (misurando il periodo in anni)

$$\frac{a_p}{a} = P^{2/3} \quad (1.4)$$

dove P è il periodo dell' asteroide, da cui

$$a_p = a + x = aP^{2/3} \quad (1.5)$$

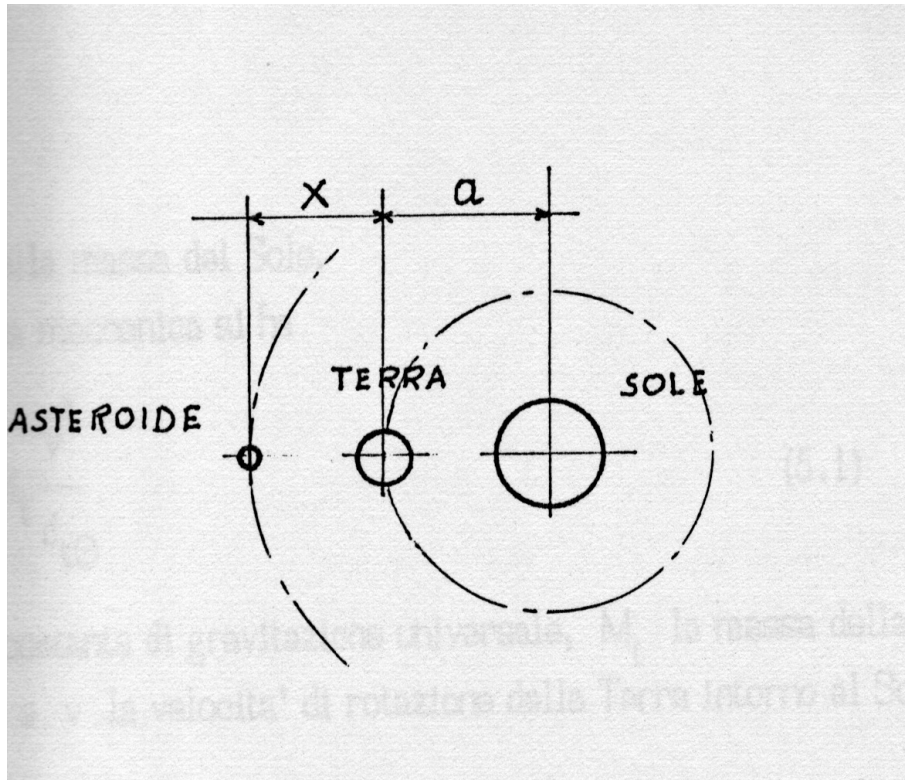


Figura 1.3: Calcolo UA

ovvero

$$a = \frac{x}{P^{2/3} - 1} \quad (1.6)$$

Occorre perciò misurare soltanto la distanza x tra Terra ed asteroide : per fare ciò si inviano onde radar verso l' asteroide che vengono riflesse sulla Terra e dalla misura del tempo t che intercorre tra l'emissione e la ricezione si valuta

$$x = c \frac{t}{2} \quad (1.7)$$

da cui si ottiene UA.

1.1.1 Valutazione della massa del Sole

Dalle leggi della meccanica si ha

$$G \frac{M_{\oplus} M_{\odot}}{d_{\oplus\odot}^2} = M_{\oplus} \frac{v^2}{d_{\oplus\odot}} \quad , \quad (1.8)$$

dove G è la costante di gravitazione universale , M_{\oplus} la massa della terra , M_{\odot} quella del sole e v la velocità di rotazione della terra intorno al Sole, inoltre

$$v = \frac{2\pi}{T} d_{\oplus\odot} \quad , \quad (1.9)$$

e quindi

$$M_{\odot} = \frac{4\pi^2}{T^2} d_{\oplus\odot} \frac{1}{G} \quad . \quad (1.10)$$

Svolgendo i calcoli si ottiene

$$M_{\odot} = 210^{33} g \quad . \quad (1.11)$$

1.1.2 Valutazione del raggio solare

Noto il raggio angolare α [in radianti] e la distanza $d_{\oplus\odot}$ si ha essendo α molto piccolo

$$R_{\odot} = d_{\oplus\odot} \alpha \quad , \quad (1.12)$$

da cui

$$R_{\odot} = 710^{10} cm \quad . \quad (1.13)$$

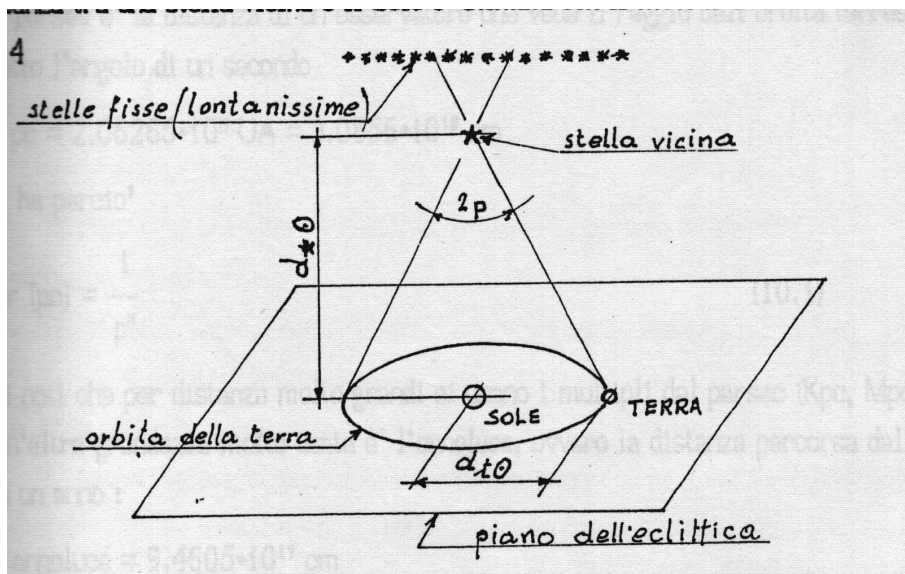


Figura 1.4: Sistema Sole-Terra e stella

1.2 Distanze stellari

Le stelle distano dal sole molto più di quanto il sole dista dalla Terra e perciò è necessario definire unità di distanza molto più grandi dell' UA. Le stelle più vicine al Sistema Solare, nell' arco dell'anno , appaiono dalla Terra in rotazione su orbite circolari o ellittiche o addirittura in oscillazione lungo una retta; questo moto apparente è dovuto alla rotazione della Terra intorno al Sole su un piano detto piano dell' eclittica : le stelle perpendicolari a tale piano descrivono cerchi, quelle inclinate descrivono ellissi e quelle complanari delle rette. Chiaramente tali moti sono evidenti tenendo come riferimento stelle molto lontane che possono essere considerate fisse. La distanza tra una stella vicina e il Sole è stimata con il metodo indicato nella figura 1.4 e l'angolo $2p$ è quello con cui un osservatore posto sulla stella vede l' orbita terrestre , che coincide con l' angolo sotto cui l' osservatore terrestre vede il moto apparente della stella . Il moto della stella è stimato facendo molte fotografie durante l' anno. Trigonometricamente la distanza sarà

$$d_{\oplus\odot} = d_{*\odot} \operatorname{tg} p \quad , \quad (1.14)$$

da cui

$$r = \frac{d_{\oplus\odot}}{\operatorname{tg} p} \quad . \quad (1.15)$$

Se p è espresso in radianti, essendo $\operatorname{tg} p \approx p$ si ha

$$r[UA] = \frac{1}{p} = \frac{2.06265 \cdot 10^5}{p''} \quad . \quad (1.16)$$

Ricordiamo che il *parsec* fu adottato nel 1922 dall' Unione Internazionale Astronomica (IAU) per specificare le distanze stellari in funzione della distanza media Terra-Sole . Con i satellite interplanetari e misurazione dei tempi di riflessione conosciamo le scale del sistema solare con una precisione di una parte per milione (ppm) ; il *parsec* viene tenuto per motivi storici[Sparke et al. 2000].

Capitolo 2

Processi Radiativi

Fù scoperto abbastanza presto (Newton 1672) che la radiazione elettromagnetica può essere decomposta in uno spettro di componenti fondamentali da un prisma, un reticolo oppure qualche altra apparecchiatura. Lo spettro corrisponde alle onde di varie lunghezza d'onda, legate dalla relazione $\lambda\nu=c$ dove ν è la frequenza dell'onda, λ la sua lunghezza d'onda e $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$ è la velocità della luce nel vuoto (per onde che non viaggiano nel vuoto c è rimpiazzata dalla appropriata velocità nel mezzo). Possiamo dividere lo spettro in varie regioni come indicato nella Figura 2.1; per convenienza abbiamo anche inserito l'energia $E = h\nu$ e la temperatura $t=E/k$ associata con ogni lunghezza d'onda.

Ricordiamo che $h = 6.625 \cdot 10^{-27} \text{ erg s}$ è la costante di Planck e $k = 1.38 \cdot 10^{-16} \text{ erg/K}$ è la costante di Boltzmann. Questa carta può

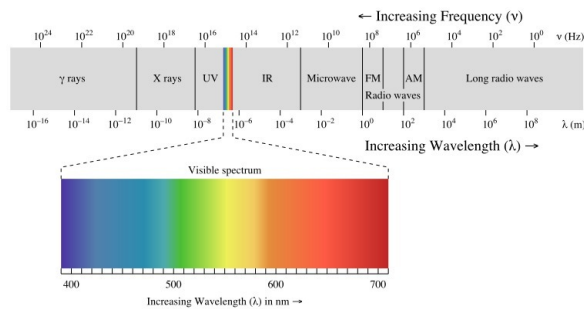


Figura 2.1: Lo spettro elettromagnetico

rivelarsi utile nel convertire delle unità o nell' avere una visione rapida del valore delle quantità in una certa parte dello spettro. Le frontiere fra le varie regioni sono in qualche modo arbitrarie ma conformi all' uso che ne fanno gli astrofisici.

2.1 Il flusso della radiazione

Quando la scala del sistema eccede la lunghezza d' onda della radiazione possiamo dire che la radiazione viaggia in linea retta (i raggi) nello spazio libero o in un mezzo omogeneo: questo basta per erigere una teoria . Uno dei concetti primitivi è quello di *flusso di energia* : considerate un elemento di area dA esposto alla radiazione per un tempo dt . La quantità di energia che passa attraverso ad un elemento sarà proporzionale a $da dt$ e lo scriviamo come $F dA dt$. Il flusso di energia è normalmente misurato in $ergs^{-1}cm^{-2}$. Notate che F può dipendere dall' orientamento dell ' elemento.

2.1.1 Flusso da una sorgente isotropa

Una sorgente di radiazione è chiamata isotropa se emette energia in modo uguale in tutte le direzioni; un esempio in simmetria sferica sarebbe una stella. Se mettiamo un a superficie sferica S_1 ed S ad un raggio r_1 e r rispettivamente rispetto alla sorgente, sappiamo dalla conservazione dell' energia che l' energia totale passante attraverso S_1 deve essere la stessa che passa attraverso S . Assumiamo ovviamente che che non ci siano guadagni o perdite passando da S a S_1 . Cosicchè

$$F(r_1)4\pi r_1^2 = F(r)4\pi r^2 \quad , \quad (2.1)$$

oppure

$$F(r) = \frac{F(r_1)r_1^2}{r^2} \quad , \quad (2.2)$$

se supponiamo la sfera S_1 essere fissa:

$$F = \frac{costante}{r^2} \quad . \quad (2.3)$$

Questo è semplicemente il concetto di conservazione dell' energia.

2.2 Intensità specifica

Il flusso è una misura dell' energia portata da tutti i raggi passanti attraverso un' area data. Una descrizione più dettagliata è possibile descrivendo la radiazione come l' energia portata dai raggi singoli. La prima cosa da realizzare però è che un raggio singolo non porta energia , cosicchè dobbiamo considerare l' energia di un insieme di raggi, che differisce in modo infinitesimale da un raggio dato. Possiamo usare la seguente definizione: costruite un' area dA normale alla alla direzione del raggio dato e considerate tutti i raggi che passano attraverso dA la cui direzione è in un angolo solido $d\Omega$ del raggio dato. L' energia che attraversa dA nel tempo dt e nell' intervallo di frequenza $d\nu$ è poi definita dalla relazione:

$$dE = I_\nu dA dt d\Omega d\nu \quad , \quad (2.4)$$

dove I_ν è l' intensità specifica oppure brillantezza. L' intensità specifica ha dimensione :

$$\begin{aligned} I_\nu(\nu, \Omega) &= \text{energia}(\text{tempo})^{-1}(\text{area})^{-1}(\text{angolo solido})^{-1}(\text{frequenza})^{-1} \\ &= \text{ergs } s^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ ster}^{-1} \text{ Hz}^{-1} \quad . \end{aligned} \quad (2.5)$$

2.2.1 Flusso netto e momento del flusso

Supponiamo adesso che abbiamo un campo di radiazione (raggi in tutte le direzioni) e ipotizziamo la costruzione di un piccolo elemento di area dA in qualche direzione arbitraria \mathbf{n} , vedi figura 2.2 Allora il differenziale del flusso dall' angolo solido $d\Omega$ è ridotto dall' area effettiva $\cos(\theta)dA$

$$dF_\nu(\text{ergs}^{-1}\text{cm}^{-2}\text{Hz}^{-1}) = I_\nu \cos(\theta)d\Omega \quad (2.6)$$

Il flusso netto nella direzione \mathbf{n} , $F_\nu\mathbf{n}$ è ottenuto integrando dF su tutto l' angolo solido.

$$F_\nu = \int I_\nu \cos(\theta) d\Omega \quad . \quad (2.7)$$

Notate che se I_ν è un campo di radiazione isotropa (ovverosia non dipende dall' angolo) allora il flusso netto è zero poichè $\int \cos(\theta)d\Omega=0$. Vale a dire che c' è tanta energia nella direzione \mathbf{n} come nella direzione $-\mathbf{n}$. Per ottenere il flusso del momento nella direzione normale

where I_ν is the *specific intensity* or *brightness*. The specific intensity has

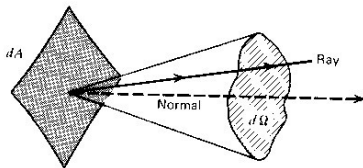


Figure 1.2 Geometry for normally incident rays.

Figura 2.2: Geometria dei raggi incidente obliqui

a dA (momento per tempo unitario per unità di area = pressione) ricordiamoci che il momento del fotone è E/c . Allora il momento del flusso lungo un raggio ad angolo θ è dF_ν/c . Per ottenere la componente del flusso normale a dA , moltiplichiamo per un'altro fattore $\cos(\theta)$. Integrando otteniamo :

$$p_\nu(\text{dynes cm}^{-2}\text{Hz}^{-1}) = \frac{1}{c} \int I_\nu \cos^2(\theta) d\Omega \quad . \quad (2.8)$$

Notate che F_ν e p_ν sono momenti (ovverosia moltiplicazione di potenze di $\cos(\theta)$ ed integrazione su $d\Omega$) dell'intensità I_ν . Ovviamente possiamo integrare sulla frequenza per ottenere il flusso totale più allegati

$$F(\text{ergs s}^{-1}\text{ cm}^{-2}) = \int F_\nu d\nu \quad , \quad (2.9)$$

$$p(\text{dynes cm}^{-2}) = \int p_\nu d\nu \quad (2.10)$$

$$I(\text{ergs s}^{-1}\text{ cm}^{-2}\text{ ster}^{-1}) = \int I_\nu d\nu \quad (2.11)$$

2.2.2 Densità di energia radiante

La densità specifica di energia u_ν è definita come l'energia per unità di volume per unità di frequenza. Per determinarla è conveniente prima considerare la densità di energia per unità di angolo solido $u_\nu(\Omega)$

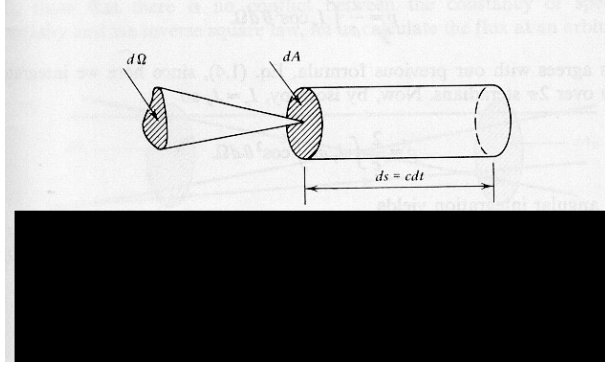


Figura 2.3: Energia elettromagnetica nel cilindro

attraverso $dE = u_\nu(\Omega)dV d\Omega d\nu$ dove dV è un elemento infinitesimo di volume. Considerate un cilindro su un raggio di lunghezza ct , vedi figura 2.3; poichè il volume del cilindro vale $dAcdt$

$$dE = u_\nu(\Omega)dAcdtd\Omega d\nu \quad . \quad (2.12)$$

La radiazione viaggia a velocità c , cosicchè nel tempo dt tutta la radiazione nel cilindro sarà passata in esso:

$$dE = I_\nu dA d\Omega dt d\nu \quad . \quad (2.13)$$

Eguagliando le due espressioni precedenti otteniamo

$$u_\nu(\Omega) = \frac{I_\nu}{c} \quad . \quad (2.14)$$

Integrando su tutto l'angolo solido otteniamo

$$u_\nu = \int u_\nu(\Omega)d\Omega = \frac{1}{c} \int I_\nu d\Omega \quad , \quad (2.15)$$

oppure

$$\frac{4\pi}{c} J_\nu \quad , \quad (2.16)$$

dove abbiamo definito l' *intensità media* J_ν

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\Omega \quad . \quad (2.17)$$

La densità totale di radiazione (ergcm^{-3}) è ottenuta semplicemente integrando u_ν su tutte le frequenze

$$u = \int u_\nu d\nu = \frac{4\pi}{c} \int J_\nu d\nu \quad (2.18)$$

2.2.3 Pressione di radiazione in un campo isotropo

Considerate un ambiente riflettente contenente un campo di radiazione isotropo. Ogni fotone trasferisce due volte la componente normale del momento ad ogni riflessione. Cosicché abbiamo la relazione

$$p = \frac{2}{c} \int I_\nu \cos^2 \theta d\Omega \quad . \quad (2.19)$$

Questo è in accordo con la formula 2.11 poichè qui integriamo solamente su 2π steradiani. Adesso , per isotropia

$$p = \frac{2}{c} \int J_\nu d\nu \int \cos^2 \theta d\Omega \quad . \quad (2.20)$$

L' integrazione angolare dà :

$$p = \frac{1}{3} u \quad . \quad (2.21)$$

La pressione di radiazione di un campo di radiazione isotropa vale un terzo della densità di energia. Questo risultato sarà utile nella discussione della termodinamica del corpo nero.

2.2.4 Costanza Intensità

Considerate ogni raggio L e due punti lungo il raggio. Costruite le aree dA_1 e dA_2 normali al raggio in questi punti. Adesso facciamo uso del fatto che l' energia si conserva. Considerate l' energia portata dall' insieme di raggi passanti attraverso sia dA_1 che dA_2 (vedete figura 2.4). Questo può essere espresso in due modi

$$dE1 = I_{\nu_1} dA_1 dt_1 d\Omega_1 d\nu_1 = dE2 = I_{\nu_2} dA_2 dt_2 d\Omega_2 d\nu_2 \quad . \quad (2.22)$$

Qui $d\Omega_1$ è l' angolo solido sotteso da dA_2 a dA_1 e così via. Poichè $d\Omega_1 = dA_2/R^2$, $d\Omega_2 = dA_1/R^2$ e $d\nu_1 = d\nu_2$ abbiamo

$$I_{\nu_1} = I_{\nu_2} \quad . \quad (2.23)$$

Cosicché l' intensità è costante lungo un raggio:

$$I_\nu = \text{costante} \quad . \quad (2.24)$$

Un altro modo di affermare il risultato precedente è attraverso la relazione differenziale

$$\frac{dI_\nu}{ds} = 0 \quad , \quad (2.25)$$

dove ds è l' elemento differenziale di lunghezza lungo il raggio.

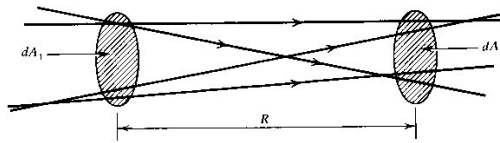


Figure 1.5 Constancy of intensity along rays.

Figura 2.4: Costanza dell' intensità lungo i raggi

Elements of Radiative Transfer

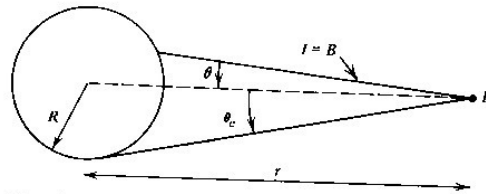


Figura 2.5: Flusso da una sfera uniformemente radiante

2.2.5 Sfera uniforme

Per dimostrare che non c'è conflitto fra la costanza dell' intensità specifica e la legge dell'inverso del quadrato , calcoliamo il flusso ad una distanza arbitraria da una sfera di brillantezza uniforme B (vale a dire che tutti i raggi lascianti la sfera hanno la stessa intensità . Questa sfera è chiaramente una sorgente isotropa. Nel punto P , l'intensità specifica è B se il raggio intercetta la sfera a zero altrimenti (vedi figura 2.5). Allora

$$F = \int I \cos(\theta) d\Omega = B \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\theta_c} \sin \theta \cos \theta d\theta \quad , \quad (2.26)$$

dove $\theta_c = \sin^{-1}(R/r)$ è l' angolo tale che un raggio da P è tangente alla sfera. Ne segue che

$$F = \pi B(1 - \cos^2 \theta_c) = \pi B \sin^2 \theta_c \quad , \quad (2.27)$$

oppure

$$F = \pi B \left(\frac{R}{r}\right)^2 \quad . \quad (2.28)$$

Cosicchè l'intensità specifica del raggio è costante , ma l'angolo solido sotteso da un dato oggetto decresce in maniera tale che la legge dell' inverso del quadrato è soddisfatta. Un risultato utile si inserendo $r=R$:

$$F = \pi B \quad . \quad (2.29)$$

Cosicchè il flusso su una superficie di brillantezza uniforme B è semplicemente πB .

2.3 Trasferimento della radiazione

Se un raggio passa attraverso la materia , l' energia può essere addizionata o sottratta da esso dall' emissione o dall' assorbimento , e l' intensità specifica non rimarrà costante. La diffusione di fotoni nel oppure fuori del pennello possono anche modificare l' intensità.

2.3.1 Emissione

Il coefficiente di emissione spontanea j è definito come l' energia emessa per unità di tempo per unità di angolo solido e per unità di volume :

$$dE = j dV d\Omega dt \quad . \quad (2.30)$$

Un coefficiente di emissione monocromatica può essere definito in modo analogo

$$dE = j_\nu dV d\Omega dt d\nu \quad . \quad (2.31)$$

dove j_ν è espresso in $erg\ cm^{-3}\ s^{-1}\ ster^{-1}\ hz^{-1}$. In generale il coefficiente di emissione dipende dalla direzione nella quale l'emissione avviene . Per un emettitore isotropo o per una distribuzione di emittori orientati random possiamo scrivere

$$j_\nu = \frac{1}{4\pi} P_\nu \quad , \quad (2.32)$$

dove p_ν è la potenza irradiata per unità di volume per unità di frequenza. Qualche volta l'emissione spontanea è definita dalla emissività ϵ_ν , definita come l' energia emessa spontaneamente per unità di frequenza per unità di tempo per unità di massa , con unità di $erg\ gm^{-1}\ s^{-1}\ hz^{-1}$. Se l'emissione è isotropa allora

$$dE = \epsilon_\nu \rho dV dt d\nu \frac{d\Omega}{4\pi} \quad , \quad (2.33)$$

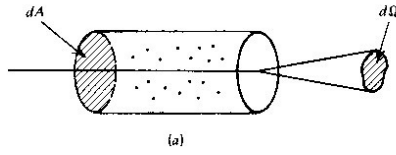


Figura 2.6: Raggi passanti attraverso un mezzo di assorbitori

dove ρ è la densità di massa del mezzo che emette e l'ultimo fattore tiene conto della frazione di energia irradiata in $d\Omega$. Comparando le due espressioni per dE , abbiamo una relazione fra ϵ_ν e j_ν :

$$j_\nu = \frac{\epsilon_\nu \rho}{4\pi} \quad , \quad (2.34)$$

che vale per un'emissione isotropa. Andando ad una distanza ds , un pennello di sezione dA passa attraverso un volume $dV = dA ds$. Cosicché l'intensità addizionata al pennello dalla emissione spontanea vale

$$dI_\nu = j_\nu ds \quad . \quad (2.35)$$

2.3.2 Assorbimento

Definiamo il coefficiente di assorbimento, α_ν , dalla seguente equazione, che rappresenta le perdite di intensità in un pennello mentre attraversa una distanza ds (per convezione α_ν è positivo per energia sottratta al pennello):

$$dI_\nu = -\alpha_\nu I_\nu ds \quad . \quad (2.36)$$

Questa legge fenomenologica può essere compresa in termini di modelli microscopici in cui le particelle con densità n (numero per unità di volume) ognuno presenta un'area effettivamente assorbente, o *sezione d'urto*, di magnitudine $\sigma_\nu (cm^2)$. Questi assorbitori sono distribuiti in maniera random. Consideriamo adesso l'effetto di questi assorbitori di radiazione attraverso un'area dA ed un angolo solido $d\Omega$ (vedi Fig.2.6). Il numero di assorbitori nell'elemento eguaglia $ndA ds$. L'area totale assorbente presentata dagli assorbitori eguaglia $n\sigma_\nu dA ds$. L'energia assorbita dal pennello vale

$$dI_\nu dA dt d\Omega d\nu = I_\nu (n\sigma_\nu dA ds) dt d\Omega d\nu \quad , \quad (2.37)$$

cosicchè

$$dI_\nu = -n\sigma_\nu I_\nu ds \quad , \quad (2.38)$$

che è precisamente la già citata legge fenomenologica 2.36, dove

$$\alpha_\nu = -n\sigma_\nu \quad , \quad (2.39)$$

Spesso α_ν è scritta come

$$\alpha_\nu = -\rho k_\nu \quad , \quad (2.40)$$

dove ρ è la densità di massa e $k_\nu (cm^2 g^{-1})$ è chiamato coefficiente di assorbimento di massa; k_ν è chiamato qualche volta coefficiente di opacità. Ci sono alcune condizioni di validità per questa teoria microscopica : le più importanti sono che

- La scala lineare della sezione d' urto deve essere piccola se paragonata alla distanza media fra le particelle d ; cosicchè $\alpha_\nu^{1/2} \ll d \approx n^{-1/3}$, dalla quale segue $\alpha_\nu d \ll 1$
- Gli assorbitori sono indipendenti ed orientati in maniera random

Fortunatamente queste condizioni sono quasi sempre soddisfatte in astrofisica. Più avanti nel paragrafo condideremo che l' assorbimento include sia il vero assorbimento sia l' emissione stimolata , perchè ambedue sono proporzionali all' intensità del pennello che arriva (diversamente dall' emissione spontanea). Anche se questa condizione può sembrare artificiale , sarà trovata conveniente e permetterà di fare a meno di inserire la meccanica quantistica nella nostra formulazione classica.

Come dimostreremo più avanti , consideriamo sotto la voce assorbimento sia il vero assorbimento sia l' emissione stimolata , perchè sono ambedue proporzionali all' intensità del pennello che avanza (a differenza dell' emissione spontanea) . Cosicchè l' assorbimento netto può essere positivo o negativo , a seconda che domini la vera emissione oppure quella stimolata.

2.3.3 Equazione del trasferimento radiativo

Possiamo adesso incorporare gli effetti dell' emissione e dell' assorbimento in una equazione singola dando la variazione dell' intensità specifica lungo un raggio. Dall' espressione per l' emissione e l' assorbimento abbiamo

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu + j_\nu \quad . \quad (2.41)$$

L'equazione del trasferimento rappresenta un formalismo utile con il quale ricavare l'intensità in un mezzo che emette ed in uno che assorbe. Essa incorpora gli effetti macroscopici della radiazione in una sola equazione, collegandoli ai due coefficienti α_ν e j_ν . Una volta che α_ν e j_ν sono conosciuti è relativamente semplice risolvere l'equazione del trasferimento per una intensità specifica. Quando è presente lo scattering, la soluzione dell'equazione del trasferimento radiativo è più difficile, questo perché l'emissione in $d\Omega$ dipende da I_ν sull'angolo solido $d\Omega'$, integrato sopra l'ultimo (diffusione da $d\Omega'$ su $d\Omega$). L'equazione del trasferimento diventa poi una equazione integrodifferenziale, che in generale deve essere risolta tramite tecniche numeriche.

Diamo adesso la soluzione in due casi limite

2.3.4 Solo Emissione

Se $\alpha_\nu = 0$ l'equazione diventa

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu \quad , \quad (2.42)$$

che ha soluzione

$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0) + \int_{s_0}^s j_\nu(s') ds' \quad , \quad (2.43)$$

L'aumento dell'intensità è quindi uguale al coefficiente di emissione integrato lungo la linea di vista.

2.3.5 Solo Assorbimento

Se $j_\nu = 0$ l'equazione diventa

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu \quad , \quad (2.44)$$

che ha soluzione

$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0) e^{-\int_{s_0}^s \alpha_\nu(s') ds'} \quad . \quad (2.45)$$

L'intensità diminuisce lungo il raggio seguendo un esponenziale del coefficiente di assorbimento integrato lungo la linea di vista.

2.3.6 Profondità ottica e funzione sorgente

L'equazione del trasferimento assume una forma semplice se, invece di s , usiamo un'altra variabile τ_p chiamata profondità ottica e definita da:

$$d\tau_p = \alpha_\nu ds \quad , \quad (2.46)$$

oppure

$$\tau_p(s) = \int_{s_0}^s \alpha_\nu(s') ds' \quad . \quad (2.47)$$

La profondità ottica testè definita è misurata lungo un cammino del raggio che avanza; occasionalmente τ_p è misurato nel senso inverso al cammino del raggio ed un segno meno compare nella formula 2.47. In un mezzo a piani paralleli, una lunghezza ottica standard è qualche volta usata per misurare distanze normali alla superficie, cosicchè ds è rimpiazzata da dz e $\tau_p = \tau_p(z)$. Quando sarà il caso distingueremo fra queste due. Il punto s_0 è arbitrario e setta il punto 0 per la profondità ottica. Si dice che un mezzo è *otticamente spesso* oppure *opaco* quando τ_p integrato lungo un tipico cammino attraverso il mezzo, soddisfa $\tau_p > 1$. Quando $\tau_p < 1$ il mezzo è detto essere *otticamente sottile* oppure *trasparente*. Essenzialmente un mezzo otticamente sottile è quello in cui un tipico fotone di frequenza ν può attraversare il mezzo senza essere assorbito, al contrario un mezzo otticamente spesso è quello in cui un fotone medio di frequenza ν non riesce ad attraversare il mezzo senza essere assorbito.

L'equazione del trasferimento può adesso essere scritta dividendo per α_ν

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu \quad , \quad (2.48)$$

dove la *funzione sorgente* S_ν è definita come il rapporto del coefficiente di emissione sul coefficiente di assorbimento:

$$S_\nu \equiv \frac{j_\nu}{\alpha_\nu} \quad . \quad (2.49)$$

La funzione sorgente S_ν è spesso una quantità fisica più semplice del coefficiente di emissione. In più il cammino ottico rivela più chiaramente gli intervalli lungo un raggio per quel che concerne la radiazione. Per queste ragioni si usano normalmente τ_ν e S_ν invece di j_ν e α_ν . Adesso possiamo risolvere formalmente l'equazione del transfer radiativo, considerando tutte le quantità come funzione del cammino ottico τ_ν ,

invece di s. Moltiplicando l'equazione per il fattore integrante e^{τ_ν} e definendo le quantità $\mathcal{F} \equiv I_\nu e^{\tau_\nu}$, $\mathcal{S} \equiv S_\nu e^{\tau_\nu}$ otteniamo

$$\frac{d\mathcal{F}}{d\tau_\nu} = \mathcal{S} \quad , \quad (2.50)$$

con la soluzione

$$\mathcal{F}(\tau_\nu) = \mathcal{F}(0) + \int_0^{\tau_\nu} \mathcal{S}(\tau_\nu t) d\tau_\nu t \quad . \quad (2.51)$$

Riscrivendo la soluzione in termini di I_ν e S_ν abbiamo la soluzione formale dell'equazione del trasferimento:

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} e^{-(\tau_\nu - \tau_\nu t)} S(\tau_\nu t) d\tau_\nu t \quad . \quad (2.52)$$

Poichè τ_ν è il fattore adimensionale dopo il quale assorbimento diminuisce di un fattore e , l'equazione 2.51 è interpretata come la somma di due termini : l'intensità iniziale diminuita dall'assorbimento più la funzione sorgente diminuita dall'assorbimento. Come esempio consideriamo una funzione S_ν costante. Allora l'equazione 2.51 ha soluzione

$$\begin{aligned} I_\nu(\tau_\nu) &= I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + S_\nu(1 - e^{-\tau_\nu}) \\ &= S_\nu + e^{-\tau_\nu}(I_\nu(0) - S_\nu) \quad . \end{aligned} \quad (2.53)$$

Quando $t \rightarrow \infty$, l'equazione 2.53 dimostra che $I_\nu \rightarrow S_\nu$. Ricordiamo al lettore che quando lo scattering è presente , S_ν contiene un contributo da I_ν , cosicchè non è possibile specificare S_ν a priori. Concludiamo questa sezione con un risultato da usare più tardi, che provvede una spiegazione semplice della funzione sorgente e della equazione del trasferimento radiativo. Dall'equazione del trasferimento vediamo che se $I_\nu > S_\nu$ allora $\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} < 0$ ed I_ν tende a decrescere lungo il raggio. Se invece $I_\nu < S_\nu$, allora I_ν tende a crescere lungo il raggio. Cosicchè la funzione sorgente è la quantità che l'intensità specifica cerca di raggiungere , e che raggiunge se il cammino ottico è sufficiente. Da questo punto di vista l'equazione del trasferimento radiativo descrive un processo di rilassamento.

2.3.7 Libero cammino medio

Un concetto utile, che descrive l'assorbimento in un modo equivalente, è quello del *libero cammino medio* della radiazione. Questo è definito

come la distanza media che un fotone può percorrere attraverso un mezzo assorbente senza essere assorbito. Esso può essere facilmente collegato con il coefficiente di assorbimento di un materiale omogeneo. Dalla equazione esponenziale (2.45), la probabilità che un fotone viaggi almeno una profondità ottica τ_ν è semplicemente $e^{-\tau_\nu}$. La profondità ottica media attraversata è così uguale all'unità:

$$\langle \tau_\nu \rangle \equiv \int_0^\infty e^{-\tau_\nu} d\tau_\nu = 1 \quad . \quad (2.54)$$

La distanza media fisica percorsa in un mezzo omogeneo è definita come libero cammino medio l_ν ed è determinata da $\langle \tau_\nu \rangle = \alpha_\nu l_\nu = 1$ oppure

$$l_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu} = \frac{1}{n\sigma_\nu} = 1 \quad . \quad (2.55)$$

Cosicché il libero cammino medio l_ν è semplicemente il reciproco del coefficiente di assorbimento per un materiale omogeneo. Possiamo definire un *cammino libero medio locale* ad ogni punto di un mezzo inomogeneo come il cammino libero medio che risulterebbe se il fotone attraversasse una regione omogenea larga con le stesse proprietà. Cosicché in ogni punto abbiamo $l_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu}$.

2.3.8 La forza della radiazione

Se un mezzo assorbe radiazione, allora la radiazione esercita una forza sul mezzo, perchè la radiazione porta il momento. Possiamo dapprima definire un vettore del *flusso della radiazione*

$$\mathbf{F}_\nu = \int I_\nu \mathbf{n} d\Omega \quad , \quad (2.56)$$

dove \mathbf{n} è il vettore unità lungo la direzione del raggio. Ricordiamo che il fotone ha momento $\frac{E}{c}$, cosicché il vettore momento per unità di area per unità di tempo per unità di lunghezza assorbita dal mezzo è

$$\mathcal{F} = \frac{1}{c} \int \alpha_\nu \mathbf{F}_\nu d\nu \quad . \quad (2.57)$$

Poichè $dAds = dV$, \mathcal{F} è la forza per unità di volume impartita sul mezzo dal campo di radiazione. Notiamo che la forza per unità di massa di materiale è data da $\mathbf{f} = \mathcal{F}/\rho$ oppure

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c} \int k_\nu \mathbf{F}_\nu d\nu \quad . \quad (2.58)$$

Le due equazioni (2.58 e 2.57) assumono che il coefficiente di assorbimento sia isotropo; esse assumono pure che non sia impartito momento dalla emissione di radiazione, come d'altronde è vero per emissione isotropa.

2.4 La radiazione termica

La radiazione termica è emessa dalla materia in equilibrio termico.

2.4.1 Radiazione di corpo nero

Per investigare la radiazione termica, è necessario prima di tutto considerare la *radiazione di corpo nero*, radiazione che è essa stessa in equilibrio termico. Per ottenere quella radiazione prendiamo una cavità a temperatura T e non lasciamo entrare od uscire la radiazione. Se stiamo attenti, possiamo aprire un piccolo buco in un lato del contenitore e ivi misurare la radiazione senza disturbare l'equilibrio. Adesso, usando qualche argomento generale di termodinamica più il fatto che i fotoni non hanno massa, possiamo dedurre importanti proprietà della radiazione di corpo nero. Poichè i fotoni non hanno massa, possono essere creati e distrutti in numero arbitrario sulle pareti del contenitore (per motivi pratici c'è una auto-interazione trascurabile fra fotoni). Cosicchè non c'è legge di conservazione per il numero di fotoni (a differenza del numero di particelle per i barioni), e ci aspettiamo che il numero di fotoni si aggiustino fra di loro in equilibrio alla temperatura T . Una importante proprietà di I_ν è che è indipendente dalla proprietà della cavità e dipende solo dalla temperatura. Per provare ciò aggiungiamo un altro contenitore di forma arbitraria e mettiamo un filtro fra i due, che passa solo una singola frequenza ν ma non le altre, vedi figura 2.7.

Se $I_\nu \neq I'_\nu$, l'energia fluirà spontaneamente fra le due cavità. Poichè queste due sono alla stessa temperatura, questo violerà la seconda legge della termodinamica. Quindi avremo la relazione:

$$I_\nu = \text{funzione universale di } T \text{ e } \nu \equiv B_\nu(T) \quad . \quad (2.59)$$

I_ν deve essere indipendente dalla forma del contenitore. Un corollario dice che è pure isotropa; $I_\nu \neq I_\nu(\Omega)$. La funzione $B_\nu(T)$ è chiamata funzione di Planck.

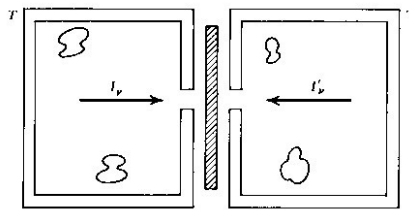
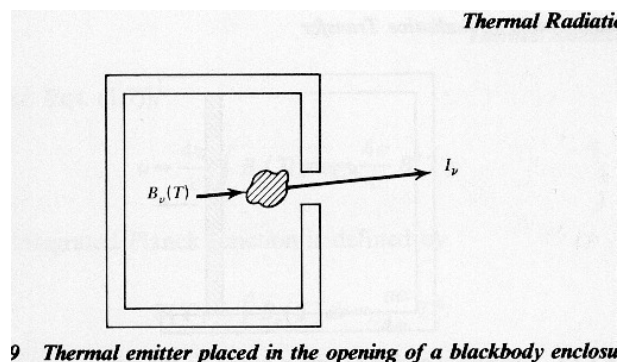
16 *Fundamentals of Radiative Transfer*Figure 1.8 Two containers at temperature T , separated by a filter.

Figura 2.7: Due contenitore a temperatura T , separati da un filtro



9 Thermal emitter placed in the opening of a blackbody enclosure

Figura 2.8: Emittitore termico posto in un buco della cavità di corpo nero

2.4.2 Legge di Kirchhoff per l'emissione termica

Adesso consideriamo un elemento di qualche materiale che emette termicamente a temperatura T , cosicchè l'emissione dipende solamente dalla sua temperatura e dalle proprietà interne. Mettiamo questo oggetto in un buco della cavità, vedi figura 2.8. Assumiamo che la funzione sorgente del materiale sia S_ν . Se $S_\nu > B_\nu$, allora $I_\nu > B_\nu$ e se invece $S_\nu < B_\nu$, allora $I_\nu < B_\nu$, vedi discussione dopo l'equazione 2.53. Ma la presenza del materiale non può alterare la radiazione, poichè la nuova configurazione è pure essa una cavità di corpo nero a temperatura T . Cosicchè abbiamo le relazioni:

$$S_\nu = B_\nu(T) \quad , \quad (2.60)$$

$$j_\nu = \alpha_\nu B_\nu(T) \quad . \quad (2.61)$$

La relazione (2.61), chiamata legge di Kirchhoff è un'espressione fra α_ν e j_ν e la temperatura della materia T . L'equazione del trasferimento è allora (vedi equazione 2.41)

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu + \alpha_\nu B_\nu(T) \quad , \quad (2.62)$$

oppure

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + B_\nu(T) \quad . \quad (2.63)$$

Poichè $S_\nu = B_\nu$ nella cavità di corpo nero, abbiamo che $I_\nu = B_\nu$ dappertutto. La radiazione di corpo nero è omogenea ed isotropa, cosicchè $p = \frac{1}{3}u$. A questo punto bisogna delineare bene la differenza fra *radiazione di corpo nero*, dove $I_\nu = B_\nu$ e *radiazione termica* dove $S_\nu = B_\nu$. La radiazione termica diventa di corpo nero solamente per mezzi otticamente spessi.

2.5 Lo spettro di Planck

Adesso riportiamo una derivazione della funzione di Planck. Questa derivazione si può dividere in due parti:

- Prima deriviamo la densità degli stati dei fotoni in una cavità di corpo nero
- Viene valutata l'energia media per stato dei fotoni.

Considerate un fotone di frequenza ν che si propaga in direzione \mathbf{n} dentro una scatola. Il vettore d'onda del fotone è $\mathbf{k} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\mathbf{n} = \left(\frac{2\pi\nu}{c}\right)\mathbf{n}$. Se ogni dimensione della scatola L_x , L_y e L_z è molto maggiore che una lunghezza d'onda, allora il fotone può essere rappresentato da una specie di onda stazionaria. Il numero dei nodi in ogni direzione x, y, z e, per esempio, $n_x = k_x L_x / 2\pi$, poichè c'è un nodo per ogni numero integrale di lunghezze d'onda in una data direzione ortogonale. Adesso, si può dire che l'onda ha cambiato stato in maniera distinguibile quando il numero d'onda in una data direzione cambia di uno o più. Se $n_i \gg 1$, possiamo scrivere che il numero di nodi cambia in intervallo di numeri d'onda come, per esempio

$$\Delta n_x = \frac{L_x \Delta k_x}{2\pi} \quad . \quad (2.64)$$

Quindi il numero di stati nel vettore d'onda tri-dimensionale $\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z \equiv d^3 k$ è

$$\Delta N = \Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z = \frac{L_x L_y L_z d^3 k}{(2\pi)^3} \quad . \quad (2.65)$$

Se usiamo il fatto che $L_x L_y L_z = V$ (il volume del contenitore) e usando il fatto che i fotoni hanno due polarizzazioni indipendenti (due stati per vettore d'onda \mathbf{k}), possiamo vedere che il numero di stati per unità di volume per unità di vettore d'onda tridimensionale vale $\frac{2}{(2\pi)^3}$. Adesso dato che

$$d^3 k = k^2 dk d\Omega = \frac{(2\pi)^3 \nu^2 d\nu d\Omega}{c^3} \quad , \quad (2.66)$$

troviamo che la densità di stati (il numero di stati per angolo solido per volume per frequenza) è :

$$\rho_s = \frac{2\nu^2}{c^3} \quad . \quad (2.67)$$

Adesso ci chiediamo quanto vale l'energia media per ogni stato. Sappiamo dalla teoria quantistica che ogni fotone di frequenza ν ha energia $h\nu$, cosicchè ci focalizziamo su una singola frequenza ν e ci chiediamo quale sia l'energia media dello stato che ha frequenza ν . Ogni stato può contenere n fotoni di energia $h\nu$, dove $n=0,1,2,\dots$. Cosicchè l'energia può essere $E_n = nh\nu$. In accordo con la meccanica statistica, la probabilità di avere uno stato di energia E_n è proporzionale a $e^{-\beta E_n}$, dove $\beta = (KT)^{-1}$ e K =costante di Boltzmann= 1.38×10^{-16} erg deg $^{-1}$. Allora, l'energia media vale:

$$\bar{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n e^{-\beta E_n}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} \right) \quad . \quad (2.68)$$

Dalla formula della somma della serie geometrica ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu\beta} = (1 - e^{-h\nu\beta})^{-1} \quad . \quad (2.69)$$

Cosicchè abbiamo il risultato:

$$\bar{E} = \frac{h\nu e^{-\beta h\nu}}{1 - e^{-\beta h\nu}} = \frac{h\nu}{\exp(\frac{h\nu}{KT}) - 1} \quad . \quad (2.70)$$

Poichè $h\nu$ è l' energia di un fotone di frequenza ν , l' equazione 2.70 dice che il numero medio di fotoni di frequenza ν , n_ν , detto "numero di occupazione" vale

$$n_\nu = \left[\exp\left(\frac{h\nu}{KT}\right) - 1 \right]^{-1} . \quad (2.71)$$

L' equazione 2.70 è l' espressione standard per la statistica Bose-Einstein con un numero illimitato di particelle (potenziale chimico=0). L' energia per angolo solido per volume per frequenza è il prodotto di \bar{E} e la densità di stati , equazione 2.67. Inoltre questa può essere scritta in termini di $u_\nu(\Omega)$ introdotta nel paragrafo 2.2.2. Coticchè abbiamo

$$u_\nu(\Omega)dV d\nu d\Omega = \left(\frac{2\nu^2}{c^3} \right) \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{KT}\right) - 1} dV d\nu d\Omega , \quad (2.72)$$

ovverosia

$$u_\nu = \left(\frac{2h\nu^3}{c^3} \right) \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{KT}\right) - 1} . \quad (2.73)$$

L' equazione 2.15 dà la relazione fra $u_\nu(\Omega)$ e I_ν ; quì abbiamo $I_\nu = B_\nu$ coticchè

$$B_\nu(T) = \left(\frac{2h\nu^3}{c^2} \right) \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{KT}\right) - 1} . \quad (2.74)$$

L' equazione 2.74 esprime la *legge di Planck*. Se esprimiamo la legge di Planck per unità di lunghezza anzichè per unità di frequenza abbiamo

$$B_\lambda(T) = \left(\frac{2hc^2}{\lambda^5} \right) \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda KT}\right) - 1} . \quad (2.75)$$

Un grafico che riporta B_ν e B_λ in funzione di ν e λ per un intervallo di di valori di T ($1 \text{ K} \leq T \leq 10^8 \text{ K}$) e riportato nella figura 2.9

2.5.1 Proprietà della legge di Planck

La forma di $B_\nu(T)$ appena derivata nella 2.74 è uno dei risultati più importanti nei processi di radiazione. Diamo adesso un numero di proprietà e conseguenze di questa legge:

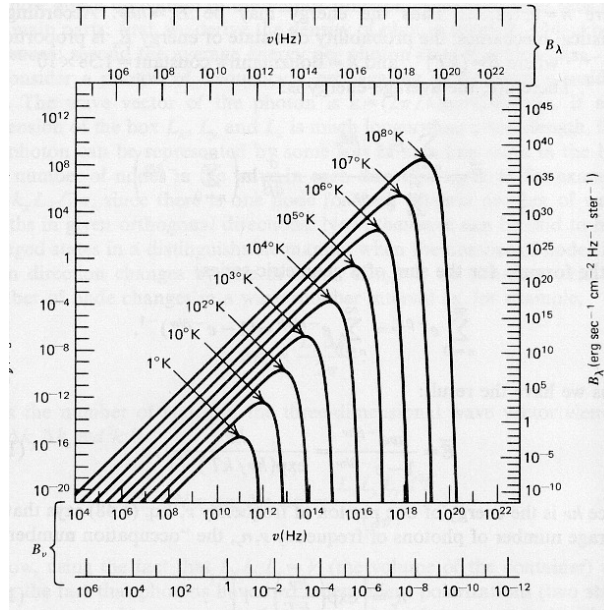


Figura 2.9: Spettro della radiazione di corpo nero a varie temperature

2.5.2 La legge di Rayleigh-Jeans

Nel caso in cui $h\nu \ll KT$ si può espandere l'esponenziale in serie di Taylor

$$\exp\left(\frac{h\nu}{KT}\right) - 1 = \frac{h\nu}{KT} + \dots, \quad (2.76)$$

deduciamo quindi inserendo lo sviluppo in serie nella 2.74 la legge di Rayleigh-Jeans:

$$I_{\nu}^{RJ}(T) = \frac{2\nu^2}{c^2} KT. \quad (2.77)$$

Notate che questo risultato non contiene la costante di Planck. Essa fu originariamente dedotta assumendo che $\bar{E}=KT$, il classico valore di equipartizione per l'energia di un'onda elettromagnetica. La legge di Rayleigh-Jeans si applica alle frequenze basse (nella regione radio si applica quasi sempre). Essa si comporta come una retta nelle variabili $\log B_{\nu}-\log\nu$ in figura 2.9. Notate che la legge 2.77 si applica a tutte le frequenze, l'energia totale $\propto \int \nu^2 d\nu$ diverge. Quest'effetto è conosciuto come catastrofe ultravioletta. Per $h\nu \gg KT$, si deve considerare la natura discreta quantistica dei fotoni.

2.5.3 La legge di Wien

Nel caso in cui $h\nu \ll KT$ si può trascurare l'uno al denominatore della 2.74 quando paragonato ad $\exp(\frac{h\nu}{KT})$, ottenendo la *legge di Wien*.

$$I_\nu^W(T) = \left(\frac{2h\nu^3}{c^2} \right) \exp\left(-\frac{h\nu}{KT}\right) . \quad (2.78)$$

Questa forma fù proposta da Wien sulla base di argomenti ad hoc. La brillantezza della radiazione di corpo nero decresce rapidamente con la frequenza una volta che il massimo è raggiunto. Notate la porzione ripida delle curve in in figura 2.9 in corrispondenza della legge di Wien.

2.5.4 Monotonicità con la temperatura

Se abbiamo due curve di corpo nero, quella con temperatura maggiore ricopre interamente l'altra. Per provare ciò notiamo che la derivata prima :

$$\frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} = \left(\frac{2h^2\nu^4}{c^2kT^2} \right) \frac{\exp(\frac{h\nu}{KT})}{\left[\exp(\frac{h\nu}{KT}) - 1 \right]^2} , \quad (2.79)$$

è positiva. Ad ogni frequenza l'effetto di aumentare la temperatura è aumentare $B_\nu(T)$. Notiamo pure che $B_\nu \rightarrow 0$ quando $T \rightarrow 0$ e $B_\nu \rightarrow \infty$ quando $T \rightarrow \infty$.

2.5.5 La legge dello spostamento di Wien

La frequenza ν_{max} alla quale si ha il massimo di $B_\nu(T)$ si può trovare risolvendo:

$$\frac{\partial B_\nu(T)}{\partial \nu} \Big|_{\nu=\nu_{max}} = 0 . \quad (2.80)$$

Mettendo $x \equiv h\nu_{max}/kT$, troviamo il minimo risolvendo $x=3(1-e^{-x})$, che la radice approssimata $x=2.82$, cosicchè

$$h\nu_{max} = 2.82kT , \quad (2.81)$$

oppure

$$\frac{\nu_{max}}{T} = 5.88 \cdot 10^{10} \text{ Hz gradi}^{-1} . \quad (2.82)$$

Cosicchè la frequenza di picco della radiazione di corpo nero si sposta linearmente con la temperatura; questa è conosciuta come *Legge dello*

spostamento di Wien . In via analoga , la lunghezza d' onda λ_{max} al quale occorre il massimo di $B_\lambda(T)$ si può trovare risolvendo:

$$\frac{\partial B_\lambda(T)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_{max}} = 0 \quad . \quad (2.83)$$

Mettendo $y \equiv hc/(\lambda_{max}kT)$, troviamo il minimo risolvendo $y=5(1-e^{-y})$, che ha la radice approssimata $x=4.97$, cosicchè

$$\lambda_{max} T = 0.290 \text{ cm gradi} \quad . \quad (2.84)$$

Pure questa è conosciuta come *Legge dello spostamento di Wien* ; le due equazioni (2.81) e (2.84) sono ragionevoli.

Tramite ragionamenti di tipo dimensionale uno avrebbe potuto arguire che lo spettro di corpo nero dovrebbe essere massimo alla energia $\approx kT$, poichè kT è la sola quantità con le dimensione dell' energia che può essere formata con k, T, h e c . Bisogna notare che i picchi di B_ν e B_λ non occorrono allo stesso posto in lunghezza d' onda o frequenza; ovverosia , $\lambda_{max}\nu_{max} \neq c$.

Come esempio , se $T=7300$ K il picco di B_ν è a $\lambda=0.7$ microns (rosso) , mentre il picco di B_λ è $\lambda=0.4$ microns (blu) . La legge dello spostamento di Wien dà una maniera conveniente per caratterizzare l' intervallo di frequenza per il quale la legge di Rayleigh-Jeans è valida , ovverosia $\nu \ll \nu_{max}$; in maniera simile per la legge di Wien $\nu \gg \nu_{max}$.

2.5.6 La relazione fra le costanti fondamentali

Mettendo la forma esplicita per la brillantezza otteniamo

$$\int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \left(\frac{2h}{c^2}\right) \left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \quad . \quad (2.85)$$

Questo integrale può essere trovato sulle tavole degli integrali ed ha valore $\pi^4/15$. Quindi abbiamo il risultato:

$$\int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \left(\frac{2\pi^4 k^4}{15c^2 h^3}\right) T^4 \quad , \quad (2.86)$$

e quindi

$$\sigma = \left(\frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3}\right) \quad a = \left(\frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 h^3}\right) \quad . \quad (2.87)$$

2.6 Temperature caratteristiche

Abbiamo tre diverse definizioni di temperatura

2.6.1 Temperatura di brillantezza

Una via per caratterizzare la brillantezza (intensità specifica) ad una certa frequenza è dare la temperatura del corpo nero avente la stessa brillantezza a quella frequenza. Ovverosia per ogni valore I_ν definiamo un $T_b(\nu)$ dalla relazione

$$I_\nu = B_\nu(T_b) \quad , \quad (2.88)$$

questa è chiamata temperatura di brillantezza. Questa via per specificare la brillantezza ha il vantaggio di essere strettamente connessa con le proprietà fisiche dell'emittitore, ed ha unità semplici (K) invece di ($erg\ cm^{-2}\ s^{-1}\ Hz^{-1}\ ster^{-1}$). Questa procedura è usata specialmente in radio-astronomia, dove la legge di Rayleigh-Jeans è usata abitualmente, cosicché

$$I_\nu = \frac{2\nu^2}{c^2} K T_b \quad , \quad (2.89)$$

oppure

$$T_b = \frac{c^2}{2\nu^2 k} I_\nu \quad , \quad (2.90)$$

per $h\nu \ll kT$. L'equazione del trasferimento per l'emissione termica prende una forma particolarmente semplice nel limite di Rayleigh-Jeans (vedi 2.63)

$$\frac{dT_b}{d\tau_\nu} = -T_b + T \quad , \quad (2.91)$$

dove T è la temperatura del materiale. Quando T è costante abbiamo

$$T_b = T_b(0)e^{-\tau_\nu} + T(1 - e^{-\tau_\nu}), \quad k\nu \ll kT \quad . \quad (2.92)$$

Se la profondità ottica è larga, la temperatura di brillantezza della radiazione si avvicina alla temperatura del materiale. Notiamo che la unicità della definizione di temperatura di brillantezza si basa sulla proprietà monotonica della legge di Planck. . Notiamo anche che, in generale, la temperatura di brillantezza è funzione di ν . Solamente se la sorgente è un corpo nero la temperatura di brillantezza è uguale a tutte le frequenze. Nella regione di Wien della legge di Planck il concetto di temperatura di brillantezza non è utile perchè B_ν decresce rapidamente con ν , sia perchè non è possibile formulare una equazione di trasferimento lineare nella temperatura di brillantezza.

2.6.2 Temperatura di colore

Spesso dalle misure uno spettro risulta essere di forma all'incirca di corpo nero, ma non necessariamente del valore assoluto appropriato. Per esempio misurando F_ν da una sorgente non risolta non possiamo trovare I_ν a meno che non conosciamo la distanza della sorgente e le sue condizioni fisiche. Fittando i dati con una curva di corpo nero senza fare attenzione alla scala verticale otteniamo una *temperatura di colore* T_c . Spesso la procedura per il fit è nient'altro che la stima del picco dello spettro e conseguente applicazione della legge dello spostamento di Wien per trovare la temperatura. La temperatura di colore T_c darà pure la temperatura di una sorgente con spettro di corpo nero di scala assoluta sconosciuta. Pure, T_c darà la temperatura di un emettitore termico che sia otticamente sottile, una volta che la profondità ottica sia circa costante per le frequenze vicino al picco. In questo caso la temperatura di brillantezza sarà minore della temperatura dell'emittitore, dato che lo spettro di corpo nero raggiunge la massima intensità ottenibile di un emettitore termico a temperatura T per motivi termodinamici generali.

2.6.3 Temperatura effettiva

La temperatura effettiva di una sorgente T_{eff} è derivata dall'ammonto totale del flusso, integrato su tutte le frequenze emesse da quella sorgente. Otteniamo T_{eff} eguagliando il flusso attuale F al flusso di corpo nero alla temperatura T_{eff} :

$$F = \int \cos\theta I_\nu d\nu d\Omega \equiv \sigma T_{eff}^4 \quad . \quad (2.93)$$

Notate che sia T_{eff} che T_b dipendono dalla magnitudine dell'intensità della sorgente, mentre T_c dipende solamente dalla forma dello spettro osservato.

Capitolo 3

Astronomia Stellare

In questo capitolo trattiamo il problema della radiazione stellare, il sistema delle magnitudini, la temperatura effettiva e quella di colore, la magnitudine assoluta e quella bolometrica, la luminosità e i raggi stellari, il sistema B-V e quello U-B, il diagramma di Hertzsprung-Russel relativo alle stelle più vicine ed ai clusters ed infine la relazione massa-luminosità. Molti dati sono stati presi dalla rete oppure dalle tabelle di calibrazione (vedi appendice B) ed uno speciale software è stato sviluppato per analizzare i dati.

3.1 La Radiazione Stellare

Analizzando la radiazione stellare, si è visto che ogni stella irradia come un corpo nero: se T_e è la temperatura superficiale di una stella, lo spettro di tale una stella è perfettamente sovrapponibile a quello di una cavità radiante con temperatura T_e ; riportiamo in figura 3.1 i risultati di uno spettrometro [Biermann et al. 2002] che analizza la luce solare

Rimandiamo il lettore interessato all' articolo [Biermann et al. 2002] dove vengono discussi la lunghezza d' onda di picco dello spettro, 500 nm, ed il valore di temperatura che meglio fitta i dati, 5150 K.

In effetti l' energia termica irradiata da una stella è trascurabile rispetto a quella contenuta in essa e dunque può valere una ipotesi di superficie adiabatica che permette di associare una stella ad un corpo nero. Questo fatto è molto importante poichè possiamo applicare la legge sul corpo nero 2.74 dalla quale si può ottenere la temperatura superficiale di ogni stella conoscendo semplicemente la lunghezza d' on-

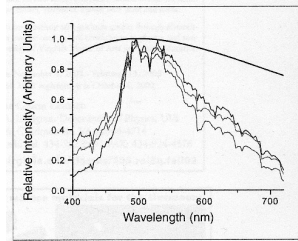


Figura 3.1: Spettro solare come intensità relativa verso lunghezza d'onda. La linea solida rappresenta lo spettro di un corpo nero a 5150 K

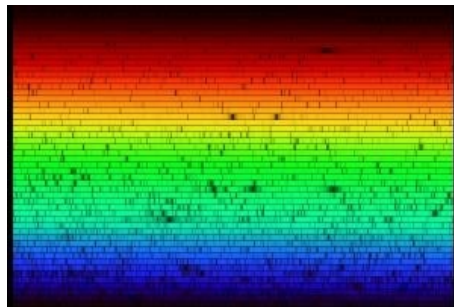


Figura 3.2: Spettro del sole da 4000 a 7000 Å.

da di massima emissione. Questa analisi può essere fatta scomponendo la luce stellare con un prisma e misurando l'intensità luminosa ad ogni intervallo $\Delta\lambda$ di lunghezza d'onda, oppure facendo attraversare alla luce filtri posti in successione e misurando ad ogni passaggio l'intensità luminosa rimasta. Riportiamo la figura 3.2 di uno spettro con le lunghezze d'onda che crescono da sinistra a destra lungo ogni stringa e dal basso all'alto. Ognuna delle 50 fette copre 60 Å, per un range del visuale da 4000Åa 7000 Å. Ricordiamo che il sole è una stella G2 e che non è chiaro perchè alcuni colori sono assenti dallo spettro summenzionato. Si noti che più le stelle sono calde, tanto più piccola sarà la lunghezza d'onda di massima emissione λ_{max} ; per questo motivo le stelle rosse sono più fredde di quelle blu. La luminosità L di una stella è definita come l'energia irradiata nell'unità di tempo. Sulla Terra si può misurare il flusso di radiazione $F(r)$ che è l'energia irradiata da una stella che giunge a distanza r , per unità di superficie e di tempo. Con-



Figura 3.3: Ipparco (190 a-c ; 120 a-c) , inventò la prima scala di luminosità delle stelle

siderando che il corpo celeste irradia isotropicamente e che non esiste perdita di energia nello spazio che lo separa dall' osservatore terrestre si ha perciò :

$$L = 4\pi r^2 F(r) \quad . \quad (3.1)$$

3.2 Sistemi di magnitudine

Già gli antichi chiamavano le stelle più luminose stelle di prima magnitudine , e le stelle meno luminose di sesta magnitudine. Nel 120 a.c. l'astronomo greco Ipparco , vedi Figura 3.3, compilò un catalogo di 850 stelle visibili ad occhio nudo e le classificò a seconda della loro magnitudine apparente in sei classi: la stella più brillante essendo di magnitudine 1, e la più debole di magnitudine 6. Il metodo rimase in uso fino all'inizio del XVII secolo , quando l'invenzione del telescopio fece scoprire un grande quantità di stelle fino ad allora invisibili , tutte da classificare. Ricordiamo che ai tempi di Ipparco la accuratezza posizionale era dell' ordine di mezzo grado mentre adesso tramite il satellite Ipparcos è dell' ordine di $3 \cdot 10^{-7}$ gradi oppure 1 milliarcsec (mas). In verità quella di Ipparco è oggi definita *magnitudine visiva apparente* ovvero misurata così come appare ad un occhio umano o ad un qualunque apparecchio che abbia la sua stessa sensibilità. Nella figura 3.4 è riportata la curva di sensibilità dell' occhio umano .

La magnitudine dovrà essere una funzione logaritmica del flusso (ciò si accorda con le proprietà fisiologiche dell' occhio umano), da cui

$$m_V = K + A \log F_V \quad , \quad (3.2)$$

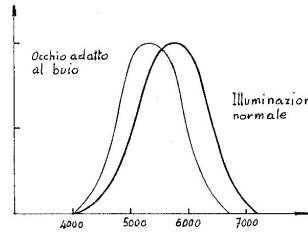


Figura 3.4: Sensibilità occhio umano

Tabella 3.1: Tabella del sistema UBVRI

<i>zona</i>	<i>lunghezza d'onda</i> (Å)	<i>larghezza banda</i> (Å)
<i>U</i>	3650	700
<i>B</i>	4400	1000
<i>V</i>	5500	900
<i>R</i>	7000	2200
<i>I</i>	8800	2400

dove K ed A sono costanti e F è il flusso della radiazione rivelata. Se si vuole che sia $\Delta m = -5$ con $\frac{F_1}{F_2} = 100$ (dimostrazione proposta dall' astronomo inglese Pogson (1856)) si ha $A = -2.5$ da cui

$$m_V = K - 2.5 \log F_V \quad , \quad (3.3)$$

K è una costante che viene assegnata nel momento in cui si decide quale sarà la magnitudine della stella presa come riferimento: la scelta è tale che le stelle che si vedono appena, in una notte senza Luna di cielo sereno , in un buon punto di osservazione siano di magnitudine sesta.

Si noti che con questa definizione le stelle più brillanti avranno magnitudine negativa. Le magnitudini apparenti dipendono dalla lunghezza d' onda o colore dello strumento di osservazione e quindi vengono misurate in una piccola parte dello spettro elettromagnetico. Riportiamo nella Tabella 3.1 il sistema UBVRI , il principale in uso in astronomia; per gli altri sistemi consultate [Nuovo Allen 2000] e [Astrophysical Formulae 1999]. Idealmente la misura del flusso F dovrebbe essere una misura di flusso totale , ma non si può registrare

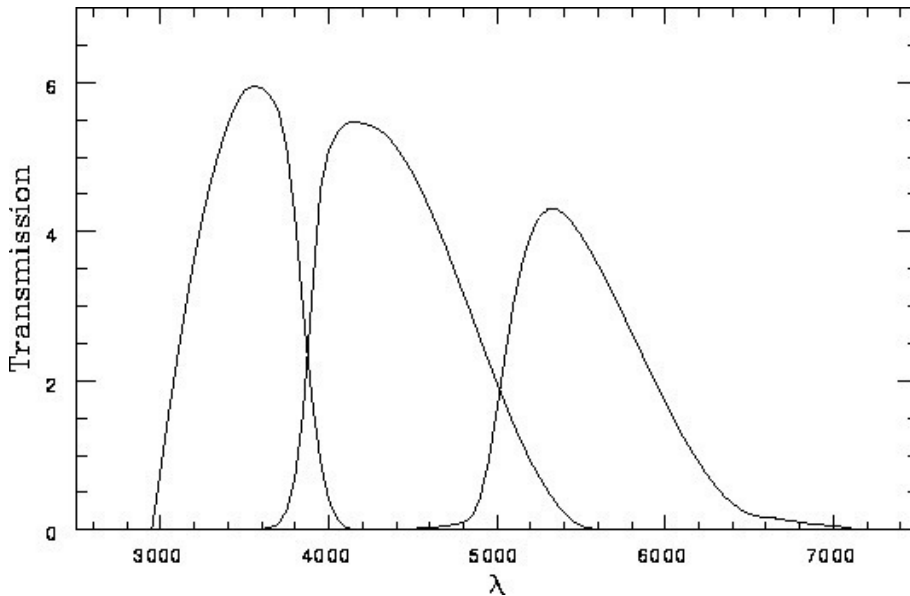


Figura 3.5: Curva di trasmissione nel sistema UBV di Johnson. L'asse x riporta gli Å e sulle y troviamo la percentuale di trasmissione

radiazione elettromagnetica con efficienza costante su tutto lo spettro e quindi ottenere

$$F = \int_0^{\infty} F_{\lambda} d\lambda \quad . \quad (3.4)$$

Si introduce perciò una funzione di risposta $\Phi(\lambda)$ legata all'apparecchio, che esprime la frazione di flusso registrata per ogni lunghezza d'onda, da cui

$$F' = \int_0^{\infty} \Phi(\lambda) F_{\lambda} d\lambda \quad (3.5)$$

e dunque la definizione della scala di magnitudine è legata all'apparecchiatura utilizzata, o meglio il sistema fotometrico che nel caso della magnitudine visiva è l'occhio umano. Riportiamo nella figura 3.5 la percentuale $\Phi(\lambda)$ di trasmissione nel sistema UBV di Johnson, le curve normalizzate ad uno si ottengono dividendo le ordinate per il massimo di ogni filtro.

Riportiamo nella figura 3.6 una tipica funzione di trasmissione per un sistema CCD.

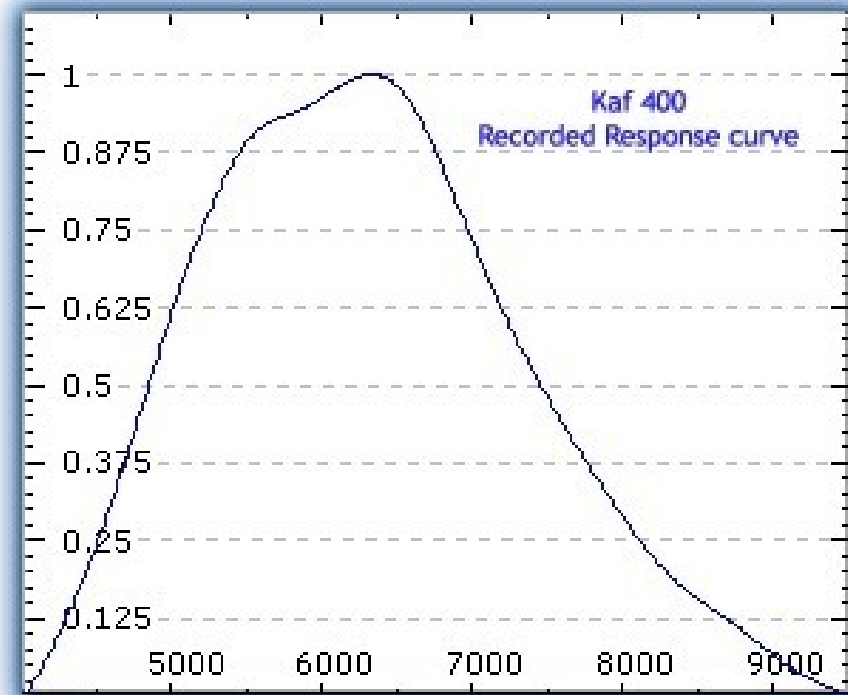


Figura 3.6: Curva di risposta di un CCD verso Å

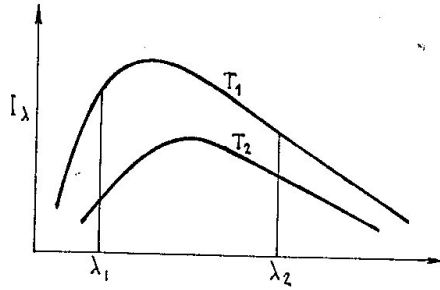


Figura 3.7: Due curve di corpo nero

3.3 Temperatura effettiva e di colore

La definizione di temperatura superficiale di una stella, detta anche *temperatura effettiva* è legata alla legge di Stefan (vedi Sezione 2.93 per i dettagli della derivazione). Essa è la temperatura di un corpo nero che emette con flusso uguale al flusso superficiale F della stella. Si ha perciò:

$$F = \sigma T_e^4 = \pi B \quad , \quad (3.6)$$

e dalla definizione di luminosità

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_e^4 \quad \frac{erg}{sec} \quad , \quad (3.7)$$

dove R è il raggio della stella. Il flusso radiante S ad una distanza r vale:

$$S = \sigma \frac{R^2 T_e^4}{r^2} \quad \frac{erg}{sec \text{ cm}^2} \quad . \quad (3.8)$$

In un corpo nero, scelte due lunghezze d'onda λ_1 e λ_2 , il rapporto delle intensità monocromatiche risulta

$$\frac{I_{\lambda_1}}{I_{\lambda_2}} = f(T) \quad , \quad (3.9)$$

funzione della temperatura, calcolabile tramite la legge di Planck come si vede dalla Fig. 3.7 dove sono mostrate due curve di corpo nero alle temperature T_1 e T_2 . Ne consegue che la misura del flusso di radiazione a due lunghezze d'onda permette di ottenere la temperatura del corpo nero. Analogamente si può ragionare per una stella: si misura la

magnitudine apparente per due sistemi fotometrici differenti, sistema B centrato sul blu e sistema V centrato sul visivo, per cui

$$\begin{aligned} m_V &= K_V - 2.5 \log F_V \\ m_B &= K_B - 2.5 \log F_B \quad , \end{aligned} \quad (3.10)$$

e perciò

$$m_B - m_V = K_B - K_V - 2.5 \log \frac{F_B}{F_V} \quad . \quad (3.11)$$

La differenza di magnitudine , detta *indice di colore* , è legata al rapporto fra flussi di radiazione che è funzione di T:

$$B - V = m_B - m_V = K' - 2.5 \log \frac{F_B}{F_V} \quad , \quad (3.12)$$

e quindi ,nota la differenza, (vedi sezione 3.3) si ricava la temperatura T_c detta temperatura di colore della stella. Si deve notare che la temperatura di colore, offre delle buone indicazioni, ma in effetti non è la temperatura di superficie. Riportiamo nel grafico 3.8 la relazione fra B-V e $1/T$ per stelle di calibrazione di classe V (sequenza principale); fonte [Nuovo Allen 2000] oppure appendice B). Applicando la teoria dei minimi quadrati troviamo che quando la temperatura alla superficie della stella T_{eff} è espressa in gradi Kelvin

$$B - V = -0.64 + \frac{7360}{T [K]} \quad . \quad (3.13)$$

3.4 La magnitudine assoluta

La magnitudine apparente ha scarso significato fisico in quanto dipende dalla distanza r di ogni corpo celeste dalla Terra . Si definisce perciò la magnitudine assoluta M_V come la magnitudine la stella avrebbe se fosse posta ad una distanza di 10 pc. Si ha utilizzando la (3.1) e la (3.3)

$$M_V - m_V = -2.5 \log \frac{L}{4\pi(10^2)} + 2.5 \log \frac{L}{4\pi(r^2)} = 2.5 \log \left(\frac{r}{10} \right)^2 \quad , \quad (3.14)$$

da cui

$$M_V = m_V + 5 - 5 \log r \quad . \quad (3.15)$$

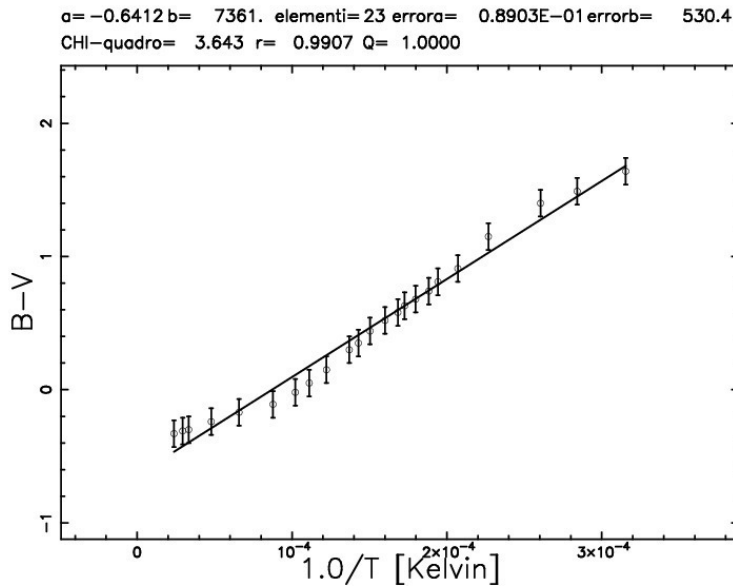


Figura 3.8: B-V contro $1/(T \text{ [K]})$ per la classe V

3.5 La magnitudine bolometrica

Il flusso totale di radiazione integrato su tutte le lunghezze d' onda definisce la magnitudine bolometrica apparente , m_{bol} , e la magnitudine assoluta bolometrica M_{bol} . La correzione bolometrica richiesta per ottenere il flusso totale da quello visuale vale

$$\text{Correzione bolometrica} = BC = M_{bol} - M_V = m_{bol} - m_V \quad . \quad (3.16)$$

Essendo che ovviamente la luminosità in una banda selezionata è sempre minore di quella globale la correzione bolometrica sarà sempre negativa. Riguardo al sole abbiamo, fonte [Nuovo Allen 2000] :

$$\begin{aligned}
 m_{bol\odot} &= -26.83 \text{ mag} \\
 M_{bol\odot} &= 4.74 \text{ mag} \\
 BC_{\odot} &= -0.08 \text{ mag} \quad .
 \end{aligned}
 \quad (3.17)$$

Riportiamo nel grafico 3.9 la relazione fra BC e $T \text{ [K]}$ per stelle di calibrazione di classe V (sequenza principale) ; fonte [Nuovo Allen 2000] oppure appendice B). Quindi la frazione dell' energia totale emessa da

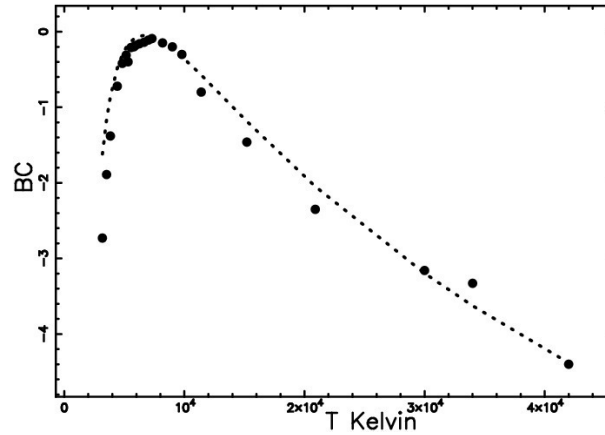


Figura 3.9: BC contro $1/(T [K])$ per la classe V

una stella molto blu o molto rossa nell' intervallo visibile è diversa di un fattore di 4 or 5 mag dall' energia totale; in altre parole solo una percentuale minima dell' energia è irradiata nel visibile. Lo strumento adoperato è il *bolometro* che misura piccole variazioni di calore radiante o micro-onde. Misura il piccolo cambio in resistenza di un foglio in metallo o semiconduttore che si verifica in presenza di energia radiante.

Questi dati sono fittabili tramite la relazione

$$BC = 42.54 - 10 * \log(T [K]) - 29000/T [K] \quad . \quad (3.18)$$

3.6 Luminosità, raggi e masse stellari

Se di una stella sono noti magnitudine apparente , parallasse e temperatura da B-V oppure da indicazioni spettrali, si possono ottenere numerose altre grandezze: innanzitutto si può ottenere la magnitudine assoluta dalla 3.15 che esprimiamo in funzione della parallasse che , ricordiamo, si indica con il simbolo p oppure π

$$M_V = m_V + 5 + 5 \log(p) \quad . \quad (3.19)$$

Per ottenere la luminosità della stella dobbiamo invece partire dalla magnitudine bolometrica assoluta

$$M_{bol} = m_{bol} + 5 - 5 \log r \quad . \quad (3.20)$$

Introduciamo poi la magnitudine bolometrica apparente

$$m_{bol} = K - 2.5 \log(F) \quad , \quad (3.21)$$

dove $F = \frac{L}{4\pi r^2}$ e otteniamo:

$$m_{bol} = K' - 2.5 \log L + 5 \log r \quad , \quad (3.22)$$

e poi

$$M_{bol} = K'' - 2.5 \log L + 5 \quad . \quad (3.23)$$

Introducendo poi la luminosità solare , L_{\odot} e la magnitudine assoluta solare , $M_{bol\odot}$ otteniamo

$$M_{bol} = M_{bol\odot} - 2.5 \log\left(\frac{L}{L_{\odot}}\right) \quad . \quad (3.24)$$

Ricordiamo che $M_{bol\odot} = 4.74$ e $L_{\odot} = 3.85 \cdot 10^{33} \text{ ergs}^{-1}$. Per avere una formula di uso pratico possiamo poi esplicitare la luminosità :

$$\frac{L}{L_{\odot}} = 10^{0.4(4.74 - M_{bol})} \quad , \quad (3.25)$$

dove M_{bol} è ricavata tramite la formula

$$M_{bol} = M_V + BC \quad , \quad (3.26)$$

e BC tramite la relazione 3.18 . Dallo spettro oppure dal valore di B-V si può risalire alla temperatura T_{eff} della stella e da questa al raggio usando la legge di Stefan:

$$F = \sigma T_{eff}^4 \quad , \quad (3.27)$$

ricavando la luminosità

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4 \quad , \quad (3.28)$$

e poi facendo il paragone con i parametri solari

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)^2 \left(\frac{T_{eff}}{T_{eff\odot}}\right)^4 \quad , \quad (3.29)$$

dove $R_{\odot} = 6.9 \cdot 10^{10} \text{ cm}$ e $T_{eff\odot} = 5780 \text{ K}$. Possiamo quindi facilmente ricavare un' espressione per il raggio che risulta essere uguale

$$\log \frac{R}{R_{\odot}} = \frac{\log \frac{L}{L_{\odot}} - 4 \log \frac{T_{eff}}{T_{eff\odot}}}{2} . \quad (3.30)$$

Le masse vengono invece calcolate attraverso la relazione massa-luminosità , vedi [Nuovo Allen 2000]:

$$\log \frac{L}{L_{\odot}} = 3.8 \log \frac{M}{M_{\odot}} + 0.08 \quad \text{per } M > 0.2 M_{\odot} , \quad (3.31)$$

e quindi

$$\log \frac{M}{M_{\odot}} = \frac{\log \frac{L}{L_{\odot}} - 0.08}{3.8} . \quad (3.32)$$

3.7 B-V contro T, teorico

Il problema della determinazione teorica di $\frac{F_B}{F_V}$ nell' equazione 3.12 si puo' risolvere introducendo l' intensità ad una certa lunghezza d' onda λ che dalla stella giunge sulla Terra combinando le formule 2.74 e 2.28 :

$$I_{\lambda} = \frac{2\pi hc^2 R^2}{\lambda^5 r^2} \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1} , \quad (3.33)$$

dove r è la distanza terra-stella e R il raggio della stella. L'equazione per B-V diventa perciò

$$B - V = m_B - m_V = K' - 2.5 \log \frac{\int S_B I_{\lambda} d\lambda}{\int S_V I_{\lambda} d\lambda} , \quad (3.34)$$

dove S_{λ} rappresenta la sensibilità dello strumento astronomico adottato. Per risolvere l' integrale possiamo usare due modi diversi : un metodo analitico approssimato ed uno numerico.

3.7.1 B-V analitico

Introduciamo una sensibilità a δ di Dirac

$$S_{\lambda} = \delta(\lambda - \lambda_i) \quad i = B, V , \quad (3.35)$$

avremo quindi che

$$F_B = \frac{2\pi hc^2 R^2}{\lambda_B^5} \frac{1}{r^2} \frac{1}{e^{\frac{hc}{KT\lambda_B}} - 1} , \quad (3.36)$$

e

$$F_V = \frac{2\pi hc^2 R^2}{\lambda_V^5} \frac{1}{r^2} \frac{1}{e^{\frac{hc}{KT\lambda_V}} - 1} . \quad (3.37)$$

Facendo l'ipotesi che $e^{\frac{hc}{KT\lambda_V}} \gg 1$ e $e^{\frac{hc}{KT\lambda_B}} \gg 1$

$$\frac{F_B}{F_V} = \frac{\lambda_V^5}{\lambda_B^5} e^{\frac{hc}{KT} \left(\frac{\lambda_B - \lambda_V}{\lambda_B \lambda_V} \right)} , \quad (3.38)$$

prendendo i logaritmi avremo

$$-2.5 \log \frac{F_B}{F_V} = K - \frac{hc}{KT} \left(\frac{\lambda_B - \lambda_V}{\lambda_B \lambda_V} \right) 2.5 \text{Log} e . \quad (3.39)$$

Inserendo $\lambda_B = 4450 \text{ \AA}$ e $\lambda_V = 5500 \text{ \AA}$ otteniamo :

$$B - V = K + \frac{6701}{T} . \quad (3.40)$$

A questo punto non rimane che calibrare la relazione 3.40 ricordando che sul sole $B-V = 0.650$ e $T_{eff} = 5777 \text{ K}$:

$$B - V = -0.51 + \frac{6701}{T} . \quad (3.41)$$

3.7.2 B-V numerico

Possiamo risolvere l'espressione 3.34 senza approssimazioni risolvendo l'integrale in maniera numerica , in questo caso $S=1$, e gli estremi di integrazione sono dati dalla tabella 3.1. Otteniamo

$$B - V = -0.48 + \frac{6534}{T} . \quad (3.42)$$

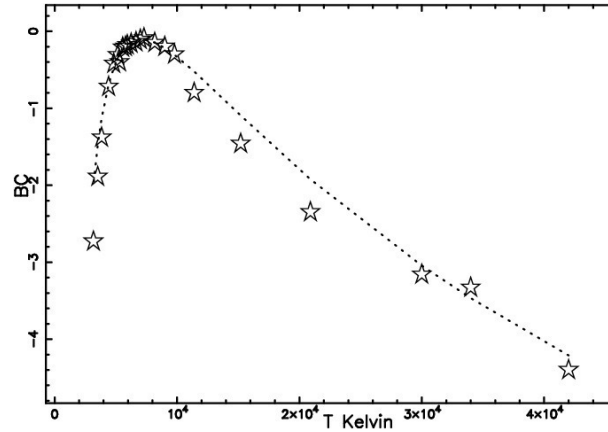


Figura 3.10: Correzione bolometrica da fit + BC per sequenza principale (simboli grossi)

3.8 Correzione bolometrica numerica

La correzione bolometrica si puo' indicare sotto la forma

$$BC = M_{bol} - M_V = -\frac{T_{BC}}{T} - 10 \text{ Log } T + \alpha \quad , \quad (3.43)$$

dovremo perciò calcolare T_{BC} ed α . Una prima indicazione arriva da [Nuovo Allen 2000] che fornisce $\alpha = 42.54$ e $T_{BC} = 29000$. Adoperando il metodo di Levenberg–Marquardt ricaviamo $\alpha = 42.75$ e $T_{BC} = 30876$ per quello che riguarda la sequenza principale. Dalla Figura 3.10 possiamo realizzare dove i dati del fit si discostano da quelli di calibrazione relativi alle stelle di sequenza principale ,vedi appendice B) .

3.9 Correzione bolometrica analitica

Essendo la correzione bolometrica

$$BC = M_{bol} - M_V = K - 2.5 \log \frac{F_{BOLO}}{F_V} \quad , \quad (3.44)$$

dovremo perciò calcolare

$$BC = K' - 2.5 \log \frac{\int_0^\infty I_\lambda d\lambda}{\int S_V I_\lambda d\lambda} \quad , \quad (3.45)$$

al variare della temperatura. Partiamo dalla formula 3.45 ed esplicitiamo i termini

$$F_V = \frac{2\pi hc^2 R^2}{\lambda_V^5 r^2} \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda_V}} - 1} \quad , \quad (3.46)$$

e

$$F_{BOLO} = \pi \frac{R^2}{r^2} \sigma T^4 \quad . \quad (3.47)$$

Facendo l' ipotesi che $e^{\frac{hc}{kT\lambda_V}} \gg 1$

$$F_V = \frac{2\pi hc^2 R^2}{\lambda_V^5 r^2} \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda_V}}} \quad . \quad (3.48)$$

Sviluppando i conti otteniamo

$$BC = -\frac{28402}{T} - 10 \text{ Log } T + \text{cost} \quad . \quad (3.49)$$

Normalizzando ai parametri fisici del sole ,BC=-0.08 e T=5777 otteniamo

$$BC = -\frac{28402}{T} - 10 \text{ Log } T + 42.54 \quad . \quad (3.50)$$

3.10 I primi 100 pc

Usando le formule ricavate nei precedenti paragrafi possiamo trovare gli intervalli di variabilità di massa , luminosita' e raggio delle stelle comprese nei primi 100 pc usando come ingresso del programma unicamente B-V e M_V , vedi Tabella 3.2. I dati estratti dal catalogo Ipparco-Tycho rilasciato dall' ESA nel 1997. Le masse riportate in Tabella 3.2, ad esempio, sembrano essere in sintonia con il fatto che le masse devono essere minori della massima massa stabile ,

$$M_{max} = 60M_{\odot} \quad . \quad (3.51)$$

3.11 Diagramma HR

Nel 1911 e nel 1913 da studi separati dei due scienziati Hertzsprung e Russel nacque il diagramma HR. Si tratta di disporre tutte le stelle o dei primi 25 pc, 100pc etc oppure di un cluster in un diagramma che contiene in ascissa la classificazione spettrale e quindi la temperatura in

Tabella 3.2: Massimo e minimo primi 100pc

<i>parametro</i>	<i>minimo</i>	<i>massimo</i>
$\frac{M}{M_{\odot}}$	0.1	14.77
$\frac{R}{R_{\odot}}$	0.011	210.1
$\frac{L}{L_{\odot}}$	$10^{-3.4}$	$10^{4.5}$

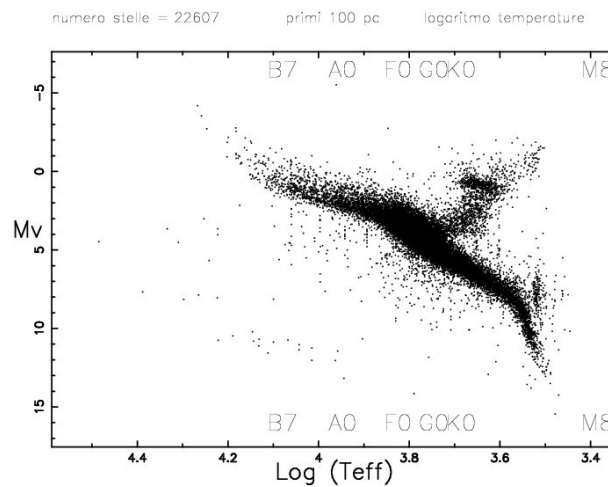


Figura 3.11: Diagramma HR dei primi 100 pc

aumento da destra a sinistra , e in ordinata la magnitudine assoluta in diminuzione dal basso verso l' alto. Gli scienziati notarono subito che le stelle in questo diagramma non erano disposte a caso ma secondo una distribuzione ben precisa: innanzi tutto, la maggior parte (circa il 90 %) delle stelle è disposta lungo una curva detta *sequenza principale* e a questa curva appartiene anche il sole ; inoltre il resto delle è disposto in due gruppi ben definiti: uno a destra in alto e l' altro in basso a sinistra . Riportiamo nella figura 3.11 il diagramma HR relativo ai primi 100 pc. I dati provengono dal catalogo Ipparco-Tycho rilasciato dall' ESA nel 1997. Il gruppo di stelle in alto rispetto alla sequenza principale è costituito da corpi di dimensioni più grandi di quelli che hanno la

stessa temperatura , ma che stanno sulla sequenza principale , e poichè tali stelle hanno uno spettro freddo sono dette *giganti rosse* . Le stelle che stanno nel diagramma HR al di sotto del sole , sono dette *nane* e il gruppo in basso a sinistra che ha uno spettro più caldo di quello del sole costituisce il gruppo delle *nane bianche*. Si noti che sulla sequenza principale ci muove variando le masse: le stelle meno massive del sole sono in basso a destra e quelle più massive sono in alto a sinistra. Si noti che essendo per la formula 3.26

$$M_V \propto \text{Log}\left(\frac{L}{L_{\odot}}\right) , \quad (3.52)$$

questa grandezza può comparire il luogo della magnitudine assoluta sull' asse delle ordinate del diagramma HR e poichè per la formula 3.29

$$\text{Log}\frac{L}{L_{\odot}} = 2\text{Log}\left(\frac{R}{R_{\odot}}\right) + 4\text{Log}\left(\frac{T_{eff}}{T_{eff\odot}}\right) , \quad (3.53)$$

si veda che i corpi con lo stesso raggio R giacciono su una retta nel diagramma HR. Commentiamo adesso il diagramma HR dei primi 100 pc dal catalogo Ipparco-Tycho alla luce della notazione anglosassone che certamente vedrete nel futuro. La vasta maggioranza di tutte le stelle è posta lungo la sequenza principale (MS) che copre il campo dalle stelle O, luminose e calde, alle deboli, fredde e rosse stelle M. La branca subgiganti (SG) si congiunge con la MS a $(B-V) \approx 0.7$ e $M_{Hp} \approx 4$ e si estende orizzontalmente a $(B-V) \approx 1$, dove le regioni popolate si spostano improvvisamente in alto nella branca delle giganti rosse (RGB). La RGB parte da $(B-V) \approx 1$, ad una luminosità che è circa 30 volte (3.7 mag) più brillante che non le stelle MS dello stesso tipo fino a stelle più fredde e più brillanti. Queste stelle sono le giganti rosse ; esse corrispondono alla luminosità MK di classe III. Il grande picco nella densità di stelle vicino a $(B-V) \approx 1$ e $M_{Hp} \approx 1$ è conosciuto come "red clump" . Centrate su $(B-V) \approx 0$ e $M_{Hp} \approx 12$ troviamo poche deboli stelle conosciute come nane bianche. La regione fra MS e RGB ad $M_{Hp} \approx 1$ che è praticamente vuota viene chiamata Hertzsprung gap.

3.12 Diagramma HR in ammassi

E' interessante adesso studiare il diagramma HR per ammassi aperti , tipo Pleiadi (figura 3.12) e le Iadi (figura 3.13) . Da un punto di vista

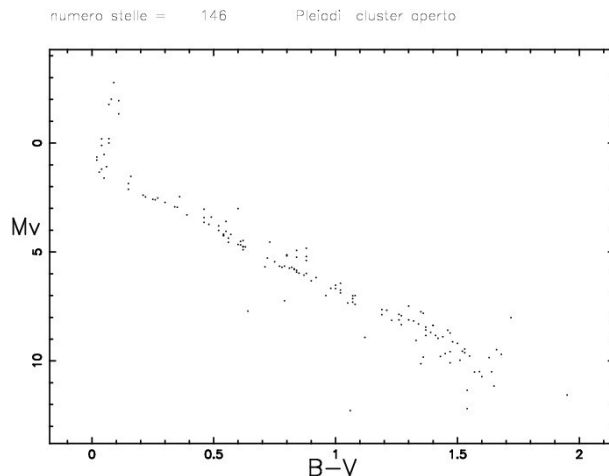


Figura 3.12: Diagramma HR delle Pleiadi

astronomico le Pleiadi (M45) sono un ammasso aperto nella costellazione del Toro che contiene almeno 500 stelle e grazie a misure accurate fatte con il telescopio spaziale Hubble sappiamo che dista da noi 440 anni luce (134.9 pc).

Le Iadi sono invece un cluster aperto di circa 200 stelle nella costellazione del Toro. È il cluster aperto più vicino a noi (dista 46 pc da noi) ed è scatterato su di un'area di circa 6° .

Ci sono poi gli ammassi globulari a forma sferica formati da 1000 a 1000000 stelle che condividono la stessa origine temporale. Il diagramma HR per tali ammassi non presenta invece stelle sulla parte superiore della sequenza principale e queste stelle sembrano essersi trasformate in giganti rosse. Riportiamo il diagramma HR (vedi figura 3.14) per Palomar 12 basato su immagini CCD ottenute con il telescopio Canada-Francia-Hawaii da 3.6m ed il telescopio da 4m di Cerro Tololo.

3.13 Diagramma a due colori

Un ulteriore aiuto per discutere le caratteristiche di un gruppo di stelle, come le stelle di un cluster, può venire dal diagramma due colori. Nel sistema fotometrico UBV, per esempio, plottiamo (U-B) contro (B-V) per le stelle del cluster. Dato che i colori delle stelle sono principalmente indicatori della temperatura di superficie della stella, il

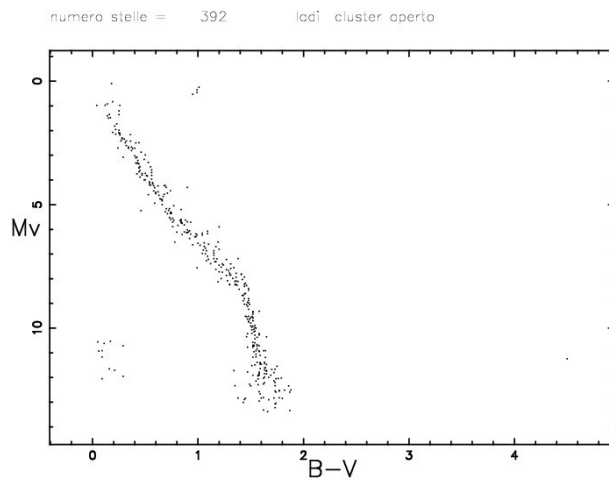


Figura 3.13: Diagramma HR delle Iadi

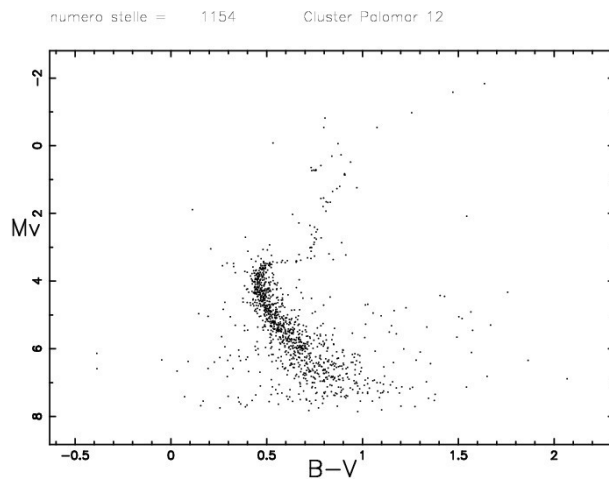


Figura 3.14: Diagramma HR di Palomar 12

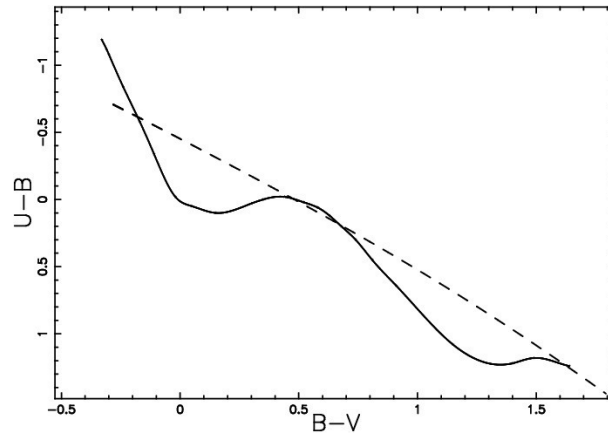


Figura 3.15: Diagramma a due colori ($B-V, U-B$) per le stelle di classe V (sequenza principale)

diagramma a due colori per le stelle di un cluster rappresenta una curva continua sulla quale si situano tutte le stelle. L'eccezione è dovuta al fatto che la larghezza della banda U attraversa la discontinuità di Balmer. La discontinuità di Balmer rappresenta un salto nella distribuzione spettrale dell'energia, corrispondente all'assorbimento legato-libero dell'idrogeno neutro al limite della sequenza spettrale di Balmer, a 3653 \AA . Nelle stelle che hanno un forte assorbimento dovuto all'idrogeno neutro (per esempio le stelle A) la disponibilità di energia nella banda U è abbassata dalla discontinuità di Balmer. Come risultato il valore di $(U-B)$ per queste stelle è più grande del valore atteso dalla distribuzione di Planck ed il diagramma a due colori $(U-B), (B-V)$ ha un massimo locale in $(U-B)$, vedi figura 3.15 nella quale è anche riportato l'andamento teorico prospettato dal rapporto di flussi di corpo nero.

In figura 3.16 riportiamo invece il diagramma a due colori per le 3800 stelle più brillanti.

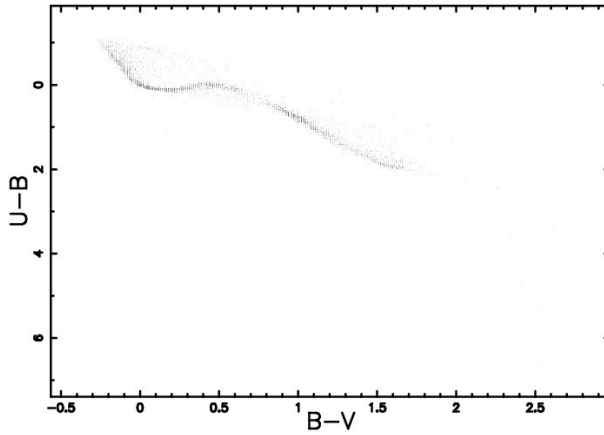


Figura 3.16: Diagramma a due colori (B-V,U-B) per le 3800 stelle più brillanti

3.14 Relazione massa-luminosità

Compiendo studi accurati su tantissime stelle si è potuta ottenere una relazione tra massa M e luminosità delle stelle di sequenza principale :

$$L \propto M^\alpha \quad . \quad (3.54)$$

Poichè il tempo τ di vita di una stella in sequenza principale è proporzionale al rapporto fra contenuto energetico e luminosità

$$\tau \propto \frac{Mc^2}{L} \quad , \quad (3.55)$$

si ha

$$\tau \propto \frac{M}{M^\alpha} = M^{-\alpha+1} \quad . \quad (3.56)$$

Il valore di α dipende molto dal campione scelto per le analisi. Riportiamo in figura 3.17 i dati di Ipparcos per le 71 stelle A0 più vicine combinati con altri dati in modo da ottenere masse e luminosità con metodi standard in Astronomia. In questo caso il range delle masse è molto ristretto. I dati si analizzano applicando i minimi quadrati sui logaritmi delle quantità coinvolte ed otteniamo

$$\log \frac{L}{L_\odot} = 5.3 \log \frac{M}{M_\odot} - 0.4 \quad \text{per stelle A0} \quad . \quad (3.57)$$

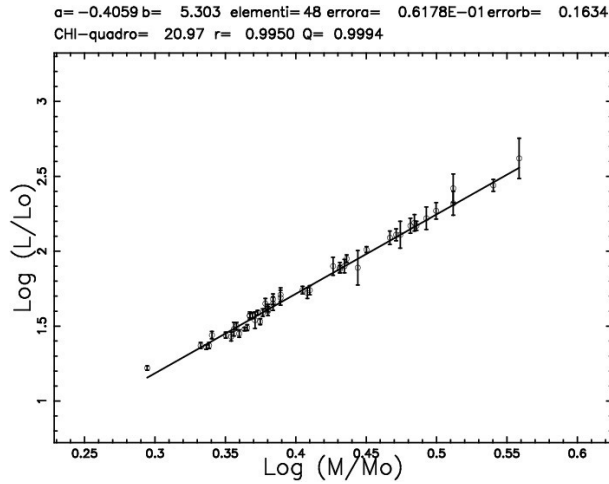


Figura 3.17: Relazione Massa luminosità per stelle A0

Il range invece più esteso per quanto riguarda le masse si ottiene dai dati sulle stelle doppie. Riportiamo in figura 3.18 i dati di 288 stelle binarie con masse ben determinate. Anche qui i dati si analizzano applicando i minimi quadrati sui logaritmi delle quantità coinvolte ed otteniamo

$$\log \frac{L}{L_{\odot}} = 3.92 \log \frac{M}{M_{\odot}} + 0.03 \quad \text{per stelle binarie} \quad . \quad (3.58)$$

La vita media del Sole è $\tau = 10^{10}$ anni in sequenza principale, per cui le nane bianche che hanno massa $M = \frac{M_{\odot}}{10}$ avranno, mettendo in prima approssimazione $\alpha=4$

$$\tau \propto \tau_{\odot} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-\alpha+1} = 10^{13} \text{anni} \quad , \quad (3.59)$$

mentre le giganti blu che hanno massa $M = 10 M_{\odot}$ avranno, sempre con $\alpha=4$,

$$\tau = 10^7 \text{anni} \quad , \quad (3.60)$$

e si comprende perciò che mentre le nane bianche possono essere in sequenza principale dall'inizio della vita dell'universo, le giganti blu vi stazionano pochissimo. Queste considerazioni spiegano le evoluzioni degli ammassi citati nella sezione 3.12: negli ammassi giovani ci sono

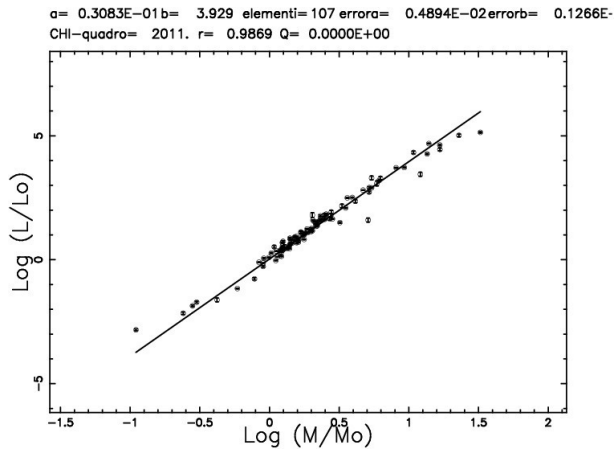


Figura 3.18: Relazione Massa luminosità per stelle binarie

delle giganti blu che evolveranno velocemente e scompariranno dalla sequenza principale ; col tempo si raggiungerà la configurazione degli Ammassi Globulari. Una legge teorica per la relazione massa-luminosità può essere dedotta sulla base di considerazioni generali. Una stella di sequenza principale è sostenuta dalla pressione del gas cosicchè la loro temperatura interna, T , scala come in modo inverso col raggio R e direttamente con la sua massa M , ovvero $T = costante \frac{M}{R}$. Facendo l'assunzione che il calore interno sia trasportato dalla radiazione e chè l' opacità stellare sia indipendente dalla massa, segue che la luminosità stellare debba crescere con la quarta potenza della temperatura e la terza potenza della massa ; ovverosia

$$L \propto \frac{R^4 T^4}{(k)M} \propto M^3 \quad , \quad (3.61)$$

per una stella di sequenza principale con opacità media (k).

Capitolo 4

Spettroscopia Stellare

4.1 L' Atomo di idrogeno

L' idrogeno è l' elemento più abbondante dell' universo di un fattore molto grande, e costituisce la parte maggiore del mezzo intersellare e di tutte le stelle normali. Le proprietà fisiche del materiale stellare sono quindi dominate dalle proprietà dell' atomo di idrogeno. In questo paragrafo enfatizzeremo la struttura elettronica dell' idrogeno , i livelli di energia ,lo spettro associato e introdurremo il linguaggio della spettroscopia stellare. I principali livelli dell' atomo di idrogeno possono essere derivati tramite argomenti semiclassici applicati ad un atomo che si muova in un orbita circolare di raggio a attorno ad un protone. Classicamente, la forza di Coulomb è bilanciata dalla forza centripeta :

$$\frac{mv^2}{a} = \frac{e^2}{a^2} \quad (4.1)$$

dove m è la massa ridotta del sistema. L' integrale di azione $\oint pdq$ può avere qualsiasi valore in un sistema classico ma in sistemi legati può cambiare il suo stato solamente in unità di \hbar . Per l' atomo di idrogeno il momento generalizzato p è il momento angolare e $dq=d\phi$; cosicchè l' integrale di azione diventa:

$$\oint pdq = mva = mva \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi mva = nh \quad , \quad (4.2)$$

oppure

$$mva = n\hbar \quad , \quad (4.3)$$

dove n è un intero positivo. Eliminando la velocità fra le due precedenti equazioni otteniamo il raggio orbitale:

$$a_n = \frac{n^2 \hbar^2}{me^2} = n^2 a_0 \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad , \quad (4.4)$$

dove a_0 è il raggio di Bohr per l' idrogeno. L' energia totale del sistema legato di due cariche è la metà dell' energia potenziale , o , usando i risultati precedenti,

$$E_n = -\frac{e^2}{2a_n} = -\frac{me^4}{2n^2 \hbar^2} \quad . \quad (4.5)$$

Notate che $m \approx m_e$ ai fini pratici. In assenza di forze esterne ci sono $2n^2$ stati con energia E_n . In assenza di un campo magnetico , i livelli di energia del singolo elettrone nell' atomo di idrogeno sono ben rappresentati dalla formula

$$E_n = -Z^2 \frac{me^4}{2n^2 \hbar^2} \equiv \frac{Z^2 \mathcal{R}}{n^2} \quad . \quad (4.6)$$

Dove Z è la carica atomica sul nucleo in unità della carica dell' elettrone. Questa vale uno per l' atomo di idrogeno, ma includiamo esplicitamente Z perchè molti ioni, come l' He^+ , hanno spettri del tipo dell' idrogeno, che l' equazione 4.6 descrive con buona accuratezza. Qui n è il numero quantico principale, ed è usato per classificare i livelli di energia. L' energia data dall' equazione 4.6 è negativa, andando a zero con $n \rightarrow \infty$. E_n rappresenta l' energia di legame fra ione ed elettrone. Lo stato più strettamente legato (lo stato fondamentale) ed il più basso livello di energia occorrono per $n=1$; hanno una energia di legame

$$-E_1 = -\frac{me^4}{2\hbar^2} = 2.18^{-11} Z^2 ergs = 13.6 Z^2 eV = \mathcal{R} Z^2 \quad . \quad (4.7)$$

La quantità \mathcal{R} è chiamata costante di Rydberg. Lo stato $n=1$ è lo stato fondamentale, e $13.6 Z^2 eV$ è il potenziale di ionizzazione (oppure $13.6 Z^2 eV$ è l' energia di ionizzazione) dallo stato fondamentale. I livelli di energia negativa corrispondenti agli stati legati per l' idrogeno sono mostrati nella figura 4.1

Energie positive corrispondono ad un elettrone libero. Comunque, l' elettrone si muove nel campo elettromagnetico del protone; cosicchè

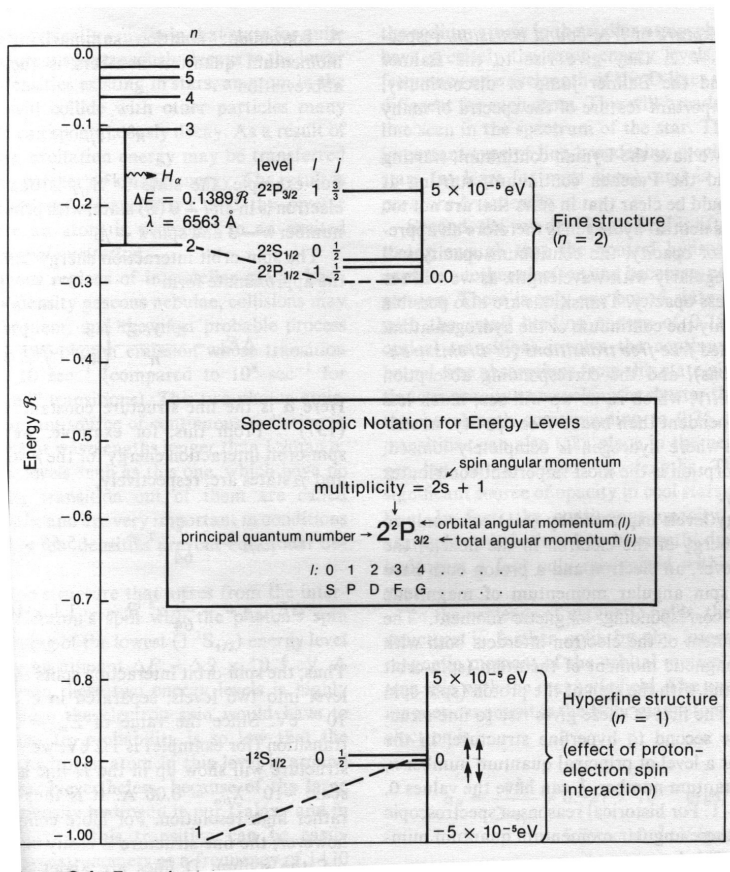


Figura 4.1: Livelli di energia nell' atomo dell' idrogeno. L' inserto nella parte alta a destra mostra la struttura fine per lo stato $n=2$. Lo spostamento di Lamb fra gli stati $2^2S_{1/2}$ e $2^2P_{1/2}$ corrisponde a $\Delta E = 4.4 \times 10^{-6} \text{ eV}$. L' inserto in basso rappresenta la struttura iperfine dello stato $n=1$. La differenza di energia fra i due stati è $\Delta E = 5.8 \times 10^{-6} \text{ eV}$. Il fotone emesso nella transizione fra questi due stati ha energia $\nu = \Delta E/h = 1420 \text{ MHz}$, corrispondenti a $\lambda = 21.11 \text{ cm}$

Tabella 4.1: Le serie di Transizione

<i>Livello piú basso</i>	<i>transizione principale</i>
$n = 1, Lyman$	$L_\alpha = 1216\text{\AA}$
$n = 2, Balmer$	$H_\alpha = 6563\text{\AA}$
$n = 3, Paschen$	$P_\alpha = 18750\text{\AA}$

gli stati di energia libera devono essere considerati insieme agli stati legati come parte della struttura totale dell' energia dell' atomo di idrogeno . I livelli di energia dell' elettrone libero non sono quantizzati , ed ogni energia e' permessa. Questi livelli sono qualche volta chiamati il continuo dell' energia. Le transizioni fra i livelli di energia accompagnati dall' emissione ($E_m > E_n$) o dall' assorbimento ($E_n > E_m$) di un fotone di frequenza ν hanno energia $h\nu$ data dall' usuale relazione di Planck

$$h\nu = |E_m - E_n| \quad . \quad (4.8)$$

La spaziatura dei livelli di energia nell' atomo di idrogeno è tale che transizioni con lo stesso livello inferiore danno origine a fotoni nella stessa regione generale dello spettro. Cosicché lo spettro dell' idrogeno è classificato in accordo con una serie di transizioni , tutte aventi lo stesso livello inferiore n . Le più importanti di queste transizioni sono mostrate nella tabella 4.1 .

Le serie sono designate con le lettere L , H e P rispettivamente e α indica la prima linea della serie . Ovverosia H_α è la transizione fra i livelli $n=3$ e $n=2$; H_β è la transizione fra i livelli $n=4$ e $n=2$; e così via. La serie di Balmer è la sola che stà nella parte visibile dello spettro , ed è caratteristica dello spettro di idrogeno visto nelle scariche dei tubi nei laboratori e negli spettri di molte stelle. Le prime linee nella serie di Balmer sono

$$\begin{array}{ll} H_\alpha & \lambda = 6563\text{\AA} \quad , \\ H_\beta & \lambda = 4861\text{\AA} \quad , \\ H_\gamma & \lambda = 4340\text{\AA} \quad , \\ H_\delta & \lambda = 4101\text{\AA} \quad . \end{array}$$

Queste transizioni danno origine ad assorbimento od emissione di fotoni a lunghezze d' onda discrete che così corrispondono ad assorbimento od emissione nello spettro dell' idrogeno. Una transizione da $n=2$ al continuo produce assorbimento od emissione sopra un vasto range di lunghezze d' onda, partendo dalla lunghezza d' onda corrispondente alla energia di ionizzazione dal livello $n=2$. Questa è 3.4 eV, e la corrispondente lunghezza d' onda è 3647 Å . Così l' assorbimento nel continuo degli stati di energia produce un' opacità continua a lunghezze d' onda minori di 3647 Å . In corrispondenza, una transizione dal continuo al livello 2 produce emissione di fotoni a lunghezze d' onda minori di 3647 Å , ovverosia emissione continua. Questi due processi sono spesso chiamati fotoionizzazione o assorbimento legato-libero e ricattura od emissione libero-legato rispettivamente. Per $n=2$, essi originano il continuo Balmer ed il salto o la discontinuità di Balmer, che è una importante caratteristica degli spettri di molte stelle. In modo analogo, abbiamo il continuo di Lyman partendo da 912 Å ed il continuo di Paschen partendo dal 8204 Å . Dovrebbe essere chiaro che in stelle che non sono troppo calde, e dove quindi l' idrogeno neutro è un' apprezzabile sorgente di opacità , l' opacità nel continuo varierà irregolarmente con la lunghezza d' onda. Sono quindi possibili delle transizioni che coinvolgono solamente il continuo dell' atomo di idrogeno . Queste sono chiamate transizioni libero-libero e l' assorbimento corrispondente opacità libero-libero che dipende meno dalla frequenza rispetto all' opacità legato-libero. Negli interni stellari , dove l' idrogeno è completamente ionizzato, l' assorbimento libero-libero è il più importante contributo all' opacità. I livelli energetici espressi dalla (4.6) si riferiscono solamente all' energia orbitale dell' elettrone nel campo del protone. Comunque, un elettrone ed un protone hanno ambedue uno spin angolare intrinseco di valore $\hbar/2$ ed un corrispondente momento magnetico. Il momento magnetico dell' elettrone interagisce sia con il momento magnetico orbitale dell' atomo (interazione spin-orbita) e con lo spin del protone (interazione spin-spin). La prima di queste due dà origine alla struttura fine mentre la seconda origina la struttura iperfine nello spettro. Dato un livello di numero quantico principale n , il numero quantico orbitale l può avere valori 0,1,2,...,n-1. Per ragioni storiche continua ad essere usata la notazione spettroscopica per questi momenti angolari

S , P , D , F ,

$$l=0, 1, 2, 3, \dots$$

Il momento angolare totale corrispondente ad uno stato specificato da un numero quantico l vale $[l(l+1)]^{1/2}\hbar$. Lo spin dell'elettrone ha numero quantico $1/2$; cosicchè il suo momento angolare di spin vale $[l(l+1)]^{1/2}\hbar \sqrt{3}\hbar/2$. Il momento angolare orbitale e il momento angolare di spin interagiscono per produrre un momento angolare totale j , dato da $j = l \pm 1/2$.

stato	S(l=0)	j=1/2	,
stato	P(l=1)	j=1/2,3/2	,
stato	D(l=2)	j=3/2,5/2	.

Una notazione conveniente che sommarizza i numeri quantici concernenti il momento angolare è la abbreviazione spettroscopica

$$n^{2j+1}l_s \quad . \quad (4.9)$$

Per esempio lo stato $3^2S_{1/2}$ è quello in cui l'elettrone è in uno stato $l = 0(S)$, con numero quantico principale $n=3$ e $\text{spin}=1/2$. L'energia spin-orbita può essere scritta in forma approssimata

$$\Delta E_{n,j} = \frac{\alpha^2 \mathcal{R} Z^4}{n^3} \left(\frac{3}{4n} - \frac{1}{j+1/2} \right) \quad . \quad (4.10)$$

Dove α è la costante di struttura fine $\alpha = e^2/\hbar c \approx (137)^{-1}$. Da questo, per esempio, vediamo che l'energia di interazione spin-orbita per gli stati $n=2, l=1, j=1/2$ e $3/2$ sono rispettivamente

$$\begin{aligned} \Delta E_{j=1/2} &= -\frac{5}{64}\alpha^2 \mathcal{R} = -5.66 \times 10^{-5} eV \quad , \\ \Delta E_{j=3/2} &= -\frac{1}{64}\alpha^2 \mathcal{R} = -1.1 \times 10^{-5} eV \quad . \end{aligned} \quad (4.11)$$

Cosicchè l'interazione spin-orbita divide il livello $n = 2$ in due livelli separati in energia da $4.5 \times 10^{-5} eV$. Poichè, per esempio, il livello $E_m - E_n$ per la transizione H_α è $1.2 eV$, vediamo che la struttura fine sarà visibile nella linea H a lunghezza d'onda dell'ordine di $\approx 10^{-5} \lambda_\alpha = 0.06 \text{\AA}$. È visibile quindi solo ad alta risoluzione. Per atomi più complicati comunque la struttura fine si può visualizzare

facilmente; per le linee D del Sodio sono distanti 6 \AA . La differenza si origina perchè la valenza degli elettroni nel Sodio è soggetta ad un differente potenziale (non-idrogenico), causato dalla presenza di altri elettroni nell' atomo. L' astrofisica della materia interstellare è fortemente influenzata dalla transizione in cui gli elettroni cambiano l' orientamento dello spin, anche se questa ha una probabilità molto bassa di avvenire. Per esempio la transizione da $2^2S_{1/2}$ non cambierà il momento orbitale dell' elettrone. Comunque, il fotone emesso nella transizione si porterà via un unità di momento angolare. Poichè il momento angolare deve essere conservato nella transizione, l' unica maniera in cui ciò può avvenire per l' elettrone è invertire il suo spin. Questa transizione è vietata (i.e. avviene con una probabilità estremamente bassa). Un atomo di idrogeno in uno stato $2^2S_{1/2}$ rimarrà in quello stato per un tempo abbastanza lungo prima di decadere nello stato ad il livello più basso. Alle densità che esistono nelle stelle un atomo nello stato $2^2S_{1/2}$ colliderà con altre particelle più volte prima di decadere spontaneamente. Come risultato delle collisioni l' energia di eccitazione può essere traferita al compagno di collisione come energia cinetica. Questo risultato è conosciuto come de-eccitazione collisionale, ed il processo inverso (dove un atomo è promosso ad uno stato eccitato) è la eccitazione collisionale. Nelle regioni tenue dello spazio interstellare o nelle nebulose le collisioni sono poco frequenti; l' emissione più probabile sarà un processo ad emissione di due fotoni il cui tasso di transizione è 10 sec^{-1} (che va comparato con $\approx 10^8 \text{ sec}^{-1}$ per una transizione permessa normale). Questa emissione di due fotoni è un importante sorgente di radiazione continua nelle nebulose a lunghezza d' onda maggiore della Lyman α . Livelli atomici come questo, che non hanno un alta probabilità di transizione sono chiamati livelli metastabili, e sono molto importanti in condizioni in cui densità estremamente basse precludono la de-eccitazione collisionale. La struttura iperfine che si genera dalla interazione dello spin dell' elettrone con lo spin del fotone produce una divisione del livello più basso $1^2S_{1/2}$ nell' idrogeno di ampiezza $\Delta E = 5.9 \times 10^{-6} eV$. La transizione fra questi due livelli è altamente proibita perchè lo spin dell' elettrone deve cambiare direzione. La sua probabilità è così bassa che la vita media dell' idrogeno in questo livello è circa $1.1 \cdot 10^7 \text{ anni}$. Ciononostante data la massiccia presenza di idrogeno a bassa densità nella nostra galassia ed in quelle vicine, questa transizione può facilmente essere osservata alla frequenza di 1420 MHz, od alla lunghezza di 21 cm. Questa transizione è usata

per mappare la densità dell' idrogeno neutro nelle varie regioni della galassia e per esplorare la struttura del disco galattico.

4.2 Classificazione degli spettri stellari

Ci sono due differenti modi di estrarre informazioni astrofisiche dagli spettri stellari: l' analisi degli spettri e la classificazione stellare. Se si analizza la luce da una stella con uno spettrografo osserviamo un continuo molto luminoso sul quale troviamo sovrapposte delle linee di assorbimento ed occasionalmente linee di emissione. La distribuzione dell' energia nel continuo ed i profili delle linee sono determinati dalle condizioni fisiche nelle atmosfere stellari : la temperatura , la densità, il campo di velocità , il campo magnetico , l' abbondanza degli elementi e così via ... Quindi , da una analisi teorica di questi comportamenti possiamo dedurre una descrizione dettagliata sulla struttura e composizione degli strati esterni. I dati di base richiesti per un' analisi dello spettro sono descrizioni quantitative dei profili delle linee e descrizioni delle variazioni di frequenza del continuo. Questi dati sono ottenuti da misure spettroscopiche. Le informazioni sul continuo possono essere ottenute da indici di colore o da distribuzioni assolute di energia. I dati sulle linee sono ottenuti da spettri ad alta dispersione e sono usualmente quantificati determinando la *larghezza equivalente* della linea: questa è la larghezza di una sezione del continuo vicino alla linea che contiene tanta luce come se provenisse dalla linea (per una linea di emissione) o bloccata dalla linea , vedi figura 4.2.

L' essenza della procedura per determinare le condizioni fisiche negli strati esterni di una stella è di descrivere lo spettro della stella con un piccolo numero di indici numerici e poi , tramite un calcolo teorico che adopera leggi conosciute, determinare le condizioni fisiche nelle atmosfere stellari che sono richieste per produrre i valori numerici richiesti. In pratica queste procedure richiedono molto tempo e sono ristrette a poche stelle brillanti delle quali sono disponibili degli spettri adeguati. Nella *classificazione stellare* si raggruppa semplicemente un insieme spettri che hanno la stessa struttura senza, in prima istanza, cercare di capire il significato fisico di queste caratteristiche. In principio, uno può classificare in termini di tutto lo spettro , ma in pratica la maggior parte delle classificazioni sono basate solo su quella parte dello spettro trasmessa attraverso l' atmosfera della terra. Prima si sceglie uno o più

3.3 Classification of stars

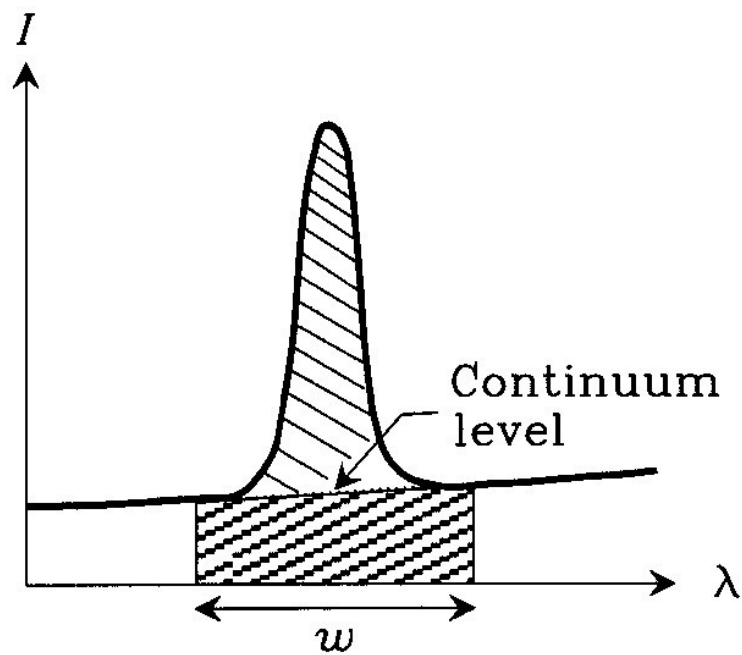


Figura 4.2: La *larghezza equivalente* della linea di emissione qui mostrata è la larghezza del trapezio ombreggiato; questo trapezio ha la stessa area dell' area tratteggiata

insiemi (dimensioni) con le quali si categorizza lo spettro. Il sistema standard adesso in uso (il sistema MKS) in discussione qui sotto impiega due sistemi di etichette, quindi è bidimensionale. Per ogni scelta di etichette, uno dichiara il nome di una stella standard il cui spettro definisce la tipologia della classificazione. Successive scelte di etichette ai quali gli standard sono assegnati stabilisce delle scatole di classificazione e la variazione della natura dello spettro da scatola a scatola è fissato dalle proprietà degli standard in quelle scatole. Ogni scatola di classificazione corrisponde ad un unico tipo spettrale del sistema. Quando tutto il sistema è definito, uno classifica una stella trovando il sistema standard il cui spettro le si avvicina di più. In questo modo, ogni stella è messa in una delle scatole del sistema di classificazione. Se le dimensioni sono scelte in maniera astuta e se il processo di classificazione è fatto in maniera accurata usando criteri ben definiti allora

- un gruppo di stelle appartenenti tutte allo stesso tipo saranno in fatto identiche in quelle condizioni fisiche che producono variazioni nei criteri di classificazione
- gruppi con tipi differenti saranno distinguibili l'uno dall'altro in maniera significativa.

Dopo che il sistema è stato definito e le classificazioni fatte si calibra il sistema in termini di parametri fisici come temperatura stellare, composizione chimica e così via. Stime quantitative di questi parametri sono derivate per ogni tipo spettrale facendo un'analisi dettagliata dello spettro su un membro tipico di quel tipo. A quel punto uno può dire che se una stella ha un certo tipo spettrale, allora la temperatura di luminosità od un'altra proprietà di quel tipo possono essere assegnate senza ulteriori analisi. Il tipo spettrale dà così una descrizione concisa dello spettro e delle proprietà fisiche della stella. In pratica, la classificazione è fatta normalmente tramite ispezione visuale di uno spettro di dispersione moderata, e può essere portata avanti per un numero grande di stelle. Il primo lavoro pionieristico è stato portato avanti nel 1860 da Padre A. Secchi, che divise gli spettri in quattro larghi gruppi. Classificazioni analoghe furono fatte in quel periodo da W. Huggins e H.C. Vogel. I primi grandi passi verso il sistema attuale furono fatti all'Osservatorio di Harvard nel 1890. Sotto la direzione di E.C. Pickering, Williamina P. Pickering pubblicò un catalogo di 10000 stelle raggruppate in un sistema di tipo spettrale con le lettere A,B,C

Henry Draper Catalogue and Extension (Cannon+ 1918-1924; ADC 1989)

The catalogue

To get all details for a row, just click on the row number in the leftmost 'Full' column.
 The 1 column in **color** are computed by VizieR, and are **not part of the original data**.

Full	HD	DM	RAB1900	DEB1900	Ptm	Ptg	SpType	Tycho
			"h:m:s"	"d:m:s"	mag	mag		
1	1	BD+67 1599	00 00.0	+67 17	7.70	8.70	K0	Tycho
2	2	BD+56 3142	00 00.0	+57 13	8.60	9.00	F5	Tycho
3	3	BD+44 4550	00 00.0	+44 40	6.51	6.51	A0	Tycho
4	4	BD+29 5059	00 00.0	+29 46	8.40	8.70	F0	Tycho
5	5	BD+01 4825	00 00.0	+01 49	9.00	9.80	G5	Tycho

(Result truncated to 5 rows)

Figura 4.3: Le prime 5 righe del catalogo Henry draper

e così via . Nel 1888 , Antonia C. Maury senza il beneficio di dati astrofisici, ordinò questi tipi spettrali nella sequenza attuale studiando unicamente la progressione della configurazione delle righe negli spettri. Più tardi , Annie J. Cannon introdusse la suddivisione decimale dei tipi spettrali , e in quattro anni partendo dal 1911 essa classificò ≈ 225000 stelle su questo sistema. Queste classificazioni furono pubblicate nel catalogo *Henry Draper*. Dalle osservazioni dei rapporti nell' intensita delle linee a stadi di successiva ionizzazione e dai dati fotometrici, questa sequenza spettrale O , B, A, F , G, K , M fù riconosciuta più tardi essere una sequenza di temperatura. Dei tipi addizionali R,N,S furono aggiunti alla fine fredda della sequenza per descrivere le stelle nel range K-M con composizioni spettrali completamente diverse. Riportiamo in figura 4.3 una minima parte del catalogo Henry Draper , come scaricato da CDS.

Finalmente con la con l' avvento della teoria della ionizzazione di Saha nel 1920 fu possibile fare una classificazione quantitativa degli spettri e nel 1925 una trattazione teorica degli spettri comparve nel libro di Cecilia Payne *Stellar Atmospheres*. Con i lavori di E. Hertzsprung

e H.N. Russel negli anni dal 1905 al 1913 , diventò evidente che stelle di un certo tipo spettrale possono avere luminosità molto differenti e questo fatto implica che possono avere raggi e densità atmosferiche completamente diverse. Le stelle più comuni sono chiamate **nane** ; le stelle brillanti e grosse sono chiamate giganti ; le stelle più brillanti e più brillanti sono chiamate supergiganti. Gli effetti di cambiamento nelle dimensioni stellari si riflettono direttamente nel cambiamento degli spettri e quindi un secondo parametro è richiesto per descrivere completamente lo spettro . Un tentativo in questa direzione fù portato avanti da Antonia Maury at Harvard che introdusse i simboli a,b ec per alcuni tipi spettrali; sappiamo adesso che il suo tipo c corrisponde alle supergiganti e gli altri corrispondono alle nane.

4.2.1 Il sistema MK

Un sistema completamente bidimensionale , il sistema MK , fù sviluppato da Morgan , Keenan e Kellerman (1943). In addizione alla classe spettrale fù assegnato un numero da I a V indicante la luminosità . In termini fisici la luminosità della stella riflette le dimensioni dell' involuppo stellare e quindi si correla con la gravità di superficie della stella. Il sistema MK con le susseguenti revisioni ed estensioni è tuttora in uso. I pilastri fondamentali del sistema MK sono

- È empirico ; nella sua definizione entrano solamente parametri osservativi
- È basato su materiale omogeneo. Usa spettri di dispersione standard che garantiscono criteri sensitivi e nello stesso tempo permettono di raggiungere stelle deboli ovvero sia le stelle più lontane.
- È definito da standard. Covicchè tutta la classificazione è autonoma , nel senso che rimane inalterata anche quando l' interpretazione dei tipi in termine di condizioni fisiche delle stelle cambia. Inoltre osservatori che adoperino spettrografi e dispersioni diverse possono classificare nello stesso sistema semplicemente riosservando le stelle campione con il loro equipaggiamento.

I tipi spettrali del sistema MK sono essenzialmente quelli della sequenza di Harvard , e alcune delle caratteristiche di ogni tipo sono riportate nella tabella 4.2 Le classi di luminosità , e le stelle alle quali esse appar-

Tabella 4.2: Caratteristiche principali dei tipi spettrali

<i>Tipo Spettrale</i>	<i>Caratteristiche spettrali</i>
<i>O</i>	<i>linee He II visibile; linee da specie molto ionizzate tipo ,C III, N III, O III, Si IV; linee H relativamente deboli; continuo UV forte</i>
<i>B</i>	<i>linee He I forte, massimo a B2; linee He II assenti; H in crescita; bassa eccitazione per gli ioni tipo ,C II, O II, Si II</i>
<i>A</i>	<i>H massimo ad A0 , decrescente poi; Mg II e Si II forti; Ca II debole e crescente</i>
<i>F</i>	<i>H debole ,Ca II in crescita , linee di atomi neutrali e primo stato di ionizzazione dei metalli</i>
<i>G</i>	<i>Spettro solare; Ca II molto forte; metalli neutrali prominenti , ioni deboli; banda G (CH forte); linee H in indebolimento</i>
<i>K</i>	<i>Dominano le linee metalliche : H molto debole bande molecolari (CH, CN) in sviluppo; continuo debole nel blu</i>
<i>M</i>	<i>Bande molecolari forti , in particolare Tio; alcune linee neutrali tipo Ca I molto forti; continuo nel rosso</i>
<i>C</i>	<i>Stelle al Carbonio; bande forti composti carbonio C₂, CN, CO; TiO assente; range di temperatura nelle stelle K ed M</i>
<i>S</i>	<i>Stelle con elementi pesanti; bande di ZrO, YO, LAo; atomi neutri forti come nei tipi K ed M; sovrappone questi tipi nel range di temperatura</i>

Tabella 4.3: Classificazione di luminosità MK

<i>Ia – O</i>	<i>Le supergiganti più estreme</i>
<i>Ia</i>	<i>Le supergiganti più luminose</i>
<i>Iab</i>	<i>Le supergiganti moderate</i>
<i>Ib</i>	<i>Le supergiganti meno luminose</i>
<i>II</i>	<i>Le giganti più brillanti</i>
<i>III</i>	<i>Le giganti normali</i>
<i>IV</i>	<i>Le sub – giganti</i>
<i>V</i>	<i>Le nane</i>

tengono sono elencate nella tabella 4.3. Le caratteristiche menzionate nelle precedenti liste sono solo indicative ; il sistema è definito dalle stelle standard. Il tipo spettrale completo è specificato sia dai tipi spettrali sia dalla classe di luminosità di una stella come determinato da paragone con gli standard.

Il tipi spettrali sono suddivisi in tipi decimali, che vanno da 0 a 9, tipo B0,B1,B2.....,B9; A0,A1,A2.....,A9; F0,F1,...F9 e così via. Le classi di luminosità non sono usualmente suddivise eccetto le supergiganti, vedi tabella 4.3. Esempi di tipi spettrali sono : il Sole (G2V) , ϵ Ori(B0Ia), α Lyr (A0V), α Tau (K5III). Stelle più calde del sole (tipo O,B,A,F) sono comunemente chiamate stelle giovani e stelle di tipo solare e più fredde , stelle vecchie (tipo G,K,M). Anche se è esplicitamente bidimensionale, il sistema MK implica l' esistenza di una terza dimensione in regioni localizzate del sistema con l'idea di descrivere **stelle con linee deboli** . Come esempio citiamo la sub-nana HD 140283 , la stella variabile RR Lyrae e le stelle peculiari. Per fissare l'attenzione sulle osservazioni vere riportiamo in figura 4.4 gli spettri su lastra da O5 a B0 e in figura 4.5 gli spettri da B5 a A5.

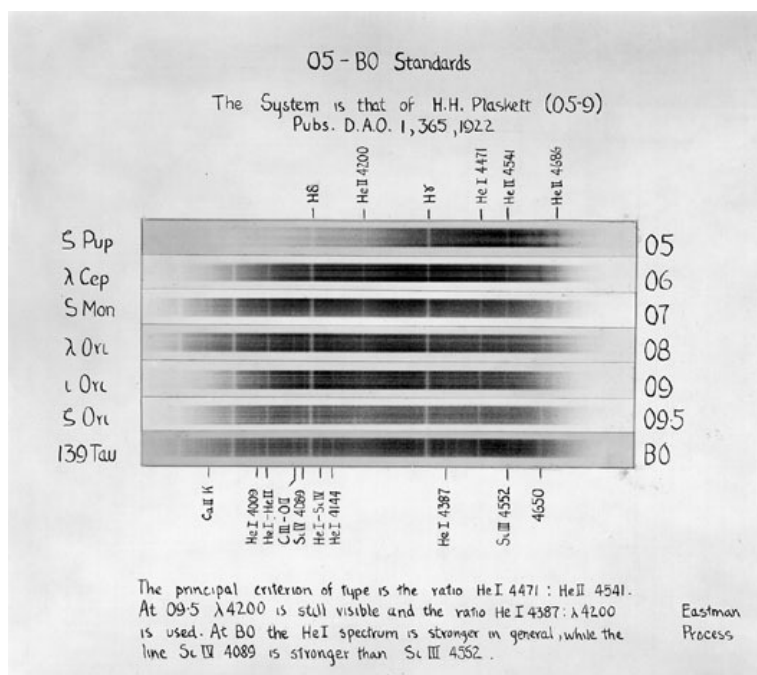


Figura 4.4: Gli spettri su lastra fotografica da O5 a B0.

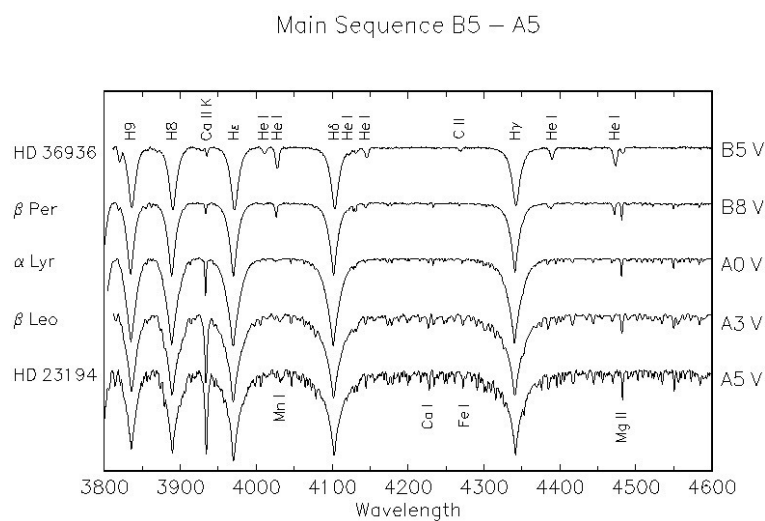


Figura 4.5: Gli spettri su digitale fotografica da B5 a A5.

Capitolo 5

Il sole , trattamento semplice

In questo capitolo si tratta di problemi inerenti allo studio della struttura e dell'evoluzione della stella. Si incomincia riassumendo le principali caratteristiche fisiche del sole , per poi analizzarne in dettaglio la struttura interna e generalizzare il discorso a tutte le stelle. In seguito si tratta della vita delle stelle partendo dalla descrizione della formazione stellare ed arrivando fino ad illustrare come muore un astro.

5.1 Il Sole - quadro generale

Prima di addentrarsi nello studio della struttura interna del sole, si vogliono riassumere le caratteristiche approssimate generali: Il diametro apparente visto dalla Terra a occhio nudo risulta

$$D_{\odot} = 32' \quad , \quad (5.1)$$

la distanza Terra-Sole è

$$d_{t-\odot} = 1.5^{13} cm \quad . \quad (5.2)$$

La massa che si ottiene con le leggi della meccanica

$$M_{\odot} = 2 \cdot 10^{33} g \quad , \quad (5.3)$$

Il raggio che si ottiene da distanza e diametro angolare è

$$R_{\odot} = 7 \cdot 10^{10} cm \quad , \quad (5.4)$$

da cui il volume risulta

$$V_{\odot} = 1.4 \cdot 10^{33} \text{ cm}^3 \quad , \quad (5.5)$$

e la densità

$$\rho_{\odot} = 1.4 \text{ g/cm}^3 \quad , \quad (5.6)$$

Si nota perciò che il sole è un corpo molto grande, ma poco denso. Esso irraggia continuamente e l' energia emessa al secondo è detta luminosità solare L_{\odot} : sulla terra giunge una certa energia per unità di superficie e di tempo F e se si tiene conto che l' irraggiamento è isotropo si capisce che l' energia sarà distribuita uniformemente sulla superficie sferica che ha come centro il Sole per cui si ha

$$L_{\odot} = 4 \pi d_{t-\odot}^2 F \quad (5.7)$$

e poichè il flusso di energia misurato vale , o costante solare è :

$$F = 2 \frac{\text{Cal}}{\text{cm min}} = 1.4 \cdot 10^6 \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \text{ sec}} \quad (5.8)$$

si ha

$$L_{\odot} = 4 \cdot 10^{33} \frac{\text{erg}}{\text{sec}} \quad (5.9)$$

La temperatura superficiale è determinata mediante la legge di Wien e risulta

$$T_{\odot} = 5800 \text{ K} \quad (5.10)$$

L' analisi delle righe di assorbimento permette di risalire agli elementi che compongono l' atmosfera stellare : X, Y, Z sono le frazioni di massa rispettivamente per idrogeno , elio e elementi pesanti. e si ha

$$X = 0.72 \quad Y = 0.72 \quad Z = 0.02 \quad . \quad (5.11)$$

Si noti infine che si definiscono elementi pesanti tutti quelli al di là dell' elio e che nell' atmosfera solare le frazioni di massa sono analoghe a quelle della crosta terrestre. Per coloro i quali vogliono avere i dati piu' precisi del sole riportiamo la seguente tabella estratta da [Nuovo Allen 2000].

Tabella 5.1: Tabella dei parametri del Sole

<i>Quantità</i>	<i>valore</i>	<i>unità</i>
<i>Raggio solare</i>	$(6.95508 \pm 0.00026) 10^{10}$	<i>cm</i>
<i>distanza terra – sole</i>	$1.495979 10^{13}$	<i>cm</i>
<i>Massa solare</i>	$1.989 10^{33}$	<i>g</i>
<i>Volume solare</i>	$1.4122 10^{33}$	<i>cm</i> ³
<i>densità</i>	1.409	<i>g cm</i> ⁻³
<i>costante solare</i>	$(1.365 - 1.369) 10^6$	<i>ergcm</i> ⁻² <i>s</i> ⁻¹
<i>Temperatura effettiva</i>	5777	<i>K</i>

5.2 Struttura del Sole

Visto che il Sole è stabile per tempi molto lunghi e che possiede forma sferica, per studiare la sua struttura si può ipotizzare che sia in equilibrio idrostatico e che goda di simmetria sferica. L' equilibrio idrostatico è espresso dalla legge di Stevino

$$\frac{dp}{dr} = -\rho g \quad , \quad (5.12)$$

dove ρ è la pressione , r è il raggio e g la accelerazione di gravità . La gravità varia con il raggio e può essere espressa da

$$g(r) = G \frac{M(r)}{r^2} \quad , \quad (5.13)$$

dove $M(r)$ è la massa contenuta contenuta nel raggio r e G è la costante di gravitazione universale , da cui la (5.12) diviene, tenendo conto che anche la densità varia con il raggio

$$\frac{dp}{dr} = -G \frac{M(r)\rho(r)}{r^2} \quad , \quad (5.14)$$

che è l' *equazione di equilibrio statico* . Una seconda condizione che è valida nello studio della struttura solare è l' equazione di continuità: la massa di un guscio sferico di raggio sarà

$$dM = 4\pi r^2 \rho(r) dr \quad . \quad (5.15)$$

A questo punto si può fare l' approssimazione, in una trattazione semplificata di densità costante ($\rho_{\odot} = 1.4 \text{ g/cm}^2$) per valutare la pressione centrale ρ_c . Si ha considerando che in superficie la pressione è nulla

$$\int_0^{\rho_c} d\rho = - \int_{R_{\odot}}^0 \rho g(r) dr \quad (5.16)$$

da cui

$$\rho_c = \int_0^{R_{\odot}} \rho G \frac{M(r)}{r^2} = \int_0^{R_{\odot}} \rho^2 G \frac{4}{3} \pi r^3 \frac{1}{r^2} dr = \rho^2 G \frac{4}{3} \pi \frac{R_{\odot}^2}{2} = 1.3 \cdot 10^{15} \text{ dyne/cm}^2 \quad . \quad (5.17)$$

Ottenuta la pressione , si può calcolare la temperatura: il Sole e molte altre stelle approssimano bene le condizioni di gas perfetto , per cui si può scrivere l' equazione:

$$p = nKT \quad , \quad (5.18)$$

dove K è la costante di Boltzmann, T è la temperatura ed n il numero di particelle per unità di volume. Il problema è quindi di stabilire quante siano le n particelle libere per unità di volume nel Sole. Se esso fosse costituito soltanto da idrogeno , il numero di atomi per unità di volume sarebbe dato da n

$$n_1 = \frac{\rho}{A_1 H} X_1 \quad , \quad (5.19)$$

Capitolo 6

Il sole , trattamento dettagliato

Per incominciare il nostro studio sulla struttura stellare riassumiamo i dati sulla stella che conosciamo meglio , il nostro sole. Le orbite planetarie e la costante gravitazionale G ci permettono di derivare la sua massa; le nostre conoscenze sulla distanza terra-sole permettono di ricavare il suo raggio; le misure della radiazione solare e la spettroscopia permettono di ricavare luminosità e temperatura e le misure radiometriche sui meteoriti permettono di ricavare l'età del sistema solare. Riassumendo abbiamo

$$\begin{aligned}M_{\odot} &= 1.99 \times 10^{33} \text{ g} \\R_{\odot} &= 6.96 \times 10^{10} \text{ cm} \\L_{\odot} &= 3.86 \times 10^{33} \text{ erg s}^{-1} \\T_{\text{eff}} &= 5780 \text{ K} \\\tau_{\odot} &= 4.6 \text{ Gyr.}\end{aligned}$$

Comunque, la composizione del sole è ben conosciuta; i cinque elementi più abbondanti sono H, He(-1.07), N(-4.22), O(-3.34), e C(-3.61), dove il numero in parentesi è $\log(n_{\text{el}}/n_{\text{H}})$, l'abbondanza relativa all'idrogeno.

6.1 Equazione del moto fluida

Possiamo descrivere una stella derivando le equazioni differenziali per densità, pressione, temperatura, luminosità e composizione. Su scale

che sono lunghe rispetto al cammino libero collisionale, possiamo trattare il fluido come un mezzo continuo. In pratica si suppone che possiamo trovare una scala che è infinitesimale rispetto alla scale macroscopiche ma ancora più grande rispetto alle interazioni microscopiche. Come conseguenza, possiamo definire le quantità termodinamiche (che hanno senso solo se abbiamo un campione molto grande di particelle) ad un dato punto (il che significa che il nostro campione occupa un volume piccolo rispetto al volume della stella), Consideriamo questo piccolo volume V . La sua massa è $M = \int_V \rho dV$, dove ρ è la densità di massa. Se $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ è la velocità, allora il flusso di massa nell' elemento è

$$-\int_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV \quad (6.1)$$

dove il membro di destra segue dalla conservazione della massa. where the right-hand side follows from mass conservation. Usando la legge di Gauss per trasformare la parte di sinistra in un integrale su V e combinando i termini, abbiamo

$$\int_V \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right\} dV = 0. \quad (6.2)$$

Dato che questa equazione vale per ogni V , l' integrando deve svanire, e abbiamo la nostra prima equazione

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (6.3)$$

La prossima equazione è in analogia con la seconda legge del moto di Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Ignorando effetti di viscosità, la forza netta esercitata sull'elemento di fluido (nel volume V) è dovuta alla pressione sopra la sua superficie P ed al gradiente del potenziale gravitazionale Φ :

$$\int_V \rho \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} dV = \int_V \mathbf{F} dV = - \int_V \rho \nabla \Phi dV - \int_{\partial V} P d\mathbf{S}. \quad (6.4)$$

Trasformando il secondo integrale sul membro di destra in un integrale di volume e assumendo che $\nabla \Phi$ and ∇P vari su lunghezze macroscopiche arriviamo ad una equazione per l' accelerazione

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\nabla \Phi - \frac{1}{\rho} \nabla P. \quad (6.5)$$

dove $\mathbf{r}(t)$ è la posizione della in maniera che la il membro di sinistra indichi l' accelerazione. Qui dobbiamo fare attenzione: la velocità del fluido è specificata dal campo $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ che si riferisce alla velocità del fluido in un dato punto nello spazio e ad un dato istante temporale, *non* alla velocità di una data particella. Un elemento di fluido può accelerare anche se $\partial_t \mathbf{u} = \mathbf{0}$ in virtù del fatto che si muove in una locazione differente. Al tempo t questa particella ha la velocità

$$\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_t = \mathbf{u}(\mathbf{x} = \mathbf{r}|_t, t) \quad (6.6)$$

dove usiamo il fatto che la particella si muove lungo una linea di flusso del fluido. At un tempo leggermente superiore di un fattore h , la particella si è mossa ad una locazione $\mathbf{r}(t+h) \approx \mathbf{r}(t) + h\mathbf{u}$, e la sua velocità è quindi

$$\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{t+h} = \mathbf{u}(\mathbf{x} = \mathbf{r}|_{t+h}, t+h) \approx \mathbf{u} + h(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \partial_t \mathbf{u}), \quad (6.7)$$

dove valutiamo le derivate al tempo t . Sottraendo l'equazione (6.6) dall'equazione (6.7) e dividendo per h otteniamo l'accelerazione; inserendo questa nella seconda legge del moto di Newton e dividendo per il volume otteniamo l'equazione del moto di Eulero

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla \Phi - \frac{1}{\rho} \nabla P. \quad (6.8)$$

Le equazioni (6.3) e (6.8) formano le prime due equazioni che ci servono per descrivere la struttura stellare.

$$\partial_t(\rho u_i) + \partial_j(\rho u_i u_j) = -\rho \partial_i \Phi - \partial_i P, \quad (6.9)$$

dove i pedici i denotano le componenti e i pedici ripetuti indicano una somma. I termini sulla parte sinistra vanno interpretati come conservazione del momento.

6.2 Stima delle proprietà solari

Le equazioni (6.3) e (6.8) ci danno la possibilità di stimare in prima approssimazione, molte delle proprietà delle stelle. Prima cosa

consideriamo la scala per ogni termine nell' equazione (6.8),

$$\underbrace{\partial_t \mathbf{u}}_I + \underbrace{\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}}_II = - \underbrace{\nabla \Phi}_{III} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \nabla P}_{IV}$$

Per una “caratteristica” velocità U e lunghezza scala R , vediamo che i termini I e II sono ambedue dell' ordine di $\sim U^2/R$ (il tempo scala è R/U). Per il termine III, notiamo che $GM/R^2 = (GM/R)/R \sim U_{\text{esc}}^2/R$, dove U_{esc} è la velocità di fuga. Inoltre a riguardo del termine IV, $(P/\rho)/R \sim c_s^2/R$, dove c_s è la velocità del suono. Quindi le scale tipiche dei termini sono

$$I : II : III : IV \sim U^2 : U^2 : U_{\text{esc}}^2 : c_s^2$$

A meno che non si abbia a che fare con le esplosioni stellari i termini sul lato di sinistra sono trascurabili, quindi i due termini sul lato destro si bilanciano e la stella è in equilibrio idrostatico

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{Gm(r)}{r^2}. \quad (6.10)$$

Notate che questo non significa che \mathbf{u} e \mathbf{a} siano nulli; semplicemente che essi non sono importanti per stabilire la struttura meccanica della stella. Un vantaggio delle scale suggerite è che $c_s \sim U_{\text{esc}} \sim (GM_{\odot}/R_{\odot})^{1/2}$. Possiamo usare questo argomento per ottenere una valutazione della temperatura centrale del sole in termini di M_{\odot} and R_{\odot} : $T_{\odot, \text{center}} \sim 10^7$ K, assumendo che l' equazione di stato sia quella di un gas ideale, $P = (n_{\text{ion}} + n_e)k_B T$.

6.2.1 Un esempio : il collasso libero

Supponiamo che ogni particella del sole sia rimpiazzata da una particella fredda non interagente. Per un collasso a simmetria sferica seguiamo il moto di un osservatore sulla sua superficie. La massa nella zona interiore rispetto all' osservatore vale $M = M_{\odot}$, cosicchè l' equazione del moto è

$$\frac{du}{dt} = -\frac{GM}{r(t)^2}. \quad (6.11)$$

Moltiplicando ambo i membri per $u = dr/dt$ e integrando otteniamo

$$\frac{1}{2}u^2 = GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right),$$

dove $R = r(t = 0)$. Definendo $x = r/R$ otteniamo

$$\frac{dx}{dt} = \left[2 \frac{GM}{R^3} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \right]^{1/2}. \quad (6.12)$$

Adesso, GM/R^3 ha dimensioni [time⁻²]; inoltre, $M/R^3 = 4\pi\bar{\rho}/3$, dove $\bar{\rho}$ è la densità media all' inizio del collasso. Per il sole, $\bar{\rho} = 1.4 \text{ g cm}^{-3}$, e quindi leggermente più denso del lettore. Quindi, possiamo definire

il **tempo scala dinamico**

as $t_{\text{dyn}} \equiv (G\bar{\rho})^{-1/2}$. Per il sole, $t_{\text{dyn}} \approx 1 \text{ hr}$. Definendo $\tau = t/t_{\text{dyn}}$ nell' equazione (6.12) otteniamo un problema matematico,

$$\frac{dx}{d\tau} = \left(\frac{8\pi}{3} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{x} - 1 \right)^{1/2}$$

che può essere integrato da $x = 1$ to $x = 0$ per ottenere

$$t_{\text{collapse}} = \left(\frac{3\pi}{32} \right)^{1/2} t_{\text{dyn}} \approx 0.5 \text{ hr}$$

che è il tempo di collasso del sole se tutta la pressione cessa di esistere. Esiste un altro modo di ricavare l'equazione (6.10): se i termini III e IV sono fuori equilibrio di poco il tempo caratteristico di aggiustarsi meccanicamente è molto piccolo.

6.2.2 Dettagli sull' equilibrio idrostatico

Se il centro del sole è quindi alla temperatura di $\sim 10^7 \text{ K}$, allora il gas dovrebbe essere ionizzato. Gli elettroni sono molto più leggeri degli ioni e quindi le cariche dovrebbero separarsi con lunghezze scala differenti. In questo caso dovrebbe stabilirsi un campo elettrico. Per un plasma di idrogeno dovremmo avere *due* equazioni per l'equilibrio idrostatico, una per gli elettroni e l' altra per i protoni,

$$\nabla P_p = n_p m_p \mathbf{g} + n_p e \mathbf{E} \quad (6.13)$$

$$\nabla P_e = n_e m_e \mathbf{g} - n_e e \mathbf{E}. \quad (6.14)$$

Quindi $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_r$ è l'accelerazione gravitazionale e \mathbf{E} è il campo elettrico. Notate che se *presumiamo* che il plasma sia neutro da un punto di vista delle cariche allora $\nabla(P_p + P_e) = \rho\mathbf{g}$, e possiamo ricavare il campo elettrico \mathbf{E} . *Ovviamente, dobbiamo avere una separazione di cariche per stabilire il campo elettrico all'inizio, ma si può dimostrare che la frazione di separazione di carica deve essere piccola.*

6.3 Considerazioni sull'energia

Per un gas a simmetria sferica in equilibrio idrostatico la massa inclusa nel raggio r soddisfa l'equazione differenziale $dm/dr = 4\pi r^2 \rho$. Risolvendo per ρ , sostituendo nell'equazione del bilancio idrostatico, equazione (6.10), e rimettendo in ordine i termini otteniamo

$$4\pi r^3 \frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r} \frac{dm}{dr}.$$

Integrando ambedue i membri da $r = 0$ a $r = R$, e cambiando variabili sul termine di destra da r a m abbiamo

$$\int_0^R 4\pi r^3 \frac{dP}{dr} dr = -3 \int_V P dV = - \int_0^M \frac{Gm}{r(m)} dm = E_{\text{grav}}, \quad (6.15)$$

dove abbiamo integrato per parti il membro di sinistra, usato il fatto che $P(R) \ll P(0)$, e rimpiazzato $4\pi r^2 dr$ con dV . Adesso la pressione è correlata con l'energia termica (cinetica) per unità di volume U . Per un gas ideale non-relativistico, $P = 2U/3$; per un gas relativistico, ad esempio di fotoni, $P = U/3$. Definendo $\gamma = (P + U)/U$, possiamo scrivere che l'energia totale della nostra sfera gassosa vale

$$\begin{aligned} E &= E_{\text{th}} + E_{\text{grav}} = \int U dV - 3 \int P dV \\ &= \frac{1 - 3(\gamma - 1)}{\gamma - 1} \int P dV = \frac{3(\gamma - 1) - 1}{3(\gamma - 1)} E_{\text{grav}}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Questa formula è semplicemente un' applicazione del teorema del viriale alla nostra stella.

Come primo esempio, consideriamo una stella con pressione data da un gas ideale non relativistic. Allora $\gamma = 5/3$ e l'energia totale è *Questo è vero anche se la materia è degenera.*

$$E = \frac{1}{2} E_{\text{grav}} < 0.$$

La stella è confinata. Come secondo esempio consideriamo una stella così luminosa che la pressione di radiazione è dominante. In questo caso, la pressione è quella di un gas relativistico; quindi $\gamma = 4/3$ and $E = 0$: la stella è confinata solo marginalmente. Dobbiamo quindi mettere in dubbio la stabilità di una stella molto luminosa.

Adesso supponiamo che il sole si contragga molto lentamente in modo che l'equilibrio idrostatico continui a valere. Quanto tempo dura la contrazione? Il tempo necessario a irradiare tutta l'energia termica definisce il **il tempo scala di Kelvin-Helmholtz**,

$$t_{\text{KH}} \equiv \frac{E_{\text{th}}}{L} \approx \frac{GM_{\odot}^2}{2R_{\odot}L_{\odot}} = 16 \text{ Myr.} \quad (6.17)$$

Nei calcoli precedenti abbiamo usato l'approssimazione che $E_{\text{grav}} = -GM_{\odot}^2/R_{\odot}$; in effetti il profilo di densità del sole è tale che E_{grav} è più vicino a $-(3/2)GM_{\odot}^2/R_{\odot}$.

Il tempo scala stimato è molto minore dell'età della terra, ed i fossili indicano che il sole non è cambiato nell'arco di miliardi di anni. Quindi deve esserci una sorgente di energia necessaria a mantenere l'interno della stella in stato stazionario da un punto di vista termico. L'ordine di grandezza dell'energia rilasciata per Gyr integrata su tutta la vita media del sole, vale

$$\frac{\Delta E}{N} \approx \frac{L_{\odot} \times 4.6 \text{ Gyr}}{N} \approx 0.2 \text{ MeV.}$$

Questa è molto più grande dell'energia rilasciata nelle reazioni chimiche *tipica scala di energia* 1 eV. Il sole deve quindi essere alimentato dalle reazioni nucleari.

6.4 Qualche limite analitico

Possiamo adoperare il teorema del viriale della precedente sezione per mettere alcuni limiti sulla pressione interiore di qualsivoglia stella. La massa $m(r)$ dentro ad un volume di raggio r è

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho r^2 dr,$$

cosicchè $dm/dr = 4\pi r^2 \rho$. Combinando questa relazione con l'equazione dell'equilibrio idrostatico abbiamo

$$\frac{dP}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}.$$

Integrando questa equazione partendo dal centro, dove $P = P_c$, fino al raggio r abbiamo

$$P_c - P(r) = \frac{G}{4\pi} \int_0^r \frac{m dm}{r^4}. \quad (6.18)$$

La densità media inclusa in una sfera di raggio r è $\bar{\rho}(r) = 3m(r)/(4\pi r^3)$; risolvendo per r ed inserendo il risultato nell'equazione (6.18) gives abbiamo

$$P_c - P(r) = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{4/3} \frac{G}{4\pi} \int_0^{m(r)} \bar{\rho}(r)^{4/3} m^{-1/3} dm. \quad (6.19)$$

La densità deve decrescere andando dal centro verso l'esterno, questo perchè una configurazione con un fluido pesante sopra fluido leggero non è stabile e quindi la densità media $\bar{\rho}(r)$ deve decrescere andando verso l' esterno. Quindi

$$\rho_c \geq \bar{\rho}(r) \geq \bar{\rho}(R) = \frac{3M}{4\pi R^3}.$$

Inserendo questa diseuguaglianza nell' equazione (6.19) e facendo una valutazione a $r = R$ otteniamo un vincolo sulla pressione centrale,

$$\frac{3}{8\pi} \frac{GM^2}{R^4} \leq P_c \leq \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} \rho_c^{4/3} GM^{2/3}. \quad (6.20)$$

Il punto critico è realizzare che come ordini di grandezza: $P_c \sim GM^2/R^4$. L' unica assunzione che facciamo mettendo i limiti a (eq. [6.20]) è che la densità decresce dal centro alla periferia.

6.5 Trasporto dell' energia

Abbiamo ricavato che con la luminosità attuale al sole necessitano circa ~ 16 Myr per irradiare la sua energia termica interna. Questo fatto origina una questione interessante: quale meccanismo fisico origina la luminosità? Per sviluppare questo argomento scriviamo la luminosità come luminosità $\sim \frac{\text{energia di radiazione immagazzinata nel sole}}{\text{tempo di fuga dei fotoni}}$. Per avere l'energia di radiazione immagazzinata nel sole, moltiplichiamo la densità di una distribuzione termica di fotoni, alla temperatura centrale del sole per il volume del sole:

$$E_\gamma = aT_c^4 \times \frac{4\pi}{3} R_\odot^3. \quad (6.21)$$

Quale può essere il tempo di fuga dei fotoni? Come primo tentativo assumiamo che il sole sia trasparente cosicchè i fotoni possano irradiare liberamente. Allora il tempo di fuga dei fotoni sarà R_{\odot}/c . Questo da origine ad una luminosità troppo grande. *Fra l'altro, un sole trasparente non produrrà uno spettro termico di energia, poichè non c'è modo per i fotoni di entrare in equilibrio termico con la materia* Supponiamo invece che ogni fotone possa solamente percorrere una piccola distanza ℓ prima che sia scatterato in una direzione random. Nel moto random, la distanza totale che un fotone percorre prima di lasciare il sole vale $R_{\odot}(R_{\odot}/\ell)$. In questo caso il flusso del sole sarebbe

$$F = \frac{L_{\odot}}{4\pi R_{\odot}^2} \sim \frac{(4\pi/3)R_{\odot}^3 aT_c^4}{4\pi R_{\odot}^2} \frac{c\ell}{R_{\odot}^2} = \frac{1}{3}\ell c \frac{aT_c^4}{R_{\odot}}. \quad (6.22)$$

Questa è una valutazione molto approssimata ma possiamo usarla per stimare che $\ell \sim 10^{-3}$ cm. La distanza media che un fotone può percorrere prima di essere assorbita o scatterata è chiamata **libero cammino medio**. Dato il valore di ℓ trovato con l'equazione (6.22), possiamo stimare il numero totale di urti che un fotone deve compiere prima di uscire dal sole; è un numero molto grande e difatti il sole è opaco.

Capitolo 7

Evoluzione Stellare: Le equazioni Lagrangiane

Adesso dobbiamo ricavare gli strumenti per attaccare l'evoluzione stellare. Il primo obiettivo è ricavare le equazioni macroscopiche per l'evoluzione stellare. Partiamo dall'equazione che esprime la conservazione della massa, del momento e dell'energia. *Invece in un contesto relativistico, partiremmo dalla conservazione del numero di barioni poichè la massa non è un invariante.* L'equazione di continuità che rappresenta la conservazione della massa è

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (7.1)$$

e l'equazione di Eulero

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla \Phi - \frac{1}{\rho} \nabla P. \quad (7.2)$$

Notate che se moltiplichiamo eq. (7.2) per ρ , possiamo riscriverlo, usando eq. (7.1), come

$$\partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot [\mathbf{u} (\rho \mathbf{u})] = -\rho \nabla \Phi - \nabla P. \quad (7.3)$$

Il membro di sinistra esprime la conservazione del momento ($\rho \mathbf{u}$) in assenza di forze, in analogia con l'eq. (7.1) per la conservazione della massa (ρ). Notate la forma generale per l'equazione della conservazione

$$\begin{aligned} &\partial_t(\text{quantità conservata}) \\ &+ \nabla \cdot (\text{flusso della quantità conservata}) = (\text{sorgenti}) - (\text{perdite}). \end{aligned}$$

Dato che la densità del momento $\rho\mathbf{u}$ è un vettore, il suo flusso è un tensore: $[\mathbf{u}(\rho\mathbf{u})]_{ij} \equiv \rho u_i u_j$. Il fattore $\rho u_i u_j$, è il momento lungo la direzione i che è trasportato lungo la direzione j .

La prossima equazione è quella della conservazione dell'energia. Dobbiamo quindi considerare sia l'energia interna per unità di volume $E/V = \rho\varepsilon$ sia l'energia cinetica per unità di volume $\rho u^2/2$. In questa sezione ε rappresenta l'energia interna per unità di massa del fluido. In un volume fissato l'energia totale del fluido è quindi

$$\int_V \left(\rho \frac{1}{2} u^2 + \rho\varepsilon \right) dV.$$

Il flusso di energia in questo volume conterrà

$$- \int_{\partial V} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho\varepsilon \right) \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}.$$

In più avremo il flusso convettivo di calore \mathbf{F} ; quindi il flusso totale condotto attraverso la superficie ∂V è

$$- \int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Quindi, la pressione che agisce su un fluido che attraversa il nostro volume lavora sul gas al tasso

$$- \int_{\partial V} P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}.$$

Come risultato, il cambio di energia nel nostro volume vale

$$\begin{aligned} \partial_t \int_V \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho\varepsilon \right) dV = & \\ & - \int_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot \left[\mathbf{u} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho\varepsilon + P \right) + \mathbf{F} \right] \\ & + \int_V (\rho\mathbf{u} \cdot \mathbf{g} + \rho q) dV. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Sul lato destro abbiamo aggiunto il lavoro fatto dalla gravità ed il riscaldamento fatto dalle reazioni nucleari (queste ultime possono prevedere perdite come ad esempio i neutrini che hanno cammino libero medio molto grande). Quando espressa in forma differenziale l'equazione (7.4) è

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho\varepsilon \right) + \nabla \cdot \left[\rho\mathbf{u} \left(\frac{1}{2} u^2 + \varepsilon + \frac{P}{\rho} \right) \right] + \nabla \cdot \mathbf{F} = \rho q + \rho\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}. \quad (7.5)$$

A questo punto vi sareste chiesti perchè non compare la gravità, che potrebbe essere espressa come un potenziale sul lato destro di questa equazione. La ragione è che gli sforzi gravitazionali non possono essere espressi in una forma conservativa locale; e solamente quando si integra su tutto lo spazio che le forze conservative appaiono. Le equazioni (7.1), (7.3), e (7.5) sono integrate da una equazione di stato: ciò permette di ricavare dalla pressione P , la temperatura T , la frazione di massa X_i delle specie presenti, le rimanenti quantità termodinamiche come densità di massa ρ ed energia specifica ε . In aggiunta l'equazione di Poisson

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho, \quad (7.6)$$

specifica l'accelerazione gravitazionale $\mathbf{g} = -\nabla\Phi$. A questo punto ci serve un'ulteriore equazione per specificare il flusso di calore F . La tipica lunghezza che un fotone percorre prima di essere scatterato è molto piccola rispetto alla lunghezza scala sulla quale le grandezze macroscopiche della stella variano. In questo caso ci aspettiamo che il flusso obbedisca ad una equazione della conduzione del tipo

$$\mathbf{F} = -K\nabla T. \quad (7.7)$$

Questa assunzione è chiaramente discutibile vicino alla superficie della stella, e non abbiamo specificato la forma di K . Questa equazione comunque chiude il sistema di equazioni; tutta la fisica è dunque contenuta nell'equazione di stato $P(\rho, T, \{X_i\})$, nel tasso di riscaldamento delle equazioni nucleari $q(\rho, T, \{X_i\})$, e la conduttività termica $K(\rho, T, \{X_i\})$. Qui $\{X_i\}$ sono le frazioni di massa degli isotopi che compongono il plasma solare. Ci serve anche un sistema di equazioni per descrivere come X_i cambia come risultato delle equazioni nucleari e della diffusione.

7.1 Termodinamica di una mistura

7.1.1 Specificando la composizione

In questa sezione descriviamo un plasma a molte componenti. Per rendere la trattazione concreta immaginiamo una scatola contenente una mistura di nuclei, di isotopi differenti ed elettroni; ovviamente per semplificare assumeremo ionizzazione completa. Ogni isotopo della specie i ha N_i nuclei, ed è caratterizzato da numero di carica Z_i e

numero di nucleoni A_i . La neutralità di carica specifica il numero di elettroni,

$$N_e = \sum_i Z_i N_i. \quad (7.8)$$

La massa totale della scatola è

$$M = m_e N_e + \sum_i m_i N_i, \quad (7.9)$$

dove m_e e m_i sono rispettivamente la massa dell' elettrone e del nucleo di specie i . Cosa è m_i ? Rompere un nucleo i in Z_i protoni e $A_i - Z_i$ neutroni richiede una data quantità di energia detta *energia di legame* B_i . Possiamo quindi scrivere $m_i = Z_i m_p + (A_i - Z_i) m_n - B_i/c^2$, dove m_p e m_n sono rispettivamente le masse a riposo di protoni e neutroni. Inserendo la nostra equazione per m_i nell'equazione (7.9), dividendo per il volume della scatola V , e riordinando i termini otteniamo la densità di massa

$$\rho = \frac{M}{V} = \sum_i n_i \left[(A_i - Z_i) m_n + Z_i (m_p + m_e) - B_i/c^2 \right]. \quad (7.10)$$

Qui n_i è la densità in numeri degli isotopi di specie i , e abbiamo usato l'equazione (7.8) per eliminare N_e . I numeri n_i sono molto grandi, quindi scaliamo i numeri tramite *costante di Avogadro*,

$$N_A = 6.0221367 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}. \quad (7.11)$$

Recall that a **mole** is an amount of something: in 1 mol there are N_A items.

Se moltiplichiamo il lato destro dell'equazione (7.10) per N_A , abbiamo

$$\rho = \sum_i \left(\frac{n_i}{N_A} \right) \mathcal{A}_i, \quad (7.12)$$

dove

$$\mathcal{A}_i = \left[(A_i - Z_i) m_n + Z_i (m_p + m_e) - B_i/c^2 \right] \times N_A \quad (7.13)$$

è il *peso molecolare in grammi* della specie i con dimensioni $[\mathcal{A}] \sim [\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}]$. Il peso molecolare in grammi si riferisce alla massa di una mole dell' isotopo in forma *atomica*; il lato destro dell'equazione (7.13) è il peso molecolare in grammi quando viene omessa l'energia di legame.

A questo punto il lettore si chiederà da dove arriva il valore numerico di N_A . Non è definito per l'aria pura ma piuttosto nel modo che 1 mol di ^{12}C ha una massa di 12 g. In altre parole, per ^{12}C $\mathcal{A} \equiv A \text{ g mol}^{-1}$. Infatti per tutti i nuclei, $\mathcal{A} \approx A \text{ g mol}^{-1}$ con una approssimazione intorno ad 1%, come dimostrato nella Tabella 7.1. Dato che in CGS $\mathcal{A} \approx A$, è usuale scrivere $\mathcal{A} = A \times (1 \text{ g mol}^{-1})$, cosicché l'equazione (7.12) è

$$\rho = \sum_i \left(\frac{n_i}{N_A} \times 1 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \right) A_i. \quad (7.14)$$

Questo è vero solo se la nostra unità di misura è il grammo: in unità SI il ^{12}C ha una massa di $0.012 \text{ kg mol}^{-1}$. L'equazione (7.14) sarebbe giusta se A fosse un numero reale, ma la convenzione è assegnargli il numero di nucleoni, che introduce un errore dell'ordine dell'uno per cento. Gli astronomi normalmente *ridefiniscono* N_A come $N_A(\text{astronomia}) \equiv N_A/(1 \text{ g mol}^{-1}) = 6.0221367 \times 10^{23} \text{ g}^{-1}$.

Alternativamente, si può definire l'unità di massa atomica (simbolo u) come un 1/12 della massa di un atomo di ^{12}C , cosicché $1 \text{ u} = (1 \text{ g mol}^{-1})/N_A = 1.66054 \times 10^{-24} \text{ g}$. Questo ridefinisce l'equazione (7.14) nella più ovvia forma $\rho = \sum n_i \times A_i m_u$, con m_u avente una massa di 1 u.

Tabella 7.1: Alcuni pesi molecolari in grammi.

nuclide	A	\mathcal{A}	$(\mathcal{A} - A /A) \times 100$
n	1	1.00865	0.865
^1H	1	1.00783	0.783
^4He	4	4.00260	0.065
^{16}O	16	15.99491	0.032
^{28}Si	28	27.97693	0.082
^{56}Fe	56	55.93494	0.116

Con la ridefinizione di N_A , l'equazione (7.14) può essere riscritta come

$$1 = \sum_i \left(\frac{n_i}{N_A \rho} \right) A_i \equiv \sum_i Y_i A_i \quad (7.15)$$

dove $Y_i \equiv n_i/(\rho N_A)$ è la *frazione molare*. È prassi comune chiamare $Y_i A_i$ la *frazione di massa* X_i , con $\sum X_i = 1$. Possiamo definire il numero

atomico di massa medio,

$$\bar{A} = \frac{\sum A_i Y_i}{\sum Y_i} = \frac{1}{\sum Y_i}, \quad (7.16)$$

ed il numero medio di carica

$$\bar{Z} = \frac{\sum Z_i Y_i}{\sum Y_i} = \bar{A} \sum Z_i Y_i. \quad (7.17)$$

La frazione molare degli elettroni è

$$Y_e = \sum Z_i \frac{n_i}{\rho N_A} = \sum Z_i Y_i = \frac{\bar{Z}}{\bar{A}}. \quad (7.18)$$

Nei lavori di struttura stellare, è normale adoperare il *peso molecolare medio*, definito in maniera che il numero totale di particelle, inclusi gli elettroni, per unità di volume sia

$$\sum_i n_i + n_e \equiv \frac{\rho N_A}{\mu}. \quad (7.19)$$

Questa è la ridefinizione di N_A : μ è adimensionale. Dalla definizione

$$\mu = \left(\sum_i Y_i + Y_e \right)^{-1} = \left[\sum_i (Z_i + 1) Y_i \right]^{-1};$$

qualche volta gli astronomi definiscono anche il peso molecolare medio degli ioni, $\mu_I = (\sum Y_i)^{-1}$, e il peso medio degli elettroni $\mu_e = Y_e^{-1}$.

7.2 Quantità termodinamiche

In molti libri di termodinamica e meccanica statistica la termodinamica è formulata in termini di qualche campione di dimensioni finite. Per esempio la prima legge dice che

$$dE = TdS - PdV, \quad (7.20)$$

la energia E e l' entropia S sono quantità che scalano con il numero di particelle N nel nostro campione. In un fluido invece queste quantità sono tutte funzioni della posizione. Con $S(r)$, vogliamo dire che possiamo definire una piccola porzione della stella con coordinata r che sia

larga abbastanza per assicurare che quantità come pressione e temperatura siano ben definite, ma piccola abbastanza per trattare $S(r)$ come una funzione continua quando integriamo su tutta intera la stella. Adoperare quantità estensive in meccanica dei fluidi è complicato cosicché adoperiamo quantità come l'energia per unità di massa $\varepsilon = E/(\rho V)$ oppure l'entropia per unità di massa $s = S/(\rho V)$. Dato che una massa fissata di fluido M occupa un volume $V = M/\rho$, possiamo dividere la prima legge, eq. (7.20), per M in modo da ottenere

$$d\varepsilon = Tds - Pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = Tds + \frac{P}{\rho^2}d\rho. \quad (7.21)$$

Le altre variabili possono essere ridefinite in maniera analoga coinvolgendo la massa.

7.3 Le equazioni in forma Lagrangiana

Le equazioni fluide (7.1), (7.3), e (7.5) sono in forma **Euleriana**; cioè, esse descrivono tutto in termini di tempo e coordinate spaziali. Questo non è necessariamente la forma più conveniente per i calcoli pratici. Ecco perchè l'equazione del moto è non lineare. È spesso conveniente mettere le equazioni fluide in forma **Lagrangiana**, in cui le coordinate sono alcune etichette per un elemento di fluido ed il tempo. In 1D, la trasformazione delle equazioni di Lagrange è facile. In un certo punto di riferimento, etichettiamo la massa racchiusa da un guscio di raggio r

$$m(r, t) = \int_0^r \rho(r', t) 4\pi r'^2 dr', \quad (7.22)$$

come una coordinata Lagrangiana m ; Trasformiamo poi le coordinate da (r, t) a (m, t) . Per fa ciò differenziamo eq. (7.22) rispetto a r ,

$$\partial_r m = 4\pi r^2 \rho,$$

e sostituiamo per ρ nell'equazione della continuità (eq. [7.1]). Il primo termine diventa

$$\partial_t \rho = \partial_t \left(\frac{1}{4\pi r^2} \partial_r m \right) = \frac{1}{4\pi r^2} \partial_r (\partial_t m),$$

mentre il secondo termine diventa

$$\frac{1}{4\pi r^2} \partial_r (u \partial_r m);$$

e quindi l' equazione della continuità diventa

$$\frac{1}{4\pi r^2} \partial_r (\partial_t m + u \partial_r m) = 0. \quad (7.23)$$

Possiamo integrare su r per trovare che $\partial_t m + u \partial_r m = f(t)$, dove $f(t)$ è una funzione non ancora specificata; per trovare $f(t)$, notiamo che essendo $m(0, t) = 0$, $\forall t$, dobbiamo avere $f(t) = 0$. Adesso $\partial_t m + u \partial_r m = Dm/Dt = 0$, cosicchè lungo una linea di flusso, m è una costante. Possiamo quindi trasformare dalle coordinate (r, t) a (m, t) imponendo

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_r + u \left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_t = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_m \equiv \frac{D}{Dt} \quad (7.24)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_t = 4\pi r^2 \rho \left. \frac{\partial}{\partial m} \right|_t. \quad (7.25)$$

Quì $D/Dt \equiv (\partial/\partial t)_m$ è la derivata temporale lagrangiana. Nel fare questo cambio abbiamo usato l' equazione di continuità, che diventa

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}. \quad (7.26)$$

La nostra equazione per il momento (eq. [7.2]) diventa

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} - \frac{1}{4\pi r^2} \frac{Du}{Dt}. \quad (7.27)$$

In presenza di equilibrio idrostatico il secondo termine del lato destro è trascurabile. L' equazione del flusso, (eq. [7.7]) può essere trasformata in

$$\frac{\partial T}{\partial m} = -\frac{1}{16\pi^2 r^4 \rho K} L_r \quad (7.28)$$

Quì L_r è il flusso luminoso al raggio r . L' equazione dell' energia (eq. [7.5]) è più complicata. Possiamo espandere la derivata temporale come

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho \varepsilon \right) &= \left(\frac{1}{2} u^2 + \varepsilon \right) \partial_t \rho + \rho \partial_t \left[\frac{1}{2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + \varepsilon \right] \\ &= - \left(\frac{1}{2} u^2 + \varepsilon \right) \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + \rho \mathbf{u} \partial_t \mathbf{u} + \rho \partial_t \varepsilon, \end{aligned}$$

adoperando (7.1) per sostituire in $\partial_t \rho$. Adoperiamo poi equazione (7.2) per rimpiazzare $\partial_t \mathbf{u}$, e sapendo che $\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \nabla [(1/2)u^2]$, riscriviamo l'equazione (7.5) come

$$\rho(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla) \varepsilon + P \nabla \cdot \mathbf{u} = -\nabla \cdot \mathbf{F} + \rho q \quad (7.29)$$

dove abbiamo cancellato i fattori comuni. Per finire, adoperiamo di nuovo equazione (7.1) per fissare

$$P \nabla \cdot \mathbf{u} = -(P/\rho)(\partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho) = \rho P (\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla) \left(\frac{1}{\rho} \right).$$

Sostituendo questo nel lato sinistro dell'equazione (7.29) e adoperando la prima legge della termodinamica (vedi eq. [7.21]), otteniamo

$$\rho(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla) \varepsilon + P \nabla \cdot \mathbf{u} = \rho T (\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla) s. \quad (7.30)$$

A riguardo del lato destro dell'equazione (7.29), espandiamo l'operatore divergenza in simmetria sferica e adoperiamo equazione (7.25) per ottenere

$$-\nabla \cdot \mathbf{F} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F)}{\partial r} = -\rho \frac{\partial L_r}{\partial m}.$$

Mettendo tutto insieme, otteniamo finalmente la nostra equazione del calore in forma lagrangiana,

$$\frac{\partial L_r}{\partial m} = q - T \frac{Ds}{Dt}. \quad (7.31)$$

Questa ha un'interpretazione semplice: il cambio in luminosità lungo uno strato di massa è dovuto alle sorgenti di energia e al cambio del contenuto di calore nello strato. È più utile, comunque lavorare con temperatura e pressione invece che con l'entropia. Scriviamo

$$T \frac{Ds}{Dt} = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_P \frac{DT}{Dt} + T \left(\frac{\partial s}{\partial P} \right)_T \frac{DP}{Dt},$$

e adoperiamo le proprietà termodinamiche

$$\left(\frac{\partial s}{\partial P} \right)_T = - \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_s$$

per ottenere

$$\frac{\partial L_r}{\partial m} = q - c_P \left[\frac{DT}{Dt} - \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_s \frac{DP}{Dt} \right]. \quad (7.32)$$

Le equazioni (7.26), (7.27), (7.28), e (7.32), quando provviste di un'equazione di stato, una prescrizione per la conducibilità termica, e le equazioni per il riscaldamento nucleare e raffreddamento del neutrino formano le equazioni per la struttura ed evoluzione stellare in simmetria sferica.

Capitolo 8

La convezione

L'aria calda si alza, come può dirti un aliante o un falco. Le velocità del fluido in questione sono molto subsoniche, e quindi abbiamo un equilibrio idrostatico con un' approssimazione accettabile. Ma i movimenti fluidi hanno un' enorme differenza per il trasporto del calore! Questo stato di movimenti fluidi indotto da un gradiente di temperatura è noto come *convezione*.

8.1 Criteri per la apparizione della convezione

Per capire questo processo, consideriamo un fluido in geometria piana ed in equilibrio idrostatico.

$$\frac{dP}{dr} = -\rho g. \quad (8.1)$$

Adesso, immaginiamo di muovere un elemento di fluido da r to $r + h$. Muoviamo l' elemento di fluido in modo che sia in equilibrio idrostatico con i suoi nuovi vicini, $P_b(r + h) = P(r + h)$, dove l' indice b si riferisce all' "elemento". L' elemento di fluido non si deve muovere troppo velocemente in ordine di non uscire dall' equilibrio termico con i suoi vicini; ovverosia l' elemento si muove in modo adiabatico. L' entropia dell' elemento è quindi costante, $S_b(r + h) = S_b(r) = S(r)$, e quindi in generale non uguale all' entropia de gas circostante a $r + h$: $S_b(r + h) \neq S(r + h)$. Quando il fluido sale sposta il fluido vicino. Archimede ci dice che se il

fluido spostato è più leggero, allora l'elemento affonderà. Possiamo riformulare ciò in termini di volume occupato dall'unità di massa del fluido V : se il volume occupato dall'elemento è minore del volume di uguale massa dei dintorni allora l'elemento affonderà. Traducendo ciò in una equazione: se

$$\begin{aligned} V[P(r+h), S(r+h)] - V_b[P_b(r+h), S_b(r+h)] = \\ V[P(r+h), S(r+h)] - V[P(r+h), S(r)] > 0 \end{aligned} \quad (8.2)$$

allora l'elemento affonderà. Se la condizione (8.2) è violata, allora l'elemento continuerà a salire ed il sistema è di conseguenza instabile alla convezione. Assumendo che h sia uno spostamento infinitesimo ed espandendo il lato di sinistra dell'equazione (8.2) otteniamo una condizione locale per la stabilità:

$$V[P(r+h), S(r)] + \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P \frac{dS}{dr} - V[P(r+h), S(r)] = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P \frac{dS}{dr} > 0. \quad (8.3)$$

Notando che

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P &= \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P \\ &= \frac{C_P}{T} \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P, \end{aligned}$$

possiamo riscrivere l'equazione (8.3) come

$$\frac{T}{C_P} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \frac{dS}{dr} > 0.$$

Adesso, $(\partial V/\partial T)_P$ è positivo (il gas si espande se riscaldato), cosicchè la nostra condizione per la stabilità è semplicemente

$$\frac{dS}{dr} > 0. \quad (8.4)$$

In una stella stabile per la convezione l'entropia deve aumentare con il raggio. Se $dS/dr < 0$, allora la convezione avviene e porta il materiale ad alta entropia verso le zone esterne, dove eventualmente si meschia con l'ambiente circostante. Come risultato, la convezione guida il gradiente di entropia verso una configurazione marginalmente stabile $dS/dr =$

0. Se una stella è completamente convettiva e si mischia a sufficienza allora l' interno di una stella è governato da una adiabatica. Possiamo derivare una condizione per la stabilità convettiva in termini di gradienti locali per la temperatura e pressione. Scrivendo $S = S[P(r), T(r)]$ espandiamo l' equazione (8.4) per ottenere

$$\frac{dS}{dr} = \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T \frac{dP}{dr} + \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P \frac{dT}{dr}. \quad (8.5)$$

Adesso, P è una funzione monotonica decrescente di r , il chè significa che possiamo usarla come coordinata spaziale e scrivere,

$$\frac{dT}{dr} = \left. \frac{dT}{dP} \right|_{\star} \frac{dP}{dr}. \quad (8.6)$$

Qui $dT/dP|_{\star}$ è la pendenza della relazione $T(P)$ per gli interni stellari. In particolare, questa *non* è una eguaglianza termodinamica. Adesso sostituiamo l' equazione (8.6) nell' equazione (8.5), adoperando l' equilibrio idrostatico per eliminare dP/dr , e sapendo che $(\partial S/\partial T)_P = C_P/T$, otteniamo

$$\frac{dS}{dr} = -\rho g \left[\left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T + \frac{C_P}{T} \left. \frac{dT}{dP} \right|_{\star} \right]. \quad (8.7)$$

Finalmente possiamo usare l' identità

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_P \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_S = -1 \quad (8.8)$$

per semplificare l' equazione (8.7),

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dr} &= -\frac{\rho g}{P} C_P \left[\frac{P}{T} \left. \frac{dT}{dP} \right|_{\star} - \frac{P}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_S \right] \\ &= -\frac{\rho g}{P} C_P [\nabla - \nabla_{\text{ad}}]. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Qui abbiamo introdotto la notazione $\nabla \equiv d \ln T / d \ln P|_{\star}$ and $\nabla_{\text{ad}} \equiv (\partial \ln T / \partial \ln P)_S$.

8.2 Seconda analisi della instabilità convettiva

Adesso facciamo una seconda analisi della convezione immaginando di avere uno stato di partenza con velocità $\mathbf{u} = 0$; perturbiamo questo sta-

to su degli elementi ad una distanza $\delta\mathbf{r}$, e otteniamo una equazione del moto per $\delta\dot{\mathbf{r}}$. Questo richiede un'attenta analisi di cosa perturbiamo.

Ci sono due tipi di perturbazioni. Possiamo cambiare una quantità f ad una locazione fissa \mathbf{r} e tempo t :

$$\Delta f \equiv f(\mathbf{r}, t) - f_0(\mathbf{r}, t), \quad (8.10)$$

dove il pedice "0" denota una quantità non perturbata. Chiamiamo Δf una *perturbazione Euleriana*. Possiamo anche cambiare una quantità di fluido f per un dato elemento di fluido; la posizione di questo elemento di fluido nel sistema perturbato non sta necessariamente nella stessa posizione del caso in perturbato, comunque:

$$\delta f \equiv f(\mathbf{r}, t) - f_0(\mathbf{r}_0, t). \quad (8.11)$$

Chiamiamo δf una *perturbazione Lagrangiana*. Dato che il fluido si è spostato di $\delta\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, possiamo aggiungere e sottrarre $f_0(\mathbf{r}, t)$ all'equazione (8.11) ed espandere $f_0(\mathbf{r}, t)$ al primo ordine in $\delta\mathbf{r}$ per ottenere una relazione fra i due tipi di perturbazione:

$$\delta f = \Delta f + (\delta\mathbf{r} \cdot \nabla) f_0. \quad (8.12)$$

Riportiamo alcune relazioni di commutazione che possono essere facilmente provate:

$$\partial_t \Delta f = \Delta (\partial_t f), \quad (8.13)$$

$$\nabla \Delta f = \Delta \nabla f, \quad (8.14)$$

$$\frac{D}{Dt} \delta f = \delta \frac{Df}{Dt}. \quad (8.15)$$

E ci sono pure operazioni che non commutano:

$$\partial_t \delta f \neq \delta (\partial_t f), \quad (8.16)$$

$$\nabla \delta f \neq \delta \nabla f, \quad (8.17)$$

$$\frac{D}{Dt} \Delta f \neq \Delta \frac{Df}{Dt}. \quad (8.18)$$

Si può inoltre dimostrare che $\delta\mathbf{u} = (D/Dt)\delta\mathbf{r}$. Finalmente se il fluido ha una velocità non perturbata $\mathbf{u} = 0$, allora $\Delta\mathbf{u} = \delta\mathbf{u}$. Attrezzati di queste relazioni, perturbiamo l'equazione del momento spostando adiabaticamente un elemento di fluido alla distanza $\delta\mathbf{r}$. Faremo ciò in

modo che la pressione ad una locazione fissa non cambi, i.e., $\Delta P = 0$. Ovviamente, la pressione e la densità di un dato elemento di fluido cambierà in accordo con la relazione

$$\frac{\delta P}{P} = \Gamma_1 \frac{\delta \rho}{\rho}$$

con $\Gamma_1 \equiv (\partial \ln P / \partial \ln \rho)_s$. Assumeremo inoltre che la forza gravitazionale non cambi, $\Delta g = 0$. La nostra equazione del momento perturbata diventa

$$\frac{D^2 \delta \mathbf{r}}{Dt^2} = -\frac{1}{\rho + \Delta \rho} \nabla P + \mathbf{g}.$$

Poichè nel fluido non perturbato $\nabla P = \rho \mathbf{g}$, questa equazione si semplifica in

$$\frac{D^2 \delta \mathbf{r}}{Dt^2} = \frac{\Delta \rho}{\rho} \mathbf{g}. \quad (8.19)$$

Espandendo,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \rho}{\rho} &= \frac{\delta \rho}{\rho} - \frac{1}{\rho} (\delta \mathbf{r} \cdot \nabla) \rho = \frac{1}{\Gamma_1} \frac{\delta P}{P} - \frac{1}{\rho} (\delta \mathbf{r} \cdot \nabla) \rho \\ &= \frac{1}{\Gamma_1} \frac{\Delta P}{P} + (\delta \mathbf{r} \cdot \nabla) \left[\frac{1}{\Gamma_1} \ln P - \ln \rho \right]. \end{aligned}$$

Date che assumiamo che $\Delta P = 0$, la componente radiale dell'equazione (8.19) diventa

$$\delta \ddot{r} = g \left[\frac{d \ln \rho}{dr} - \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln P}{dr} \right] \delta r \equiv g \mathcal{A} \delta r. \quad (8.20)$$

La quantità \mathcal{A} è chiamata *discriminante di Schwarzschild*: se $\mathcal{A} < 0$, allora il moto è oscillatorio con frequenza $N = (-g\mathcal{A})^{1/2}$; N è chiamata *frequenza di Brunt-Väisälä*. La condizione $\mathcal{A} > 0$ implica che il fluido è convettivamente instabile; e quindi, si può dimostrare che $\mathcal{A} > 0$ è equivalente a $dS/dr < 0$. *L' utilità di adoperare \mathcal{A} invece che dS/dr è che ρ compaiono P nelle equazioni della struttura stellare.* .

8.3 Efficienza nel trasporto di calore

]indexefficienza!trasporto Un gradiente di temperatura superadiabatico, $\nabla > \nabla_{\text{ad}}$, induce moti convettivi. Un elemento che sale sarà quindi più

caldo degli elementi vicini ed il calore verrà quindi condotto dall' elemento in questione ad i suoi vicini mentre sale. L' efficienza con il quale il calore è trasportato determina quanto la convezione è capace di condurre il gradiente di temperatura verso un' adiabatica. Chiaramente il gradiente deve essere super-adiabatico per fare partire la convezione dall' inizio. Vedremo, comunque, che nelle stelle la differenza fra gradiente termico e adiabatico è tipicamente molto piccola. In altre parole, la convezione è un modo molto efficiente per condurre calore. Per capire ciò torniamo all' equazione (8.19). Scriviamo $\Delta\rho$ come risulta dalla differenza in temperatura fra elementi che salgono e quelli che scendono (ricordiamoci che $\Delta P = 0$). Con questa sostituzione abbiamo

$$(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = \frac{\Delta\rho}{\rho} \mathbf{g} = \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_P \frac{\Delta T}{T} \mathbf{g}. \quad (8.21)$$

Il nostro scopo è dedurre la velocità del moto convettivo \mathbf{u} , nel caso di scostamento del gradiente di temperatura da una adiabatica ΔT , e la frazione di flusso totale di calore portato dal moto convettivo in queste equazioni. Analizziamo la velocità. Il lato sinistro dell' equazione (8.21) ha la scala caratteristica di $\sim U^2/L$, dove il lato destro ha scala $g\Delta T/T$. Ricordiamoci che in un gas ideale, $(\partial \ln \rho / \partial \ln T)_P = -1$. Se prendiamo $L \sim c_s^2/g$ come scala della pressione, otteniamo poi una stima della velocità convettiva,

$$\frac{U}{c_s} \sim \left(\frac{\Delta T}{T} \right)^{1/2}. \quad (8.22)$$

Quale è il flusso di calore portato dalla convezione? Il fluido caldo sale e porta un eccesso di calore, per grammo, di $c_P \Delta T$, dando un flusso di calore $\approx \rho \mathbf{u} c_P \Delta T$. Cosicché per portare un dato flusso F , abbiamo

$$c_s \rho c_P T \left(\frac{\Delta T}{T} \right)^{3/2} \sim F. \quad (8.23)$$

Notate che come ordine di grandezza, $c_P T \sim c_s^2$, cosicché

$$\frac{U}{c_s} \sim \left(\frac{\Delta T}{T} \right)^{1/2} \sim \left(\frac{F}{\rho c_s^3} \right)^{1/3}.$$

Nelle condizioni degli interni solari, $F \ll \rho c_s^3$, e quindi le velocità convettive sono molto subsoniche. Quindi,

$$\frac{F}{\rho c_s^3} \sim \frac{L_\odot}{4\pi R_\odot^2} \frac{4\pi R_\odot^3}{3M_\odot} \left(\frac{R_\odot}{GM_\odot} \right)^{3/2}$$

$$\begin{aligned} &\sim \frac{L_\odot}{GM_\odot^2/R_\odot} \left(\frac{R_\odot^3}{GM_\odot} \right)^{1/2} \\ &\sim \frac{t_{\text{dyn}}}{t_{\text{KH}}} \ll 1. \end{aligned}$$

Ciò significa che il rapporto che fra flusso solare e quello che può essere portato da moti convettivi alla velocità del suono è dell'ordine del rapporto fra tempo scala dinamico e tempo scala di Kelvin-Helmholtz. Ci aspettiamo quindi che in una regione convettiva, una bassa circolazione produrrà un gradiente di temperatura approssimamente adiabatico. Questo argomento non funziona vicino alla superficie, dove il tempo di raffreddamento di uno strato, detto tempo scala locale di Kelvin-Helmholtz può essere piccolo.

8.4 Turbulenza

Dalla discussione della sezione precedente sembrerebbe possibile, date le condizioni al contorno, di risolvere il problema del flusso e cioè il profilo della velocità $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Purtroppo ciò non è possibile, comunque: il flusso è turbolento, con fluttuazioni di velocità intermittenti viste su un campo molto grande di scale spaziali e temporali. Il modello di questo flusso è un problema fondamentale nella fluidodinamica. Per continuare dobbiamo introdurre il concetto di similarità dinamica partendo dalle equazioni di the Navier-Stokes in 1D

$$(\partial_t + u \cdot \partial_x)u = -\frac{1}{\rho} \partial_x P + \nu \partial_x^2 u. \quad (8.24)$$

Qui ν è il coefficiente di viscosità cinematica con dimensioni $[\nu] \sim [\text{length}]^2 \cdot [\text{time}]^{-1}$. Riscriviamo l'equazione (8.24) in forma adimensionale introducendo le scale alle nostre variabili: L and U rappresentino le lunghezze e velocità caratteristiche di scala. Introduciamo quindi le variabili $\tilde{x} = x/L$ e $\tilde{u} = u/U$. Questa scelta definisce implicitamente la variabile temporale, $\tilde{t} = t \cdot U/L$. Adesso passiamo alle variabili \tilde{x} , \tilde{u} , e \tilde{t} , scriviamo l'equazione di stato come $P = c_s^2 \rho$ (appropriata per un flusso adiabatico—ignoriamo la conduzione di calore), ottenendo

$$(\partial_{\tilde{t}} + \tilde{u} \cdot \partial_{\tilde{x}})\tilde{u} = - \left\{ \frac{c_s^2}{U^2} \right\} \partial_{\tilde{x}} \ln \tilde{\rho} + \left\{ \frac{\nu}{UL} \right\} \partial_{\tilde{x}}^2 \tilde{u}. \quad (8.25)$$

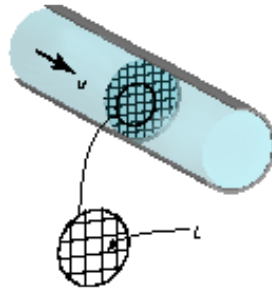


Figura 8.1: Un meccanismo semplice per generare turbolenza.

Ogni termine in questa equazione è adimensionale. Le caratteristiche fisiche del fluido e le scale coinvolte sono funzione di solo due parametri:

$$\text{Ma} \equiv \frac{U}{c_s} \quad \text{numero di Mach (misura della compressibilità)}$$

$$\text{Re} \equiv \frac{UL}{\nu} \quad \text{numero di Reynolds (misura delle forze viscosive)}$$

Nel caso della convezione stellare, $\text{Ma} \ll 1$. Cosa abbiamo invece per Re ? Negli ambienti tipici dei plasmi astrofisici, le lunghezze tipiche rendono Re molto grandi. Esperimenti terrestri e simulazioni non possono raggiungere questi parametri astrofisici. Negli esperimenti terrestri quando $\text{Re} \gg 10^3$, il fluido diventa *turbolento*: la velocità ha delle fluttuazioni intermittenti molto forti su un intervallo molto vasto di lunghezze e tempi scala. Come caratterizzare il flusso in questo caso? Risulta utile descrivere il fluido in termini di velocità correlate di un vortice che abbiano le stesse lunghezze scala.

Supponiamo di passare dell' acqua attraverso un tubicino che ha in dotazione una griglia, vedi Figura 8.1. Per numero di Reynolds sufficientemente alto $\text{Re} = UL/\nu$, dove L è la spaziatura della griglia, il fluido a valle diventa turbolento. I vortici turbolenti sono smorzati. Adesso un vortice di dimensione λ ha un numero effettivo di Reynolds $\text{Re}(\lambda) = U(\lambda)\lambda/\nu$; se questo è molto grande, allora la viscosità molecolare non può essere la ragione dello smorzamento su quella scala. Invece quello che accade è che un vortice con lunghezza scala λ e velocità scala $U(\lambda)$ indirizza i vortici verso scale più piccole $\lambda' < \lambda$. Questi vortici indirizzano verso vortici più piccoli e così via. Alla fine della cascata si eccitano vortici di piccole dimensioni con scala $\lambda_\nu \sim \nu/U(\lambda_\nu)$; e que-

sti vortici sono smorzati dalla viscosità! Kolmogorov suppose che in presenza di stato stazionario i vortici di dimensione intermedia, (i.e., quelli con lunghezza scala $\nu/U(\lambda) \ll \lambda \ll L$) ne perdono ne guadagnano energia e quindi trasferiscono energia verso scale più piccole allo stesso tasso con il quale sono stati creati. Inoltre, questo tasso con il quale l'energia è trasferita su scale più piccole è lo stesso tasso di dissipazione nel fluido che è fatto dai vortici più piccoli. L'enorme range in lunghezze scala implica che la velocità del vortice non deve dipendere da L oppure ν , e quindi $U(\lambda)$ può solamente essere funzione di λ (lunghezza) e del tasso di dissipazione per unità di massa ε (energia/massa/tempo \sim lunghezza²/tempo³). Esiste solamente un modo per combinare queste quantità in modo da avere qualcosa con dimensione lunghezza/tempo, e cioè

$$U(\lambda) \sim \varepsilon^{1/3} \lambda^{1/3}. \quad (8.26)$$

Questo fatto è un dato sperimentale: nei flussi con range dinamico di scale molto grande lo spettro di velocità segue uno spettro di potenza con quella potenza, il cosiddetto *range inerziale*.

Appendice A

Costanti

Tabella A.1: Costanti Matematiche

Nome	Simbolo	Valore
Numero π	π	3.14159265358979323846
Numero e	e	2.71828182845904523536
Costante di Eulero	$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n 1/k - \ln(n) \right)$	= 0.5772156649

Tabella A.2: Costanti fondamentali

Il numero fra parentesi indica il valore numerico della incertezza standard riferito alle ultime cifre del risultato riportato.

Nome	Simbolo	Valore
Carica elementare	e	$1.602176462(63) \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Cos. Gravitazionale	G, κ	$6.673(10) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$
Cos. struttura fine	$\alpha = e^2/2hc\varepsilon_0$	$\approx 1/137$
Velocità luce nel vuoto	c	$299792458 \cdot 10^8 \text{ m/s (def)}$
Permittività del vuoto	ε_0	$8.854187817 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$
Permeabilità del vuoto	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$
$(4\pi\varepsilon_0)^{-1}$		$8.9876 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}$
Cos. Planck	h	$6.62606876(52) \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
Cos. Dirac	$\hbar = h/2\pi$	$1.0545727 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
magnetone di Bohr	$\mu_B = e\hbar/2m_e$	$9.27400899(37 \cdot 10^{-24}) \text{ Am}^2$
raggio di Bohr	a_0	$0.5291772083(19) \text{ \AA}$
Cos. Rydberg	Ry	$13.605\ 691\ 72(53) \text{ eV}$
λ elettrone Compton	$\lambda_{Ce} = h/m_e c$	$2.426310215(18) \cdot 10^{-12} \text{ m}$
λ protone Compton	$\lambda_{Cp} = h/m_p c$	$1.321409847(10) \cdot 10^{-15} \text{ m}$
Cos. Stefan-Boltzmann	σ	$5.670400(40) \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$
Cos. Wien	k_W	$2.8977686(51) \cdot 10^{-3} \text{ mK}$
Cos. molare dei gas	R	$8.314\ 472(15) \text{ J/mol}$
Cos. Avogadro	N_A	$6.02214199(47) \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Cos. Boltzmann	$k = R/N_A$	$1.3806503(24) \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
massa elettrone	m_e	$9.10938188(72) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
massa protone	m_p	$1.67262158(13) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
massa neutrone	m_n	$1.67492716(13) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
unità di massa elem.	$m_u = \frac{1}{12}m(^{12}\text{C})$	$1.6605656 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
magnetone nucleare	μ_N	$5.05078317(20) \cdot 10^{-27} \text{ J/T}$

Tabella A.3: Costanti Astronomiche

Il numero fra parentesi indica il valore numerico della incertezza standard riferito alle ultime cifre del risultato riportato.

Nome	Simbolo	Valore	Unità
Raggio del Sole	R_{\odot}	$6.95508(20) \cdot 10^8$	m
Massa del Sole	M_{\odot}	$1.9891 \cdot 10^{30}$	kg
Periodo rotaz. Sole	T_{\odot}	25.38	days
Raggio della Terra	R_A	$6.378136 \cdot 10^6$	m
Massa della Terra	M_A	$5.9742 \cdot 10^{24}$	kg
Periodo rotaz. Terra	T_A	23.96	hours
Periodo orbitale della Terra	Tropical year	365.24219879	days
Unità Astronomica	AU	$1.4959787066 \cdot 10^{11}$	m
Anno luce	lj	$9.4605 \cdot 10^{15}$	m
Parsec	pc	$3.0857 \cdot 10^{16}$	m
Cos. di Hubble	H	$\approx 75(25)$	$\text{km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$

Appendice B

Calibrazioni

Table 15.7. Calibration of MK spectral types.

S_p	$M(V)$	$B - V$	$U - B$	$V - R$	$R - I$	T_{eff}	BC
MAIN SEQUENCE, V							
O5	-5.7	-0.33	-1.19	-0.15	-0.32	42 000	-4.40
O9	-4.5	-0.31	-1.12	-0.15	-0.32	34 000	-3.33
B0	-4.0	-0.30	-1.08	-0.13	-0.29	30 000	-3.16
B2	-2.45	-0.24	-0.84	-0.10	-0.22	20 900	-2.35
B5	-1.2	-0.17	-0.58	-0.06	-0.16	15 200	-1.46
B8	-0.25	-0.11	-0.34	-0.02	-0.10	11 400	-0.80
A0	+0.65	-0.02	-0.02	0.02	-0.02	9 790	-0.30
A2	+1.3	+0.05	+0.05	0.08	0.01	9 000	-0.20
A5	+1.95	+0.15	+0.10	0.16	0.06	8 180	-0.15
F0	+2.7	+0.30	+0.03	0.30	0.17	7 300	-0.09
F2	+3.6	+0.35	0.00	0.35	0.20	7 000	-0.11
F5	+3.5	+0.44	-0.02	0.40	0.24	6 650	-0.14
F8	+4.0	+0.52	+0.02	0.47	0.29	6 250	-0.16
G0	+4.4	+0.58	+0.06	0.50	0.31	5 940	-0.18
G2	+4.7	+0.63	+0.12	0.53	0.33	5 790	-0.20
G5	+5.1	+0.68	+0.20	0.54	0.35	5 560	-0.21
G8	+5.5	+0.74	+0.30	0.58	0.38	5 310	-0.40
K0	+5.9	+0.81	+0.45	0.64	0.42	5 150	-0.31
K2	+6.4	+0.91	+0.64	0.74	0.48	4 830	-0.42
K5	+7.35	+1.15	+1.08	0.99	0.63	4 410	-0.72
M0	+8.8	+1.40	+1.22	1.28	0.91	3 840	-1.38
M2	+9.9	+1.49	+1.18	1.50	1.19	3 520	-1.89
M5	+12.3	+1.64	+1.24	1.80	1.67	3 170	-2.73
GIANTS III							

Figura B.1: Calibrazione MK classe V, sequenza principale

GIANTS, III							
G5	+0.9	+0.86	+0.56	0.69	0.48	5 050	-0.34
G8	+0.8	+0.94	+0.70	0.70	0.48	4 800	-0.42
K0	+0.7	+1.00	+0.84	0.77	0.53	4 660	-0.50
K2	+0.5	+1.16	+1.16	0.84	0.58	4 390	-0.61
K5	-0.2	+1.50	+1.81	1.20	0.90	4 050	-1.02
M0	-0.4	+1.56	+1.87	1.23	0.94	3 690	-1.25
M2	-0.6	+1.60	+1.89	1.34	1.10	3 540	-1.62
M5	-0.3	+1.63	+1.58	2.18	1.96	3 380	-2.48

Figura B.2: Calibrazione MK classe III , giganti

Table 15.7. (Continued.)

Sp	$M(V)$	$B - V$	$U - B$	$V - R$	$R - I$	T_{eff}	BC
SUPERGIANTS, I							
O9	-6.5	-0.27	-1.13	-0.15	-0.32	32 000	-3.18
B2	-6.4	-0.17	-0.93	-0.05	-0.15	17 600	-1.58
B5	-6.2	-0.10	-0.72	0.02	-0.07	13 600	-0.95
B8	-6.2	-0.03	-0.55	0.02	0.00	11 100	-0.66
A0	-6.3	-0.01	-0.38	0.03	0.05	9 980	-0.41
A2	-6.5	+0.03	-0.25	0.07	0.07	9 380	-0.28
A5	-6.6	+0.09	-0.08	0.12	0.13	8 610	-0.13
F0	-6.6	+0.17	+0.15	0.21	0.20	7 460	-0.01
F2	-6.6	+0.23	+0.18	0.26	0.21	7 030	-0.00
F5	-6.6	+0.32	+0.27	0.35	0.23	6 370	-0.03
F8	-6.5	+0.56	+0.41	0.45	0.27	5 750	-0.09
G0	-6.4	+0.76	+0.52	0.51	0.33	5 370	-0.15
G2	-6.3	+0.87	+0.63	0.58	0.40	5 190	-0.21
G5	-6.2	+1.02	+0.83	0.67	0.44	4 930	-0.33
G8	-6.1	+1.14	+1.07	0.69	0.46	4 700	-0.42
K0	-6.0	+1.25	+1.17	0.76	0.48	4 550	-0.50
K2	-5.9	+1.36	+1.32	0.85	0.55	4 310	-0.61
K5	-5.8	+1.60	+1.80	1.20	0.90	3 990	-1.01
M0	-5.6	+1.67	+1.90	1.23	0.94	3 620	-1.29
M2	-5.6	+1.71	+1.95	1.34	1.10	3 370	-1.62
M5	-5.6	+1.80	+1.60:	2.18	1.96	2 880	-3.47

Figura B.3: Calibrazione MK classe I , supergiganti

Table 15.8. Calibration of MK spectral types.^a

Sp	M/M_{\odot}	R/R_{\odot}	$\log(g/g_{\odot})$	$\log(\bar{\rho}/\bar{\rho}_{\odot})$	v_{rot} (km s ⁻¹)
MAIN SEQUENCE, V					
O3	120	15	-0.3	-1.5	
O5	60	12	-0.4	-1.5	
O6	37	10	-0.45	-1.45	
O8	23	8.5	-0.5	-1.4	200
B0	17.5	7.4	-0.5	-1.4	170
B3	7.6	4.8	-0.5	-1.15	190
B5	5.9	3.9	-0.4	-1.00	240
B8	3.8	3.0	-0.4	-0.85	220
A0	2.9	2.4	-0.3	-0.7	180
A5	2.0	1.7	-0.15	-0.4	170
F0	1.6	1.5	-0.1	-0.3	100
F5	1.4	1.3	-0.1	-0.2	30
G0	1.05	1.1	-0.05	-0.1	10
G5	0.92	0.92	+0.05	-0.1	< 10
K0	0.79	0.85	+0.05	+0.1	< 10
K5	0.67	0.72	+0.1	+0.25	< 10
M0	0.51	0.60	+0.15	+0.35	
M2	0.40	0.50	+0.2	+0.8	
M5	0.21	0.27	+0.5	+1.0	
M8	0.06	0.10	+0.5	+1.2	

Figura B.4: Calibrazione MK parametri fisici

Bibliografia

- [Nuovo Allen 2000] N.Cox , Editore , “Allen’s Astrophysical Quantities”, prima edizione,
it Springer Verlag , Berlino (2000)
- [Biermann et al. 2002] M.L. Biermann ,D.M. Katz ,R. Aho , J. Diaz Barriga , J.Petron, “Wien’s Law an the Temperature of the Sun” ,
The Physics Teacher , Vol 40 , Ottobre 2002, pag. 398
- [Heath 1991] Sir Thomas L. Heat , “Greek Astronomy” , prima edizione,
Dover , Mineola (1991).
- [Astrophysical Formulae 1999] K.R. Lang , “Astrophysical Formulae”,
terza edizione,
it Springer Verlag , Berlino (1999)
- [Marchetti 1990] G. Marchetti , “Appunti di Astronomia ”, Torino
(1990)
- [Sparke et al. 2000] L.S. Sparke and J. Gallagher, “Galaxies in the Universe”,
prima edizione, *Cambridge University Press* , Cambridge (2000).

Indice analitico

A

Aristarco, 1

B

B-V controT

numerico, 45

osservato, 40

teorico, 45

BC

e T, 42

e T teorico analitico , 47

e T teorico numerico , 46

bolometro, 42

brillanza, 15

C

Cannon, 67

coefficiente

assorbimento, 17

emissione, 16

condizione

stabilità, 98

conservazione

energia, 10

correzione

bolometrica, 41, 47

D

definizione

parsec, 7

densità

energia, 13

diagramma

HR 100pc, 48

HR Iadi, 50

HR Palomar12, 50

HR Pleiadi, 50

UB-BV classe V, 52

UB-BV stelle brillanti, 52

distanza

terra-luna, 3

terra-sole, 1

Draper, 67

E

energia

livelli, 58

spin orbita, 62

transizione, 60

equazione

equilibrio idrostatico, 83

Lagrangiana, 94

Poisson, 89

trasferimento radiativo, 19

equazione conduzione, 89

equazione Euleriana

energia, 89

massa, 87

momento, 87

equazione Lagrangiana

calore, 95

continuità, 94

equazione Navier Stokes, 102
 adimensionale, 104
Eratostene, 3

F

filtri fotometrici, 36
flusso, 16
 radiazione, 10, 12
 totale, 12
forza radiazione, 23
frequenza
 Brunt-Vaisala, 101
funzione di risposta
 CCD, 37
 definizione, 37

H

Hertzprung, 47

I

IAU, 7
Intensità
 specifica, 11
intensità
 raggi, 14
Ipparco, 35

K

Kolmogorov, 105

L

larghezza linea, 64
Legge di
 Kirchhoff, 24
 Planck, 27
 Rayleigh-Jeans, 28
 Stefan, 43
 Wien, 29

Wien-spostamento, 30
libero cammino medio, 22
livello
 fondamentale, 58
luminosità
 sole, 43
 stella, 43

M

M-L, 53
 A0, 53
 binarie, 54
 teorica, 55
magnitudine
 apparente, 35, 40
 assoluta, 40
 bolometrica, 41, 47
 bolometrica sole, 43
 taratura, 36
massa
 sole, 5
 stellare, 44
Maury, 67
mezzo
 otticamente sottile, 20
 otticamente spesso, 20
MK
 classificazione, 68
 luminosità, 70

N

notazione
 spettroscopica, 61
numero Avogadro, 90
 adimensionale, 92
numero elettroni, 90

P

parallasse, 6

parsec, 7
Pogson, 36
pressione
 radiazione, 14
profondità
 ottica, 20
profondità ottica, 22

Q

quantità termodinamiche, 92

R

radiazione corpo nero, 23
raggio
 orbitale, 58
 sole, 5
 stellare, 44
Russel, 47

S

Secchi, 66
sensibilità occhio, 35
serie
 Balmer, 60
 Lyman, 60
 Paschen, 60
Sole parametri, 77
sorgente
 radiazione, 20
spettro
 Planck, 25
 solare, 33, 34

T

Tabella
 max min 100pc, 47
 Sole, 74
 UBVRI, 36

temperatura
 effettiva, 32
temperatura
 di brillantezza, 31
 di colore, 32
temperatura effettiva, 39
tempo
 Kelvin-Helmholtz, 83

U

UA, 3

V

Velocità
 Kolmogorov, 105
vita media
 giganti blu, 54
 nane rosse, 54